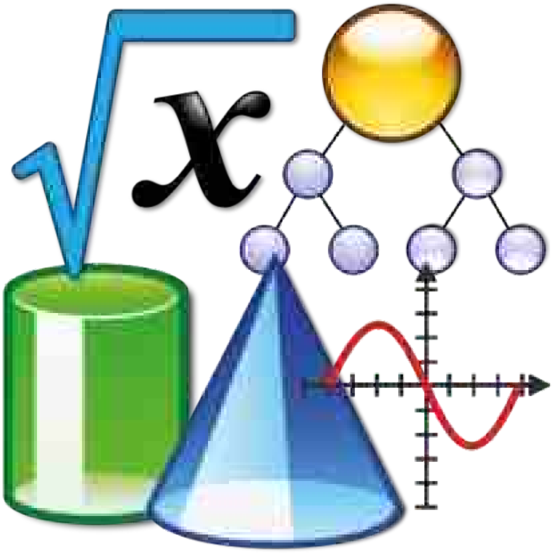
آزمائشي ڇاپو

درسي ڪتاب

رياضي

10 ڪلاس لاءِ



سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ، ڄام شورو

سڀ حق ۽ واسطا **سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ ڄامشورو** وٽ محفوظ آهن.

پاران **سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ ڄامشورو**

ڊائريڪٽوريٽ آف ڪريڪيولم ۽ ريسرچ سنڌ ڄامشورو جي صوبائي ريويو ڪميٽي پاران نظرثاني ڪيل. **بورڊ آف انٽرميڊيئيٽ اينڊ سيڪنڊري ايجوڪيشن، حيدرآباد، ڪراچي، سکر، لاڙڪاڻو، ميرپورخاص ۽ شهيد بينظيرآباد** پاران سيڪنڊري ڪلاسن لاءِ درسي ڪتاب طور منظور ٿيل.

اسڪول ايجوڪيشن اينڊ لٽريسي ڊپارٽمينٽ حڪومت سنڌ کان نوٽيفڪيشن نمبر No. SELD/CA/CW/396/2021 موجب منظور شده.

نگران اعليٰ

پرويز احمد بلوچ

چيئرمين سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ

داريوش ڪافي
سپروائيزر
سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ

يوسف احمد شيخ
چيف سپروائيزر
سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ

ليکڪ:

- ☆ مسٽر عبدل سليم ميمڻ
- ☆ مسٽر اعجاز علي سبھپوٽو
- ☆ ڊاڪٽر ڪاشف علي ابڙو
- ☆ ڊاڪٽر محمد مجتبيٰ شيخ
- ☆ پروفيسر محمد فاروق خان
- ☆ ڊاڪٽر حفيظ الله مهر

نظرثاني:

- ☆ پروفيسر ڊاڪٽر زين العابدين کهرو
- ☆ پروفيسر محمد فاروق خان
- ☆ مسٽر محمد صغير شيخ
- ☆ مسٽر اعجاز علي سبھپوٽو
- ☆ مسٽر محمد وسيم
- ☆ مسٽر زوهيب حسيب
- ☆ مسٽر رياض حسين
- ☆ مسٽر آفتاب علي
- ☆ مسٽر مير سرفراز خليل ساند

سنڌيڪار

- ☆ مسٽر اعجاز علي سبھپوٽو

ايڊيٽر

- ☆ ڊاڪٽر زبير احمد ڪلهوڙو
- ☆ مسٽر مير سرفراز خليل ساند

ڊيزائننگ ۽ لي آئُوٽ

- ☆ مسٽرمحمد ارسلان شفاعت گدي

ڇپيندڙ:

مهاڳ

سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ هڪ اهڙو تعليمي ادارو آهي، جنهن جو ڪم درسي ڪتابن جي تياري ۽ اشاعت ڪرڻ آهي. هن جو اهم مقصد اهڙن درسي ڪتابن جي تياري ۽ فراهمي آهي، جيڪي نئين نسل کي چاڻ، هنر سان گڏوگڏ منجهن اهڙي صلاحيت پيدا ڪن، جنهن جي ذريعي اهي آفاقي نظرين، پائيچاري، بزرگن جي ڪارنامن، پنهنجي ثقافتي ورثي، روايت جي حفاظت ڪندي، نئين دور جي سائنسي، ٽيڪنيڪي ۽ سماجي تقاضائن کي پورو ڪري ڪامياب زندگي گذاري سگهن.

درسي ڪتاب رياضي ڪلاس X جو توهان جي هٿ ۾ آهي، جيڪو صوبائي نصاب 2017 مطابق رياضي جي تسلسل ۾ تيار ڪيو ويو آهي. نصاب 30 يونٽن تي مشتمل آهي، انهن مان پهرين 16 يونٽن کي رياضي ڪلاس IX ۾ شامل ڪيو ويو. تنهن ڪري، باقي 14 يونٽ (17 کان 30 تائين) رياضي جي هن درسي ڪتاب ۾ شامل آهن.

سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ هن ڪتاب جي اشاعت لاءِ تمام تر تڪليفن محدود وسائل جي باوجود ڪتاب تي خاصو خرچ ڪيو آهي.

ڪو بہ ڪتاب يقيناً حرف آخر نہ هوندو آهي، ۽ ان ۾ هر وقت بهتري جي گنجائش هوندي آهي، جڏهن تہ ليکڪ، پنهنجي پوري صلاحيتن کي استعمال ڪندي مڪمل تصورن ۽ وضاحتن کي چٽي نموني پيش ڪيو آهي. هن ۾ اجا بہ ڪيترين ئي خامين تي سگهن ٿيون تنهن لاءِ ماهر استادن ۽ شاگردن کي عرض ڪجي ٿو تہ اٽپوري لڳائي، يا اٽپورين شڪلين بابت نشاندهي ڪن ۽ پنهنجيون تجويزون ۽ رايا ڏين تہ جيئن ڪتابن کي ايندڙ ڇاپي ۾ سڌاريو وڃي.

آخر ۾ آئون ائسوسيئيشن فار اڪيڊمڪ ڪوالٽي (آفاق)، اسان جي ماهر ليکڪن، ايڊيٽرن ۽ بورڊ جي ماهر عملي جو سنڌن تعليم جي لاءِ اڻ ٿڪ محنت ۽ ڪوشش لاءِ شڪر گذار آهيان.

چيئرمين
سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ، ڄامشورو

بِسۡمِ اللّٰهِ الرَّحۡمٰنِ الرَّحِیۡمِ

فهرست

يونٽ نمبر	عنوان	صفحو
يونٽ 17	سيٽ ۽ عمل	01 - 35
يونٽ 18	قيرقار يا متجڙ	36 - 56
يونٽ 19	قالب ۽ قطعي مُلَهه	57 - 82
يونٽ 20	ٻه درجي مساواتن جو نظريو	83 - 113
يونٽ 21	جزوي ڀاڱا	114 - 126
يونٽ 22	بنيادي شماريات	127 - 174
يونٽ 23	فيثا غورث سڌيان	175 - 181
يونٽ 24	نسبت ۽ تناسب	182 - 193
يونٽ 25	گول جا زهه	194 - 207
يونٽ 26	گول جون ڇهٽي ليڪون	208 - 222
يونٽ 27	زهه ۽ قوس	223 - 231
يونٽ 28	گول جي سيگمينٽ ۾ ڪندون	232 - 241
يونٽ 29	عملي جاميٽري گول	242 - 264
يونٽ 30	ٽرڱنا ميٽري جو تعارف	265 - 294
	جواب	295 - 312

سيٽ ۽ عمل
SETS AND FUNCTIONS

يونٽ 17

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي پڙهڻ کانپوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته

- سيٽن کي $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{E}$، $\mathbb{O}$، $\mathbb{P}$، $\mathbb{Q}$ ۽ $\mathbb{R}$ سان ظاهر ڪرڻ جو دؤرڪن
- سيٽن جا قسم ۽ ظاهر ڪرڻ جا نمونا
  - سيٽن تي عمل
  - ميلاپ
  - ڪاٽ
  - فرق
  - ڪامپليمينٽ
- ٻن سيٽن جو همشڪلي فرق
- ٻن يا ٽن سيٽن جي ميلاپ ۽ ڪاٽ وارين هينين بنيادي خاصيتن جون رسمي ثابتيون ڏين
  - ميلاپ جي مٽا واري خاصيت
  - ڪاٽ جي مٽا واري خاصيت
  - ميلاپ جي سنگت واري خاصيت
  - ڪاٽا جي سنگت واري خاصيت
  - ميلاپ جي ڪاٽ جي لحاظ ڪان ورهاست واري خاصيت
  - ڪاٽا جي ميلاپ جي لحاظ ڪان ورهاست واري خاصيت
- ڊي مارگن جا قانون
- ڏنل سيٽن جي بنيادي خاصيتن جي چڪاس ڪن
- وين شڪلين وسيلي هينيان ڏيکارڻ
  - سيٽن جو ميلاپ ۽ ڪاٽا
  - سيٽ جو ڪامپليمينٽ
  - ٻن سيٽن جو همشڪلي فرق
- وين شڪل وسيلي هينين جي چڪاس ڪريو
  - ميلاپ ۽ ڪاٽا جي مٽا واري خاصيت
  - سنگت وارا قانون
  - ورهاست وارا قانون
  - ڊي مارگن جا قانون
- ترتيت ڏنل جوڙن جي سڃاڻپ ڪن
- ڪارتيسي ضرب اپت ناهين
- جوڙي واري تعلق کي بيان ڪن ۽ ان جي ڊومين ۽ رينج جي سڃاڻپ ڪن
- عمل کي بيان ڪن ۽ ڊومين ، ڪو ڊومين ۽ رينج جي سڃاڻپ ڪن
- هينين جي وضاحت ڪري سمجهن
  - انٽو ۽ ون - ون عمل (انجيڪٽو عمل)
  - آنٽو عمل (سرجيڪٽو عمل)
  - ون - ون ۽ آنٽو عمل (بائيجيڪٽو عمل)
- جاچ ڪري سگهن ته ڇا ڏنل تعلق هڪ عمل آهي يا نه
- ون - ون عمل ۽ ون - ون مطابقت جي وچ ۾ فرق ڪري سگهن

17.1 سيٽن تي عمل (Operations on Sets):

17.1(i) سيٽن کي $\mathbb{N}, \mathbb{W}, \mathbb{Z}, \mathbb{E}, \mathbb{O}, \mathbb{P}, \mathbb{Q}$ ۽ $\mathbb{R}$ سان ظاهر ڪرڻ جو دؤر :

حقيقت ۾ سيٽ، رياضي جي بنيادي تصورن مان هڪ آهي جيڪو رياضي جي ڪيترن ئي نظرين کي ٺاهڻ ۽ انهن جو تجزيو ڪرڻ ۾ ڪارائتو آهي. سيٽ جي تصور تي هيٺين ڪلاسن ۾ اڳيئي تفصيل سان بحث ٿي چڪو آهي. اچو ته ڪجهه اهم سيٽن جو دؤر ڪريون.

قدرتي عددن جو سيٽ: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

مڪمل يا پورن عددن جو سيٽ: $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

سجن عددن جو سيٽ: $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}$

ٻڌي عددن جو سيٽ: $\mathbb{E} = \{0, \pm2, \pm4, \pm6, \ldots\}$

اڪي عددن جو سيٽ: $\mathbb{O} = \{\pm1, \pm3, \pm5, \ldots\}$

مفرد عددن جو سيٽ: $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$

ناطق عددن جو سيٽ:
$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q};\ p, q \in Z \wedge q \neq 0 \right\}$$

غير ناطق عددن جو سيٽ:
$$\mathbb{Q}' = \left\{ x \mid x \neq \frac{p}{q};\ p, q \in Z \wedge q \neq 0 \right\}$$

حقيقي عددن جو سيٽ:
$$\mathbb{R} = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q} \vee x \neq \frac{p}{q};\ p, q \in Z \wedge q \neq 0 \right\}$$

يعني ته $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

نوٽ:

- $\mathbb{R}^+$ ۽ $\mathbb{R}^-$ ترتيبوار مثبت ۽ منفي حقيقي عددن جي سيٽ کي ظاهر ڪن ٿا.
- ناطق، غير ناطق ۽ حقيقي عددن جي سيٽن کي جدولي نموني ۾ نٿو لکجي سگهجي.
- مٿي ڏنل سيٽن کي هيٺين ريت به ظاهر ڪري سگهجي ٿو. N، W، Z، E، O، P، Q، Q' ۽ R

17.1 (ii) سيٽن جا قسم ۽ ظاهر ڪرڻ جا نمونا (Types of sets and representation of sets):

سي ڪان اڳ ۾ اسين سيٽن کي ظاهر ڪرڻ بابت غور ڪنداسين. اسين اڳيئي سيٽ کي ظاهر ڪرڻ وارن ٽن طريقن يا نمونن سان واقف آهيون جيڪي اسان هيٺين ڪلاسن ۾ پڙهي چڪا آهيون. اهي هي آهن.

1. بياني نمونو (Descriptive form) 2. جدولي نمونو (Tabular form) 3. علامتي نمونو (Set-builder form)

اسانکي خبر آهي ته، بياني طريقي ۾، هڪ سيٽ کي ان جي رڪنن جي هڪجهڙي خاصيت جي مدد سان ڪنهن عام زبان ۾ بيان ڪيو ويندو آهي، جهڙوڪ:

A = سيٽ 5 ۽ 10 جي وچ وارن قدرتي عددن جو سيٽ

جدولي نموني ۾ هڪ سيٽ جي رُڪنن کي وچين ڏنگيءَ جي اندر لکي يا داخل ڪري ، سيٽ کي بيان ڪيو ويندو آهي. مٿي ڏنل سيٽ کي جدولي نموني ۾ هيئن لکبو: $A = \{6, 7, 8, 9\}$ جڏهن ته علامتي نموني ۾ هڪ سيٽ جي رُڪنن جي هڪجهڙي خاصيت لاءِ علامتن جو استعمال ڪندي، سيٽ کي بيان ڪبو آهي.

ڏنل سيٽ A کي علامتي نموني ۾ هيئن لکبو: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 5 < x < 10\}$

مثال 1: سيٽ $A=\{6,8,10,12\}$ کي بياني ۽ علامتي نموني ۾ لکو-

حل:

بياني نمونو: 5 ۽ 13 جي وچ وارن ٻڌي عددن جو سيٽ = A

علامتي نمونو: $A=\{x \mid x\in \mathbb{E} \wedge 5<x<13\}$

مثال 2: سيٽ $B=\{y \mid y\in \mathbb{P} \wedge y<10\}$ کي جدولي ۽ بياني نموني ۾ لکو:

حل:

جدولي نمونو: $B=\{2,3,5,7\}$

بياني نمونو: پهرين چئن مفرد عددن جو سيٽ = B

هاڻي اسين سيٽن جا ڪجھ قسم سکون ٿا.

خالي سيٽ (Empty set or Null set):

اهڙو سيٽ جنهن ۾ ڪو بہ رُڪن نہ هجي، ان کي خالي سيٽ چئبو آهي. ان کي $\varnothing$ يا $\{\ \}$ سان ظاهر ڪبو آهي.

مثال طور:

(i) A = 5 ۽ 6 جي وچ وارن ٻڌي عددن جو سيٽ

(ii) $B=\{x \mid x\in \mathbb{N} \wedge x<1\}$

محدود سيٽ (Finite Set):

هڪ سيٽ جنهن جي رُڪنن جو تعداد محدود هجي، ان کي محدود سيٽ چئبو آهي.

مثال طور:

(i) $A=\{10,12,14,\ldots,50\}$

(ii) B = دنيا جي سيني ملڪن جو سيٽ

ياد رکجي تہ خالي سيٽ هڪ محدود سيٽ تصور ڪبو آهي.

لامحدود سيٽ (Infinite Set):

هڪ سيٽ جنهن جي رُڪنن جو تعداد محدود نہ هجي، ان کي لامحدود سيٽ چئبو آهي.

مثال طور:

(i) $P=\{10,20,30,\ldots\}$

(ii) $Q=\{x \mid x\in \mathbb{Q} \wedge 1\le x\le 2\}$

ماتحت سيٽ (Subset):

جيڪڏهن سيٽ A جو هر هڪ رُڪن يا ميمبر، سيٽ B جو بہ رُڪن هجي تہ پوءِ A کي B جو ماتحت سيٽ چئبو. علامت ۾ ان کي هيئن لکبو: $A\subseteq B$

مثال طور: $A=\{2,3,5,7\}$، $B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ۽ $C=\{6,7,8,9\}$

تہ پوءِ $A\subseteq B$ پر $A\nsubseteq C$ (A ماتحت سيٽ نہ آهي C جو)

نوٽ:
(i) هر هڪ سيٽ پنهنجي پاڻ جو ماتحت سيٽ هوندو آهي.
(ii) خالي سيٽ، هر هڪ سيٽ جو ماتحت سيٽ هوندو آهي.
(iii) هر هڪ غير خالي سيٽ جا گهٽ ۾ گهٽ بہ ماتحت سيٽ هوندا آهن.
(iv) n رُڪنن واري سيٽ جي ماتحت سيٽن جو تعداد 2^n آهي.

بالا سيٽ (Superset):

جيڪڏهن سيٽ A ماتحت سيٽ آهي سيٽ B جو تہ پوءِ B کي A جو بالا سيٽ چئبو.

نشاني طور هيئن لکبو: $B\supseteq A$

مثال طور:

جيڪڏهن $X=\{a,e,i,o,u\}$ ۽ $Y=\{a,b,c,\ldots,z\}$ تہ پوءِ $Y\supseteq X$

برابر سيٽ (Equal Sets):

ٻه ساڳي تعداد وارا سيٽ A ۽ B برابر سيٽ ڪوٺبا جيڪڏهن ٻنهي سيٽن جا سڀ رُڪن ساڳيا هجن.

علامتن ۾ هن ريت لکبو: $A=B$

اهڙيءَ طرح $A=B$ فقط ان صورت ۾ ئي ٿيندو جڏهن $A\subseteq B$ ۽ $B\subseteq A$

ساڳي ريت $A=B$ فقط ان صورت ۾ ئي ٿيندو جڏهن $B\supseteq A$ ۽ $A\supseteq B$

مثال: فرض ڪريو ته $A=\{1,2,3,6\}$، $B=\{x\,|\,x\in N\wedge x\leq 6\}$ ۽ 6 جي جزن جو سيٽ $=C$

هتي $A=C$ پر $A\neq B$

نوٽ: سيٽ A جي ترتيب(order of set A) جو مطلب A جي رُڪنن جو تعداد آهي. ان کي نشاني طور O(A) يا n(A) يا |A| لکبو.

هڪجيترا سيٽ (Equivalent Sets):

ٻه سيٽ A ۽ B هڪجيترا سيٽ ڪوٺبا جيڪڏهن انهن جي رُڪنن جو تعداد برابر هجي.

علامتن ۾ هيئن لکبو: $A\sim B$ يعني $A\sim B$ ان صورت ۾ ئي ٿيندو جڏهن $O(A)=O(B)$

اهڙيءَ طرح جيڪڏهن $A\sim B$ ته پوءِ ٻنهي سيٽن جي رُڪنن جي وچ ۾ 1-1 مطابقت قائم ٿي سگهجي ٿي.

مثال طور: فرض ڪريو ته $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\wedge x^2=64\}$ ۽ 5 کان گهٽ مفرد عددن جو سيٽ $=B$

هتي $A\sim B$ ڇاڪاڻ جو $O(A)=O(B)=2$

واجب ماتحت سيٽ (Proper Subset):

فرض ڪريو ته سيٽ A ماتحت سيٽ آهي سيٽ B جو ته سيٽ A کي B جو واجب ماتحت سيٽ چئبو جيڪڏهن $A\neq B$ نشاني طور: اسين هن ريت لکنداسين: $A\subset B$

مثال طور: جيڪڏهن $A=\{2,4,6\}$ ۽ $B=\{2,4,6,8\}$

ته پوءِ $A\subset B$ ڇاڪاڻ جو A ماتحت سيٽ آهي B جو ۽ $A\neq B$

غير واجب ماتحت سيٽ (Improper Subset):

فرض ڪريو ته سيٽ A ماتحت سيٽ آهيسيٽ B جو ته سيٽ A کي B جو غير واجب ماتحت سيٽ چئبو جيڪڏهن $A=B$

مثال طور: جيڪڏهن $A=\{a,b,c\}$ ۽ انگريزي الف بي جي پهرين ٽن اکرن جو سيٽ = B

ته پوءِ A غير واجب ماتحت سيٽ آهي B جو يعني $A=B$

سگهه سيٽ (Power Set):

سيٽ A جي سڀني ماتحت سيٽن جي سيٽ کي A جو سگهه سيٽ چئبو آهي. اهو علامتن ۾ P(A) لکبو آهي

مثال طور: جيڪڏهن $A=\{x,y,z\}$ ته پوءِ $P(A)=\{\varnothing,\{x\},\{y\},\{z\},\{x,y\},\{y,z\},\{x,z\},\{x,y,z\}\}$

نوٽ: خالي سيٽ جو سگهه سيٽ غير خالي هوندو آهي.

واحد سيٽ (Singleton or Unit Set):

اهڙو سيٽ جنهن ۾ فقط هڪڙو رُڪن هجي، ان کي واحد سيٽ چئبو آهي.

مثال طور: $A=\{x\,|\,x\in W\wedge x<1\}$ واحد سيٽ آهي.

ڪائناتي سيٽ (Universal Set):

زير غور سمورن سيٽن جي بالا سيٽ کي ڪائناتي سيٽ چئبو آهي. ان کي U يا X سان ظاهر ڪبو آهي.

مثال طور: جيڪڏهن $A=\{1,2,3,4\}$ ۽ $B=\{2,4,6\}$ ته پوءِ $U=\{1,2,3,4,5,6\}$

نوٽ: سيٽن جي وڌيڪ قسمن تي سيڪشن 17.1(iv) ۾ بحث ڪنداسين.

مشق 17.1

1. هيٺ ڏنل سيٽن کي جدولي نموني ۾ لکو.

(i) A= سيٽ جو عددن سجن سمورن وارن وچ جي 3 ۽ −3

(ii) B = سيٽ جو عددن مرڪب گهٽ کان 11

(iii) $C=\{x\,|\,x\in\mathbb{P}\wedge 5<x\leq 13\}$

(iv) $D=\{y\,|\,y\in\mathbb{O}\wedge 7<y<17\}$

(v) $E=\{z\,|\,z\in\mathbb{R}\wedge z^2=121\}$

(vi) $F=\{p\,|\,p\in\mathbb{Q}\wedge p^2=-1\}$

2. هيٺ ڏنل سيٽن کي علامتي نموني ۾ لکو.

(i) A = سيٽ جو عددن ناطق سمورن وارن وچ جي 6 ۽ 5 (ii) $B=\{1,2,3,4,6,12\}$

(iii) $C=\{0,\pm1,\pm2,...,\pm40\}$ (iv) $D=\{-4,-2,0,2,4\}$

(v) $E=\{1,4,9,16,25\}$ (vi) $F=\{-1,-3,-5,-7,...\}$

3. خالي سيٽ جا ڪي به پنج مثال لکو.

4. هيٺين مان محدود ۽ لامحدود سيٽ ڌار ڪريو.

(i) ايشيائي ملڪن جو سيٽ

(ii) دنيا جي سيني ميڊيڪل يونيورسٽين جو سيٽ.

(iii) 6 ۽ 9 جي وچ وارن سمورن حقيقي عددن جو سيٽ

(iv) سمورن ٻڌي مفرد عددن جو سيٽ

(v) 5 کان گهٽ سمورن اڪي عددن جي سيٽ

5. هيٺين سيٽن مان هر هڪ جوهڪ هڪجيترو سيٽ، هڪ غير واجب ماتحت سيٽ ۽ ٽي واجب ماتحت سيٽ لکو.

(i) $P=\{a,e,i,o,u\}$

(ii) $Q=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z}\wedge -2\leq x\leq 2\}$

6. علامتي نموني ۾ واحد سيٽ جا ڪي به ٻه مثال لکو.

7. هيٺين سيٽن جا سگهہ سيٽ لهو.

(i) $A=\{5,10,15\}$

(ii) $B=\{x\,|\,x\in Z\wedge -1<x<4\}$

8. هڪ سيٽ لکو.

(i) جنهن جا فقط ٻہ واجب ماتحت سيٽ هجن

(ii) جنهن جو فقط هڪ واجب ماتحت سيٽ هجي

(iii) جنهن جو ڪو بہ واجب سيٽ ماتحت نہ هجي

17.1 (iii) سيٽن تي عمل (Operations on sets):

- ميلاپ (Union)
- ڪاٽ (Intersection)
- فرق (Difference)
- ڪامپليمينٽ (Complement)

ٻن سيٽن جو ميلاپ (Union of two sets):

ٻن سيٽن X ۽ Y جو ميلاپ، هڪ اهڙو سيٽ آهي جنهن جا رُڪن X سان يا Y سان يا ٻنهي X ۽ Y سان تعلق رکن ٿا. X ۽ Y جو ميلاپ، علامتي طور $X \cup Y$ سان ظاهر ڪبو آهي.

يعني $X \cup Y = \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$

مثال طور: جيڪڏهن $X = \{1, 3, 5\}$ ۽ $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ ته پوءِ $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

ٻن سيٽن جي ڪاٽ (Intersection of two sets):

ٻن سيٽن X ۽ Y جي ڪاٽ، هڪ اهڙو سيٽ آهي جنهن جا رکن ٻنهي X ۽ Y سان تعلق رکن ٿا. X ۽ Y جي ڪاٽ کي علامتي طور $X \cap Y$ سان ظاهر ڪبو آهي.

يعني $X \cap Y = \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$

مثال طور:

جيڪڏهن $X = \{2, 4, 6, 8\}$ ۽ $Y = \{1, 2, 3, 6\}$ ته پوءِ $X \cap Y = \{2, 6\}$

ٻن سيٽن جو فرق (Difference of two sets):

ڪن به ٻن سيٽن X ۽ Y لاءِ، فرق $X - Y$ هڪ اهڙو سيٽ آهي جنهن جا سڀ رُڪن X سان تعلق رکن ٿا پر Y سان تعلق نٿا رکن ان کي $X \setminus Y$ سان به ظاهر ڪبو آهي. يعني ته $X - Y = \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$

ساڳي ريت، فرق $Y - X$ هڪ اهڙو سيٽ آهي جنهن جا سڀ رُڪن Y سان تعلق رکن ٿا پر X سان تعلق نٿا رکن ان کي Y/X سان به ظاهر ڪبو آهي. يعني ته $Y - X = \{y \mid y \in Y \wedge y \notin X\}$

مثال طور:

جيڪڏهن $X = \{4, 6, 8, 9, 10\}$ ۽ $Y = \{2, 4, 6, 8\}$

ته پوءِ $X - Y = \{9, 10\}$

۽ $Y - X = \{2\}$

سيٽ جو ڪامپليمنٽ (Complement of a set):

جيڪڏهن سيٽ A ماتحت سيٽ آهي ڪائناتي سيٽ U جو ته پوءِ A جو ڪامپليمينٽ U جي ان سمورن رڪنن جو سيٽ آهي جيڪي A ۾ نه هجن ان کي A' يا A^c سان ظاهر ڪبو آهي.

اهڙيءَ طرح $A' = U - A$

يعني ته $A' = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$

مثال طور:

جيڪڏهن $U = \{1, 2, 3, ..., 20\}$ ۽ $A = \{1, 3, 5, ..., 19\}$ ته پوءِ $A' = \{2, 4, 6, ..., 20\}$

17.1 (iv) ٻن سيٽن جو همشڪلي فرق (Symmetric difference of two sets):

ٻن سيٽن A ۽ B جو همشڪلي فرق هڪ اهڙو سيٽ آهي جنهن جا رُڪن A يا B ۾ هوندا پر ٻنهي سيٽن ۾ مشترڪ نه هوندا A ۽ B جي همشڪلي فرق کي $A \Delta B$ سان ظاهر ڪبو آهي.

يعني ته $A \Delta B = \{x \mid x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$ يا $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

مثال طور: جيڪڏهن $A=\{1,2,3,4,5\}$ ۽ $B=\{1,3,5,7\}$ تہ پوءِ $A\Delta B=\{2,4,7\}$
سيڪشن 17.1(ii) جي تسلسل ۾ سيٽن جا وڌيڪ قسم هيٺ ڏجن ٿا.

منفرد سيٽ (Disjoint Sets):
بن سيٽن A ۽ B کي منفرد سيٽ ڪوٺبو جيڪڏهن انهن ۾ ڪو بہ رڪن مشترڪ نہ هجي.
يعني تہ بہ سيٽ A ۽ B منفرد سيٽ آهن جيڪڏهن $A\cap B=\varnothing$

مثال طور: سيٽ $A=\{1,3,5\}$ ۽ $B=\{2,4,6\}$ منفرد سيٽ آهن.

لاڳاپيل سيٽ (Overlapping Sets):
بہ سيٽ A ۽ B لاڳاپيل سيٽ ڪوٺبا جيڪڏهن ٻنهي سيٽن ۾ گهٽ ۾ گهٽ هڪ رڪن مشترڪ هجي. تنهن ڪانسواءِ ٻنهي مان ڪو بہ ٻئي جو ماتحت سيٽ نہ هجي يعني تہ بہ سيٽ A ۽ B لاڳاپيل سيٽ آهن جيڪڏهن $A\cap B\neq\varnothing$ ۽ $A\not\subseteq B$ يا $B\not\subseteq A$

مثال طور: سيٽ $A=\{1,2,3,4\}$ ۽ $B=\{2,4,6,8\}$ لاڳاپيل سيٽ آهن

مڪمل سيٽ (Exhaustive Sets):
جيڪڏهن بہ سيٽ A ۽ B ماتحت سيٽ آهن ڪائناتي سيٽ U جا تہ پوءِ A ۽ B مڪمل سيٽ ڪوٺبا جيڪڏهن $A\cup B=U$

مثال طور: جيڪڏهن $A=\{1,2,3,4\}$، $B=\{1,3,5\}$ ۽ $U=\{1,2,3,4,5\}$ تہ پوءِ A ۽ B مڪمل سيٽ آهن چاڪاڻ جو $A\cup B=U$

جُزا (Cells):
جيڪڏهن A ۽ B بہ غير خيالي ماتحت سيٽ آهن ڪائناتي سيٽ U جا تہ پوءِ A ۽ B جُزا ڪوٺبا جيڪڏهن اُهي منفرد سان گڏوگڏ مڪمل سيٽ پڻ هجن.
يعني تہ A ۽ B جُزا ڪوٺبا جيڪڏهن A ۽ B غير خالي ماتحت سيٽ آهن U جا، $A\cap B=\varnothing$ ۽ $A\cup B=U$

مثال طور: جيڪڏهن $A=\{1,3,5,7,9\}$، $B=\{2,4,6,8,10\}$ ۽ $U=\{1,2,3,...,10\}$ تہ پوءِ A ۽ B جُزا آهن.

سيٽن تي عمل (Operations on sets) سان لاڳاپو رکندڙ ڪجھ مکيہ قانون هيٺيان آهن

ذاتي عنصر وارا قانون (Identity Laws):
ڪنهن بہ سيٽ A لاءِ

(i) $A\cup\varnothing=A$ (ii) $A\cup U=U$ (iii) $A\cap U=A$ (iv) $A\cap\varnothing=\varnothing$

هڪجهڙائي وارا قانون (Idempotent Laws):
ڪنهن بہ سيٽ A لاءِ

(i) $A\cup A=A$ (ii) $A\cap A=A$

ڪامپليمينٽ وارا قانون (Laws of the Complement):
ڪنهن بہ سيٽ A لاءِ

(i) $A\cup A'=U$ (ii) $A\cap A'=\varnothing$

(iii) $(A')'=A$ (iv) $\varnothing'=U$ ۽ $U'=\varnothing$

ڊي مارگن جا قانون (De Morgan's Laws):
ڪن بہ ٻن سيٽن A ۽ B لاءِ

(i) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ (ii) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

مشق 17.2

1. هيٺين مان ڪهڙا منفرد سيٽ، لاڳاپيل سيٽ، مڪمل سيٽ يا جُزا آهن.

(i) $\{1,2,3,5,7\}$ ۽ $\{4,6,8,9,10\}$

(ii) $\{1,2,3,6\}$ ۽ $\{1,2,4,8\}$

(iii) E ۽ O جڏهن ته $U = Z$

(iv) N ۽ W جڏهن ته $U = \{x \mid x \in Z \wedge x \geq 0\}$

(v) Q ۽ Q' جڏهن ته $U = \mathbb{R}$

2. جيڪڏهن $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ ۽ $B = \{2,4,6,8,10\}$ ته پوءِ هيٺيان لهو:

(i) $A \cup B$ (ii) $B \cap A$ (iii) $A - B$
(iv) $B - A$ (v) $A \Delta B$

3. جيڪڏهن $U = \{1,2,3,...,10\}$، $A = \{1,2,3,4,5\}$ ۽ $B = \{1,3,5,7,9\}$ ته پوءِ هيٺيان لهو

(i) A' (ii) B' (iii) $A' \cup B'$ (iv) $A' \cap B'$
(v) $(A \cup B)'$ (vi) $(A \cap B)'$ (vii) $A' \Delta B'$ (viii) $(A \Delta B)'$
(ix) $A - B'$ (x) $A' - B$

4. جيڪڏهن $U = \{x \mid x \in Z \wedge -4 < x < 6\}$ ، $P = \{p \mid p \in E \wedge -4 < p < 8\}$ ۽ $Q = \{q \mid q \in P \wedge q < 6\}$ ته پوءِ تصديق ڪريو ته

(i) $P - Q = P \cap Q'$ (ii) $Q - P = Q \cap P'$
(iii) $(P \cup Q)' = P' \cap Q'$ (iv) $(P \cap Q)' = P' \cup Q'$

5. جيڪڏهن $A = \{2n \mid n \in N\}$، $B = \{3n \mid n \in N\}$ ۽ $C = \{4n \mid n \in N\}$ ته پوءِ هيٺيان لهو

(i) $A \cap B$ (ii) $A \cup C$ (iii) $B \cap C$

17.1.2(i) ميلاپ ۽ ڪاٽ جون خاصيتون (Properties of Union and Intersection):

ٻن يا ٽن سيٽن جي ميلاپ ۽ ڪاٽ وارين هيٺين بنيادي خاصيتن جون رسمي ثابتيون ڏيڻ:

➢ ميلاپ جي مٽا واري خاصيت (Commutative Property of Union):

اسان کي خبر آهي ته ڪن به ٻن سيٽن A ۽ B لاءِ $A \cup B = B \cup A$

ان خاصيت کي ميلاپ جي مٽا واري خاصيت چئبو آهي.

ثابتي:

$L.H.S = A \cup B$

$= \{x \mid x \in A$ يا $x \in B\}$ (ميلاپ جي وصف مطابق)

$= \{x \mid x \in B$ يا $x \in A\}$ ($\because$ سيٽ ۾ رُڪنن جي ترتيب مستقل نه هوندي آهي)

$= B \cup A$ (ميلاپ جي وصف مطابق)

$= R.H.S$

$\because$ $L.H.S = R.H.S$

$\therefore$ $A \cup B = B \cup A$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

- كاٽ جي مٽا واري خاصيت (Commutative Property of Intersection):

اسان کي خبر آهي ته ڪن ٻن سيٽن A ۽ B لاءِ $A \cap B = B \cap A$

ان خاصيت کي ڪاٽ جي مٽا واري خاصيت چئبو آهي.

ثابتي:

$L.H.S = A \cap B$

$= \{x \mid x \in A$ ۽ $x \in B\}$ (ڪاٽا جي وصف مطابق)

$= \{x \mid x \in B$ ۽ $x \in A\}$ $\because$ (سيٽن ۾ رڪنن جي ترتيب مستقل نہ هوندي آهي)

$= B \cap A$ (ڪاٽ جي وصف مطابق)

$= R.H.S$

$\because \quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore \quad A \cap B = B \cap A$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

- ميلاپ جي سنگت واري خاصيت (Associative property of union):

اسين ميلاپ جي سنگت واري خاصيت کان اڳيئي واقف آهيون جيڪا هيٺين ريت آهي

ڪن ٽن سيٽن A، B ۽ C لاءِ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

ثابتي:

$L.H.S = A \cup (B \cup C)$

$= \{x \mid x \in A$ يا $x \in B \cup C\}$ (ميلاپ جي وصف مطابق)

$= \{x \mid x \in A$ يا $x \in B$ يا $x \in C\}$

$= \{x \mid x \in A \cup B$ يا $x \in C\}$ (ميلاپ جي وصف مطابق)

$= (A \cup B) \cup C$ (ميلاپ جي وصف مطابق)

$= R.H.S$

$\because \quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

- ڪاٽا جي سنگت واري خاصيت (Associative property of intersection):

اسان کي ڪاٽ جي سنگت واري خاصيت جي اڳيئي خبر آهي جيڪا بيان ڪري ٿي ته، ڪن ٽن سيٽن A، B ۽ C لاءِ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

ثابتي:

$L.H.S = A \cap (B \cap C)$

$= \{x \mid x \in A$ ۽ $x \in B \cap C\}$ (ڪاٽا جي وصف جي مطابق)

$= \{x \mid x \in A$ ۽ $x \in B$ ۽ $x \in C\}$

$= \{x \mid x \in A \cap B$ ۽ $x \in C\}$ (ڪاٽا جي وصف جي مطابق)

$= (A \cap B) \cap C$ (ڪاٽا جي وصف جي مطابق)

$= R.H.S$

$\because \quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

➢ **ميلاپ جي ڪاٽ جي لحاظ کان ورهاست واري خاصيت (Distributive property of union over intersection):**

اسين هيٺين ڪلاسن ۾ اڳيئي ميلاپ جي ڪاٽ جي لحاظ کان ورهاست واري خاصيت پڙهي چڪا آهيون جيڪا هيٺين ريت آهي.

ڪن به سيٽن A ، B ۽ C لاءِ $\boxed{A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)}$

ثابتي:

$$\text{L.H.S}=A\cup(B\cap C)$$

$=\{x\,|\,x\in A$ يا $x\in B\cap C\}$ (ميلاپ جي خاصيت مطابق)

$=\{x\,|\,x\in A$ يا $(x\in B$ ۽ $x\in C)\}$ (ڪاٽ جي وصف مطابق)

$=\{x\,|\,(x\in A$ يا $x\in B)$ ۽ $(x\in A$ يا $x\in C)\}$

$=\{x\,|\,x\in A\cup B$ ۽ $x\in A\cup C\}$ (ميلاپ جي وصف مطابق)

$=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (ڪاٽ جي وصف مطابق)

$=\text{R.H.S}$

$\because\quad \text{L.H.S}=\text{R.H.S}$

$\therefore\quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

➢ **ڪاٽ جي ميلاپ جي لحاظ کان ورهاست واري خاصيت (Distributive property of intersection over union):**

اسين اڳيئي ڪاٽ جي ميلاپ جي لحاظ کان ورهاست واري خاصيت سان واقف آهيون. جيڪا هيٺين ريت آهي.

ڪن به ٽن سيٽن A، B ۽ C لاءِ $\boxed{A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)}$

ثابتي:

$$\text{L.H.S}=A\cap(B\cup C)$$

$=\{x\,|\,x\in A$ ۽ $x\in B\cup C\}$ (ڪاٽ جي وصف مطابق)

$=\{x\,|\,x\in A$ ۽ $(x\in B$ يا $x\in C)\}$ (ميلاپ جي وصف مطابق)

$=\{x\,|\,(x\in A$ ۽ $x\in B)$ يا $(x\in A$ ۽ $x\in C)\}$

$=\{x\,|\,x\in A\cap B$ يا $x\in A\cap C\}$ (ڪاٽ جي وصف مطابق)

$=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (ميلاپ جي وصف مطابق)

$=\text{R.H.S}$

$\because\quad \text{L.H.S}=\text{R.H.S}$

$\therefore\quad A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

➤ دي مارگن جا قانون (De Morgan's Laws):

اسين اڳيئي سيڪشن 17.1(iv) ۾ پڙهي چڪا آهيون تہ دي مارگن جا قانون ﮬ هوندا آهن. جيڪي هينئين ريت آهن. ڪن ﮬ ٻن سيٽن A ۽ B لاءِ

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ثابتي (i): $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$$\begin{aligned}
L.H.S &= (A \cup B)' \\
&= \{x \mid x \in U \text{ ۽ } x \notin A \cup B\} && \text{(ڪامپليمينٽ جي وصف مطابق)} \\
&= \{x \mid x \in U \text{ ۽ } (x \notin A \text{ ۽ } x \notin B)\} \\
&= \{x \mid (x \in U \text{ ۽ } x \notin A) \text{ ۽ } (x \in U \text{ ۽ } x \notin B)\} \\
&= \{x \mid x \in A' \text{ ۽ } x \in B'\} && \text{(ڪامپليمينٽ جي وصف مطابق)} \\
&= A' \cap B' && \text{(ڪاٽا جي وصف مطابق)} \\
&= R.H.S
\end{aligned}$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\therefore$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

ثابتي (ii): $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$$\begin{aligned}
L.H.S &= (A \cap B)' \\
&= \{x \mid x \in U \text{ ۽ } x \notin A \cap B\} && \text{(ڪامپليمينٽ جي وصف مطابق)} \\
&= \{x \mid x \in U \text{ ۽ } (x \notin A \text{ يا } x \notin B)\} \\
&= \{x \mid (x \in U \text{ ۽ } x \notin A) \text{ يا } (x \in U \text{ ۽ } x \notin B)\} \\
&= \{x \mid x \in A' \text{ يا } x \in B'\} && \text{(ڪامپليمينٽ جي وصف مطابق)} \\
&= A' \cup B' && \text{(ميلاپ جي وصف مطابق)} \\
&= R.H.S
\end{aligned}$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\therefore$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

17.1.2(ii) ڏنل سيٽن جي بنيادي خاصيتن جي چڪاس ڪرڻ:

اچو تہ هينئين مثالن جي مدد سان بنيادي خاصيتن جي چڪاس ڪريون.

مثال 1: جيڪڏهن $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ۽ $B = \{4, 6, 8, 9, 10, 12\}$ تہ پوءِ ميلاپ ۽ ڪاٽا جي مٽا واري خاصيت جي چڪاس ڪريو.

چڪاس:

(الف) ميلاپ جي مٽا واري خاصيت

يعني $A \cup B = B \cup A$

$$\begin{aligned} L.H.S &= A \cup B \\ &= \{1,2,3,4,6,12\} \cup \{4,6,8,9,10,12\} \\ &= \{1,2,3,4,6,8,9,10,12\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R.H.S &= B \cup A \\ &= \{4,6,8,9,10,12\} \cup \{1,2,3,4,6,12\} \\ &= \{1,2,3,4,6,8,9,10,12\} \end{aligned}$$

$\because \quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore \quad A \cup B = B \cup A$

انهيءَ ڪري چڪاس ٿي.

(ب) ڪاٽا جي مٽا واري خاصيت

يعني $A \cap B = B \cap A$

$$\begin{aligned} L.H.S &= A \cap B \\ &= \{1,2,3,4,6,12\} \cap \{4,6,8,9,10,12\} \\ &= \{4,6,12\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R.H.S &= B \cap A \\ &= \{4,6,8,9,10,12\} \cap \{1,2,3,4,6,12\} \\ &= \{4,6,12\} \end{aligned}$$

$\because \quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore \quad A \cap B = B \cap A$

انهيءَ ڪري چڪاس ٿي.

مثال 2:

جيڪڏهن $A = \{1,2,5,10\}$، $B = \{2,3,5,7\}$ ۽ $C = \{1,3,5,7,9\}$ ته پوءِ ميلاپ ۽ ڪاٽا جي سنگت واري خاصيت جي چڪاس ڪريو.

چڪاس:

(الف) ميلاپ جي سنگت واري خاصيت

يعني $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$$\begin{aligned} R.H.S &= (A \cup B) \cup C \\ &= [\{1,2,5,10\} \cup \{2,3,5,7\}] \cup \{1,3,5,7,9\} \\ &= \{1,2,3,5,7,10\} \cup \{1,3,5,7,9\} \\ &= \{1,2,3,5,7,9,10\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L.H.S &= A \cup (B \cup C) \\ &= \{1,2,5,10\} \cup [\{2,3,5,7\} \cup \{1,3,5,7,9\}] \\ &= \{1,2,5,10\} \cup \{1,2,3,5,7,9\} \\ &= \{1,2,3,5,7,9,10\} \end{aligned}$$

$\because \quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

انهيءَ ڪري چڪاس ٿي.

(ب) ڪاٽا جي سنگت واري خاصيت

يعني $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$$\begin{aligned} R.H.S &= (A \cap B) \cap C \\ &= [\{1,2,5,10\} \cap \{2,3,5,7\}] \cap \{1,3,5,7,9\} \\ &= \{2,5\} \cap \{1,3,5,7,9\} \\ &= \{5\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L.H.S &= A \cap (B \cap C) \\ &= \{1,2,5,10\} \cap [\{2,3,5,7\} \cap \{1,3,5,7,9\}] \\ &= \{1,2,5,10\} \cap \{3,5,7\} \\ &= \{5\} \end{aligned}$$

$\because \quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

انهيءَ ڪري چڪاس ٿي.

مثال 3: جيڪڏهن $A=\{1,2,3,...,10\}$ ، $B=\{2,4,6,8,10\}$ ۽ $C=\{3,6,9\}$ تہ پوءِ چڪاس ڪريو

(الف) ميلاپ جي ڪاٽا جي لحاظ کان ورهاست واري خاصيت
(ب) ڪاٽا جي ميلاپ جي لحاظ کان ورهاست واري خاصيت

چڪاس:

(الف) ميلاپ جي ڪاٽا جي لحاظ کان ورهاست واري خاصيت

يعني $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$$
\begin{aligned}
L.H.S &= A\cup(B\cap C)\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cup[\{2,4,6,8,10\}\cap\{3,6,9\}]\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cup\{6\}\\
&=\{1,2,3,...,10\}\\
R.H.S &= (A\cup B)\cap(A\cup C)\\
&=[\{1,2,3,...,10\}\cup\{2,4,6,8,10\}]\cap[\{1,2,3,...,10\}\cup\{3,6,9\}]\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cap\{1,2,3,...,10\}\\
&=\{1,2,3,...,10\}
\end{aligned}
$$

$\because \quad L.H.S=R.H.S$

$\therefore \quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

انهيءَ ڪري چڪاس ٿي.

(ب) ڪاٽا جي ميلاپ جي لحاظ کان ورهاست واري خاصيت

يعني $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$$
\begin{aligned}
L.H.S &= A\cap(B\cup C)\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cap[\{2,4,6,8,10\}\cup\{3,6,9\}]\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cap\{2,3,4,6,8,9,10\}\\
&=\{2,3,4,6,8,9,10\}\\
R.H.S &= (A\cap B)\cup(A\cap C)\\
&=[\{1,2,3,...10\}\cap\{2,4,6,8,10\}]\cup[\{1,2,3,...,10\}\cap\{3,6,9\}]\\
&=\{2,4,6,8,10\}\cup\{3,6,9\}\\
&=\{2,3,4,6,8,9,10\}
\end{aligned}
$$

$\because \quad L.H.S=R.H.S$

$\therefore \quad A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

انهيءَ ڪري چڪاس ٿي.

مثال 4: جيڪڏهن $U=\{1,2,3,...,20\}$، $A=\{1,3,5,...,19\}$ ۽ $B=\{2,4,6,...,20\}$ تہ پوءِ ڊي مارگن جي قانونن جي چڪاس ڪريو

يعني (الف) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ (ب) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

چڪاس:

(الف) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

$$\begin{aligned}
L.H.S &= (A\cup B)' \\
&= U-(A\cup B) \\
&= \{1,2,3,...,20\}-[\{1,3,5,...,19\}\cup\{2,4,6...,20\}] \\
&= \{1,2,3,...,20\}-\{1,2,3,...,20\} \\
&= \varnothing \\
R.H.S &= A'\cap B' \\
&= (U-A)\cap(U-B) \\
&= [\{1,2,3,...,20\}-\{1,3,5,...,19\}]\cap[\{1,2,3,...,20\}-\{2,4,6,...,20\}] \\
&= \{2,4,6,...,20\}\cap\{1,3,5,...,19\} \\
&= \varnothing
\end{aligned}$$

$\because$ $L.H.S = R.H.S$

$\therefore$ $(A\cup B)'=A'\cap B'$

انهيءَ ڪري چڪاس ٿي.

(ب) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

$$\begin{aligned}
L.H.S &= (A\cap B)' \\
&= U-(A\cap B) \\
&= \{1,2,3,...,20\}-[\{1,3,5,...,19\}\cap\{2,4,6...,20\}] \\
&= \{1,2,3,...,20\}-\{\ \} \\
&= \{1,2,3,...,20\} \\
R.H.S &= A'\cup B' \\
&= (U-A)\cup(U-B) \\
&= [\{1,2,3,...,20\}-\{1,3,5,...,19\}]\cup[\{1,2,3,...,20\}-\{2,4,6,...,20\}] \\
&= \{2,4,6,...,20\}\cup\{1,3,5,...,19\} \\
&= \{1,2,3,...,20\}
\end{aligned}$$

$\because$ $L.H.S = R.H.S$

$\therefore$ $(A\cap B)'=A'\cup B'$

انهيءَ ڪري چڪاس ٿي.

مشق 17.3

1. هيٺين سيٽن لاءِ ميلاپ ۽ ڪاٽا جي مٽا واري خاصيت جي چڪاس ڪريو.

(i) $A=\{a,b,c,d,e\}$ ۽ $B=\{a,e,i,o,u\}$

(ii) $P=\{x \mid x\in Z \wedge -3<x<3\}$ ۽ $Q=\{y \mid y\in E^{+} \wedge y\leq 4\}$

2. هيٺين سيٽن لاءِ ميلاپ ۽ ڪاٽا جي سنگت واري خاصيت جي چڪاس ڪريو.

(i) $A=\{1,2,4,5,10,20\}$، $B=\{5,10,15,20\}$ ۽ $C=\{1,2,5,10\}$

(ii) $A=\mathbb{N}$، $B=\mathbb{P}$ ۽ $C=\mathbb{Z}$

3. هيٺين سيٽن لاءِ تصديق ڪريو.

(الف) ميلاپ جي ڪاٽا جي لحاظ کان ورهاست واري خاصيت

(ب) ڪاٽا جي ميلاپ جي لحاظ کان ورهاست واري خاصيت

(i) $A=\{1,2,3,...,10\}$، $B=\{2,3,5,7\}$ ۽ $C=\{1,3,5,7,9\}$

(ii) $A=\mathbb{N}$، $B=\mathbb{P}$ ۽ $C=\mathbb{W}$

4. **ڊي مارگن جي قانونن جي تصديق ڪريو جيڪڏهن $U=\{1,2,3...,12\}$، $A=\{1,2,3,4,6,12\}$ ۽ $B=\{2,4,6,8\}$**

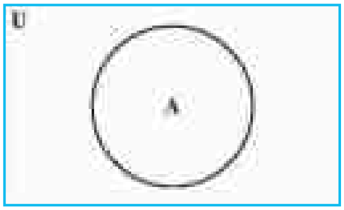
5. جيڪڏهن A ۽ B ماتحت سيٽ آهن U جا تہ پوءِ خاصيتن جو استعمال ڪندي هيٺيان ثابت ڪريو

(i) $A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)$ (ii) $A\cup B=A\cup(A'\cap B)$

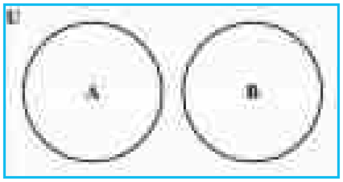
(iii) $B=(A\cap B)\cup(A'\cap B)$ (iv) $B=A\cup(A'\cap B)$ جيڪڏهن $A\subseteq B$

17.1.3 وين ڊايگرام يا شڪليون (Venn Diagrams):

اسين هيٺين ڪلاسن ۾ اڳيئي پڙهي چڪا آهيون تہ سيٽ، انهن جا تعلق ۽ عمل جاميٽري سان يا گرافن سان ظاهر ڪري سگهجن ٿا. انهيءَ جاميٽري واري اظهار کي وين ڊايگرام يا شڪليون چئبو آهي جيڪي انگريز رياضي دان جان وين (John Venn) جي نالي تي آهن. جان وين انهن کي 1881ع ۾ پيش ڪيو. وين شڪلين ۾ ڪائناتي سيٽ کي گهٽو ڪري مستطيل سان ظاهر ڪبو آهي. جڏهن تہ گول يا بيضوي شڪليون سيٽن کي ظاهر ڪنديون آهن. ڪجهہ وين شڪلين جو ڏؤر ڪريون ٿا.

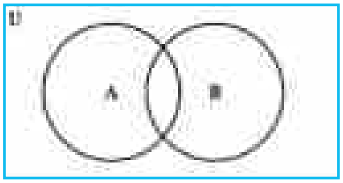


(i) ڪائناتي سيٽ U جي اندر هڪ سيٽ A کي ڏيکاريندڙ وين شڪل

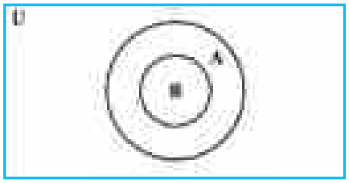


(ii) ٻن منفرد سيٽن A ۽ B کي ڏيکاريندڙ وين شڪل

(iii) ٻن لاڳاپيل سيٽن A ۽ B کي ڏيکاريندڙ وين شڪل



(iv) سيٽ A جي ماتحت سيٽ B کي ڏيکاريندڙ وين شڪل يعني $B \subseteq A$



17.1.3(i) وين شڪلين وسيلي هيٺيان ڏيکارڻ:

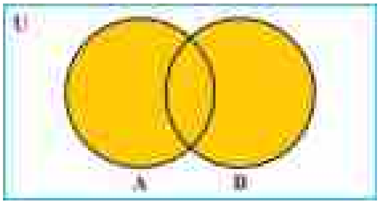
- سيٽن جو ميلاپ ۽ ڪاٽو:
- سيٽ جو ڪامپليمينٽ:
- ٻن سيٽن جو همشڪلي فرق:

سيٽن جو ميلاپ ۽ ڪاٽو:

وين شڪلين ۾ ٻن سيٽن A ۽ B جي ميلاپ کي ٻنهي سيٽن A ۽ B جي سڄي ايراضي سان ظاهر ڪبو آهي. شڪل (i) ۾ شيڊ ڏنل يا رنگ ڀريل ايراضي $A \cup B$ کي ظاهر ڪري ٿي.

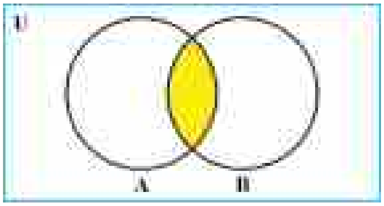
جڏهن ته سيٽن A ۽ B جي ڪاٽا کي ٻنهي A ۽ B جي مشترڪ ايراضي سان ظاهر ڪيو ويندو آهي شڪل نمبر (ii) ۾ شيڊ ڏنل يا رنگ ڀريل ايراضي $A \cap B$ کي ظاهر ڪري ٿي.

$A \cup B$



شڪل(i)

$A \cap B$



شڪل(ii)

مثال 1: جيڪڏهن $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$، $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ۽ $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ته پوءِ وين شڪلين وسيلي $A \cup B$ ۽ $A \cap B$ کي ڏيکاريو

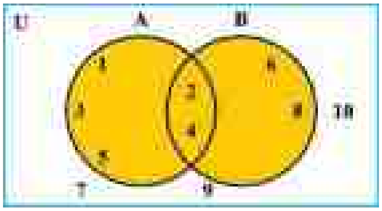
حل:

شڪل (الف) ۾ رنگ ڀريل يا شيڊ ڏنل ايراضي، $A \cup B$ کي ڏيکاري ٿي

وين شڪل مان اسان حاصل ڪيو:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

$A \cup B$



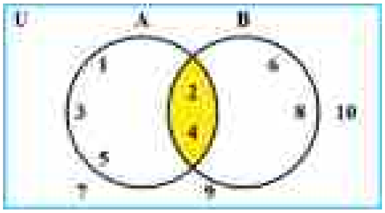
شڪل (الف)

شڪل (ب) ۾ رنگ ڀريل يا شيڊ ڏنل ايراضي، $A \cap B$ کي ڏيکاري ٿي

وين شڪل مان اسان حاصل ڪيو:

$A \cap B = \{2, 4\}$

$A \cap B$

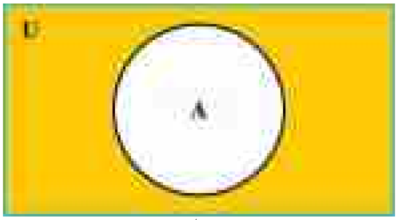


شڪل (ب)

◄ سيٽ جو ڪامپليمينٽ (Complement of a set):

ون شڪل ۾، سيٽ A جو ڪامپليمينٽ، ڪائناتي سيٽ جي اُن ايراضي سان ڏيکاربو آهي جيڪا سيٽ A جي ايراضي کڏڻ ڪانپوءِ بچي. شڪل (i) ۾،شيڊ ڏنل يا رنگ ٿيل ايراضي A′ کي ڏيکاري ٿي.

A′



شڪل (i)

مثال:

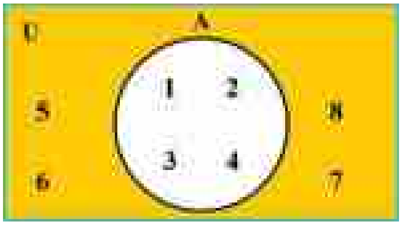
جيڪڏهن $U=\{1,2,3,\ldots,8\}$ ۽ $A=\{1,2,3,4\}$ ته پوءِ ون شڪل وسيلي A′ کي ڏيکاريو.

حل:

پاسي واري ون شڪل (شڪل ii) ۾ شيڊ ڏنل يا رنگ ٿيل ايراضي A′ کي ڏيکاري ٿي.

تنهنڪري اسان وٽ آهي: $A'=\{5,6,7,8\}$

A′

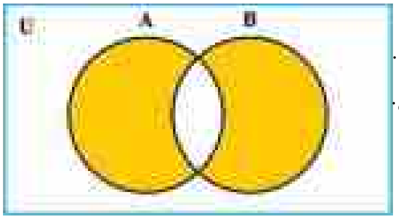


شڪل (ii)

◄ ٻن سيٽن جو همشڪلي فرق (Symmetric difference of two sets):

ون شڪل ۾، ٻن سيٽن A ۽ B جي همشڪلي فرق کي A ۽ B جي سڄي ايراضي،سواءِ مشترڪ ايراضي سان ڏيکاربو آهي. شڪل (i) ۾ رنگ ٿيل يا شيڊ ڏنل ايراضي A∆B کي ڏيکاري ٿي.

A∆B



شڪل (i)

مثال:

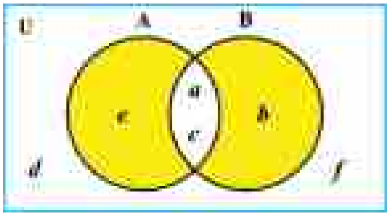
جيڪڏهن $U=\{a,b,c,d,e,f\}$، $A=\{a,c,e\}$ ۽ $B=\{a,b,c\}$ ته پوءِ ون شڪل وسيلي A∆B کي ڏيکاريو.

حل:

پاسي واري ون شڪل (شڪل ii) ۾ شيڊ ڏنل يا رنگ ٿيل ايراضي A∆B کي ڏيکاري ٿي.

تنهنڪري اسان وٽ آهي يعني: $A\Delta B=\{b,e\}$

A∆B



شڪل (ii)

17.1.3(ii) وين شڪل وسيلي هيٺين جي چڪاس ڪرڻ:

- ميلاپ ۽ ڪاٽا جي مٽا واري خاصيت:
- سنگت وارا قانون:
- ورهاست وارا قانون:
- ڊي مارگن جا قانون:

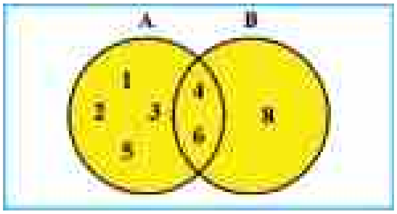
ميلاپ ۽ ڪاٽا جي مٽا واري خاصيت:

اچو تہ هيٺين مثال جي مدد سان، وين شڪل وسيلي ميلاپ ۽ ڪاٽا جي مٽا واري خاصيت جي چڪاس ڪريون.

مثال: جيڪڏهن $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ ۽ $B=\{4,6,8\}$ تہ پوءِ وين شڪل وسيلي ميلاپ ۽ ڪاٽا جي مٽا واري خاصيت جي چڪاس ڪريو.

چڪاس (i): ميلاپ جي مٽا واري خاصيت يعني: $A\cup B=B\cup A$

$A\cup B$

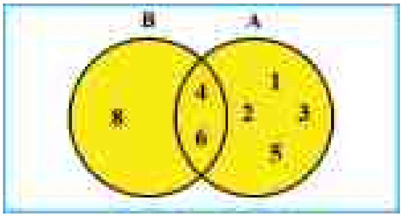


شڪل (i)

شڪل (i) جي وين شڪل مان

$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8\}$

$B\cup A$



شڪل (ii)

شڪل(ii) جي وين شڪل مان

$B\cup A=\{1,2,3,4,5,6,8\}$

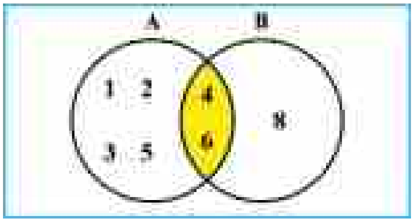
جيئن تہ شيڊ ڏنل يا رنگ ٿيل ايراضيون ۽ انهن جا رڪن برابر آهن جهڙي طرح شڪل (i) ۽ شڪل (ii) ۾ ڏيکاريو ويو آهي.

تنهنڪري $A\cup B=B\cup A$

انهيءَ ڪري چڪاس ٿي.

چڪاس (ii): ڪاٽا جي مٽا واري خاصيت يعني: $A\cap B=B\cap A$

$A\cap B$

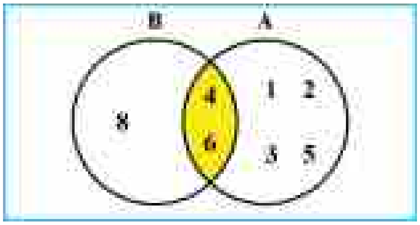


شڪل (i)

شڪل (i) جي وين شڪل مان

$A\cap B=\{4,6\}$

$B\cap A$



شڪل (ii)

شڪل(ii) جي وين شڪل مان

$B\cap A=\{4,6\}$

جيئن تہ شيڊ ڏنل يا رنگ ٿيل ايراضيون ۽ انهن جا رڪن برابر آهن جهڙيءَ طرح شڪل(i) ۽ شڪل (ii) ۾ ڏيکاريو ويو آهي.

تنهنڪري $A\cap B=B\cap A$

انهيءَ ڪري چڪاس ٿي.

➢ سنگت وارا قانون (Associative Laws):

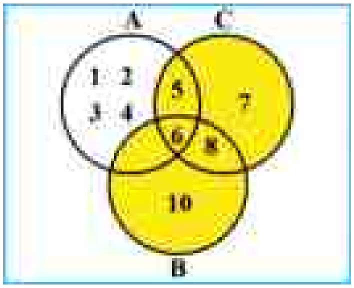
وين شڪل وسيلي سنگت واري قانونن جي تصديق ڪرڻ لاءِ، اسين هينئين مثال کڻون ٿا.

مثال: جيڪڏهن $A=\{1,2,3,4,5,6\}$، $B=\{6,8,10\}$ ۽ $C=\{5,6,7,8\}$ ته پوءِ ميلاپ ۾ ڪاٺا جي سنگت واري قانونن جي تصديق ڪريو.

تصديق: ميلاپ جو سنگت وارو قانون يعني: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

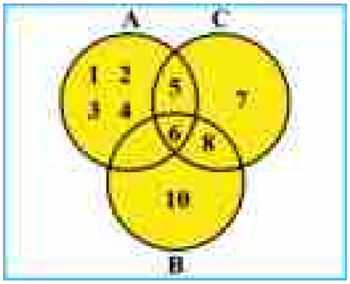
$L.H.S=A\cup(B\cup C)$

$B\cup C$



شڪل(i)

$A\cup(B\cup C)$



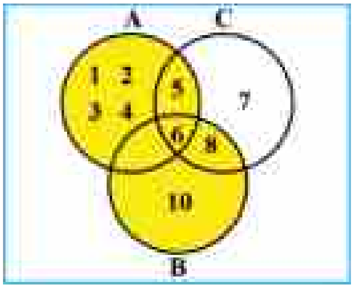
شڪل(ii)

شڪل(ii) جي وين شڪل مان

$A\cup(B\cup C)=\{1,2,3,4,5,6,7,8,10\}$

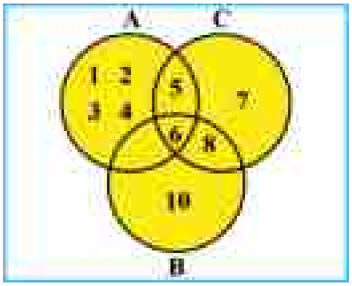
$R.H.S=(A\cup B)\cup C$

$A\cup B$



شڪل(iii)

$(A\cup B)\cup C$



شڪل(iv)

شڪل(iv) جي وين شڪل مان

$(A\cup B)\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,10\}$

جيئن ته شيڊ ڏنل يا رنگ ٿيل ايراضيون ۾ انهن جا رڪن برابر آهن جهڙي طرح شڪل (ii) ۾ شڪل (iv) ۾ ڏيکاريل آهي.

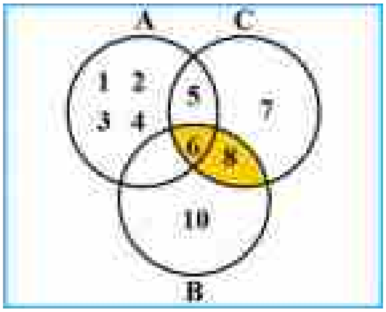
تنهنڪري $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

انهيءَ ڪري تصديق ٿي.

تصديق: ڪاٽا جو سنگت وارو قانون يعني: $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

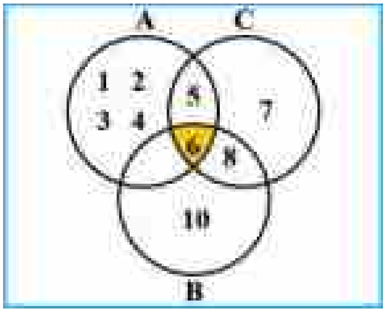
$L.H.S=A\cap(B\cap C)$ $\qquad$ $R.H.S=(A\cap B)\cap C$

$B\cap C$



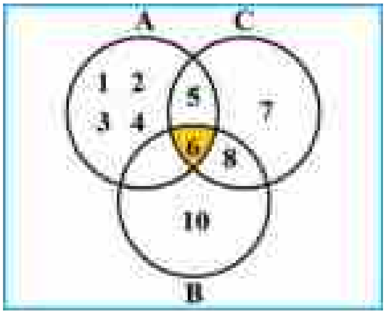
شڪل(i)

$A\cap B$



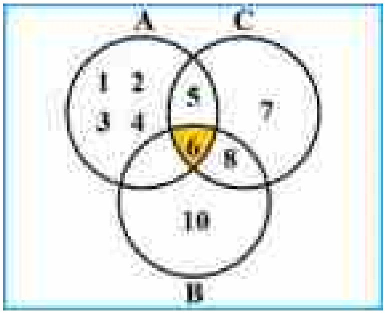
شڪل(iii)

$A\cap(B\cap C)$



شڪل(ii)

$(A\cap B)\cap C$



شڪل(iv)

شڪل(ii) جي وين شڪل مان

$A\cap(B\cap C)=\{6\}$

شڪل(iv) جي وين شڪل مان

$(A\cap B)\cap C=\{6\}$

جيئن تہ رنگ ڀريل يا شيڊ ٿيل ايراضيون ۽ انهن جا رڪن برابر آهن جهڙي طرح شڪل(ii) ۽ شڪل (iv) ۾ ڏيکاريل آهي.

تنهنڪري $\quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

انهيءَ ڪري تصديق ٿي.

⮜ ورهاست وارا قانون (Distributive Laws):

هاڻي اسين هيٺين مثال جي مدد سان ، وين شڪل وسيلي ورهاست واري قانونن جي تصديق ڪريون ٿا.

مثال:

وين شڪل وسيلي ورهاست واري قانونن جي تصديق ڪريو جيڪڏهن $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ ،

$B=\{3,4,5,6,7\}$ ۽ $C=\{2,4,6,8\}$

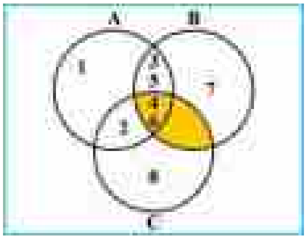
تصديق:

(i) ميلاپ جو ڪاٽ جي لحاظ ڪان ورهاست وارو قانون (Distributive law of union over intersection):

يعني: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$\underline{L.H.S = A\cup(B\cap C)}$

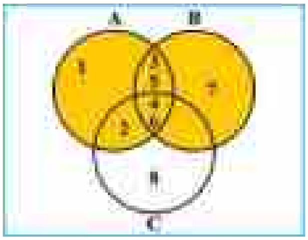
$B\cap C$



شڪل(i)

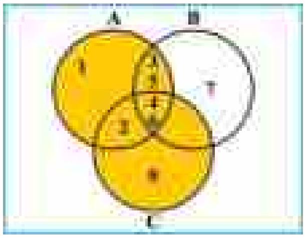
$\underline{R.H.S = (A\cup B)\cap(A\cup C)}$

$A\cup B$



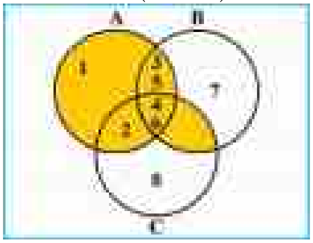
شڪل(iii)

$A\cup C$



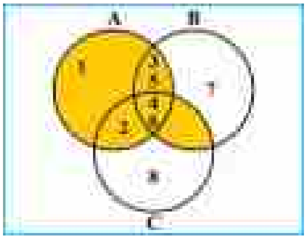
شڪل(iv)

$A\cup(B\cap C)$



شڪل(ii)

$(A\cup B)\cap(A\cup C)$



شڪل(v)

شڪل(ii) جي وين شڪل مان

$A\cup(B\cap C)=\{1,2,3,4,5,6\}$

شڪل(v) جي وين شڪل مان

$(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1,2,3,4,5,6\}$

جيئن تہ شيڊ ڏنل يا رنگ ٿيل ايراضيون ۾ انهن جا رڪن برابر آهن جهڙي طرح شڪل (ii) ۾ شڪل(v)۾ ڏيکاريل آهي.

تنهنڪري $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

انهيءَ ڪري تصديق ٿي.

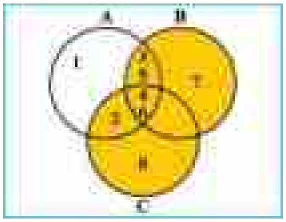
تصديق:

(ii) ڪاٽا جي ميلاپ جي لحاظ کان ورهاست وارو قانون : (Distributive law of intersection over union):

يعني: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$L.H.S=A\cap(B\cup C)$

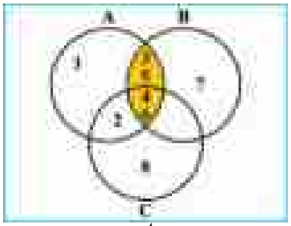
$B\cup C$



شڪل (i)

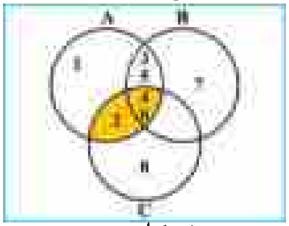
$R.H.S=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cap B$



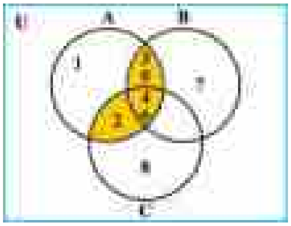
شڪل (iii)

$A\cap C$



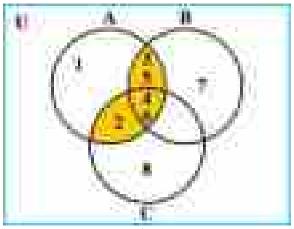
شڪل (iv)

$A\cap(B\cup C)$



شڪل (ii)

$(A\cap B)\cup(A\cap C)$



شڪل (v)

شڪل (ii) جي وين شڪل مان

$A\cap(B\cup C)=\{2,3,4,5,6\}$

شڪل (v) جي وين شڪل مان

$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{2,3,4,5,6\}$

جيئن تہ شيڊ ڏنل يا رنگ ٿيل ايراضيون ۾ انهن جا رڪن برابر آهن جهڙي طرح شڪل (ii) ۾ شڪل (v) ۾ ڏيکاريل آهي.

تنهنڪري $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

انهيءَ ڪري تصديق ٿي.

➢ ڊي مارگن جا قانون (De Morgan's Laws):

اچو تہ هيٺين مثال جي مدد سان، وين شڪل ذريعي ڊي مارگن جي قانون جي تصديق ڪريون.

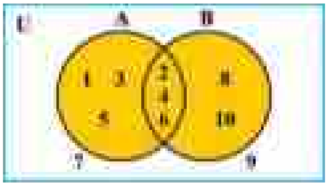
مثال: وين شڪل وسيلي ڊي مارگن جي قانونن جي تصديق ڪريو

جيڪڏهن $U=\{1,2,3,...,10\}$، $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ ۽ $B=\{2,4,6,8,10\}$

تصديق: (i) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

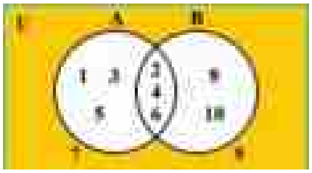
$L.H.S=(A\cup B)'$

$A\cup B$



شڪل(i)

$(A\cup B)'$



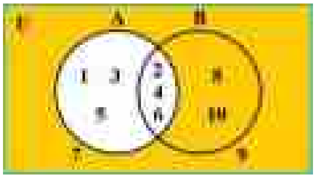
شڪل(ii)

شڪل(ii) جي وين شڪل مان

$(A\cup B)'=\{7,9\}$

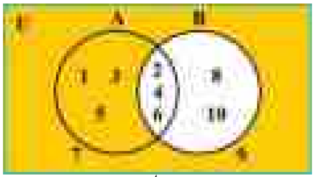
$R.H.S=A'\cap B'$

A'



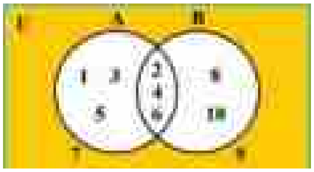
شڪل(iii)

B'



شڪل(iv)

$A'\cap B'$



شڪل(v)

شڪل(v) جي وين شڪل مان

$A'\cap B'=\{7,9\}$

جيئن تہ شيڊ ڪيل يا رنگ ڪيل ايراضيون ۽ انهن جا رڪن برابر آهن جيئن شڪل (ii) ۽ شڪل(v)۾ ڏيکاريل آهي.

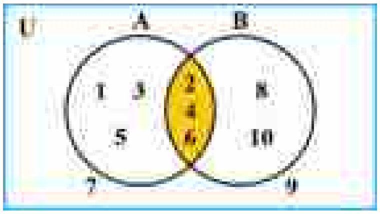
تنهنڪري $(A\cup B)'=A'\cap B'$

انهيءَ ڪري تصديق ٿي.

تصديق (ii): $(A\cap B)' = A'\cup B'$

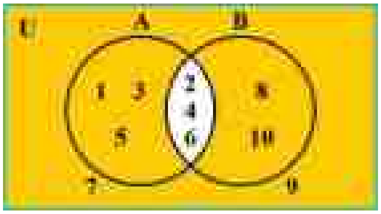
$L.H.S=(A\cap B)'$

$A\cap B$



شڪل(i)

$(A\cap B)'$



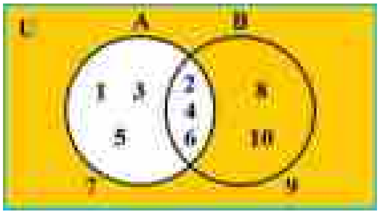
شڪل(ii)

شڪل(ii) جي وين شڪل مان

$(A\cap B)' = \{1,3,5,7,8,9,10\}$

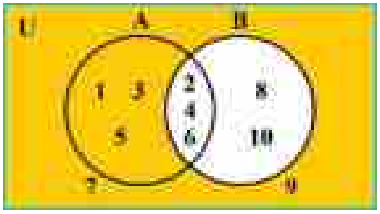
$R.H.S=A'\cup B'$

A'



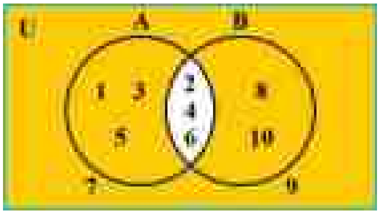
شڪل(iii)

B'



شڪل(iv)

$A'\cup B'$



شڪل(v)

شڪل(v) جي وين شڪل مان

$A'\cup B' = \{1,3,5,7,8,9,10\}$

جيئن تہ شيڊ ڏنل يا رنگ ڀريل ايراضيون ۽ انهن جا رڪن برابر آهن جيئن شڪل (ii) ۽ شڪل(v)۾ ڏيکاريل آهي.

تنهنڪري $(A\cap B)' = A'\cup B'$

انهيءَ ڪري تصديق ٿي.

مشق 17.4

1. جيڪڏهن A ۽ B ڪائناتي سيٽ U جا ڪي به ماتحت سيٽ آهن ته پوءِ $A \cup B$، $A \cap B$، $A \Delta B$ ۽ $A - B$ جون عام وين شڪيلون ٺاهيو جيڪڏهن
   (i) A ۽ B منفرد سيٽ آهن.
   (ii) A ۽ B لاڳاپيل سيٽ آهن.
   (iii) A ماتحت سيٽ آهي B جو
2. وين شڪلين وسيلي ميلاپ ۽ ڪاٽا جي متا واري خاصيت جي چڪاس ڪريو. جيڪڏهن
   (i) $A = \{a, b, c, d, e\}$ ۽ $B = \{a, e, i, o, u\}$
   (ii) $P = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ ۽ $Q = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
3. وين شڪلين وسيلي ڊي مارگن جي قانون جي تصديق ڪريو.
   جيڪڏهن $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$، $B = \{5, 6, 7, 8\}$ ۽ $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$
4. وين شڪلين وسيلي سنگت ۽ ورهاست واري قانونن جي تصديق ڪريو.
   جيڪڏهن $A = \{1, 2, 3, ..., 8\}$، $B = \{4, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ۽ $C = \{5, 7, 9, 11\}$

17.1.4 ترتيب ڏنل جوڙا ۽ ڪارٽيسي ضرب اُپت (Ordered pairs and Cartesian product):

ڪارٽيسي ضرب اپت، فرانسيسي رياضي دان رين ڊيڪارٽس(Rene Descartes) جي نالي تي آهي جنهن تجزياتي جاميٽري (Analytical Geometry) جو تعارف ڪرايو. تجزياتي جاميٽري ۾ هموار سطح يا پلين(Plane) تي ٽٻڪن جو هنڌ لهڻ لاءِ ترتيب ڏنل جوڙن جو استعمال ٿيندو آهي. اچو ته ترتيب ڏنل جوڙن ۽ ڪارٽيسي ضرب اُپت تي تفصيلي بحث ڪريون.

17.1.4 (i) ترتيب ڏنل جوڙن جي سڃاڻپ ڪرڻ:

عددن جو هڪ اهڙو جوڙو جنهن ۾ ترتيب برقرار هجي تنهن کي ترتيب ڏنل جوڙو چئبو آهي. ڪن به حقيقي عددن a ۽ b لاءِ ، جيڪڏهن اسين a کي پهريون ۽ b کي ٻيون رکون ته پوءِ a ۽ b جو ترتيب ڏنل جوڙو هيئن لکبو: (a, b) . ترتيب ڏنل جوڙي (a, b) ۾ a کي پهريون جزو يا رکن چئبو آهي ۽ b کي ٻيو جُزو يا رکن چئبو آهي.

ٻه ترتيب ڏنل جوڙا برابر هوندا جيڪڏهن انهن جا مطابقت رکندڙ رکن پاڻ ۾ برابر هجن.

يعني $(a, b) = (c, d)$ فقط ان صورت ۾ ٿي ٿيندو جڏهن $a = c$ ۽ $b = d$

مثال: x ۽ y جو ملهه لهو جيڪڏهن $(x + 5, 8)$ ۽ $(9, y - 6)$ برابر آهن

حل: اسان وٽ آهي $(9, y - 6) = (x + 5, 8)$

$$y - 6 = 8 \quad \text{۽} \quad \Rightarrow \quad 9 = x + 5$$
$$\Rightarrow \quad y = 8 + 6 \qquad \Rightarrow \quad 9 - 5 = x$$
$$\text{يا} \quad y = 14 \qquad \text{يا} \quad x = 4$$

انهيءَ ڪري x ۽ y جا ملهه ترتيب وار 4 ۽ 14 آهن.

17.1.4 (ii) ڪارٽيسي ضرب اُپت ٺاهڻ:

جيڪڏهن A ۽ B ڪي به ٻه غير خالي سيٽ آهن ته پوءِ A جو B سان ڪارٽيسي ضرب اپت، سيني ترتيب ڏنل جوڙن (a, b) جو سيٽ آهي جڏهن ته $a \in A$ ۽ $b \in B$. ان کي نشانين ۾ $A \times B$ لکبو آهي.

يعني $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ ۽ } b \in B\}$

ساڳي ريت، B جو A سان ڪارٽيسي ضرب اُپت هيئن بيان ڪبو

$$B \times A = \{(b, a) \mid b \in B \text{ ۽ } a \in A\}$$

مثال طور: جيڪڏهن $P=\{1,2,4\}$ ۽ $Q=\{5,10\}$

تہ پوءِ $P\times Q=\{(1,5),(1,10),(2,5),(2,10),(4,5),(4,10)\}$

۽ $Q\times P=\{(5,1),(5,2),(5,4),(10,1),(10,2),(10,4)\}$

نوٽ:
(i) $A\times B$ کي "A ڪراس B" پڙهبو آهي.
(ii) جيڪڏهن $O(A)=m$ ۽ $O(B)=n$ تہ پوءِ $O(A\times B)=mn$
(iii) عام طرح سان $A\times B\neq B\times A$

17.2 جوڙي وارا تعلق (Binary Relations):

جوڙي واري تعلق کي بيان ڪرڻ ۽ ان جي ڊومين (Domain) ۽ رينج (Range) جي سڃاڻپ ڪرڻ.

جوڙي وارو تعلق (Binary Relation):

جيڪڏهن A ۽ B ڪي بہ بہ غير خالي سيٽ آهن تہ پوءِ ڪارٽيسي ضرب اُپت $A\times B$ جو ڪوبہ ماتحت سيٽ R، A کان B ۾ جوڙي وارو تعلق ڪوٺبو.

مثال: جيڪڏهن $A=\{a,b,c\}$ ۽ $B=\{2,4\}$ تہ پوءِ هيٺيان لهو

(الف) A کان B ۾ بہ جوڙي وارا تعلق.
(ب) B کان A ۾ ٽي جوڙي وارا تعلق.
(ج) B ۾ چار جوڙي وارا تعلق.

حل: (الف) A کان B ۾ بہ جوڙي وارا تعلق:

هتي $A\times B=\{(a,2),(a,4),(b,2),(b,4),(c,2),(c,4)\}$

هاڻي $R_1=\{(a,2),(b,4)\}$ ۽ $R_2=\{(b,2),(c,2),(c,4)\}$

A کان B ۾ بہ جوڙي وارا تعلق آهن.

(ب) B کان A ۾ ٽي جوڙي وارا تعلق:

هتي $B\times A=\{(2,a),(2,b),(2,c),(4,a),(4,b),(4,c)\}$

هاڻي $R_1=\{(2,a)\}$، $R_2=\{(2,a),(2,b)\}$ ۽ $R_3=\{(4,a),(4,b),(4,c)\}$

B کان A ۾ ٽي جوڙي وارا تعلق آهن.

(ج) B ۾ چار جوڙي وارا تعلق:

هتي $B\times B=\{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}$

هاڻي $R_1=\varnothing$، $R_2=\{(2,2)\}$، $R_3=\{(2,4),(4,2)\}$ ۽ $R_4=\{(2,2),(2,4)\}$

چار جوڙي وارا تعلق B ۾ آهن.

جوڙي واري تعلق جي ڊومين ۽ رينج (Domain and Range of a Binary Relation):

جيڪڏهن R هڪ جوڙي وارو تعلق آهي. سيٽ A کان سيٽ B ۾، تہ پوءِ R جي ڊومين، هڪ اهڙو سيٽ آهي جنهن جا رڪن R جي سمورن ترتيب ڏنل جوڙن جا پهريان رڪن هجن. R جي ڊومين کي Dom R سان ظاهر ڪبو آهي. R جي رينج، لکبي Range R، هڪ اهڙو سيٽ آهي جنهن جا رُڪن R جي سمورن ترتيب ڏنل جوڙن جا ٻيا رڪن هجن.

مثال طور: جيڪڏهن $A=\{1,2,3,4\}$، $B=\{4,5,6,7\}$ ۽ $R=\{(1,4),(2,4),(3,5),(3,6)\}$، A کان B ۾ هڪ جوڙي وارو تعلق آهي تہ پوءِ $\text{Dom }R=\{1,2,3\}$ ۽ $\text{Range }R=\{4,5,6\}$

مثال: جيڪڏهن $x, y \in N$ ۾ $\mathbb{N}$ ۾ هڪ جوڙي وارو تعلق R هن ريت ڏنل آهي.
$R = \{(x,y) \mid x+y=5\}$ ته پوءِ R کي جدولي نموني ۾ لکو. ان جي ڊومين ۽ رينج به لهو.

حل: جدولي نموني ۾، $R = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

هتي $\text{Dom } R = \{1,2,3,4\}$

۽ $\text{Range } R = \{1,2,3,4\}$

17.3 عمل (Functions):

عمل (Function) رياضي جي هڪ شاخ ڪيلڪيولس (Calculus) جي بنيادي تصورن مان هڪ آهي جنهن سائنس جي ميدان ۾ انقلاب پيدا ڪري ڇڏيو. عمل حقيقت ۾ هڪ اصول يا تعلق آهي جيڪو ٻن سيٽن يا مقدارن ۾ لاڳاپو ناهي ٿو. مثال طور گول جي ايراضي "A" لاڳاپيل آهي رداس "r" سان هن اصول مطابق: $A = \pi r^2$ هتي ، اسين عمل کي سيٽن جي بنياد تي پڙهنداسين.

17.3 (i) عمل کي بيان ڪرڻ ۽ ڊومين ، ڪو ڊومين (Codomain) ۽ رينج جي سڃاڻپ ڪرڻ:

عمل هڪاهڙو جوڙي وارو تعلق آهي جنهن ۾ ڊومين جو هر هڪ رڪن ، رينج جي هڪ ۽ فقط هڪ ئي رڪن سان لاڳاپيل هوندو آهي. مثال طور $\{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}$ هڪ عمل آهي.
جڏهن ته $\{(1,5),(2,6),(2,7),(3,9)\}$ هڪ عمل نه آهي ڇاڪاڻ ته ڊومين جو رڪن "2" رينج جي هڪ کان وڌيڪ رڪنن سان لاڳاپيل آهي.

سيٽ A کان سيٽ B طرف عمل (Function from set A to set B):

فرض ڪريو A ۽ B کي به به غير خالي سيٽ آهن ۽ R هڪ جوڙي وارو تعلق آهي. A کان B ۾ . ته پوءِ R کي A کان B طرف عمل ڪوٺبو جيڪڏهن

(i) $\text{Dom } R = A$

(ii) A جو هر هڪ رڪن ، R وسيلي، B جي ڪنهن هڪ خاص رڪن سان لاڳاپيل هجي.

يعني جيڪڏهن $(a,b) \in R$ ۽ $(a,c) \in R$ ته پوءِ $b=c$ عملن کي عام طرح سان انگريزي يا يوناني الف بي جي اکرن سان ظاهر ڪبو آهي جهڙوڪ f، g، h وغيره ۽ α، β، γ وغيره.
جيڪڏهن f هڪ عمل آهي. A کان B طرف، ته پوءِ اسين ان ريت لکنداسين $f: A \to B$ ۽ هر هڪ $(a,b) \in f$ لاءِ، b کي f وسيلي a جو پاڇو(image) چئبو ۽ هن ريت لکبو $b = f(a)$.

مثال: فرض ڪريو $A = \{1,2,3,4\}$ ۽ $B = \{2,3,4,5\}$ سڃاڻپ ڪريو ته هينين مان ڪهڙو A کان B طرف عمل آهي.

(i) $R_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

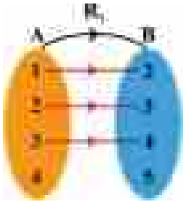
(ii) $R_2 = \{(1,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,5)\}$

(iii) $R_3 = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$

نقشي خاڪو

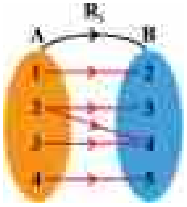
حل:

(i) $R_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$



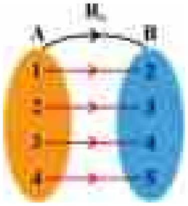
R_1 هڪ عمل نہ آهي ڇاڪاڻ تہ $\text{Dom } R_1 \neq A$
جيئن تہ پاسي واري شڪل ۾ ڏيکاريل آهي

(ii) $R_2 = \{(1,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,5)\}$



R_2 هڪ عمل نہ آهي ڇاڪاڻ تہ ڊومين جو هڪ رڪن "2" B جي ڪنهن مخصوص رڪن سان لاڳاپيل نہ آهي.
جيئن تہ پاسي واري شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.

(iii) $R_3 = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$

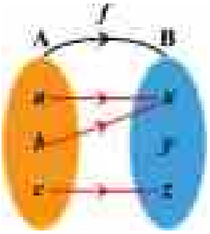


R_3 هڪ عمل آهي ڇاڪاڻ تہ $\text{Dom } R_3 = A$ ۽ ڊومين جو هر هڪ رڪن B جي ڪنهن مخصوص رڪن سان لاڳاپيل آهي.
جيئن تہ پاسي واري شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.

➤ **ڊومين، ڪو ڊومين ۽ رينج (Domain, Co-domain and Range):**

جيڪڏهن A کان B طرف f، هڪ عمل آهي يعني $f: A \rightarrow B$ تہ پوءِ A کي ان جو ڊومين (پهريون سيٽ) ۽ B کي ان جو ڪو ڊومين (Co-domain) چئبو.
جڏهن تہ f جي سيني پاڇن جي سيٽ کي رينج چئبو آهي.

مثال: جيڪڏهن A کان B طرف f هڪ عمل آهي جيئن تہ ڏنل شڪل ۾ ڏيکاريو ويو آهي تہ پوءِ ان جو ڊومين، ڪوڊومين ۽ رينج لکو. $f(a)$ ۽ $f(c)$ جا ملهہ پڻ لکو.



حل:

f جي نقشي خاڪي مطابق
$\text{Dom } f = A = \{a,b,c\}$، f جو ڪو ڊومين $= B = \{x,y,z\}$ ۽ f جي رينج $= \{x,z\}$
ان کان علاوه $f(a) = x$ ۽ $f(c) = z$

نوٽ:

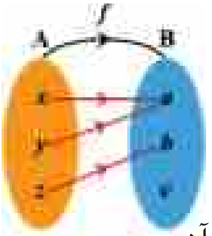
(i) f جي رينج ماتحت سيٽ آهي ڪو ڊومين جو.
(ii) هر هڪ عمل هڪ تعلق آهي پر ان جو ابتڙ صحيح نہ آهي.

17.3 (ii) هيٺين جي وضاحت ڪري سمجهايو :

➤ **انتو ۽ ون - ون عمل (انجيڪٽو عمل):**
➤ **آنٽو عمل (سرجيڪٽو عمل):**
➤ **ون - ون ۽ آنٽو عمل (بائيجيڪٽو عمل):**

سڀ کان اڳ ۾ اسين آنٽو عمل ۽ ون - ون عمل کي بيان ڪريون ٿا.

➤ اِنٽو عمل (Into function):

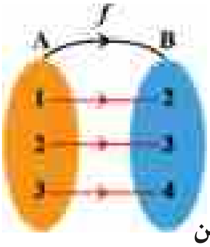


ڪن ٻن سيٽن A ۽ B لاءِ، هڪ عمل $f:A\rightarrow B$ اِنٽو ڪونبو جيڪڏهن f جي رينج، B جو واجب ماتحت سيٽ هجي. (يعني ته $\text{Range } f\subset B$)

مثال طور: $A=\{x,y,z\}$ ۽ $B=\{a,b,c\}$ لاءِ هڪ عمل $f:A\rightarrow B$ جيڪو هن ريت بيان ڪيل آهي $f=\{(x,a),(y,a),(z,b)\}$

ان عمل کي اِنٽو عمل چئبو ڇاڪاڻ ته $\text{Range } f\subset B$، جيئن ڏنل شڪل ۾ ڏيکاريل آهي جڏهن ته $\text{Range } f=\{a,b\}$

➤ ون - ون عمل (One-one function):



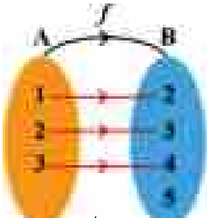
ڪن ٻن سيٽن A ۽ B لاءِ، هڪ عمل $f:A\rightarrow B$ کي ون - ون عمل ڪونبو جيڪڏهن A جي مختلف رڪنن جا B ۾ ڌار ڌار پاڇا هجن.

مثال طور: $A=\{1,2,3\}$ ۽ $B=\{2,3,4\}$ لاءِ هڪ عمل $f:A\rightarrow B$ جيڪو هن ريت بيان ڪيل آهي $f=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$.

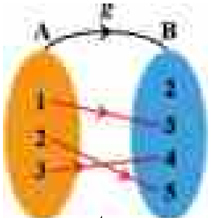
ان کي ون - ون عمل چئبو ڇاڪاڻ ته A جي مختلف رڪنن جا B ۾ ڌار ڌار پاڇا آهن جيئن ته ڏنل شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.

➤ انٽو ۽ ون_ون عمل يا انجيڪٽو عمل (Into and one-one function or injective function):

اهڙو عمل جيڪو اِنٽو هجڻ سان گڏوگڏ ون_ون به هجي، تنهن کي انٽو ۽ ون - ون عمل يا انجيڪٽو عمل چئبو آهي.



شڪل(i)



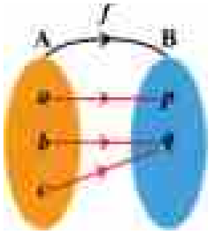
شڪل(ii)

مثال طور: $A=\{1,2,3\}$ ۽ $B=\{2,3,4,5\}$ لاءِ، هڪ عمل $f:A\rightarrow B$ جيڪو هن ريت بيان ڪيل آهي. $f=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ ان کي انجيڪٽو عمل چئبو ڇاڪاڻ ته اهو اِنٽو هجڻ سان گڏوگڏ ون_ون به آهي. جيئن شڪل(i) ۾ ڏيکاريل آهي.

هڪ عمل $g:A\rightarrow B$ جيڪو هن ريت بيان ڪيل آهي $g=\{(1,3),(2,5),(3,4)\}$ ان کي پڻ انجيڪٽو عمل چئبو جيئن ته شڪل (ii) ۾ ڏيکاريل آهي.

➤ آنٽو عمل يا سرجيڪٽو عمل (Onto function or surjective function):

ڪن ٻن سيٽن A ۽ B لاءِ، هڪ عمل $f:A\rightarrow B$ آنٽو يا سرجيڪٽو عمل ڪونبو جيڪڏهن $\text{Range } f=B$

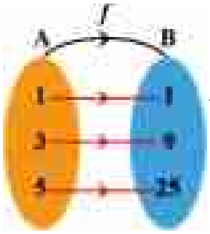


مثال طور: $A=\{a,b,c\}$ ۽ $B=\{p,q\}$ لاءِ، هڪ عمل $f:A\rightarrow B$ جيڪو هن ريت بيان ڪيل آهي $f=\{(a,p),(b,q),(c,q)\}$ ان کي آنٽو عمل چئبو ڇاڪاڻ ته $\text{Range } f=B$ جيئن پاسي واري شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.

➤ ون - ون ۽ آنٽو عمل يا بائيجيڪٽو عمل:
(One-one and onto function or bijective function):

اهڙو عمل جيڪو ون - ون هجڻ سان گڏوگڏ آنٽو به هجي تنهن کي ون - ون ۽ آنٽو يا بائيجيڪٽو عمل چئبو آهي.

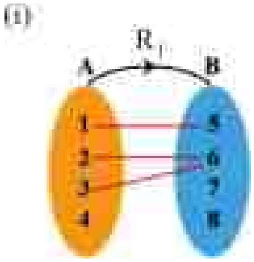
مثال طور: $A=\{1,3,5\}$ ۽ $B=\{1,9,25\}$ لاءِ هڪ عمل $f:A\rightarrow B$ جيڪو هن ريت بيان ڪيل آهي $f=\{(1,1),(3,9),(5,25)\}$ ان کي بائيجيڪٽو عمل چئبو آهي ڇاڪاڻ ته اهو ون - ون هجڻ سان گڏوگڏ آنٽوبه آهي. جيئن ته پاسي واري شڪل ۾ ڏيکاريل آهي

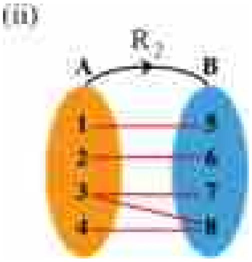


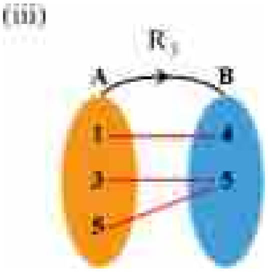
(iii) 17.3 جاچڻ ته ڇا ڏنل تعلق هڪ عمل آهي يا نه:

هڪ تعلق جي عمل هجڻ يا نه هجڻ جي جاچ ڪرڻ لاءِ اسان کي ڊومين تي سمورو ڌيان ڏيڻو پوندو. جيڪڏهن هڪ تعلق ۾، ڊومين جو ڪو رڪن بنا پاڇي جي آهي يا ڪو رُڪن هڪ کان وڌيڪ پاڇن سان لاڳاپيل آهي ته پوءِ اهو تعلق عمل نه آهي.

مثال: A کان B طرف ڏنل تعلقن جي جاچ ڪريو جن جون نقشي شڪليون ڏنل آهن. فيصلو ڪريو ته ڪهڙو عمل آهي ۽ ڪهڙو عمل نه آهي







حل: R_1 هڪ عمل نه آهي ڇاڪاڻ ته ڊومين جو هڪ رڪن ” 4 “ بنا پاڇي جي آهي

R_2 به هڪ عمل نه آهي ڇاڪاڻ ته ڊومين جي هڪ رڪن ” 3 “ کي هڪ کان وڌيڪ پاڇا آهن.

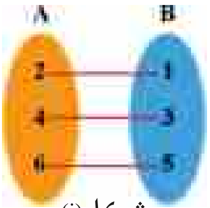
R_3 هڪ عمل آهي ڇاڪاڻ ته ڊومين جي هر هڪ رڪن کي هڪ مخصوص پاڇو آهي.

(iv) 17.3 ون - ون عمل ۽ ون - ون مطابقت جي وچ ۾ فرق:

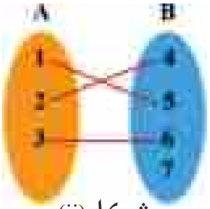
:(Difference between one-one correspondence and one-one function)

فرض ڪريو A ۽ B کي به غير خالي سيٽ آهن. A ۽ B جي وچ واري ون - ون مطابقت ۾،ٻنهي سيٽن مان ڪنهن هڪ سيٽ جو هر هڪ رڪن ٻيئي سيٽ جي نيڪ هڪ رڪن سان لاڳاپيل هوندو آهي. يعني ته ون - ون مطابقت هميشه بائيجيڪٽو عمل کي ظاهر ڪندي آهي جڏهن ته ون - ون عمل هميشه بائيجيڪٽو نه هوندو آهي.

مثال طور: شڪل (i) ون - ون مطابقت ڏيکاري ٿي.
جڏهن ته شڪل (ii) ۾ ون - ون مطابقت نه آهي پر اها ون - ون عمل ڏيکاري ٿي.



شڪل(i)



شڪل(ii)

مشق 17.5

1. x ۽ y جو ملھ لھو جيڪڏھن

(i) $(x-5,10)=(11,y-7)$

(ii) $(5x+8,5y-4)=(3x+10,2y+2)$

(iii) $(2x-3y,5x+y)=(3,16)$

2. جيڪڏھن سيٽ P جا 10 رڪن آھن ۽ سيٽ Q جا 15 رڪن آھن تہ پوءِ $Q\times P$، $P\times Q$ ۽ $P\times P$ جي رڪنن جو تعداد لھو

3. جيڪڏھن $A=\{1,2\}$، $B=\{2,3\}$ ۽ $C=\{1,3,5\}$ تہ ھيٺيان لھو.

(i) $A\times B$ (ii) $B\times C$ (iii) $A\times(B\cup C)$

(iv) $B\times(A\cup C)$ (v) $(A\cap B)\times(B\cap C)$

4. جيڪڏھن $A=\{5,6\}$ ۽ $B=\{1,2,3\}$ تہ ھيٺيان لکو:

(i) $A\times B$ ۾ ٽي جوڙي وارا تعلق (ii) $B\times A$ ۾ چار جوڙي وارا تعلق

(iii) B ۾ پنج جوڙي وارا تعلق (iv) A جا سيئي جوڙي وارا تعلق.

5. ٻن سيٽن A ۽ B لاءِ، جيڪڏھن $O(A)=3$ ۽ $O(B)=4$ تہ پوءِ $A\times B$ ۾ سيني جوڙي واري تعلقن جو تعداد لکو.

6. $A\times B$ جا ھيٺيان جوڙي وارا تعلق جدولي نموني ۾ لکو جڏھن تہ $A=\{0,1,2,3\}$ ۽ $B=\{2,4,6,8\}$ اھڙيءَ طرح جو $a\in A$ ۽ $b\in B$

(i) $R_1=\{(a,b)\mid b<5)\}$ (ii) $R_2=\{(a,b)\mid a+b=9)\}$

(iii) $R_3=\{(a,b)\mid a-b=1)\}$

7. جيڪڏھن تعلق $R=\{(x,y)\mid y=2x+5\}$ آھي Z ۾ تہ پوءِ

(i) رينج لکو جيڪڏھن ڊومين $\{-2,-1,0,1,2\}$ آھي.

(ii) ڊومين لکو جيڪڏھن رينج $\{11,13,15,17\}$ آھي.

8. جيڪڏھن x, y رڪن آھن W جا تہ پوءِ ھيٺين تعلقن جي ڊومين ۽ رينج W ۾ لکو.

(i) $\{(x,y)\mid 3x+y=11\}$ (ii) $\{(x,y)\mid x-y=6\}$

9. جيڪڏھن $f:A\to B$ ھڪ عمل آھي جيڪو ھيٺ ڏنل آھي $f=\{(1,5),(2,6),(3,7),(4,8)\}$ جڏھن تہ $A=\{1,2,3,4\}$ ۽ $B=\mathbb{N}$. ان جي ڊومين، ڪو ڊومين ۽ رينج لکو. $f(2)$ ۽ $f(4)$ جا ملھ بہ لکو.

10. جيڪڏھن $A=\{0,1,2,3,4\}$ ۽ $B=\{2,4,6,8,10\}$ تہ پوءِ جاچ ڪريو تہ چا A کان B طرف ھيٺيان تعلق عمل آھن يا نہ جيڪڏھن اھي عمل آھن تہ پوءِ انھن جا قسم لکو.

(i) $R_1=\{(0,2),(1,4),(2,6),(3,8)\}$

(ii) $R_2 = \{(0,10),(1,8),(2,6),(2,4),(3,4),(4,2)\}$

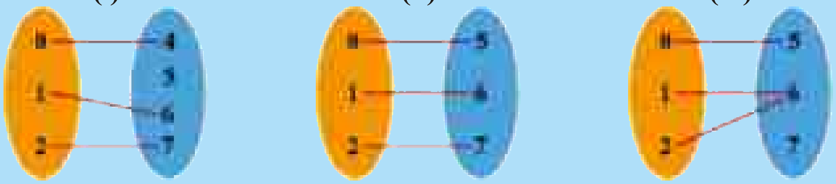
(iii) $R_3 = \{(0,2),(1,4),(2,6),(3,8),(4,8)\}$

(iv) $R_4 = \{(0,2),(1,2),(2,2),(3,2),(4,8)\}$

(v) $R_5 = \{(0,2),(1,4),(2,6),(3,8),(4,10)\}$

11. هيٺين مان ڪهڙو ون - ون عمل يا ون - ون مطابقت يا ڪو بہ نہ آهي.

(i) (ii) (iii)



12. جيڪڏهن $P=\{a,b,c\}$، $Q=\{x,y,z\}$ ۽ $R=\{p,q,r,s\}$ تہ پوءِ هيٺيان لکو.

(i) P کان Q طرف هڪ آنتو عمل f.

(ii) R کان P طرف هڪ آنتو عمل g.

(iii) P کان R طرف هڪ انجيڪٽو عمل h.

(iv) Q کان P طرف هڪ بائيجيڪٽو عمل k.

جائزي واري مشق 17

1. صحيح جواب ڳوليو:

(i) ڪهڙو N جو ماتحت سيٽ آهي

(a) Z (b) Q (c) E (d) P

(ii) $A=\{x \mid x\in Z \wedge x^2 = 25\}$ جو جدولي نمونو ________ آهي.

(a) $\{1,5\}$ (b) $\{-5,5\}$

(c) $\{1,5,25\}$ (d) $\{-5\}$

(iii) ٻن سيٽن A ۽ B لاءِ ، جيڪڏهن $O(A)=O(B)$ تہ پوءِ

(a) $A\subseteq B$ (b) $B=A$

(c) $A\sim B$ (d) $A\subset B$

(iv) $\{x \mid x\in N \wedge x<1\}$ ________ آهي.

(a) واحد سيٽ (b) غير محدود سيٽ

(c) خالي سيٽ (d) بالا سيٽ

(v) جيڪڏهن $A=\{1,2,3,4\}$ ۽ $B=\{2,4,6\}$ تہ پوءِ $A\Delta B =$ ________

(a) $\{1,2\}$ (b) $\{6\}$

(c) $\{1,3\}$ (d) $\{1,3,6\}$

(vi) ڪھڙو عمل متا جي خاصيت نتو رکي

(a) همشڪلي فرق (b) ميلاپ

(c) فرق (d) ڪاٽا

(vii) $\{x \mid x \in P \vee x \in Q\} =$ ______.

(a) $P \cap Q$ (b) $P \cup Q$

(c) $P - Q$ (d) $P \Delta Q$

(viii) $\{x \mid x \in U \wedge x \notin A \cap B\} =$ ______.

(a) $A \cap B$ (b) $(A \cup B)'$

(c) $(A \cap B)'$ (d) $A' \cap B'$

(ix) ڪن بہ بن غير خالي سيٽن A ۽ B لاءِ، جيڪڏھن $A \cup B = U$ ۽ $A \cap B = \varnothing$ تہ پوءِ A ۽ B ______ آھن.

(a) جزا (b) لاڳاپيل سيٽ

(c) برابر سيٽ (d) ڪو بہ نہ

(x) $((A')')' =$ ______.

(a) $(A')'$ (b) A'

(c) A (d) B

(xi) جيڪڏھن $B \supseteq A$ تہ پوءِ $A \cup B =$ ______

(a) A (b) B

(c) $\varnothing$ (d) U

(xii) وين شڪلين ۾ ______ ڪائناتي سيٽ کي ظاھر ڪرڻ لاءِ استعمال ڪبو آھي

(a) مستطيل (b) گول

(c) گول نما (d) سيئي

(xiii) جيڪڏھن $(x, 6) = (2, y-6)$ تہ پوءِ $x + y =$ ______

(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 14

(xiv) جيڪڏھن $O(A \times B) = 100$ ۽ $O(B) = 5$ تہ پوءِ $O(A) =$ ______

(a) 10 (b) 15 (c) 20 (d) 25

(xv) ھڪ عمل کي سرجيڪٽو چئبو آھي جيڪڏھن Co-domain ______ Range

(a) $\supseteq$ (b) $\subset$

(c) $=$ (d) اھي سيئي

(xvi) ھڪ عمل کي انٽو چئبو جيڪڏھن Co-domain ______ Range

(a) $\supseteq$ (b) $\subset$

(c) $=$ (d) ڪو بہ نہ

(xvii) هيٺين مان ڪهڙو عمل آهي.

(a) $\{(2,5),(2,7),(3,8)\}$ (b) $\{(6,7),(7,6),(6,8)\}$

(c) $\{(0,5),(6,0),(5,6)\}$ (d) ڪو بہ نہ

(xviii) هيٺين مان ڪهڙو هميشہ بائيجيڪٽو هوندو آهي

(a) آنٽو عمل (b) ون - ون عمل

(c) اِنٽو عمل (d) ون - ون مطابقت

(xix) جيڪڏهن $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$ تہ پوءِ ڪهڙو ممڪن نہ آهي.

(a) $f(5)=6$ (b) $f(7)=8$

(c) $f(-2)=6$ (d) $f(9)=0$

(xx) هيٺين مان ڪهڙو متا جي خاصيت رکي ٿو

(a) فرق (b) ميلاپ

(c) ڪارتيسي ضرب اپت (d) ڪو بہ نہ

2. جيڪڏهن $A=\{1,2,5\}$ ، $B=\{2,4,6\}$ ۽ $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ تہ پوءِ هيٺيان لهو.

(a) $A\cup B$ (b) $A\cap B$ (c) $A\Delta B$

(d) $A-B$ (e) A' (f) B'

3. سوال 2 جي سيٽن لاءِ ڊي مارگن جي قانونن جي تصديق ڪريو

4. ٻن سيٽن $A=\{a,b,d\}$ ۽ $B=\{a,d,e\}$ لاءِ ميلاپ ۽ ڪاٽا جي متا واري خاصيت جي تصديق ڪريو.

5. ٻن سيٽن $P=\{1,3,5\}$ ۽ $Q=\{1,3,7\}$ لاءِ هيٺين سيٽن کي وين شڪلين وسيلي ڏيکاريو.

(a) $P\cup Q$ (b) $P\cap Q$ (c) $P\Delta Q$ (d) $P-Q$

6. جيڪڏهن $A=\{a,c\}$ ۽ $B=\{b,d\}$ تہ هيٺيان لکو.

(a) ٻہ جوڙي وارا تعلق A ۾ (b) ٽي جوڙي وارا تعلق B ۾

(c) ٽي جوڙي وارا تعلق$A\times B$ ۾ (d) ٻہ جوڙي وارا تعلق$A\cup B$ ۾

7. جيڪڏهن $A=\{1,2,5\}$ ۽ $B=\{6,8\}$ تہ پوءِ A کان B طرف عمل لهو جيڪو

(a) آنٽو عمل هجي (b) انٽو عمل هجي

خلاصو

- جدولي ، بياني ۽ علامتي نمونا هڪ سيٽ کي ظاهر ڪرڻ جا طريقا آهن.
- خالي سيٽ ۾ ڪو به رڪن نه هوندو آهي.
- جيڪڏهن A ماتحت سيٽ آهي B جو ته پوءِ B بالا سيٽ آهي A جو.
- جيڪڏهن $B \subseteq A$ ۽ $A \subseteq B$ ته پوءِ $A = B$.
- هڪ جيترا سيٽ ون - ون مطابقت رکن ٿا.
- جيڪڏهن $A \subseteq B$ ۽ $A \neq B$ ته پوءِ $A \subset B$.
- ميلاپ ، ڪاٽا ، فرق ، همشڪلي فرق ، ڪامپليمينٽ ۽ ڪارٽيسي ضرب اُپت سيٽن تي عمل آهن.
- جيڪڏهن $A \cap B = \varnothing$ ته پوءِ A ۽ B منفرد سيٽ آهن.
- جيڪڏهن $A \cup B = U$ ته پوءِ A ۽ B مڪمل سيٽ آهن.
- جُزا هميشہ منفرد ۽ مڪمل سيٽ هوندا آهن.
- فرق ۽ ڪارٽيسي ضرب اپت متا جي خاصيت نٿا رکن.
- ميلاپ، ڪاٽا ۽ همشڪلي فرق متا ۽ سنگت واري خاصيت رکن ٿا.
- ميلاپ ۽ ڪاٽا هڪٻئي تي ورهاست واري خاصيت رکن ٿا.
- ڊي مارگن جا قانون: (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- سيٽن ، انهن جي تعلق ۽ عملن جي جاميٽري واري اظهار کي وين شڪل چئبو آهي.
- جان وين (John Venn)، 1881ع ۾ وين شڪلين کي پيش ڪيو
- وين شڪلين ۾ سيٽن ۽ ڪائناتي سيٽ کي ترتيبوار گولن يا بيضوي شڪلين ۽ مستطيل سان ظاهر ڪبو آهي.
- جيڪڏهن $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c$ ۽ $b = d$
- $O(A \times B) = O(A) \cdot O(B)$
- $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
- ڪارٽيسي ضرب اپت جي هر هڪ ماتحت سيٽ کي جوڙي وارو تعلق چئبو آهي.
- عمل هڪ اهڙو جوڙي وارو تعلق آهي جنهن ۾ ڊومين جي هر هڪ رڪن کي هڪ مخصوص پاچو هوندو آهي.
- جيڪڏهن $f : X \rightarrow Y$ هڪ عمل آهي ته پوءِ X ۽ Y ترتيبوار ڊومين ۽ ڪو ڊومين آهن جڏهن ته رينج سمورن پاچن جو سيٽ آهي.
- هڪ عمل (i) انتو ڪونبو جيڪڏهن Range ⊂ Co-domain
  (ii) آنٽو ڪونبو جيڪڏهن Range = Co-domain
  (iii) ون - ون ڪونبو جيڪڏهن ڊومين جي مختلف رڪنن جا رينج ۾ ڌار ڌار پاچا هجن.
- هڪ عمل (i) انجيڪٽو ڪونبو جيڪڏهن اهو ون - ون ۽ انتو آهي
  (ii) سرجيڪٽو ڪونبو جيڪڏهن اهو آنٽو آهي
  (iii) بائيجيڪٽو ڪونبو جيڪڏهن اهو ون - ون ۽ آنٽو آهي.
- ون - ون مطابقت هميشہ بائيجيڪٽو هوندي آهي.
- ون - ون عمل هميشہ بائيجيڪٽو نہ هوندو آهي.

يونٽ 18

ڦيرڦار يا مٽجڻ
VARIATIONS

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي پڙهڻ کانپوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته

- نسبت، تناسب ۽ ڦير ڦار (سڌو ۽ اُبتو) بيان ڪن
- مسلسل تناسب ۾ ٽيون، چوٿون ۽ وچيون متناسب لهن
- تناسبن جا قانون
  - تناسب جو سوال حل ڪرڻ لاءِ عڪسي نسبت، نسبت جي تبديلي، نسبت جي ملائڻ ۽ نسبت جي ونڊ وارن قانونن جو استعمال ڪن
- گڏيل ڦير ڦار کي بيان ڪن
- گڏيل ڦير ڦار سان لاڳاپيل سوال حل ڪن
- تناسبن تي مشتمل شرطيه مساواتن کي ثابت ڪرڻ لاءِ K واور طريقو استعمال ڪن
- ڦير ڦار وارا روز مره زندگي جا مسئلا حل ڪن

18.1 نسبت، تناسب ۽ ڦير ڦار

18.1.1 نسبت، تناسب ۽ ڦير ڦار (سڌو ۽ اُبتو) بيان ڪرڻ:

(a) نسبت (Ratio):

ساڳي ايڪن واري ٻن مقدارن جي ڀيٽ کي نسبت چئبو آهي. اها ٻن ساڳي قسم جي مقدارن جو تعلق آهي. ٻين لفظن ۾، نسبت جو مطلب آهي ته هڪ مقدار ٻي مقدار جو گهڻو حصو آهي. جيڪڏهن a ۽ b ٻه ساڳي قسم جون مقدارون آهن ۽ b ٻڙي نه آهي ته پوءِ a ۽ b جي نسبت کي ان ريت لکبو: $a{:}b$ يا $\frac{a}{b}$

مثال طور: جيڪڏهن هڪ ڪلاس ۾ 13 ڇوڪرا ۽ 8 ڇوڪريون آهن ته پوءِ ڇوڪرن جي تعداد جي نسبت ڇوڪرين جي تعداد سان هن ريت لکي سگهجي ٿي 13:8 يا اٽپورن ۾ $\frac{13}{8}$ لکبو.

نوٽ:

(i) نسبت ۾ رُڪنن جي ترتيب جي اهميت هوندي آهي.
(ii) نسبت جو ڪوبه ايڪو نه هوندو آهي.
(iii) نسبت $a{:}b$ ۾ پهرين رُڪن (First term) کي ”مُنڍ“ (Antecedent) چئبو آهي ۽ ٻيئي رُڪن (Second term) کي ”پُڇڙ“ (Consequent) چئبو آهي.

مثال 1: هيٺين جي نسبت لکو:

(i) 400 ميٽر ۽ 900 ميٽر　　(ii) 700 گرام ۽ 2 ڪلو گرام
(iii) 30 سيڪنڊ ۽ 2 منٽ　　(iv) 200 رُپيا ۽ 300 گرام

حل:

(i) 400 ميٽر ۽ 900 ميٽر جي نسبت

$$400:\ 900=\frac{400}{900}=\frac{4}{9}=4:9$$

900 : 400 جي سادي صورت 9 : 4 آهي.

(ii) 700 گرام ۽ 2 ڪلو گرام جي نسبت

جيئن ته 1ڪلوگرام = 1000 گرام

تنهن ڪري 2 ڪلوگرام = 2000 گرام

هاڻي

$$700:\ 2000=\frac{700}{2000}=\frac{7}{20}=7:20$$

(iii) 30 سيڪنڊ ۽ 2 منٽ جي نسبت

جيئن ته 1 منٽ = 60 سيڪنڊ

تنهن ڪري 2 منٽ = 120 سيڪنڊ

هاڻي

$$30:\ 120=\frac{30}{120}=\frac{1}{4}=1:4$$

(iv) 200 رُپيا ۽ 300 گرام جي نسبت

جيئن ته مقدارون ساڳي قسم جون نه آهن تنهن ڪري 200 روپيا ۽ 300 گرام جي نسبت نٿي لهي سگهجي.

مثال 2: نسبت $5a+2b : 4a+3b$ لهو جيڪڏهن $a : b = 4 : 5$

حل: ڏنل آهي ته $a : b = 4 : 5$ يا $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$

هاڻي $5a + 2b : 4a + 3b = \frac{5a+2b}{4a+3b}$

$$= \frac{\frac{5a+2b}{b}}{\frac{4a+3b}{b}} = \frac{5(\frac{a}{b})+2(\frac{b}{b})}{4(\frac{a}{b})+3(\frac{b}{b})}$$ (انس ۽ ڇيد کي b سان ونڊ ڪندي)

$$= \frac{5(\frac{4}{5})+2}{4(\frac{4}{5})+3} = \frac{4+2}{\frac{16}{5}+3} = \frac{6}{\frac{31}{5}} = \frac{30}{31} \qquad \left(\because \frac{a}{b} = \frac{4}{5}\right)$$

انهي ڪري $5a + 2b : 4a + 3b = 30 : 31$

مثال 3: m جو ملهه لهو جيڪڏهن نسبتون $3m+5 : 4m+3$ ۽ $3 : 2$ برابر آهن

حل:

ڏنل شرط موجب

$\Rightarrow \frac{3m+5}{4m+3} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow 3(3m+5) = 2(4m+3)$

$\Rightarrow 9m+15 = 8m+6$

$\Rightarrow 9m-8m = 6-15$

$\Rightarrow m = -9$

انهي ڪري m جوگهربل مُلهه -9 آهي

مثال 4: نسبت $4:15$ جي هر هڪ رڪن ۾ڪهڙو عدد جوڙ ڪجي جو اها نسبت $\frac{2}{3}$ جي برابرٿيئي.

حل: فرض ڪيو ته گهربل عدد a آهي

ڏنل شرط موجب

$\Rightarrow \frac{4+a}{15+a} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow 3(4+a) = 2(15+a)$

$\Rightarrow 12+3a = 30+2a$

$\Rightarrow 3a-2a = 30-12$

$\Rightarrow a = 18$

انهي ڪري گهربل عدد 18 آهي

(d) تناسب (Proportion):

ٻن نسبتن جي برابري کي تناسب چئبو آهي يا تناسب هڪ اهڙو بيان آهي جيڪو ٻن نسبتن جي برابري طور ظاهر ٿي سگهي. جيڪڏهن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ته پوءِ c,b,a ۽ d تناسب ۾ آهن ۽ اسين ان کي هن ريت لکي سگهون ٿا: $a:b::c:d$ جڏهن ته مقدار a ۽ d کي پاهريان رُڪن (Extremes) چئبو آهي. مقدار b ۽ c کي وچيان رُڪن (Means) چئبو آهي. a، b، c ۽ d جي تناسب کي هن ريت لکبو آهي.

$a:b::c:d$

يا $a:b = c:d$

يا $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

يا $ad = bc$

نوٽ: ٻاهرين رُڪنن جي ضرب اُپت = وچين رُڪنن جي ضرب اُپت

مثال 5: x جو مُلھ لھو جيڪڏھن $40:60=50:x$

حل: ڏنل آهي تہ $40:60=50:x$

جيئن تہ وچين رُڪنن جي ضرب اُپت = ٻاهرين رُڪنن جي ضرب اُپت

تنھنڪري $40x=60\times 50$

$$x=\frac{60\times 50}{40}=75$$

يعني تہ $x = 75$

مشق 18.1

1. هيٺين جي نسبت لھو

(i) 70 ڪلو گرام ۽ 28 ڪلو گرام
(ii) 60 سينٽي ميٽر ۽ 1 ميٽر
(iii) 40 سيڪنڊ ۽ 3 منٽ
(iv) 200 ملي ليٽر ۽ 2 ليٽر
(v) $135°$ ۽ $360°$
(vi) 3.5 ڪلو گرام ۽ 5 ڪلو گرام 200 گرام

2. هڪ ڪارخاني ۾ 120 ڪم ڪندڙ آهن جن مان 45 عورتون ۽ باقي مرد آهن. تہ هيٺين کي ڳوليو:
(i) مردن ۽ عورتن جي نسبت
(ii) عورتن ۽ مردن جي نسبت
(iii) عورتن ۽ سمورن ڪم ڪندڙن جي نسبت
(iv) مردن ۽ سمورن ڪم ڪندڙن جي نسبت:

3. جيڪڏهن $5(4x-2y)=3x-4y$ تہ $x:y$ لھو.

4. "a" جو ملھ لھو جيڪڏھن نسبتون $3a+4:2a+5$ ۽ $4:3$ برابر آهن.

5. نسبت $5:27$ جي هر هڪ رُڪن ۾ ڪھڙو عدد جوڙ ڪجي جو اها نسبت $1:3$ جي برابر ٿيئي.

6. جيڪڏهن $a:b=5:8$ تہ پوءِ $3a+4b:5a+7b$ جو ملھ لھو.

7. هيٺين مان x جو مُلھ لھو.

(i) $2x+5:5::3x-2:7$

(ii) $\frac{4x-3}{5}:\frac{3}{4}::\frac{4x}{3}:\frac{7}{2}$

(iii) $\frac{x-3}{2}:\frac{5}{x-1}::\frac{x-1}{3}:\frac{4}{x+4}$

(iv) $(a^2-ab+b^2):x::\frac{a^3+b^3}{a-b}:(a+b)^2$

(v) $11-x:8-x::25-x:16-x$

(e) ڦير ڦار (Variation):

هڪ مقدار ۾ تبديلي اچڻ ڪري ٻي مقدار جي متجڻ کي ڦير ڦار چئبو آهي.ڦيرڦار جا ٻہ قسم آهن

- سڌو ڦير ڦار
- اُبتو ڦير ڦار

سڌو ڦير ڦار (Direct variation) :

جيڪڏهن ٻہ مقدارون A ۽ B اهڙي طرح سان ڳنڍيل هجن جو جيڪڏهن A هڪ نسبت ۾ وڌي (يا گهٽجي) تہ پوءِ B پڻ ساڳي نسبت ۾ وڌي (يا گهٽجي) تہ پوءِ ان ڦير ڦار کي سڌو ڦير ڦار چئبو آهي. جيڪڏهن هڪ مقدار y سڌي طرح متجي ٿي. مقدار x جي مطابق تہ پوءِ اسين چونداسين تہ y سڌي طرح x سان متناسب آهي ۽ هن ريت لکنداسين: $y\propto x$ يا $y=k\,x$ جڏهن تہ $k\neq 0$

علامت " $\propto$ " کي تناسب يا متجڻ جي نشاني چئبو آهي ۽ k کي تناسب يا متجڻ جو مستقل (Constant of variation) چئبو آهي.

مثال طور:

(i) چورس جي پاسي جي ڊيگهه ۽ ان جي ايراضي سڌي تناسب ۾ آهن.

(ii) سائيڪل جي رفتار ۽ ان جو مفاصلو سڌي تناسب ۾ آهن.

مثال: جيڪڏهن y سڌي طرح متجي ٿو x جي مطابق ته پوءِ هيٺيان لهو.

(a) x ۽ y کي ڳنڍيندڙ مساوات (b) x ۽ y جي وچ وارو تعلق جڏهن $x=3$ ۽ $y=7$

(c) y جي قيمت جڏهن $x=24$ (d) x جي قيمت جڏهن $y=21$

حل:(a) جيئن ته y سڌي طرح متجي ٿو x جي مطابق

تنهنڪري $y \propto x$

يعني $y = kx$ ... (i)

جڏهن ته متجڻ جو مستقل k آهي

(b) مساوات (i) ۾ $x=3$ ۽ $y=7$ رکڻ سان،

اسان کي مليو $7=3k$

$$\Rightarrow k=\frac{7}{3}$$

مساوات (i) ۾ x جي قيمت رکڻ سان، اسان کي مليو $y=\frac{7}{3}x$ ...(ii)

(c) مساوات (ii) ۾ $x=24$ رکڻ سان، اسان کي مليو $y=\frac{7}{3}(24) = 56$

(d) مساوات (ii) ۾ $y=21$ رکڻ سان، اسان کي مليو

$$21=\frac{7}{3}x \Rightarrow x=\frac{3\times 21}{7}=9$$

مثال 2: جيڪڏهن y سڌي طرح متجي ٿو x جي بيئي مول مطابق جڏهن ته $x=16$ ۽ $y=10$ ته پوءِ y جو ملهه لهو جڏهن ته $x=36$

حل: ڏنل آهي ته y سڌي طرح سان متجي ٿو x جي بيئي مول مطابق

يعني $y \propto \sqrt{x}$

يا $y=k\sqrt{x}$ ... (i)

جڏهن ته متجڻ جو مستقل k آهي.

مساوات (i) ۾ $x=16$ ۽ $y=10$ رکڻ سان اسان کي مليو

$$10=k\sqrt{16}$$

$$\Rightarrow k=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

مساوات (i) ۾ $k=\frac{5}{2}$ رکڻ سان اسان کي مليو

$$y=\frac{5}{2}\sqrt{x} \quad ...(ii)$$

مساوات (ii) ۾ $x=36$ رکڻ سان اسان کي مليو

$$y=\frac{5}{2}\sqrt{36}$$

$$\Rightarrow y=\frac{5}{2}(6) = 15$$

مثال 3: جيڪڏهن V سڌي طرح متجي ٿو r جي ڪعب مطابق ۽ $V=\frac{792}{7}$ جڏهن ته $r=3$
V جو ملهه لهو جڏهن ته $r=7$

حل: جيئن ته V سڌي طرح متجي ٿو r جي ڪعب مطابق

تنهنڪري $V \alpha r^3$

$V=kr^3$ (i) (جڏهن ته k متجڻ جو مستقل آهي)

مساوات (i) ۾ $r=3$ ۽ $V=\frac{792}{7}$ رکندي

اسان کي مليو $\frac{792}{7}=k(3)^3 \Rightarrow k=\frac{792}{7\times 27}=\frac{88}{21}$

انهيءَ ڪري $V=\frac{88}{21}r^3$ … (ii)

مساوات(ii) ۾ $r=7$ رکندي

اسان کي مليو $V=\frac{88}{21}(7)^3=\frac{4312}{3}$

اُبتو قير قار (Inverse Variation):

جيڪڏهن ٻه مقدارون هڪٻئي سان اهڙي طرح ڳنڍيل هجن جو هڪ مقدار ۾ اضافو ٻيئي مقدار ۾ گهٽتائي جو سبب ٿيئي ۽ ان جي ابتڙ به ٿيئي ته پوءِ مقدارون هڪ ٻئي سان اُبتو قير قار يا متجڻ رکن ٿيون. جيڪڏهن هڪ مقدار y اُبتو متجي ٿي x جي مطابق ته اسين چونداسين ته y اُبتي طرح سان x سان متناسب آهي ۽ اسين ان کي هن ريت لکنداسين.

$y \propto \frac{1}{x}$ يا $y=\frac{k}{x}$ جڏهن ته $k \neq 0$ (متجڻ جو مستقل)

$\Rightarrow yx=k$

مثال 1: جيڪڏهن y اُبتو متجي ٿو x جي مطابق ۽ $y=7$ جڏهن $x=2$ ته پوءِ y جو ملهه لهو جيڪڏهن $x=126$

حل: هتي y اُبتو متجي ٿو x جي مطابق

يعني ته $y \propto \frac{1}{x}$

$\Rightarrow y=k(\frac{1}{x})=\frac{k}{x}$

$\Rightarrow k=xy$ … (i)

مساوات (i) ۾ $y=7$ ۽ $x=2$ رکڻ سان

اسان کي مليو $k=(2)(7)=14$

$\Rightarrow xy=14$ … (ii)

مساوات(ii) ۾ $x=126$ رکڻ سان

اسان کي مليو. $(126)y=14$

$y=\frac{14}{126}$

$y=\frac{1}{9}$

مثال 2: جيڪڏهن y اُبتو متجي ٿو x جي ٽيئن مول مطابق ۽ $y=27$ جڏهن $x=8$ ته پوءِ x جو ملهه لهو جڏهن $y=36$

حل: هتي y اُبتو متجي ٿو $\sqrt[3]{x}$ جي مطابق

يعني ته $y \propto \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

يا $y=\frac{k}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow y\left(\sqrt[3]{x}\right)=k$ … (i)

مساوات (i) ۾ $x=8$ ۽ $y=27$ رکڻ سان

اسان کي مليو $k=(27)(\sqrt[3]{8})=54$

هاڻي مساوات(i) ۾ $k=54$ رکڻ سان

اسان کي مليو $\left(y\sqrt[3]{x}\right)=54$ … (ii)

هاڻي مساوات (ii) ۾ $y=36$ رکڻ سان

اسان کي مليو $(36)\left(\sqrt[3]{x}\right)=54$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x}=\frac{54}{36}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow x=\frac{27}{8}$

مشق 18.2

1. جيڪڏهن y سڌي طرح متجي ٿو x جي مطابق ۽ $y=10$ جڏهن $x=3$ تہ پوءِ هينيان لهو.
   (i) y کي x جي شڪل ۾ (ii) y جڏهن $x=6$ (iii) x جڏهن $y=15$
2. جيڪڏهن $T \propto V$ ۽ $V=15$ جڏهن $T=24$ تہ پوءِ هينيان لهو.
   (i) V ۽ T کي گڏيندڙ مساوات (ii) V جڏهن $T=30$ (iii) T جڏهن $V=10$
3. جيڪڏهن $u \propto \sqrt[3]{v}$ ۽ $u=4$ جڏهن $v=64$ تہ پوءِ u جو ملھ لهو جڏهن $v=216$ ۽ v جو ملھ لهو جڏهن $u=5$
4. جيڪڏهن F سڌي طرح متجي ٿو m^3 جي مطابق جڏهن $m=3$ ۽ $F=81$ تہ پوءِ F لهو جڏهن $m=5$
5. جيڪڏهن y اُبتو متجي ٿو x جي مطابق ۽ $y=10$ جڏهن $x=3$ تہ پوءِ y لهو جڏهن $x=10$
6. هڪ گيس جو مقدار V اُبتو متجي ٿو داٻ P جي بيٺي مول مطابق ۽ $V=12$ جڏهن $P=9$ تہ پوءِ P لهو جڏهن $V=4$
7. جيڪڏهن $F \propto \frac{1}{r^2}$ ۽ $F=8$ جڏهن $r=2$ تہ هينيان لهو
   (i) F جڏهن $r=5$ (ii) r جڏهن $F=24$
8. x جو ٽيون مول متجي ٿو y جي چورس مطابق جيڪڏهن $x=8$ ۽ $y=3$. تہ پوءِ x جو ملھ لهو جڏهن $y=\frac{3}{2}$
9. ٻن جسمن جي وچ واري قوت F اُبتو متجي ٿي انهن ٻنهي جي مرڪزن جي وچ واري فاصلي d جي چورس مطابق.جيڪڏهن $F=2$ ۽ $d=3$ تہ پوءِ d جو ملھ لهو جڏهن $F=72$
10. جيڪڏهن y اُبتو متجي ٿو $(x-5)$ جي مطابق جڏهن $y=6$ ۽ $x=8$. تہ پوءِ y جو ملھ لهو جڏهن $x=10$.

18.1(ii) مسلسل تناسب ۾ ٽيون، چوٿون ۽ وچيون متناسب لهڻ

اسين تناسب سان اڳيئي واقف آهيون. جيڪڏهن a، b، c ۽ d تناسب ۾ آهن تہ پوءِ $a:b::c:d$ هتي a, b, c ۽ d کي ترتيبوار پهريون، ٻيون، ٽيون، ۽چوٿون متناسب چوندا آهيون.

(a) ٽيون متناسب (Third Proportional):

مثال 1:
جيڪڏهن هڪ تناسب ۾ 4، 7 ۽ 14 ترتيبوار پهريون، ٻيون ۽ چوٿون متناسب آهن تہ پوءِ ٽيون متناسب لهو.

حل: فرض ڪريو تہ x ٽيون متناسب آهي.
تہ پوءِ

$$4:7::x:14$$
$$\Rightarrow \quad 7x=56$$
$$\Rightarrow \quad x=8$$

مثال 2:
جيڪڏهن $(a-b)$، (a^2+ab+b^2) ۽ (a^3-b^3) ترتيبوار پهريون، ٻيون ۽ چوٿون متناسب آهن تہ پوءِ ٽيون متناسب لهو.

حل: فرض ڪريو تہ x ٽيون متناسب آهي
تہ پوءِ

$$(a-b):(a^2+ab+b^2)::x:a^3-b^3$$
$$\Rightarrow \quad (a^2+ab+b^2)x=(a-b)(a^3-b^3)$$
$$(a^2+ab+b^2)\,x=(a-b)^2(a^2+ab+b^2)$$
$$\Rightarrow \quad x=\frac{(a-b)^2(a^2+ab+b^2)}{(a^2+ab+b^2)}$$
$$\Rightarrow \quad x=(a-b)^2$$

(b) چوٿون متناسب (Fourth Proportional):

مثال 1: چوٿون متناسب لهو جيڪڏهن پهريان ٽي متناسب a^3+b^3، $a-b$ ۽ a^2-ab+b^2 آهن.

حل:

فرض ڪريو ته x چوٿون متناسب آهي ته پوءِ

$$a^3+b^3 : a-b :: (a^2-ab+b^2) : x$$

يعني ته $$x\,(a^3+b^3) = (a-b)(a^2-ab+b^2)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{(a-b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{a-b}{a+b}$$

مسلسل تناسب (Continued Proportion) ۽ وچون متناسب (Mean Proportional):

مقدارون a، b ۽ c مسلسل تناسب ۾ هونديون جيڪڏهن

$$a:b=b:c$$

يا $$a:b::b:c$$

$$\Rightarrow b^2 = ac$$

هتي b کي وچون متناسب چونداسين

مثال 1: x^2-y^2 ۽ $\frac{x-y}{x+y}$ جو وچون متناسب معلوم ڪريو.

حل: فرض ڪريوته z وچون متناسب آهي، ته پوءِ

$$x^2-y^2 : z :: z : \frac{x-y}{x+y}$$

يعني ته $$z^2 = (x^2-y^2)\frac{(x-y)}{x+y} = (x-y)^2$$

$$\Rightarrow \quad z = x-y$$

مثال 2: a جو ملهه لهو جيڪڏهن 7، $a-3$ ۽ 28 مسلسل تناسب ۾ آهن.

حل: جيئن ته 7، $a-3$ ۽ 28 مسلسل تناسب ۾ آهن.

تنهنڪري $$7 : a-3 :: a-3 : 28$$

يعني ته $$(a-3)^2 = 7\times 28$$

$$\Rightarrow \quad (a-3)^2 = 196$$

$$\Rightarrow \quad a-3 = 14$$

$$\Rightarrow \quad a = 14+3$$

$$\Rightarrow \quad a = 17$$

مشق 18.3

1. ٽيون متناسب لهو جيڪڏهن پهريون، ٻيون ۽ چوٿون متناسب هيٺ ڏنل آهن

(i) 6، 18 ۽ 54 (ii) a^2-b^2، $a+b$ ۽ $a-b$

(iii) $(x+y)^2$، x^3+y^3 ۽ $x+y$ (iv) $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$، $\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$ ۽ $a+b$

2. هيٺين جو چوٿون متناسب لهو.

(i) 8, 4, 2 (ii) $a^3+b^3,\ a^2-b^2,\ a^2-ab+b^2$

(iii) $a^2-8a+12,\ a-2,\ 2a^3-12a^2$

(iv) $(a^2-b^2)(a^2-ab+b^2), a^3+b^3, a^3-b^3$

3. هيٺين جو وچون متناسب لهو.

(i) 8, 18 (ii) $5ab^2, 28a^3b^2$

(iii) $a^4-b^4, \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ (iv) $a^3-b^3, \dfrac{a-b}{a^2-ab+b^2}$

4. هيٺ ڏنل عدد مسلسل تناسب ۾ آهن ته x جو ملهه لهو.

(i) 45, x , 5 (ii) 16, x , 9

(iii) 12, 3x -6, 27 (iv) 7, x -3, 112

18.2 تناسب جا قانون:

18.2.1 تناسب جو سوال حل ڪرڻ لاءِ عڪسي نسبت، نسبت جي تبديلي، نسبت جي ملائڻ ۽ نسبت جي ونڊ وارن قانونن جو استعمال ڪرڻ:

(i) عڪسي نسبت وارو قانون (Theorem of invertendo):

جيڪڏهن $a:b=c:d$ ته پوءِ $b:a=d:c$

متي ڏنل بيان کي عڪسي نسبت وارو قانون چئبوآهي.

ثابتي: جيئن ته $a:b=c:d$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$ (ٻنهي پاسن جو اُبتڙ وٺڻ سان)

يعني ته $b:a=d:c$ **انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.**

مثال طور: (i) جيڪڏهن $2:3 = 4:6$ ته پوءِ عڪسي نسبت واري قانون مطابق

$$3:2=6:4$$

(ii) جيڪڏهن $4p:5q=2r:5s$ ته پوءِ عڪسي نسبت واري قانون مطابق

$$5q:4p=5s:2r$$

(ii) نسبت جي تبديلي وارو قانون (Theorem of Alternando):

جيڪڏهن $a:b=c:d$ ته پوءِ $a:c=b:d$

متين بيان کي نسبت جي تبديلي وارو قانون چئبو آهي.

ثابتي: جيئن ته $a:b=c:d$

يا $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow \quad ad=bc$$

ٻنهي پاسن کي cd سان ونڊ ڪندي

اسان کي مليو $$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

يعني $a:c=b:d$

مثال:

(i) جيڪڏهن $2:5=6:15$ تہ پوءِ نسبت جي تبديلي واري قانون مطابق

$$2:6=5:15$$

(ii) جيڪڏهن $4p-1:2-3q=5+2r:2s+1$ تہ پوءِ نسبت جي تبديلي واري قانون مطابق

$$4p-1:5+2r=2-3q:2s+1$$

(iii) نسبت ڪي ملائڻ وارو قانون (Theorem of Componendo):

جيڪڏهن $a:b=c:d$ تہ پوءِ نسبت ڪي ملائڻ واري قانون مطابق

(i) $a+b:b=c+d:d$ (ii) $a:a+b=c:c+d$

ثابتي: (i) جيئن تہ $a:b=c:d$

تہ پوءِ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

ٻنهي پاسن ۾ 1 جوڙ ڪرڻ سان

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

يا $a+b:b=c+d:d$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

ثابتي: (ii) جيئن تہ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

تہ پوءِ $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (عڪسي نسبت واري قانون مطابق)

ٻنهي پاسن ۾ 1 جوڙ ڪرڻ سان

$$\frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1$$

$$\frac{b+a}{a}=\frac{d+c}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+a}=\frac{c}{c+d}$$

يا $a:a+b=c:c+d$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

مثال: جيڪڏهن $p+2:q=r:s-3$ تہ پوءِ نسبت ڪي ملائڻ واري قانون (i) جي مطابق

$$p+2+q:q=r+s-3:s-3$$

ساڳي ريت، نسبت ڪي ملائڻ واري قانون (ii) جي مطابق

$$p+2:p+2+q=r:r+s-3$$

(iv) نسبت جي ونڊ وارو قانون (Theorem of Dividendo):

جيڪڏهن $a:b=c:d$ تہ پوءِ نسبت جي ونڊ واري قانون مطابق

(i) $a-b:b=c-d:d$ (ii) $a:a-b=c:c-d$

ثابتي: (i) جيئن تہ $a:b=c:d$

يا $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

ٻنهي پاسن مان 1 کي ڪٽ ڪندي

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$$

يا $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

يا $a-b:b=c-d:d$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

ثابتي: (ii) جيئن تہ $a:b=c:d$

تنهنڪري $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

عڪسي نسبت واري قانون موجب

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

ٻنهي پاسن مان 1 کي ڪٽ ڪندي

$$\frac{b}{a}-1=\frac{d}{c}-1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b-a}{a}=\frac{d-c}{c}$$

عڪسي نسبت واري قانون موجب

$$\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$$

يا $a:b-a=c:d-c$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

مثال: جيڪڏهن $m+5:n-3=4p+7:3q+2$ تہ پوءِ ثابت ڪري ڏيکاريو تہ
$m-n+8:n-3=4p-3q+5:3q+2$

حل: جيئن تہ $m+5:n-3=4p+7:3q+2$

$$\Rightarrow \quad \frac{m+5}{n-3}=\frac{4p+7}{3q+2}$$

نسبت جي ونڊ واري قانون مطابق

$$\frac{(m+5)-(n-3)}{n-3}=\frac{(4p+7)-(3q+2)}{3q+2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m-n+8}{n-3}=\frac{4p-3q+5}{3q+2}$$

يعني تہ $m-n+8:n-3=4p-3q+5:3q+2$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

(v) نسبت جي ملائڻ ۽ ونڊ وارو قانون (Theorem of componendo and dividendo):

جيڪڏهن $a:b=c:d$ تہ پوءِ نسبت جي ملائڻ ۽ ونڊ واري قانون مطابق

(i) $a+b:a-b=c+d:c-d$

(ii) $a-b:a+b=c-d:c+d$

مثال: جيڪڏهن $m:n=p:q$ تہ پوءِ ثابت ڪري ڏيکاريو تہ $3m-2n:3m+2n=3p-2q:3p+2q$

حل: جيئن تہ $m:n=p:q$

تنهنڪري $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$

ٻنهي پاسن کي $\frac{3}{2}$ سان ضرب ڪندي

$$\frac{3m}{2n}=\frac{3p}{2q}$$

نبست جي ملائڻ ۽ ونڊ واري قانون جو استعمال ڪندي

$$\frac{3m-2n}{3m+2n}=\frac{3p-2q}{3p+2q}$$

يا $3m-2n:3m+2n=3p-2q:3p+2q$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

مثال 2: جيڪڏهن $3p+4q:3p-4q=3r+4s:3r-4s$ ته پوءِ ثابت ڪري ڏيکاريو ته $p:q=r:s$

حل: جيئن ته $3p+4q:3p-4q=3r+4s:3r-4s$

نسبت جي ملائڻ ۽ ونڊ واري قانون (i)مطابق

$$\therefore\quad \frac{(3p+4q)+(3p-4q)}{(3p+4q)-(3p-4q)}=\frac{(3r+4s)+3r-4s}{(3r+4s)-(3r-4s)}$$

$$\frac{3p+4q+3p-4q}{3p+4q-3p+4q}=\frac{3r+4s+3r-4s}{3r+4s-3r+4s}$$

$$\frac{6p}{8q}=\frac{6r}{8s}$$ (ٻنهي پاسن مان $\frac{6}{8}$ ڪي ڪٽيندي)

$$\Rightarrow\quad \frac{p}{q}=\frac{r}{s}$$

يا $p:q=r:s$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

مثال 3: نسبت جي ملائڻ ۽ ونڊ واري قانون جو استعمال ڪندي x جو ملهه لهو

جيڪڏهن $\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}}=\frac{2}{5}$

حل: اسان وٽ آهي $\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}}=\frac{2}{5}$

نسبت جي ملائڻ ۽ ونڊ واري قانون موجب

$$\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6})+(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6})}{(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6})-(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6})}=\frac{2+5}{2-5}$$

$$\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}+\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}-\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}}=\frac{7}{-3}$$

$$\frac{2\sqrt{x+6}}{-2\sqrt{x-6}}=\frac{7}{-3}\quad\Rightarrow\quad\frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-6}}=\frac{7}{3}$$

ٻنهي پاسن جو چورس وٺندي

$$\frac{x+6}{x-6}=\frac{49}{9}$$

$$9x+54=49x-294$$

$$9x-49x=-294-54$$

$$-40x=-348$$

$$x=\frac{348}{40}=\frac{87}{10}$$

مثال 4: نسبت جي ملائڻ ۽ ونڊ واري قانون جو استعمال ڪندي مساوات $\frac{(x+3)^2+(x-1)^2}{(x+3)^2-(x-1)^2}=\frac{5}{4}$ کي حل ڪريو.

حل: اسان وٽ آهي: $\frac{(x+3)^2+(x-1)^2}{(x+3)^2-(x-1)^2}=\frac{5}{4}$

نسبت جي ملائڻ ۽ ونڊ واري قانون موجب

$$\frac{(x+3)^2+(x-1)^2+(x+3)^2-(x-1)^2}{(x+3)^2+(x-1)^2-(x+3)^2+(x-1)^2}=\frac{5+4}{5-4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2(x+3)^2}{2(x-1)^2}=\frac{9}{1}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2=9$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+3}{x-1}=\pm 3$$

$\frac{x+3}{x-1}=3$ يا $\frac{x+3}{x-1}=-3$

$x+3=3x-3$ $x+3=-3x+3$

$-2x=-6$ $4x=0$

$x=3$ $x=0$

انهي ڪري حل سيٽ $\{0,3\}$ آهي

مثال 5: ثابت ڪريو ته $a:b=c:d$ جيڪڏهن $\frac{ac^2-bd^2}{ac^2+bd^2}:\frac{c^3-d^3}{c^3+d^3}$

حل:

جيئن ته

$$\frac{ac^2-bd^2}{ac^2+bd^2}=\frac{c^3-d^3}{c^3+d^3}$$

نسبت جي ملائڻ ۽ ونڊ واري قانون مطابق

$$\frac{ac^2-bd^2+ac^2+bd^2}{ac^2-bd^2-ac^2-bd^2}=\frac{c^3-d^3+c^3+d^3}{c^3-d^3-c^3-d^3}$$

$$\frac{2ac^2}{-2bd^2}=\frac{2c^3}{-2d^3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

يا $a:b=c:d$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

مشق 18.4

1. جيڪڏهن $x:y=z:w$ ته پوءِ ثابت ڪريو ته

(i) $\frac{4x+3y}{4x-3y}=\frac{4z+3w}{4z-3w}$ (ii) $\frac{5x-3y}{5x+3y}=\frac{5z-3w}{5z+3w}$

(iii) $\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}=\frac{z^3+w^3}{z^3-w^3}$ (iv) $\frac{3x+2y}{3x-2y}=\frac{3z+2w}{3z-2w}$

(v) $\frac{2x+3y+2z+3w}{2x+3y-2z-3w}=\frac{2x-3y+2z-3w}{2x-3y-2z+3w}$

2. ثابت ڪريو ته $a:b=c:d$ جيڪڏهن

(i) $a^2-b^2:a^2+b^2=ac-bd:ac+bd$

(ii) $\frac{a+b+c+d}{a+b-c-d}=\frac{a-b+c-d}{a-b-c+d}$

3. نسبت جي ملائڻ ۽ ونڊ واري قانون جو استعمال ڪندي هينيون مساواتون حل ڪريو

(i) $\frac{(x+3)^2-(x-5)^2}{(x+3)^2+(x-5)^2}=\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2}$

(iii) $\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x-5}}=\frac{1}{10}$ (iv) $\frac{(x+3)^2+(x-1)^3}{(x+3)^2-(x-1)^3}=\frac{11}{7}$

18.3 گڏيل ڦير ڦار يا متجڙ (Joint Variation):

18.3(i) گڏيل ڦير ڦار کي بيان ڪرڻ

جڏهن هڪ مقدار يا بدلجندڙ ٻن يا ٻن کان وڌيڪ مقدارن جي ضرب اُپت يا ونڊ اُپت تي انحصار ڪري ته ان ڦير ڦار کي گڏيل ڦير ڦار چئبو آهي. ٻين لفظن ۾ گڏيل ڦير ڦار تڏهن ٿيئي ٿي جڏهن هڪ مقدار يا بدلجندڙ هڪ کان وڌيڪ مقدارن سان سڌي طرح يا اُبتو متجي ٿو.

مثال طور: (i) جيڪڏهن x سڌي طرح متجي ٿو y ۽ z سان ته اسان وٽ آهي $x\propto yz$

$\Rightarrow x=kyz$

(ii) جيڪڏهن x سڌي طرح متجي ٿو y سان ۽ اُبتو متجي ٿو z سان ته اسان وٽ آهي

$$x\propto \frac{y}{z}\Rightarrow x=\frac{ky}{z}$$

18.3 (ii) گڏيل ڦير ڦار سان لاڳاپيل سوال حل ڪرڻ:

مثال 1: جيڪڏهن y سڌي طرح سان متجي ٿو xz^2 سان ۽ $y=4$ جڏهن $x=6$ ۽ $z=3$. y جو ملهه لهو جڏهن y جو ملهه لهو جڏهن ته $x=-81$ ۽ $z=5$

حل: جيئن ته x سڌي طرح سان متجي ٿو x ۽ z^2 جي مطابق

تنهنڪري $y\propto xz^2$

يعني $y=k\,xz^2$ (i)

مساوات (i) ۾ $y=4$، $x=6$ ۽ $z=3$ رکڻ سان

$$4=k\ (6)\ (3)^2\ \Rightarrow\ k=\frac{4}{54}=\frac{2}{27}$$

مساوات(i) ۾ $k = \frac{2}{27}$ رکڻ سان

اسان کي مليو $y = \frac{2}{27} x z^2$ ...(ii)

هاڻي مساوات (ii) ۾ $x = -81$ ۽ $z = 5$ رکڻ سان

$$y = \frac{2}{27}(-81)(5)^2 = 2(-3)(25) = -150$$

مثال 2: جيڪڏهن s سڌي طرح متجي تو v^3 سان ۽ اُبتو متجي تو $\sqrt{t}$ ۽ u سان. $s = 16$ جڏهن $v = 4$، $t = 9$ ۽ $u = 24$. s جو ملهه لهو جڏهن $u = 25$، $t = 36$ ۽ $v = 5$

حل: جيئن ته s سڌي طرح متجي تو v^3 سان ۽ اُبتو متجي تو $\sqrt{t}$ ۽ u سان

تنهنڪري $s \propto \frac{v^3}{u\sqrt{t}} \Rightarrow s = k\frac{v^3}{u\sqrt{t}}$ ... (i)

مساوات (i) ۾ $s = 16$، $t = 9$، $v = 4$ ۽ $u = 24$ رکڻ سان

$$16 = \frac{k(4)^3}{\sqrt{9}(24)}$$

$$16 = \frac{k(64)}{72} \Rightarrow k = 16 \times \frac{72}{64} = 18$$

مساوات (i) ۾ $k = 18$ رکڻ سان

$$s = \frac{18\, v^3}{u\sqrt{t}} \quad \text{... (ii)}$$

مساوات (ii) ۾ $u = 25$، $t = 36$ ۽ $v = 5$ رکڻ سان

اسان کي مليو

$$s = \frac{18\,(5)^3}{\sqrt{36}\,(25)} = \frac{18 \times 125}{6 \times 25} = 15$$

مشق 18.5

1. جيڪڏهن y سڌي طرح متجي تو x^2 ۽ z سان ۽ $y = 6$ جڏهن $x = 4$ ، $z = 9$
y کي x ۽ z جي عمل طور لکو. y جو ملهه لهو جڏهن $x = -8$ ۽ $z = 12$
2. جيڪڏهن y سڌي طرح متجي تو x ۽ u^2 سان ۽ اُبتو متجي تو v ۽ t سان. $y = 40$ جڏهن $x = 8$، $u = 5$، $v = 3$ ۽ $t = 2$. y کي x،u،v ۽ t جي شڪل ۾ لکو. y جوملهه پڻ لهو جڏهن $x = -2$، $u = 4$، $v = 3$ ۽ $t = -1$.
3. جيڪڏهن w سڌي طرح متجي تو u^2 سان ۽ اُبتو متجي تو v جي ٽيئن مول سان $w = 216$ ۽ $u = 6$، $v = 27$. w جو ملهه لهو جڏهن $u = 10$ ۽ $v = 125$
4. جيڪڏهن سادي لٽڪڻي (پينڊولم) جو وقت T سڌي طرح نسبت رکي ٿو ان جي ڊيگهه L جي ٻئي مول سان ۽ اُبتي نسبت رکي ٿو ڪشش ثقل واري تيزي 'g' جي ٻئي مول سان ۽ سيڪنڊ $T = 2$ ، س. م $L = 100$،ميٽر في سيڪنڊ چورس $g = 9.8$ ته پوءِ ڪنهن خاص اُوچائي تي سادي پينڊولمجو وقت لهو جڏهن ته ميٽر $L = 200$ ۽ ميٽر في سيڪنڊ چورس $g = 7.6$
5. ڪنهن خاص گئس جو مقدار V سڌي نسبت رکي ٿو گرمي پد T سان ۽ اُبتي نسبت رکي ٿو داٻ "P" سان. جيڪڏهن $V = 100$، $T = 30$ ۽ $P = 64$ ته پوءِ V جو ملهه لهو جڏهن ته $T = 60$ ۽ $P = 81$.

18.4 k- وارو طريقو (K - Method):

جڏهن ٻه يا وڌيڪ نسبتون پاڻ ۾ برابر هجن ته پوءِ هر هڪ برابر نسبت کي علامت"k" سان ظاهر ڪندي گهڻا فائديمند تناسب ثابت ڪري سگهجن ٿا. اهو طريقو جنهن ۾ هر هڪ برابر نسبت لاءِ "k" جو استعمال ٿيئي ان کي k وارو طريقو چئبو آهي. ڪيترن ئي مسئلن کي حل ڪرڻ لاءِ k وارو طريقو ڏاڍو ڪارائتو آهي.

18.4 (i) تناسبن تي مشتمل شرطيه مساواتن کي ثابت ڪرڻ لاءِ k وا طريقو استعمال ڪرڻ:

جيڪڏهن $a:b::c:d$ هڪ تناسب آهي

ته پوءِ k واري طريقي سان

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

$$\Rightarrow \frac{c}{d} = k \quad \text{۽} \quad \frac{a}{b} = k$$

$$c = d\,k \;...\text{(ii)} \quad \text{۽} \quad a = b\,k \;...\text{(i)}$$

انهن مساواتن جو استعمال ڪندي، اسين تناسب سان لاڳاپيل سوال حل ڪري سگهون ٿا.

مثال 1: جيڪڏهن $a:b::c:d$ ته پوءِ ثابت ڪري ڏيکاريو ته $\dfrac{8a-5b}{8a+5b} = \dfrac{8c-5d}{8c+5d}$

حل: جيئن ته $a : b = c : d$

فرض ڪريو ته $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$

ته پوءِ $c = dk$ ۽ $a = bk$

هاڻي

$$\text{L.H.S} = \frac{8a-5b}{8a+5b} = \frac{8bk-5b}{8bk+5b} = \frac{b(8k-5)}{b(8k+5)} = \frac{8k-5}{8k+5}$$

$$\text{R.H.S} = \frac{8c-5d}{8c+5d} = \frac{8dk-5d}{8dk+5d} = \frac{d(8k-5)}{d(8k+5)} = \frac{8k-5}{8k+5}$$

$$\because \quad \text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

$$\therefore \quad \frac{8a-5b}{8a+5b} = \frac{8c-5d}{8c+5d}$$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

مثال 2: جيڪڏهن $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f}$ ته پوءِ ثابت ڪريو ته $\dfrac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^3} = \dfrac{ace}{bdf}$

حل: اسان وٽ آهي $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f}$

فرض ڪريو ته $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f} = k$

ته پوءِ $\dfrac{a}{b} = k$ ، $\dfrac{c}{d} = k$ ۽ $\dfrac{e}{f} = k$

$$\Rightarrow a = bk \quad \Rightarrow c = dk \quad \text{۽} \quad \Rightarrow e = fk$$

هاڻي

$$\text{L.H.S} = \frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^3} = \frac{(bk+dk+fk)^3}{(b+d+f)^3} = \frac{[k(b+d+f)]^3}{(b+d+f)^3} = k^3$$

$$\text{R.H.S} = \frac{ace}{bdf} = \frac{(bk)(dk)(fk)}{bdf} = \frac{k^3 bdf}{bdf} = k^3$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$$\therefore \frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^3} = \frac{ace}{bdf}$$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

مثال 3:

جيڪڏهن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ته پوءِ ثابت ڪري ڏيکاريو ته $(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (ab+cd+ef)^2$

حل: فرض ڪريو ته $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$

$\Rightarrow \quad e = fk$ ۽ $c = dk$ ، $a = bk$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= (a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) \\ &= (b^2k^2+d^2k^2+f^2k^2)(b^2+d^2+f^2) \\ &= k^2(b^2+d^2+f^2)(b^2+d^2+f^2) \\ &= k^2(b^2+d^2+f^2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{R.H.S} &= (ab+cd+ef)^2 \\ &= \left[(bk)b+(dk)d+(fk)f\right]^2 \\ &= \left[kb^2+kd^2+kf^2\right]^2 \\ &= \left[k(b^2+d^2+f^2)\right]^2 \\ &= k^2(b^2+d^2+f^2)^2 \end{aligned}$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$$\therefore \quad (a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (ab+cd+ef)^2$$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

مشق 18.6

1. جيڪڏهن $p:q = r:s$ ته پوءِ ثابت ڪري ڏيکاريو ته

(i) $\frac{8p-3q}{8p+3q} = \frac{8r-3s}{8r+3s}$

(ii) $\sqrt[3]{\frac{p^3+r^3}{q^3+s^3}} = \frac{p}{q}$

(iii) $(p^2+q^2) : \frac{p^3}{p+q} = (r^2+s^2) : \frac{r^3}{r+s}$

(iv) $p^5+r^5 : q^5+s^5 = p^3r^2 : q^3s^2$

(v) $\frac{p-q}{p} : \frac{q}{p+q} = \frac{r-s}{r} : \frac{s}{r+s}$

2. جيڪڏهن $a:b = c:d = e:f$ ته پوءِ ثابت ڪري ڏيکاريو ته

(i) $\frac{a^4b^2+a^2e^2-e^4f}{b^6+b^2f^2-f^5} = \frac{a^4}{b^4}$

(ii) $\frac{a^2b+c^2d+e^2f}{ab^2+cd^2+ef^2} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$

(iii) $\frac{ac}{bd} + \frac{ce}{df} + \frac{ea}{fb} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{d^2} + \frac{e^2}{f^2}$

(ii) 18.4 ڦير ڦار وارا روز مره زندگي جا مسئلا حل ڪرڻ

مثال 1: هڪ جسم جي مخفي توانائي "p" گڏيل متجي تي جسم جي مايي "m" ۽ اُوچائي "h" سان جيڪڏهن مخفي توانائي 1940 جول آهي جڏهن ته ڪلو گرام $m=2$ ۽ ميٽر $h=100$ ته پوءِ ان جسم جي مخفي توانائي لهو جنهن جو مايو 5 ڪلو گرام ۽ اُوچائي 300 ميٽر آهي.

حل: جيئن ته مخفي توانائي "p"، مايي "m" ۽ اُوچائي "h" سان گڏيل متجي تي.

تنهن ڪري $p \propto mh$

$p = kmh \ldots (i)$ (جڏهن ته تناسب جو مستقل k آهي)

مساوات (i) ۾ $m = 2$، $h = 100$ ۽ $p = 1960$ رکندي

اسان کي مليو $1960 = k(2)(100)$

$$\Rightarrow k = \frac{1960}{200} = 9.8$$

مساوات (i) ۾ k جو مُلهه رکندي

$p = 9.8mh \ldots (ii)$

هاڻي مساوات (ii) ۾ $m=5$ ۽ $h = 300$ رکندي

اسان کي مليو $p = 9.8\,(5)\,(300)$

$= 14700$ جول

مثال 2: هُڪ جي قانون موجب هڪ اسپرنگ کي ڇڪڻ لاءِ لڳيل قوت "F" سڌي طرح سان متجي تي وڌيل ڊيگهه "S" سان جڏهن پائونڊ $F = 64$ ۽ انچ $S = 3.2$

(i) S جو ملهه لهو جڏهن پائونڊ $F = 100$

(ii) F جو ملهه لهو جڏهن انچ $S = 0.4$

حل: جيئن ته $F \propto S$

$\Rightarrow F=kS \ldots (i)$

$F=64$ ۽ $S=3.2$ رکڻ سان

اسان کي مليو

$64=3.2\,k$

$$\Rightarrow k = \frac{64}{3.2} = 20$$

مساوات (i) ۾ $k = 20$ رکندي

اسان کي مليو $F=20\,S \ldots (ii)$

(i) مساوات (ii) ۾ $F=100$ رکندي

اسان کي مليو $100=20\,S$

$\Rightarrow S=5$ انچ

(ii) مساوات (ii) ۾ $S=0.4$ رکندي

اسان کي مليو $F=20\,(0.4)$

$= 8$ پائونڊ

مثال 3: مزدوري جي رقم "C" گڏيل متجي تي مزدورن جي تعداد "n" ۽ ڏينهن جي سراسر تعداد "d" سان جيڪڏهن 10 ڏينهن لاءِ 210 مزدورن جي مزدوري جي رقم 450,000 رُپيا آهي. ته پوءِ 16 ڏينهن لاءِ 300 مزدورن جي مزدوري جي رقم لهو.

حل: جيئن ته رقم سڌي طرح سان متجي تي ڏينهن ۽ مزدورن جي تعداد سان

تنهنڪري $C \propto nd$

$C = knd \quad (i)$

مساوات (i) ۾ $C = 450{,}000$، $n = 200$ ۽ $d = 10$ رکڻ سان

اسان کي مليو $450{,}000 = k(200)(10)$

$$\Rightarrow k = \frac{450{,}000}{2000} = 225$$

مساوات (i) ۾ $k = 225$ استعمال ڪندي

اسان کي مليو $C = 225 \cdot nd \quad \ldots (ii)$

مساوات (ii) ۾ $n = 300$ ۽ $d = 16$ رکندي

اسان کي مليو $C = 225 \times 300 \times 16$

$C = 1080000$

انهيءَ ڪري 16 ڏينهن لاءِ 300 مزورن جي رقم 1080000 رُپيا آهي.

مثال 4: هاسٽيل جا خرچ ڪجھ مستقل آهن ۽ ڪجھ شاگردن جي تعداد مطابق متجن ٿا. جڏهن شاگردن جو تعداد 140 آهي تہ خرچو 19300 رُپيا ۽ 200 شاگردن لاءِ خرچو آهي 26500 رُپيا. خرچو لهو جيڪڏهن شاگردن جو تعداد 300 آهي.

حل: فرض ڪريوتہ مستقل خرچ "C" آهي ۽ "Q" غير مستقل خرچن کي ظاهر ڪري ٿو. فرض ڪريو تہ x شاگردن جو تعداد ۽ "P" ڪُل خرچ کي ظاهر ڪري ٿو.

$\because \quad Q \propto x$

$\therefore \quad Q = nx$ (جڏهن تہ n تناسب جو مستقل آهي)

$P = C + Q$

$P = C + nx$ يا (ڏنل شرط موجب)

ڏنل رقمن جو استعمال ڪندي اسان کي مليون

$19300 = C + 140n$ ...(i) ۽ $26500 = C + 200n$ ...(ii)

تنهن ڪان سواءِ $P = C + 300n$ ...(iii)

مساواتن (i) ۽ (ii) مان، اسان کي مليو: $C = 2500$ ۽ $n = 120$

مساوات (iii) ۾ $C = 2500$ ۽ $n = 120$ رکندي

اسان کي مليو $P = 2500 + 300(120) = 38500$

انهي ڪري 300 شاگردن جو ڪُل خرچ 38500 رپيا آهي

مشق 18.7

1. هڪ تار ۾ بجلي جو وهڪرو "I" سڌي نسبت رکي ٿو برقي سگهہ جي فرق "V" سان ۽ اُبتي نسبت رکي ٿو روڪ "R" سان. جيڪڏهن ايمپيئر I = 6 جڏهن وولٽ V = 220 ۽ اوهم R = 5 ۽ I جو مُلھ لهو جڏهن وولٽ V = 180 ۽ اوهم R = 8
2. روشني جي شدت جيڪا فوٽ ڪينڊلز ۾ پيمائش ڪبي آهي. اها اُبتو متجي ٿي ان مفاصلي جي چورس سان جيڪو روشني جي ذريعي وٽان هجي. فرض ڪريو تہ هڪ بلب جي روشني جي شدت 0.08 فوٽ ڪينڊلز آهي جيڪو 3 ميٽرن جي فاصلي تي آهي. روشني جي شدت لهو جيڪڏهن فاصلو 8 ميٽر هجي.
3. هڪ مستطيلي ٿنڀ جي طاقت "s" سڌي طرح متجي ٿي ويڪرائي "b" ۽ اُونهائي "d" جي چورس سان جيڪڏهن هڪ 9 س. م ويڪرو ۽ 12 س. م اُونهو ٿنڀ 1200 پائونڊن جو سهارو ڏيئي سگهي ٿو تہ 12 س. م ويڪرو ۽ 9 س. م اُونهو ٿنڀ ڪيتري وزن جو سهارو ڏيئي سگهي ٿو.
4. مزدوري جي رقم "c" گڏيل متجي ٿي ڏينهن جي سراسر تعداد "d" ۽ مزدورن جي تعداد "n" سان جيڪڏهن 15 ڏينهن لاءِ 100 مزدورن جي رقم 9000 آهي تہ پوءِ 20 ڏينهن لاءِ 300 مزدورن جي مزدوري جي رقم لهو.
5. هڪ نئين گاڏي جي خريد تي وڪري واروٽيڪس سڌي طرح سان متجي ٿو گاڏي جي قيمت سان جيڪڏهن هڪ نئين گاڏي 20000000 رپين ۾ خريدي وڃي تہ پوءِ وڪري وارو ٽيڪس 40000 رپيا آهي. وڪري وارو ٽيڪس گهٽو لڳندو جيڪڏهن نئين گاڏي جي قيمت 2800000 رُپيا آهي.

جائزي واري مشق 18

1. صحيح جواب چونڊيو

(i) تناسب $p:q::r:s$ ۾ p کي ____ چئبو آهي.

(a) ٽيون متناسب (b) وچون متناسب (c) چوٿون متناسب (d) پهريون متناسب

(ii) هڪ نسبت $l:m$ ۾ l کي ______ چئبو آهي.

(a) پُڇڙ (b) مُنڍ (c) تعلق (d) ڪوبہ نہ

(iii) نسبت $u:v$ ۾ v کي ______ چئبو آهي.

(a) مُنڍ (b) پُڇڙ (c) تعلق (d) ڪوبہ نہ

(iv) جيڪڏهن c,b,a مسلسل تناسب ۾ آهن تہ پوءِ b کي تناسب جو ______ آهي.

(a) پهريون متناسب (b) وچون متناسب (c) ٽيون متناسب (d) ڪوبہ نہ

(v) a^2 ۽ b^2 جو وچون متناسب ______ چئبو آهي.

(a) $\sqrt{ab}$ (b) ab (c) $\frac{a}{b}$ (d) $-ab$

(vi) جيڪڏهن $x+5:x+7=5:7$ تہ پوءِ x ______ جي برابر آهي.

(a) 2 (b) -1 (c) 0 (d) 1

(vii) جيڪڏهن 1، 9، x ۽ 45 تناسب ۾ آهن تہ پوءِ $x=$ ______

(a) 27 (b) $\frac{1}{5}$ (c) 5 (d) 405

(viii) جيڪڏهن $p:q=r:5$ تہ پوءِ $p:r=q:5$ ان کي ______ وارو قانون چئبو آهي.

(a) نسبت کي ملائڻ (b) عڪسي نسبت

(c) نسبت جي ونڊ (d) نسبت جي تبديلي

(ix) جيڪڏهن $x:y=z:w$ تہ پوءِ نسبت کي ملائڻ واري قانون موجب

(a) $\frac{x}{x+y}=\frac{z}{z+w}$ (b) $\frac{x}{x-y}=\frac{z}{z-w}$

(c) $\frac{x-y}{x+y}=\frac{z-w}{z+w}$ (d) $\frac{x-y}{y}=\frac{z-w}{w}$

(x) جيڪڏهن $a:b=c:d$ تہ پوءِ نسبت جي تبديلي واري قانون موجب

(a) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (b) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{c}$ (c) $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (d) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

(xi) 3,5,12 جو چوٿون متناسب ______ آهي

(a) 20 (b) 15 (c) 60 (d) 36

(xii) جيڪڏهن $2x$، $3y$ ۽ $6z$ مسلسل تناسب ۾آهن تہ پوءِ

(a) $y^2=12xy$ (b) $9y^2=xz$ (c) $9y^2=12xz$ (d) $3y^2=4xz$

(xiii) جيڪڏهن $\frac{x}{y}=\frac{w}{z}$ تہ پوءِ نسبت جي ونڊ واري قانون موجب

(a) $\frac{x-y}{y}=\frac{w-z}{z}$ (b) $\frac{x+y}{y}=\frac{w+z}{z}$

(c) $\frac{x}{x+y}=\frac{w}{w+z}$ (d) ڪوبہ نہ

(xiv) قوت ۽ تيزي ______ ۾ آهن.

(a) سڌي تناسب (b) گڏيل تناسب (c) اُبتي تناسب (d) ڪوبہ نہ

(xv) جيڪڏهن $a:4=15:5$ تہ پوءِ $a=$ ______

(a) 20 (b) 15 (c) 12 (d) 10

2. هيٺين جي نسبت لهو

(i) 100 ميٽر ۽ 500 س. م (ii) 50 ڪلو گرام ۽ 300 گرام

3. هيٺين ۾ x جو ملهه لهو

(i) $9:x-10=x+13:12$ (ii) $5:x-3=x+11:3$

4. جيڪڏهن y سڌي طرح x سان متجي ٿو ۽ $y=25$ جڏهن $x=75$ ته پوءِ y جوملهه لهو جڏهن $x=144$

5. جيڪڏهن y اُبتو متجي ٿو x سان ۽ $y=100$ جڏهن $x=\frac{1}{2}$ ته پوءِ y جو ملهه لهو جڏهن $x=4$

6. جيڪڏهن $x:y=3:w$ ته پوءِ ثابت ڪريو ته $\frac{7x+5y}{7x-5y}=\frac{7z+5w}{7z+5w}$

7. نسبت جي ملائڻ ۽ ونڊ واري قانون جي استعمال ڪندي هيٺين مساوات حل ڪريو

$$\frac{(x-3)(x-5)}{(x-7)(x-2)}=\frac{(x-6)(x-2)}{(x-1)(x-8)}$$

8. جيڪڏهن x سڌي طرح سان متجي ٿو y سان ۽ اُبتو متجي ٿو z سان ۽ $x=30$ جڏهن $y=15$ ۽ $z=2$ ته پوءِ x جو ملهه لهو جيڪڏهن $y=30$ جڏهن $z=12$

9. سرڪٽ ۾ بجلي جو وهڪرو اُبتو متجي ٿو روڪ سان جيڪا اوهم ۾ پيمائش ڪجي ٿي جڏهن سرڪٽ ۾ بجلي جو وهڪرو 40 امپيئر ۽روڪ 10 اوهمِ آهي ته بجلي جو وهڪرو لهو جيڪڏهن روڪ 12 اوهم آهي.

خلاصو:

- بن ساڳي قسم واري مقدارن جي ڀيٽ کي نسبت چئبو آهي.
- جيڪڏهن ٻہ نسبتون $a:b$ ۽ $c:d$ برابر آهن ته پوءِ اسين هن طرح لکندا سين $a:b::c:d$
- ٻن نسبتن جي برابري کي تناسب چئبوآهي.
- جيڪڏهن ٻہ مقدارون پاڻ ۾ اهڙي طرح لاڳاپيل آهن جو هڪ مقدار ۾ اضافو (گهٽتائي) ٻيئي مقدار ۾ ترتيبوار اضافي (گهٽتائي) جو سبب ٿئي ته اهڙي ڦير ڦار کي سڌو ڦير ڦار چئبو آهي.
- جيڪڏهن ٻہ مقدارون پاڻ ۾ اهڙي طرح سان لاڳاپيل آهن جو جيڪڏهن هڪ مقدار وڌي ته ٻي گهٽجي ۽ اِن جو اُبتڙ ٻہ هجي. اهڙي ڦير ڦار کي اُبتو ڦير ڦار چئبو آهي
- نسبت وارا قانون
  - (i) عڪسي نسبت وارو قانون: جيڪڏهن $a:b=c:d$ ته پوءِ $b:a=d:c$
  - (ii) نسبت جي تبديلي وارو قانون: جيڪڏهن $a:b=c:d$ ته پوءِ $a:c=b:d$
  - (iii) نسبت کي ملائڻ وارو قانون:
    جيڪڏهن $a:b=c:d$ ته پوءِ (a) $a+b:b=c+d:d$ (b) $a:a+b=c:c+d$
  - (iv) نسبت جي ونڊ وارو قانون:
    جيڪڏهن $a:b=c:d$ ته پوءِ (a) $a-b:b=c-d:d$ (b) $a:a-b=c:c-d$
  - (v) نسبت جي ملائڻ ۽ ونڊ وارو قانون:
    جيڪڏهن $a:b=c:d$ ته پوءِ $a+b:a-b=c+d:c-d$
- جڏهن هڪ مقدار ٻن يا ٻن کان وڌيڪ مقدارن جي ضرب اُپت يا ونڊ اُپت تي انحصار ڪري ته ان ڦير ڦار کي گڏيل ڦير ڦار چئبو آهي.

یونٽ 19

قالبَ ۽ قطعي مُلهَ

MATRICES AND DETERMINANTS

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي پڙهڻ کانپوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته

- قالب کي حقيقي رقمن سان بيان ڪن ۽ ان جي مستطيلي خاڪي جو عام زندگي ۾ اظهار لاءِ تعلق ڳاهين.
  - قالب جي قطارن ۽ ڪالمن جي باري ۾ ڄاڻ رکن.
  - قالب جي ترتيب بيان ڪن
  - ٻن قالبن جي برابري بيان ڪن
- قطاري قالب، ڪالمي قالب، مستطيلي قالب ، چورس قالب، ٻُڙي قالب، وحداني قالب، غير طرفي غالب، اريبي قالب، متاسنا تيل قالب، هم شڪلي قالب (3 باءِ 3 تائين 3×3) ابُتو هم شڪلي قالب کي بيان ڪن ۽ انهن جي سڃاڻپ ڪن
- اهو ڄاڻن ته ڇا ڏنل قالب جوڙ ۽ ڪٽ لاءِ موافق آهي
- حقيقي عدد سان قالب جي غير طرفي ضرب
- قالبن کي جوڙ ۽ ڪٽ ڪن
- جوڙ جي لحاظ کان متا ۽ سنگت واري قانونن جي چڪاس ڪن
- قالب جو جوڙ لاءِ ذاتي قالب بيان ڪن
- قالب جو جمعي ابتڙ لهن
- اهو ڄاڻن ته ڇا ڏنل قالب ضرب لاءِ موافق آهن
- ٻن يا ٽن قالبن کي ضرب ڪن
- ضرب جي لحاظ کان سنگت واري قانون جي تصديق ڪن
- ورهاست واري قانون جي تصديق ڪن
- مثال جي مدد سان تصديق ڪريو ته قالب عام طرح سان ضرب جي لحاظ کان متا وارو قانون نٿا رکن (يعني ته $AB \neq BA$)
- ضرب لاءِ ذاتي قالب بيان ڪن
- چڪاس ڪن ته $(AB)^t = B^t A^t$
- چورس قالب جو قطعي ملهه بيان ڪن
- قالب جي قطعي ملهه جي قيمت لهن
- نادر ۽ غير نادر قالبن کي بيان ڪن
- قالب جا ننڍا قطعي مُلهه ۽ هم جُزا بيان ڪن
- قالب جو ائڊجوائنٽ بيان ڪن
- هڪ غير نادر قالب A جو ضربي اُبتڙ لهن ۽ تصديق ڪن ته $AA^{-1} = I = A^{-1}A$ جڏهن ته I هڪ ضرب لاءِ ذاتي قالب آهي.
- هڪ غير نادر قالب جو ضربي اُبتڙ لهڻ لاءِ ائڊجوائنٽ طريقي جو استعمال ڪن
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ جي چڪاس ڪن
- ٻن بدلجندڙن ۾ ٻن هڪ درجي مساواتن جي مجموعي کي حل ڪن جيڪو عام زندگي جي مسئلن سان لاڳاپيل هجي.
  - ضربي اُبتڙ قالب وارو طريقو استعمال ڪندي
  - ڪريمر وارو قانون استعمال ڪندي

19.1 قالبن جو تعارف Introduction to Matrices

قالبن جو تعلق رياضي جي هڪ شاخ سان آهي جنهن کي خطي آلجبرا (linear Algebra) چئبو آهي. انهن جو استعمال خاص طور سان ڪاروبار انجنيئري، فزڪس ۽ ڪمپيوٽر سائنس ۾ ٿيئي ٿو.
آرٿرڪيلي Arther Caylay (1821-1895) هڪ رياضي دان هو جنهن قالب جو نظريو پيش ڪيو

19.1 (i) قالب کي حقيقيقمن سان بيان ڪرڻ ۽ ان جي مستطيلي خاڪي جو عام زندگي ۾ اظهار لاءِ تعلق ڳاهڻ.

قالب ، رُڪنن جي هڪ مستطيلي صف بندي آهي ان جا رُڪن علامتي اظهار يا عدد ٿي سگهن. تا عام طرح سان قالب کي انگريزي الف بي جي وڏن حرفن سان ظاهر ڪبو آهي ۽ قالب جي هر هڪ رُڪن کي ننڍن حرفن سان ظاهر ڪبو آهي. قالب جا رُڪن [ ] يا ( ) جي اندر لکبا آهن

مثال طور:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ يا } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

رُڪن a_{11}، a_{22} ۽ a_{33} وڏي اُريب جا رُڪن آهن ۽ انهن کي اُريبي رُڪن (Diagonal Elements) ڪوٺبو آهي.
اچو ته عام زندگي مان قالب جو هڪ مثال ڪٺون هيٺين جدول تن گهرن جي رهواسين ٽيليويزنن ۽ ڪمپيوٽرن جو تعداد ڏيکاري ٿي.

	رهواسي	ٽيليويزن	۽ ڪمپيوٽر
A گهر	4	2	1
B گهر	6	2	3
C گهر	2	1	0

متين مواد (data) کي قالب جي شڪل ۾ هن ريت لکي سگهون ٿا:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نوٽ: لفظ "قالب" جو جمع "قالبَ" يا "قالبن" آهي..

19.1 (ii) قالب جي قطارن (Rows) ۽ ڪالمن (Columns) جي باري ۾ ڄاڻ :

قالب ۾ رُڪنن جي اُفقي ليڪ کي قالب جي قطار چئبو آهي ۽ قالب ۾ رُڪنن جي عمودي ليڪ کي قالب جو ڪالم چئبو آهي

مثال طور قالب $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ۾ رُڪنن جون ٻه اُفقي ليڪون آهن انهي ڪري اهو قالب ٻه قطارون رکي ٿو. ان ۾ رُڪنن جون چار عمودي ليڪون آهن انهي ڪري اهو قالب ٻه ڪالم رکي ٿو.

19.1. (iii) قالب جي ترتيب : (Order/Size of Matrix):

قالب جي ترتيب کي ان جي قطارن ۽ ڪالمن جي تعداد سان بيان ڪبو آهي. قالب جي ترتيب کي $m \times n$ (پڙهبو m باءِ n) سان ظاهر ڪبو آهي جڏهن ته ڏنل قالب ۾ m قطارن جو تعداد ۽ n ڪالمن جو تعداد آهي.

مثال طور: جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 12 & 11 & 35 \end{bmatrix}$ ته پوءِ A جي ترتيب 2×3 آهي.

19.1. (iv) ٻن قالبن جي برابري (Equality of two matrices):

ٻه قالب A ۽ B برابر قالب ڪونبا جيڪڏهن انهن جي ترتيب ســاڳي هجي ۽ انهن جا مطابقت رکندڙ رُڪن برابر هجن علامتي طور اسين هيئنئن لکنداسين.

مثال طور:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ ۽ $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ برابر قالب آهن

چاڪاڻ تہ انهن جي ترتيب ساڳي نہ آهي $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ ۽ $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ برابر قالب نہ آهن

19.2 قالبن جا قسم (Types of Matrices):

19.2. (i) قطاري قالب، ڪالمي قالب، مستطيلي قالب، چورس قالب، ٻُڙي قالب، وحداني قالب، غير طرفي قالب،اريبي قالب، متاستا ٽيل قالب، هم شڪلي قالب (3×3) ۽ ابتو همشڪلي قالب بيان ڪرڻ ۽ انهن جي سڃاڻپ ڪرڻ:

قطاري قالب (Row Matrix):

اهڙو قالب جنهن ۾ فقط هڪ قطار هجي ان کي قطاري قالب چئبو آهي.

مثال طور:

$[1 \quad 4 \quad 7]$ ۽ $[4 \quad 3 \quad 8 \quad 6]$ قطاري قالب آهن.

ڪالمي قالب (Column matrix):

اهڙو قالب جنهن ۾ فقط هڪ ڪالم هجي ان کي ڪالمي قالب چئبو آهي.

مثال طور:

$\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$ ۽ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ ڪالمي قالب آهن

مستطيلي قالب (Rectangular matrix):

اهڙو قالب جنهن ۾ قطارن جو تعداد، ڪالمن جي تعداد جي برابر نہ هجي تہ ان کي مستطيلي قالب چئبو آهي.
يعني $m \neq n$

مثال طور:

$A = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 1 & -7 & 10 \end{bmatrix}$ ۽ $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ مستطيلي قالب آهن

چورس قالب (Square Matrix):

اهڙو قالب جنهن ۾ قطارن جو تعداد، ڪالمن جي تعداد جي برابر هجي ان کي چورس قالب چئبو آهي.
يعني $m = n$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ ۽ $C = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & c & 1 \\ p & q & r & 1 \\ m & n & o & 1 \end{bmatrix}$ چورس قالب آهن

ٻڙي قالب (Zero/null matrix):

ٻڙي قالب هڪ اهڙو قالب هوندو آهي جنهن جو هر هڪ رُڪن ٻُڙي هجي. اهو عام طرح سان وڏي حرف "O" سان ظاهر ڪبو آهي ٻڙي قالب جا ڪجهه مثال هيٺ ڏنل آهن.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} ۽ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اريبي قالب (Diagonal matrix):

هڪ چورس قالب کي اريبي قالب ڪونبو جيڪڏهن گهٽ ۾ گهٽ هڪ اريبي رُڪن کانسواءِ سڀ رُڪن ٻُڙي هجن.

مثال طور:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} ، B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} ۽ C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ اريبي قالب آهن

غير طرفي قالب (Scalar Matrix):

اهڙو اريبي قالب جنهن جا سڀ اريبي ڪارڪن ساڳيا هجن. ان کي غير طرفي قالب چئبو آهي.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} ، B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} ۽ C = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$ غير طرفي قالب آهن.

وحداني قالب (Identity/unit matrix):

اهڙو اريبي قالب جنهن جو هر هڪ اريبي رُڪن ١ هجي. ان کي وحداني قالب ڪونبو آهي. عام طرح سان ان کي وڏي حرف "I" سان ظاهر ڪبو آهي.

مثال طور:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ۽ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

متا ستا ٽيل قالب (Transpose of a matrix):

ڪنهن ڏنل قالب جي قطارن کي ڪالمن ۾ يا ڪالمن کي قطارن ۾ بدلائڻ سان حاصل ٿيل قالب کي اصل قالب جو متا ستا ٽيل قالب ڪونبو آهي جيڪڏهن ڏنل قالب A آهي ته متاستا ٽيل قالب کي A^t سان ظاهر ڪبو آهي.

مثال طور:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$ جو متا ستا ٽيل قالب $$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$ آهي.

همشڪلي قالب (Symmetric Matrix):

هڪ چورس قالب کي همشڪلي قالب ڪونبو جيڪڏهن ان جو متا ستا ٽيل قالب به ان ڏنل قالب جي برابر هجي. يعني ته $A^t = A$.

مثال طور:

جيڪڏهن $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 17 \\ 2 & 5 & -11 \\ 17 & -11 & 9 \end{bmatrix}$$ ته پوءِ $$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 17 \\ 2 & 5 & -11 \\ 17 & -11 & 9 \end{bmatrix}$$

جيئن ته $A^t = A$ تنهنڪري A هڪ همشڪلي قالب آهي.

اُبتو همشڪلي قالب (Skew-symmetric matrix):

هڪ چورس قالب کي اُبتو همشڪلي قالب ڪونبو جيڪڏهن ان جو متاستا تيل قالب ان ڏنل قالب جو منفي هجي.

يعني $A^t = -A$

مثال طور:

جيڪڏهن $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 7 \\ -4 & -7 & 0 \end{bmatrix}$ ته پوءِ $-A = A^t = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & -7 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

جيئن ته $A^t = -A$ تنهنڪري A اُبتو همشڪلي قالب آهي.

19.3 قالبن جي جوڙ ۽ ڪٽ (Addition and Subtraction of Matrices):

19.3.(i) اهو جاچڻ ته جا ڏنل قالب جوڙ ۽ ڪٽ لاءِ موافق (Conformable) آهن:

جيڪڏهن ٻن قالبن A ۽ B جي ترتيب ساڳي آهي ته پوءِ اهي جوڙ ۽ ڪٽ لاءِ موافق آهن

مثال طور:

$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ۽ $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ جوڙ ۽ ڪٽ لاءِ موافق آهن.

19.3.(ii) حقيقي عدد سان قالب جي غير طرفي ضرب (Scalar multiplication of a matrix by a real numbers):

ڪنهن قالب جي غير طرفي ضرب جو مطلب آهي ته ڏنل قالب ۽ حقيقي عدد جي ضرب اُپت، غير طرفي ضرب ۾ قالب جو هر هڪ رُڪن ڏنل غير طرفي مقدار (Scalar) سان ضرب ٿيندو آهي. جيڪڏهن c غير طرفي مقدار ۽ A هڪ قالب آهي ته پوءِ قالب جي غير طرفي ضرب کي cA سان ظاهر ڪبو آهي.

مثال طور:

جيڪڏهن $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ ۽ $c = -5$ ته پوءِ $cA = -5\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

يعني $cA = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -25 \\ 15 & -10 & -5 \\ -10 & 0 & 20 \end{pmatrix}$

19.3.(iii) قالبن کي جوڙ ۽ ڪٽ ڪرڻ (Add and Subtract Matrices):

ٻن قالبن A ۽ B کي جوڙ يا ڪٽ ڪرڻ لاءِ انهن جا واسطيدار رُڪن جوڙ يا ڪٽ ڪبا آهن

مثال طور:

جيڪڏهن $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ۽ $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ ته پوءِ $A+B = \begin{pmatrix} 2+1 & 5+4 \\ -1+3 & 3+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

ڪٽ لاءِ

جيڪڏهن $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ ۽ $Q = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ ته پوءِ $P - Q = \begin{pmatrix} 1-10 & 0-4 & 2-2 \\ 4-2 & 6-7 & 1-1 \\ -2-1 & 9-9 & 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

19.3.(iv) جوڙ جي لحاظ کان مٽا ۽ سنگت واري قانونن جي چڪاس ڪرڻ:

جوڙ جي لحاظ کان مٽا وارو قانون:

جيڪڏهن A ۽ B ساڳي ترتيب وارا ٻہ قالب آهن ته پوءِ جوڙ جي لحاظ کان مٽا وارو قانون هن ريت آهي:

$A + B = B + A$

مثال: جوڙ جي لحاظ کان مٽا واري قانون جي چڪاس ڪريو

جيڪڏهن $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\4&6&1\\-2&9&0\end{pmatrix}$ ۽ $B=\begin{pmatrix}10&4&2\\2&7&1\\1&9&4\end{pmatrix}$

هتي

$$A+B=\begin{pmatrix}1+10&0+4&2+2\\4+2&6+7&1+1\\-2+1&9+9&0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&4&4\\6&13&2\\-1&18&4\end{pmatrix}$$

هاڻي

$$B+A=\begin{pmatrix}10+1&4+0&2+2\\2+4&7+6&1+1\\1-2&9+9&4+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&4&4\\6&13&2\\-1&18&4\end{pmatrix}$$

جيئن تہ $A+B=B+A$ تنهنڪري جوڙ جي لحاظ کان مٽا واري قانون جي چڪاس ٿي.

جوڙ جي لحاظ کان سنگت وارو قانون (Associative law w.r.t addition):

جيڪڏهن A، B ۽ C ساڳي ترتيب وارا ڪي ٽي قالب آهن تہ پوءِ جوڙ جي لحاظ کان مٽا وارو قانون هن ريت آهي $(A+B)+C=A+(B+C)$

مثال: جوڙ جي لحاظ کان سنگت واري قانون جي تصديق ڪريو

جيڪڏهن $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$ ۽ $C=\begin{pmatrix}9&10\\11&12\end{pmatrix}$

هتي

$$(A+B)+C=\left[\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}9&10\\11&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&8\\10&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9&10\\11&12\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (A+B)+C=\begin{pmatrix}15&18\\21&24\end{pmatrix}$$

هاڻي

$$A+(B+C)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9&10\\11&12\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}14&16\\18&20\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A+(B+C)=\begin{pmatrix}15&18\\21&24\end{pmatrix}$$

جيئن تہ $(A+B)+C=A+(B+C)$

تنهنڪري جوڙ جي لحاظ کان سنگت واري قانون جي تصديق ٿي

19.3.(v) هڪ قالب جو جوڙ لاءِ ذاتي قالب (Additive Identity) بيان ڪرڻ

جيڪڏهن A ۽ O بہ ساڳي ترتيب وارا قالب آهن ۽ $A+O=A=O+A$. هتي O ٻڙي قالب آهي ۽ ان کي قالب A جو جوڙ لاءِ ذاتي قالب چئبو آهي.

19.3.(vi) قالب جو جمعي ابتڙ لهڻ (Additive inverse of a matrix):

جيڪڏهن A ۽ B ٻہ ساڳئي ترتيب وارا قالب آهن اهڙي طرح جو $A + B = O = B + A$ تہ پوءِ B ۽ A کي هڪبئي جو جمعي اُبتڙ چئبو قالب A جي جمعي اُبتڙ کي $-A$ سان ظاهر ڪبو آهي.

مثال طور:

جيڪڏهن
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

تہ پوءِ
$$-A = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -4 & -6 & -1 \\ 2 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

19.4. قالبن جي ضرب (2 باءِ 2 تائين)

19.4. (i) اهو جاچڻ تہ ڇا ڏنل قالب ضرب لاءِ موافق آهن.

ٻہ قالب A ۽ B ضرب لاءِ موافق ڪونبا جيڪڏهن پهرين قالب جي ڪالمن جو تعداد ٻئي قالب جي قطارن جي تعداد جي برابر هجي

مثال طور: $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ ۽ $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ ضرب لاءِ موافق آهن

19.4. (ii) ٻن يا ٽن قالبن کي ضرب ڪرڻ:

جيڪڏهن ٻہ قالب ضرب لاءِ موافق آهن تہ پوءِ ضرب اُپت AB جو رُڪن a_{ij} حاصل ڪرڻ لاءِ i هين قطار (i^{th} row) ۽ (j^{th} row) هون ڪالم جي واسطيدار رُڪنن کي ضرب ڪبو آهي.

مثال 1:

جيڪڏهن $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ۽ $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ تہ پوءِ AB لهو

حل:

هتي AB ممڪن آهي ڇو جو A جي ڪالمن جو تعداد ۽ B جي قطارن جو تعداد برابر آهي جيڪو 2 آهي.

هاڻي

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad AB = \begin{bmatrix} 1(0)+2(6) & 1(-1)+2(7) \\ 3(0)+4(6) & 3(-1)+4(7) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad AB = \begin{bmatrix} 0+12 & -1+14 \\ 0+24 & -3+28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 24 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad AB = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 24 & 25 \end{bmatrix}$$

مثال 2:

ضرب لهو: $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5\\ 4 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 8\\ 5 & 1\end{pmatrix}$

حل:

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5\\ 4 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 8\\ 5 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4+12 & 5+0\\ 8+16 & 10+0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 8\\ 5 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}16 & 5\\ 24 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 8\\ 5 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}96+25 & 128+5\\ 144+50 & 192+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}121 & 133\\ 194 & 202\end{pmatrix}$$

(iii) .19.4 ضرب جي لحاظ کان سنگت واري قانون جي تصديق ڪرڻ:

جيڪڏهن A، B ۽ C ڪي به ٽي ضرب لاءِ موافق قالب آهن تہ پوءِ ضرب جي لحاظ کان سنگت وارو قانون هن ريت آهي: (AB)C=A(BC)

مثال: ضرب جي لحاظ کان سنگت واري قانون جي تصديق ڪريو جيڪڏهن

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix} \text{ ۽ } C=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

تصديق:

$$\text{R.H.S}=A(BC)$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -4\\ -2 & 24\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}11 & 36\\ -5 & 4\end{bmatrix}$$

$$\text{L.H.S}=(AB)C$$

$$=\left(\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 13\\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}11 & 36\\ -5 & 4\end{bmatrix}$$

جيئن تہ L.H.S=R.H.S

تنهنڪري ضرب جي لحاظ کان سنگت واري قانون جي تصديق ٿي.

(iv) .19.4 ورهاست واري قانون جي تصديق ڪرڻ (Distributive Laws):

جيڪڏهن A ، B ۽ C ڪي بہ ٽي ضرب ۽ جوڙ جي لحاظ کان موافق قالب آهن تہ پوءِ ورهاست وارا قانون هن ريت آهن

(i) A(B+C) = AB + AC (کاٻو ورهاست وارو قانون)

(ii) (B+C) A = BA + CA (ساڄو ورهاست وارو قانون)

مثال : جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}$ ۽ $C=\begin{bmatrix}-2&0\\0&1\end{bmatrix}$ ته پوءِ هيٺين جي تصديق ڪريو

(i) $A(B+C) = AB + AC$ (ii) $(B+C)A = BA + CA$

تصديق:

(i) $A(B+C) = AB + AC$

$$\text{L.H.S} = A(B+C)$$
$$= \begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&-1\\1&2\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}0&3\\-1&-2\end{bmatrix}$$

$$\text{R.H.S} = AB + AC$$
$$= \begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0\\0&1\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}2&1\\-1&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&2\\0&-1\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}0&3\\-1&-2\end{bmatrix}$$

جيئن ته LHS = RHS

تنهنڪري $A(B+C) = AB + AC$ انهي ڪري تصديق ٿي.

ساڳي طريقي سان $(B+C)A = BA + CA$ جي بہ تصديق ٿيندي.

19.4. (v) مثال جي مدد سان تصديق ڪريو ته قالب عام طرح سان ضرب جي لحاظ کان مٽا وارو قانون نٿا رکن $AB \neq BA$

مثال :

فرض ڪريو $A=\begin{bmatrix}5&2\\-2&-1\end{bmatrix}$ ۽ $B=\begin{bmatrix}-1&2\\3&-2\end{bmatrix}$ ته پوءِ تصديق ڪريو ته $AB \neq BA$

تصديق:

$$AB = \begin{bmatrix}5&2\\-2&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&2\\3&-2\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad AB = \begin{bmatrix}-5+6&10-4\\2-3&-4+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&6\\-1&-2\end{bmatrix}$$

هاڻي

$$BA = \begin{bmatrix}-1&2\\3&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5&2\\-2&-1\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad BA = \begin{bmatrix}-5-4&-2-2\\15+4&6+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9&-4\\19&8\end{bmatrix}$$

جيئن ته $AB \neq BA$

تنهنڪري تصديق ٿي ته عام طرح سان ضرب جي لحاظ کان مٽا وارو قانون قالبن تي لاڳو نٿو ٿيئي.

19.4. (vi) ضرب لاءِ ذاتي قالب (Multiplicative Identity) کي بيان ڪرڻ:

فرض ڪريو ته A ترتيب n وارو هڪ چورس قالب آهي ته پوءِ وحداني قالب I کي ضرب لاءِ ذاتي قالب چئبو آهي ۽ $AI_n = A$ يا $I_nA = A$

مثال 1: فرض ڪريو تہ $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$. تصديق ڪريو $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ضرب لاءِ ذاتي قالب آهي.

حل:

هتي

$$AI_2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=A$$

$$I_2A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=A.$$

جئين تہ $AI_2=I_2A$

تنهڪري I_2 ضرب لاءِ ذاتي قالب آهي

19.4(vii) چڪاس ڪريو تہ $(AB)^t=B^tA^t$

مثال: جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ ۽ $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ چڪاس ڪريو تہ $(AB)^t=B^tA^t$

چڪاس:

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 11 & -4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ (AB)^t=\begin{bmatrix}5 & 11\\ -2 & -4\end{bmatrix}.$$

هاڻي

$$B^tA^t=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 11\\ -2 & -4\end{bmatrix}$$

جئين تہ $(AB)^t=B^tA^t$

انهي ڪري چڪاس ٿي

مثال 2:

جيڪڏهن $A=\begin{pmatrix}6 & 5 & 2\\ 4 & 6 & 3\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix}$ ۽ $B=\begin{pmatrix}6 & 8 & 0\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & 6 & 4\end{pmatrix}$ تصديق ڪريو تہ $AB^t=B^tA^t$

تصديق:

$$AB=\begin{pmatrix}6 & 5 & 2\\ 4 & 6 & 3\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 8 & 0\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & 6 & 4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}36+25+6 & 48+5+12 & 0+10+8\\ 24+30+9 & 32+6+18 & 0+12+12\\ 0+5+21 & 0+1+42 & 0+2+28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}67 & 65 & 18\\ 63 & 56 & 24\\ 26 & 43 & 30\end{pmatrix}$$

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} 67 & 65 & 18 \\ 63 & 56 & 24 \\ 26 & 43 & 30 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 67 & 63 & 26 \\ 65 & 56 & 43 \\ 18 & 24 & 30 \end{pmatrix}$$

هاڻي

$$B^tA^t = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}^t$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 36+25+6 & 24+30+9 & 0+5+21 \\ 48+5+12 & 32+6+18 & 0+1+42 \\ 0+10+8 & 0+12+12 & 0+2+28 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 67 & 63 & 26 \\ 65 & 56 & 43 \\ 18 & 24 & 30 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^t = B^tA^t$$

انهي ڪري تصديق ٿي

مشق 19.1

1. هيٺين قالبن مان هر هڪ جو قسم لکو.

(i). $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ (ii). $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ (iii). $\begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}$ (iv). $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ (v). $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

2. هيٺ ڏنل هر هڪ قالب جي ترتيب لکو

(i). $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ (ii). $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (iii). $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (iv). $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (v). $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

3. چڪاس ڪريو تہ ڇا هيٺيان قالب همشڪلي يا اُبتا همشڪلي قالب آهن.

(i). $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (ii). $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (iii). $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 7 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ (iv). $\begin{bmatrix} 0 & -6 & 4 \\ -6 & 0 & 7 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

4. جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$، $D=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ ۽ $E=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$

تہ هينيان لهو جيڪڏهن ممڪن هجي

(i) $A+C$ (ii) $A+E$ (iii) $B-D$ (iv) $2B+3A$

(v) $B-C$ (vi) A^2 (vii) B^2 (viii) $D+E$

5. جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$ ۽ $B=\begin{bmatrix}4 & 2 & 3\\ -2 & 4 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$ تہ هينيان لهو

(i) $A+B$ (ii) $A-B$ (iii) $3A+2B$

(iv) AB (v) BA (vi) A^2

6. تصديق ڪريو تہ (i) $A+B=B+A$ (ii) $C-D\neq D-C$

جيڪڏهن $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -7 & 4\end{pmatrix}$، $B=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 7 & -4\end{pmatrix}$، $C=\begin{pmatrix}3 & 1 & -4\\ 4 & 3 & 1\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$ ۽ $D=\begin{pmatrix}2 & 7 & -5\\ -2 & 1 & 0\\ 6 & 3 & 4\end{pmatrix}$

7. ثابت ڪري ڏيکاريو $AB\neq BA$ جڏهن تہ $A=\begin{pmatrix}8 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$ ۽ $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ 2 & 5 & 7\\ 0 & -4 & 3\end{pmatrix}$

8. جيڪڏهن $A=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 7 & -4\end{pmatrix}$، $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -7 & 4\end{pmatrix}$ ۽ $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -4\end{pmatrix}$، تہ پوءِ $2A-3B+4C$ جو ملهہ لهو

9. جيڪڏهن $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ تہ پوءِ a، b، c ۽ d جو ملهہ لهو

10. جيڪڏهن $\begin{bmatrix}3 & a & x\\ b & 0 & c\\ 2 & 3 & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & -1 & y\\ 2 & 0 & 3\\ z & 3 & 2\end{bmatrix}$ تہ پوءِ a، b، c، d، x، y ۽ z جي قيمت لهو

11. هينين قالبن لاءِ ممڪن ضرب أپتون لهو

$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$ ۽ $C=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ -1 & 0 & -4\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$

12. ضرب أپت لهو: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$

13. جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}2&-1&0\\3&1&2\end{bmatrix}$ ۽ $C=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&2&3\end{bmatrix}$

ته پوءِ تصديق ڪريو ته: (i) $A(B+C)=AB+AC$ (ii) $(B+C)A=BA+CA$

14. جيڪڏهن $A=\begin{pmatrix}6&5&2\\4&6&3\\0&1&7\end{pmatrix}$، $B=\begin{pmatrix}6&8&0\\5&1&2\\3&6&4\end{pmatrix}$ ۽ $C=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ ته هينين جي تصديق ڪريو

(a) $A+B=B+A$ (b) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(c) $(A+B)C=AC+BC$ (d) $A(B+C)=AB+AC$

15. جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}2&3&1\\1&-1&1\\0&2&2\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&2&-1\\2&0&2\end{bmatrix}$ ۽ $C=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&2\end{bmatrix}$ ته پوءِ ثابت ڪري ڏيکاريو ته

$A(BC)=(AB)C$

19.5. قالب جو قطعي ملهه (Determinant of a Matrix):

19.5.(i) قالب جو قطعي ملهه (Determinant of a Matrix) بيان ڪرڻ:

اسين R تي، هر هڪ چورس قالب A سان هڪ عدد $|A|$ ملائي سگهون ٿا. ان عدد کي قالب A جو قطعي ملهه چئبو آهي.

جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، ته پوءِ Aجي قطعي ملهه کي $|A|=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$ سان ظاهر ڪبو آهي.

19.5.(ii) قالب جي قطعي ملهه جي قيمت لهڻ:

ڪنهن به 2×2 قالب $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ لاءِ $|A|=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$

هتي $ad-bc$ کي قالب جي قطعي ملهه جي قيمت چئبو آهي.

مثال طور:

$$\begin{vmatrix}3&7\\1&-4\end{vmatrix}=3\times(-4)-7\times1=-19$$

هينين فارمولي کي ليبنيز فارمولو (Leibniz formula) يا ليپلاسيئن پکيڙ (Laplacian expansion) چئبو آهي

جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$ ته پوءِ

$$|A|=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

نوٽ: هن طريقي سان قالب جي قطعي ملهه جي قيمت لهڻ R_1 سان پکيڙ آهي

مثال: $|A|$ جي قيمت لهو جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}4 & -3 & 5\\ 1 & 0 & 3\\ -1 & 5 & 2\end{bmatrix}$

حل: $|A|$ جي قيمت لهڻ لاءِ اچو تہ قطعي مُلهہ کي R_1 سان کوليون

$$|A| = 4\begin{vmatrix}0 & 3\\ 5 & 2\end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 5\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad |A| = 4(0-15)+3(2+3)+5(5+0) = -20.$$

نوٽ: قالب جي قطعي مُلهہ جي قيمت مخصوص هوندي آهي.

19.5. (iii) نادر ۽ غير نادر قالبن (Singular and non-signular matrices) کي بيان ڪرڻ:

قالب A کي نادر ڪوٺبو جيڪڏهن ان جي قطعي مُلهہ جي قيمت ٻڙي هجي يعنيٰ تہ $|A| = 0$
قالب A کي غيرنادر ڪوٺبو جيڪڏهن ان جي قطعي مُلهہ جي قيمت ٻڙي جي برابر نہ هجي.يعنيٰ تہ $|A| \neq 0$

نوٽ: هڪ نادر قالب کي غير اُبتو ٿيندڙ (Non-invertible matrix)، قالب پڻ چئبو آهي. غير نادر قالب کي اُبتو ٿيندڙ قالب پڻ چئبو آهي

مثال: فيصلو ڪيو تہ $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 2 & 0 & 2\\ 6 & 8 & 14\end{bmatrix}$ ڇا هڪ نادر قالب آهي يا نہ

حل:

$$|A| = \begin{vmatrix}2 & 4 & 6\\ 2 & 0 & 2\\ 6 & 8 & 14\end{vmatrix} = 2(0-16)-4(28-12)+6(16-0) = -32-64+96 = 0.$$

جيئن تہ $|A| = 0$

تنهنڪري A هڪ نادر قالب آهي.

19.5. (iv) قالب جا ننڍا قطعي مُلهہ ۽ هم جُزا (Minors and Cofactors) بيان ڪرڻ :

فرض ڪريو تہ A هڪ 3×3 ترتيب/ جو چورس قالب آهي تہ پوءِ هڪ رُڪن a_{ij} جو ننڍو قطعي ملهہ کي M_{ij} سان ظاهر ڪبو آهي.جيڪو اهڙي قالب جو قطعي مُلهہ آهي جيڪو i^{th} قطار ۽ j^{th} ڪالم ڪڍي ڇڏڻ سان حاصل ٿيندو آهي.

مثال طور: جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ تہ پوءِ پهرين قطار ۽ ٻيون ڪالم ڪڍي ڇڏڻ سان $\begin{bmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$

قالب حاصل ٿيندو ۽ ان جي قطعي ملهہ کي ننڍو قطعي ملهہ M_{12} چئبو ۽ هن ريت لکبو $M_{12} = \begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$

جڏهن تہ رُڪن a_{ij} جو هم جزو جيڪو A_{ij} سان ظاهر ڪبو آهي، اهو هن ريت لهبو: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
هتي M_{ij} چورس قالب A جي رُڪن a_{ij} جو ننڍو قطعي مُلهہ آهي.

مثال : جيڪڏهن $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{bmatrix}$ تہ پوءِ M_{12} ۽ A_{12} لهو

حل: هتي $M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 6\,(-7) - 4(1) = -46$

۽ $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$

تنهنڪري $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}$

$A_{12} = (-1)^3(-46)$

$A_{12} = (-1)(-46) = 46.$

19.6. قالب جو ضربي اُبتڙ (Multiplicative Inverse of a Matrix):

19.6.(i) قالب جو ائڊجوائنٽ بيان ڪرڻ (Adjoint of a matrix):

2 × 2 ترتيب واري قالب جو ائڊجوائنٽ

فرض ڪريو A هڪ چورس قالب آهي. A جي هر جُزن واري قالب جو مٽا سٽا ٿيل قالب تي A جو ائڊ جوائنٽ ڪوٺبو

جيڪڏهن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تہ پوءِ قالب A جي ائڊجوائنٽ کي Adj (A) يا adj (A) سان ظاهر ڪبو آهي.

۽ $\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

جيڪڏهن $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ هڪ قالب آهي

تہ پوءِ $\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t$

جڏهن تہ A_{11}، A_{12}،....، A_{33} قالب A جا هم جُزا آهن.

مثال: جيڪڏهن $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ تہ پوءِ قالب A جو ائڊجوائنٽ لهو

حل: سڀ کان اڳ ۾، اسين قالب A جا سمورا هم جُزا لهنداسين.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} = -2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -5$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 0\end{vmatrix} = -2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix} = -2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix} = -8$$

هاڻي

$$Adj(A) = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}^t$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix}2 & 2 & 6\\ -1 & -2 & -5\\ -2 & -2 & -8\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & -2\\ 6 & -5 & -8\end{bmatrix}$$

(ii) 19.6. هڪ غير نادر قالب A جو ضربي اُبتڙ ۽ تصديق ڪرڻ ته $AA^{-1} = I = A^{-1}A$ جڏهن ته I هڪ ضرب لاءِ ذاتي قالب آهي.

جيڪڏهن A ۽ B، n×n ترتيب جا ٻہ قالب آهن اهڙي طرح جو $AB = BA = I_n$ تہ پوءِ A ۽ B هڪ ٻئي جا ضربي اُبتڙ ڪوٺبا. قالب A جي ضربي اُبتڙ کي A^{-1} سان ظاهر ڪبو آهي.

مثال:

چڪاس ڪيو تہ ڇا $A = \begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ ۽ $B = \begin{bmatrix}5 & -7\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ هڪ ٻئي جا ضربي اُبتڙ آهن

حل:

$$AB = \begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -7\\ -2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}15-14 & -21+21\\ 10-10 & -14+15\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

ساڳي ريت

$$BA = \begin{bmatrix}5 & -7\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}15-14 & 35-35\\ -6+6 & -14+15\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

جيئن تہ $AB = BA = I_2$

تنهنڪري A ۽ B هڪٻئي جا ضربي اُبتڙ آهن

چڪاس ٿي.

19.6.(iii) هڪ غير نادر قالب جو ضربي اُبتڙ لهڻ لاءِ ائڊجوائنٽ طريقي جو استعمال ڪرڻ

فرض ڪريو $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هڪ غير نادر قالب آهي تہ پوءِ A^{-1} هن ريت معلوم ڪبو:

$$A^{-1}=\frac{Adj(A)}{|A|} \quad \text{جڏهن تہ} \quad |A|\neq 0$$

ضربي اُبتڙ لهڻ جو هي طريقو ائڊجوائنٽ طريقو ڪوٺبو آهي

مثال 1:

ائڊجوائنٽ واري طريقي سان قالب $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ جو ضربي اُبتڙ لهو

حل:

هتي $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=2$ جيئن تہ $|A|\neq 0$ تنهنڪري A جو ضربي اُبتڙ وجود رکي ٿو

هاڻي $Adj(A)=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

۽ $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

مثال 2:

ائڊجوائنٽ واري طريقي سان قالب $A=\begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ جو ضربي اُبتڙ لهو

حل:

هتي

$$|A|=\begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=9(2-0)-2(-10-24)+1(0+4)$$

$$=18+68+4$$

$$=90.$$

جيئن تہ $|A|\neq 0,$

تنهنڪري A^{-1} وجود رکي ٿو.

هاڻي اسين سمورا هم جُزا لهنداسين

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=2-0=2$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-(-10-24)=34$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0+4 = 4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-4-0) = 4$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (-18-4) = -22$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -(0-8) = 8$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 12+1 = 13$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -(54-5) = -49$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -9-10 = -19$$

هاڻي $\operatorname{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t$ انهي ڪري ء $\operatorname{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 13 \\ 34 & -22 & -49 \\ 4 & 8 & -19 \end{bmatrix}$

هاڻي $A^{-1} = \dfrac{\operatorname{Adj}(A)}{|A|}$

$$A^{-1} = \frac{1}{90}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 13 \\ 34 & -22 & -49 \\ 4 & 8 & -19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{45} & \frac{2}{45} & \frac{13}{90} \\ \frac{17}{45} & \frac{-11}{45} & \frac{-49}{90} \\ \frac{2}{45} & \frac{4}{45} & \frac{-19}{90} \end{bmatrix}$$

19.6. (iv) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ جي چڪاس ڪرڻ:

جيڪڏهن $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ۽ $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ تہ پوء چڪاس ڪريو تہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

حل:

ڏنل آهي تہ $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ۽ $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

AB جو ضربي اُبتڙ

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 18+49 & 24+63 \\ 12+35 & 16+45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 & 87 \\ 47 & 61 \end{bmatrix}.$$

هاڻي $|AB| = 4087 - 4089 = -2$

جيئن ته $|AB| \neq 0$

تنهنڪري $(AB)^{-1}$ وجود رکي ٿو

هاڻي

$$(AB)^{-1} = \frac{\text{adj}\,(AB)}{|AB|}$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix} \quad ...(i)$$

A جو ضربي اُبتڙ

اسان وٽ آهي ته $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$|A| = 15 - 14 = 1$$

جيئن ته $|A| \neq 0$

تنهنڪري A^{-1} وجود رکي ٿو

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

B جو ضربي اُبتڙ

اسان وٽ آهي ته $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

هاڻي

$$|B| = 54 - 56 = -2$$

جيئن ته $|B| \neq 0$,

تنهنڪري B^{-1} وجود رکي ٿو

$$B^{-1} = \frac{\text{adj } B}{|B|} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

هاڻي

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 45+16 & -63-24 \\ -35-12 & 49+18 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix} \quad ...(ii)$$

مساوات (i) ۽ (ii) مان اسانکي مليو

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

انهي کري چڪاس ٿي.

19.7 هڪ درجي همزاد مساواتن جو حل (Solution of Simultaneous Linear Equations):

ٻن بدلجندڙن وارين ٻن هڪ درجي مساواتن جي مجموعي (System) تي غور ڪريو جيڪو هيٺ ڏنل آهي

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}\right\} \quad ... (I)$$

هي مجموعو هن ريت لکي سگهجي ٿو

$$AX = B \quad ... (II)$$

جڏهن ته $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ۽ $B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

قالب A کي عددي منين جو قالب چئبو جڏهن ته قالب X کي بدلجندڙن جو ڪالمي قالب ۽ B کي مســـــــتقل مقدارن جو ڪالمي قالب چئبو آهي.

هڪ ترتيبي جوڙو (x, y) ڏنل مجموعي جو حل ڪوٺبو ۽ اهو مساواتن وارو مجموعو ٻنهي قيمتن سان صحيح ٿيندو. اهڙا سڀ حل ملي هڪ درجي همزاد مساواتن جي مجموعي جو حل سيٽ ناهن ٿا.

19.7. (i) ٻن بدلجندڙن ۾ ٻن هڪ درجي مساواتن جي مجموعي کي حل ڪرڻ جيڪو عام زندگي جي مسئلن سان لاڳاپيل هجي ضربي اُبتڙ قالب وارو طريقو

هڪ قالبن واري هڪ مساوات ڪٺو جيڪا سيڪشن 19.7 ۾ زير غور هئي.

$$AX = B, \qquad \cdots (i)$$ يعني ته

هتي A هڪ چورس ۽ غير نادر قالب آهي مساوات (i) جي ٻنهي پاسن کي A سان ضرب ڪندي ، اسانکي مليو:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1}B \quad \cdots (ii)$$

بدلجندڙن جي ڪالمي قالب کي لهڻ لاءِ اسين مساوات (ii) کي استعمال ڪنداسين ۽ ان طريقي کي ضربي اُبتڙ وارو طريقو ڪوٺبو آهي

مثال 1: ضربي اُبتڙ وارو طريقو استعمال ڪندي، هڪ درجي مساواتن جو هيٺيون مجموعو حل ڪريو

$$5x + 2y = 3$$
$$3x + 2y = 5$$

حل: ڏنل مجموعي کي قالبي شڪل ۾ لکندي

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

يعني $AX = B$

جڏهن ته $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$، $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ۽ $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

ائڊجوائنٽ جو استعمال ڪندي پهريان اسين A^{-1} لهنداسين

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}}{10-6} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

هاڻي ضربي اُبتڙ واري طريقي سان

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6-10 \\ -9+25 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 \\ 16 \end{bmatrix}$$

يا $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$x = -1$ ۽ $y = 4$ حل آهي يعني حل سيٽ $= \{(-1, 4)\}$

مثال 2: هڪ سول انجنيئر کي ڪنهن آڏاوتي منصوبي لاءِ 6000 ڪعب ميٽر واري ۽ 9000 ڪعب ميٽر تلهي پٽڙي کپي. ٻن ڪڏن مان اهي شيون حاصل ٿي سگهن ٿيون. جن جو تفصيل هيٺين جدول ۾ ڏيکاريل آهي.

	واري	تلهي پٽڙي
ڪڏ - I	3	8
ڪڏ -II	4	11

ضربي اُبتڙ وارو طريقو استعمال ڪندي انهن شين جي مقدار لهو جيڪي انجنيئر جي ضرورت پوري ڪرڻ لاءِ هر هڪ ڪڏ مان ڪٽي اچيبون

حل: فرض ڪريو تہ x واري ۽ y تلهي پٽڙي جي مقدار کي ظاهر ڪن ٿا.

ضربي اُبتڙ واري طريقي موجب: $X = A^{-1}B \quad \cdots \quad (i)$

ڏنل مواد کي قالبي شڪل ۾ لکندي

$$AX = B$$

يا

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6000 \\ 9000 \end{bmatrix}$$

اسانکي اڳ ۾ ائڊجوائنٽ فارمولي ذريعي A^{-1} لهڻ جي ضرورت آهي.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}}{3(11)-8(4)} = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

تنهنڪري

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

هاڻي مساوات (i) مان، اسان وٽ آهي

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6000 \\ 9000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6000 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

ڪاٽو نشاني کي نظر انداز ڪندي اسان وٽ آهي $x = 6000$ ۽ $y = 3000$

انهي ڪري 6000 ڪعب ميٽر واري ۽ 3000 ڪعب ميٽر تلهي پٽڙي ڪٽي اچبي.

19.2.(ii) ڪريمر وارو قانون (Cramer's rule):

هڪ درجي مساواتن جي مجموعي کي حل ڪرڻ وارن طريقن مان هڪ طريقو ڪريمر جو قانون آهي اچو تہ ٻن بدلجندڙن x ۽ y ۾ هڪ درجي مساواتن جي مجموعي تي غور ڪريون جيڪو هن ريت لکيل آهي:

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \cdots \quad (i)$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

مجموعي (i) کي قالبي شڪل ۾ هيئنئن لکبو.

$$AX = B,$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

جڏهن ته $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$، $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ۽ $B=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ مجموعي (i) کي فقط هڪ ئي حل هوندو

جيڪڏهن $|A| \neq 0$

$$x=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$ ۽ $$y=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$ جيڪو هن ريت حاصل ڪري سگهجي ٿو

جڏهن ته $A_1=\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}$ ۽ $A_2=\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}$

مثال : ڪريمر جو قانون استعمال ڪندي ڏنل مجموعي کي حل ڪريو.

$$3x+2y=10$$
$$-6x+4y=4$$

حل: هتي $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}$

$$12+12=24$$

يعني ته $|A| \neq 0$ $\therefore$

هاڻي ڪريمر جي قانون مطابق

$$x=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{40-8}{24}$$

$$=\frac{32}{24}$$

$$x=\frac{4}{3}$$

۽

$$y=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}}{24}$$

$$=\frac{12+60}{24}$$

$$=\frac{72}{24}$$

$$y=3$$

انهي ڪري حل سيٽ آهي $\left\{\left(\frac{4}{3},3\right)\right\}$

مشق 19.2

1. هيٺين مان هر هڪ قطعي مُلهه جي قيمت لهو

i) $\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$ ii) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$ iii) $\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

iv) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ v) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ vi) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

vii) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ viii) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -5 & -1 & -5 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ ix) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

x) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & x & y \end{vmatrix}$ xi) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -6 & x & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

2. جيڪڏهن $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ته پوءِ M_{12}، M_{22}، M_{21}، A_{12}، A_{22} ۽ A_{21} جا مُلهه لهو.

3. x جي ڪهڙي قيمت لاءِ $\begin{bmatrix} 5-x & x+1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ نادر قالب ٿيندو

4. هيٺين چورس قالبن مان ڪهڙو نادر قالب ۽ ڪهڙو غير نادر قالب آهي

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ۽ $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. هيٺين جا ائڊجوائنٽ لهو

$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$، $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ ۽ $C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

6. جڏهن $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ ته تصديق ڪريو ته $A(\text{adj } A) = |A|\, I$

7. ائڊجوائنٽ واري طريقي سان هيٺين قالبن جا ضربي اُبتڙ لهو

i) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ii) $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$

iii) $C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$ iv) $D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -4 & 1 & -1\\ 6 & -2 & 1\end{bmatrix}$ v) $E=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$.

8. ضربي اُبتڙ واري طريقي ۽ ڪريمر جي قانون ذريعي هيٺين جو حل لهو.

1) $2x+3y=14$, $-4x+y=28$ 2) $2x-4y=-12$, $2y+3x=0$

جائزي واري مشق 19

1. **صحيح جواب چونڊيو.**

i. جيڪڏهن m قطارن جو تعداد ۽ n ڪالمن‌جو تعداد ظاهر ڪري ٿو ۽ $m=n$ تہ پوءِ قالب ڪي _______ قالب چئبو.

(a) مستطيلي (b) برابر (c) چورس (d) ٻُڙي

ii. جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}$ تہ پوءِ $A^2=$ _______

(a) I_2 (b) I_3 (c) $-I_2$ (d) 0

iii. جيڪڏهن A هڪ چورس قالب آهي اهڙي طرح جو $A^t=-A$ تہ پوءِ A کي _______ چئبو

(a) اريبي قالب (b) غير طرفي قالب

(c) همشڪلي قالب (d) اُبتو همشڪلي قالب

iv. جيڪڏهن A، B ۽ C ٽي قالب آهن تہ پوءِ $(ABC)^t=$ _______

(a) $A^t.B^t.C^t$ (b) $C^tB^tA^t$ (c) $C^tA^tB^t$ (d) $(B^tA^t)C^t$

v. جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}0 & i^2\\ -i^2 & 0\end{bmatrix}$ ۽ $C=\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix}$ تہ پوءِ

(a) $A^2=-I$ (b) $B^2=-I$

(c) $C^2=-I$ (d) اهي سڀ

vi. ٻن قالبن A ۽ B لاءِ جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$ ۽ $B=\begin{bmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ -\cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$ تہ پوءِ $AB=$ _____

(a) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

vii. x، y ۽ z جون قيمتون لهو جيڪڏهن $2\begin{bmatrix}x\\ 3\\ 4\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-1\\ y\\ 0\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}0\\ 4\\ z\end{bmatrix}$

(a) $2,\frac{3}{2},\frac{10}{3}$ (b) $\frac{3}{2},2,\frac{10}{3}$

(c) $\frac{3}{2},\frac{10}{3},2$ (d) 1,2,3

viii. $\left(A^{-1}\right)^{-1} =$ ______

(a) A^{-2} (b) A (c) A^{-1} (d) A^{2}

ix. x جي قيمت لهو جيڪڏهن $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = x+4$

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) 0 (d) ڪوبہ نہ

x. جيڪڏهن $\begin{bmatrix} \lambda & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ غير نادر قالب آهي تہ پوءِ $\lambda \neq$ ______

(a) −15 (b) −17 (c) −16 (d) ڪوبہ نہ

2. قطاري ۽ ڪالمي قالب کي بيان ڪريو.

3. هيٺين قالبن جي ترتيب لهو.

i) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$

4. هيٺين جي وصف بيان ڪريو.

(I) چورس قالب (ii) مستطيلي قالب (iii) اريبي قالب (iv) غير طرفي قالب

(v) همشڪلي قالب (vi) اُبتو همشڪلي قالب

5. جيڪڏهن $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ ۽ $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ تہ پوءِ هيٺيان لهو

i) $A+B$ ii) $A-B$ iii) AB iv) BA

v) $5A$ vi) $7B$ vii) $8A-9B$

6. جي قيمت لهو $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 2 & 0 & -1 \\ -7 & 8 & -10 \end{vmatrix}$

7. نادر ۽ غير نادر قالبن کي مثالن سان بيان ڪريو.

8. جيڪڏهن $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ تہ پوءِ A^{-1} لهو.

9. ڏنل مساواتن جي جوڙي کي هيٺين طريقن سان حل ڪريو

$$2x+5y=27$$
$$7x+y=12$$

(i) ضربي اُبتڙ وارو طريقو (ii) ڪريمر جو قانون

خلاصو

- رُڪنن جي مستطيلي ترتيب کي قالب چئبو آهي.
- قالب ۾ رقمن جي اُفقي ليڪ کي قالب جي قطار چئبو آهي ۽ رقمن جي عمودي ليڪ کي قالب جو ڪالم چئبو آهي.
- ٻن قالبن کي برابر قالب ڪوٺبو جيڪڏهن انهن جي ترتيب ساڳي هجي ۽ انهن جا واسطيدار رُڪن به ساڳيا هجن.
- هڪ قطار واري قالب کي قطاري قالب ۽ هڪ ڪالم واري قالب کي ڪالمي قالب چئبو آهي.
- هڪ قالب جنهن ۾ قطارن جو تعداد ۽ ڪالمن جو تعداد برابر هجي ته ان قالب کي چورس قالب ڪوٺبو نه ته پوءِ ان کي مستطيلي قالب چئبو.
- هڪ چورس قالب کي اريبي قالب چئبو. جيڪڏهن گهٽ ۾ گهٽ هڪ اريبي رڪن ڪانسواءِ سموارا رُڪن ٻُڙي هجن
- هڪ اُريبي قالب جنهن ۾ اُريبي رُڪن ساڳيا هجن، ان کي غير طرفي قالب چئبو آهي.
- هڪ اُريبي قالب جنهن جو هر هڪ اُريبي رُڪن 1 هجي، ان کي وحداني قالب چئبو آهي.
- هڪ چورس قالب کي همشڪلي قالب ڪوٺبو جيڪڏهن ان جو مٽا سٽا ٽيل قالب به ان ڏنل قالب جي برابر هجي.
- هڪ چورس قالب کي اُبتوهمشڪلي قالب ڪوٺبوجيڪڏهن ان جو مٽاسٽا ٽيل قالب ان جو منفي هجي.
- ٻن قالبن جي جوڙيا ڪٽ ڪرڻ لاءِ انهن جا واسطيدار رُڪن جوڙ يا ڪٽ ڪبا آهن.
- جيڪڏهن A ۽ B ساڳي ترتيب وارا به قالب آهن ته پوءِ جوڙ جي لحاظ کان مٽا وارو قانون آهي:

$$A + B = B + A$$

- جيڪڏهن A، B ۽ C ٽي ساڳي ترتيب وارا قالب آهن ته پوءِ جوڙ جي لحاظ کان سنگت واري خاصيت آهي: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- ٻه قالب A ۽ B ضرب لاءِ موافق ڪوٺبا جيڪڏهن پهرين قالب جي ڪالمن جو تعداد ٻئي قالب جي قطارن جي تعداد جي برابر هجي.
- R تي ڪنهن چورس قالب A لاءِ. هڪ عدد |A| کي قالب A جو قطعي ملهه ڪوٺبو آهي.
- جيڪڏهن A ۽ B، $n \times n$ ترتيب جا به قالب آهن اهڙي طرح جو AB=BA=I ته پوءِ A ۽ B هڪ ٻئي جا ضربي اُبتڙ ڪوٺبا.
- هڪ درجي مساواتن جي مجموعي (System) کي ضربي اُبتڙ واري طريقي ۽ ڪريمر جي قانون ذريعي حل ڪري سگهجي ٿو.

ٻه درجي مساواتن جو نظريو

يونٽ 20

THEORY OF QUADRATIC EQUATIONS

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي پڙهڻ کانپوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته

- ٻه درجي اظهار $ax^2 + bx + c$ جو شناختي فرق $b^2 - 4ac$ بيان ڪن
- ڏنل ٻه درجي اظهار جو شناختي فرق لهن
- شناختي فرق ذريعي ٻه درجي مساوات جي اصلن جو قسم (Nature of roots) تي بحث ڪن
- ڏنل ٻه درجي مساوات جي اصلن جو قسم لهڻ ۽ مساوات کي حل ڪندي تصديق ڪن
- ڏنل ٻه درجي مساوات ۾ شامل اڻڄاتل مقدارن جو ملهه لهڻ جڏهن ان جي اصلن جو قسم مليل هجي.
- ايڪي جا ٽيان مول لهن
- ايڪي جي منجهيل ٽئين مولن کي ω ۽ ω^2 طور سڃاڻپ ڪن
- ايڪي جي ٽئين مولن جي خاصيتن جي تصديق ڪن
- ايڪي جي ٽئين مولن جي خاصيتن جو استعمال ڪندي واسطو رکندڙ مسئلن کي حل ڪن
- ٻه درجي مساوات جي اصلن ۽ عددي مُنين جي وچ ۾ تعلق لهن
- حل ڪرڻ کانسواءِ ڏنل ٻه درجي مساوات جي اصلن جي جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت لهن
- ڏنل ٻه درجي مساوات ۾ شامل نامعلوم عددن جو ملهه لهن جڏهن
  - ❖ اصلن جي جوڙ اُپت ۽ اصلن جي ضرب اُپت جي وچ اُپت پاڻ ۾ برابر هجي
  - ❖ اصلن جي چورسن جي جوڙ اُپت، ڏنل عدد جي برابر هجي
  - ❖ اصل پاڻ ۾ ڏنل عدد جو فرق رکن
  - ❖ اصل ڏنل تعلق کي پورو ڪن (مثال طور تعلق $2\alpha + 5\beta = 7$ جڏهن ته α ۽ β مساوات جا اصل آهن)
  - ❖ اصلن جي جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت ٻئي هڪ ڏنل عدد جي برابر هجن
- هڪ ٻه درجي مساوات جي اصلن جو همشڪلي عمل بيان ڪن
- هشڪلي عمل کي گراف وسيلي ظاهر ڪن
- ٻه درجي مساوات جي اصلن جو همشڪلي عمل ان جي عددي منين جي صورت ۾ لهن
- ڏنل اصلن جي ٻه درجي مساوات لاءِ فارمولو:
  $x^2 -$ (اصلن جي جوڙ اُپت) $x +$ اصلن جي ضرب اُپت $= 0$ ناهڻ:
- ٻه درجي اُپت مساوات ناهن جنهن جا اصل هيٺيان آهن.
  - ❖ $2\alpha + 1, 2\beta + 1$
  - ❖ α^2, β^2
  - ❖ $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}$
  - ❖ $\dfrac{\alpha}{\beta}, \dfrac{\beta}{\alpha}$
  - ❖ $\alpha + \beta, \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$
- جڏهن ته α، β هڪ ٻه درجي مساوات جا اصل آهن.
- α، β جون قيمتون لهڻ جڏهن هڪ مساوات جا اصل $\dfrac{1}{\alpha}$ ۽ $\dfrac{1}{\beta}$ آهن.
- ڪعبي يا ٽي درجي مساوات جو حل ڪن جڏهن مساوات جو هڪ اصل مليل هجي.
- چو درجي مساوات کي حل ڪن جيڪڏهن مساوات جا ٻه حقيقي اصل مليل هجن.
- ٻن بدلجندڙن ۾ ٻن مساواتن جي مجموعي کي حل ڪرڻ جڏهن
  - ❖ هڪ مساوات هڪ درجي ۽ ٻي مساوات ٻه درجي هجي.
  - ❖ جڏهن ٻئي مساواتون ٻه درجي هجن
  - ❖ ٻه درجي مساوات سان حل ٿيندڙ عام زندگي جا مسئلا حل ڪن.

20.1 ٻه درجي مساوات جي اصلن جو قسم (Nature of the Roots of a Quadratic Expression):

20.1. (i) ٻه درجي اظهار $ax^2+bx+c, a\neq 0.$ جو شناختي فرق (b^2-4ac) بيان ڪرڻ

اسانکي خبر آهي ته ٻن درجن واري گهڻ رقمي اظهار کي ٻه درجي اظهار چئبو آهي ٻه درجي اظهار جي معياري صورت $ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ آهي جڏهن ته a، b ۽ c ترتيبوار x^2 جو عددي منڊ، x جو عددي منڊ ۽ مستقل رقم(Constant Term) آهن.

ٻه درجي اظهار جو شناختي فرق (Discriminant):

ٻه درجي اظهار $ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ لاءِ اظهار b^2-4ac کي ان جو شناختي فرق چئبو آهي۽ ان کي Δ يا D سان ظاهر ڪبو آهي يعني $\Delta=b^2-4ac$

20.1. (ii) ڏنل ٻه درجي مساوات جو شناختي فرق لهڻ

اسين اڳيئي ڄاڻون ٿا ته ٻه درجي مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ جو حل $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ آهي ۽ b^2-4ac شناختي فرق آهي.

مثال $2x^2+5x-4=0$ جو شناختي فرق لهو.

حل: اسان وٽ آهي $2x^2+5x-4=0$

هتي $a=2$، $b=5$ ۽ $c=-4$

هاڻي

$$\Delta=b^2-4ac=(5)^2-4(2)(-4)$$
$$=25+32=57$$

20.1. (iii) شناختي فرق ذريعي ٻه درجي مساوات جي اصلن جو قسم (Nature of roots) لهڻ:

اسان شناختي فرق يعني $\Delta=b^2-4ac$ جو استعمال ڪندي ٻه درجي مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0,$ جي اصلن جو قسم لهي سگهون ٿا

ٻه درجي مساوات $ax^2+bx+c=0$ جا اصل $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ۽ $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ آهن ۽ اصلن جو قسم $b^2-4ac,$ جي قيمت تي منحصر ڪري ٿو جڏهن ته a،b ۽ c حقيقي عدد آهن

i. جيڪڏهن If $\Delta=b^2-4ac>0,$ ته پوءِ اصل حقيقي ۽ غير مساوي هوندا

ii. جيڪڏهن $\Delta=b^2-4ac<0,$ ته پوءِ اصل غير حقيقي (منجهيل يا خيالي) هوندا.

iii. جيڪڏهن $\Delta=b^2-4ac=0,$ ته پوءِ اصل ناطق ۽ برابر هوندا ۽ هر هڪ اصل $-\frac{b}{2a}$ جي برابر هوندو.

iv. جيڪڏهن a,b,c ناطق عدد آهن ۽ $\Delta=b^2-4ac$ هڪ مڪمل چورس هجي ته پوءِ اصل ناطق ۽ غير مساوي هوندا. ٻي صورت ۾ اصل غير ناطق هوندا.

20.1. (iv) ڏنل ٻه درجي مساوات جي اصلن جو قسم لهڻ ۽ مساوات کي حل ڪندي تصديق ڪرڻ :

مثال 1:

هيٺين مساواتن جي اصلن جو قسم لهڻ لاءِ شناختي فرق استعمال ڪريو ۽ مساوات کي حل ڪندي تصديق ڪريو

(i) $x^2+5x-14=0$ (ii) $5x^2+3x+1=0$

(iii) $x^2-9x+5=0$ (iv) $9x^2=6x-1$

حل:

$x^2+5x-14=0$ (i)

هتي $a=1$, $b=5$ ۽ $c=-14$

$\Delta=b^2-4ac$

$\therefore \quad \Delta=(5)^2-4(1)(-14)$

$\Rightarrow \quad \Delta=25+56$

$\Rightarrow \quad \Delta=81=(9)^2>0,$

جيئن تہ شناختي فرق مڪمل چورس ۽ مثبت آهي تنهنڪري مساوات جا اصل، حقيقي، ناطق ۽ غير مساوي آهن.

تصديق:

$x^2+5x-14=0$

$x^2+7x-2x-14=0$

$x(x+7)-2(x+7)=0$

$(x-2)(x+7)=0$

$(x-2)=0$ يا $x+7=0$

$\Rightarrow \quad x=2$ يا $x=-7$

هتي مساوات جا اصل حقيقي غير ناطق ۽ غير مساوي آهن تصديق ٿي

حل:

$5x^2+3x+1=0,$ (ii)

هتي $a=5$ ۽ $c=1, b=3$

$\Delta=b^2-4ac$

$\therefore \quad \Delta=(3)^2-4(5)(1)$

$\Rightarrow \quad \Delta=9-20$

$\Rightarrow \quad \Delta=-11<0,$ (يعني منفي)

جيئن تہ شناختي فرق منفي آهي. تنهنڪري مساوات جا اصل منجهيل آهن

تصديق:

ٻہ درجي فارمولي جو استعمال ڪندي

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-20}}{2}$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{11}\,i}{2} \qquad (\because i^2=-1)$$

هتي مساوات جا اصل، منجهيل آهن تصديق ٿي.

حل:

$x^2-9x+5=0,$ (iii)

هتي $a=1$ $b=-9$ ۽ $c=5$

$\Delta=b^2-4ac$

$\therefore \quad \Delta=(-9)^2-4(1)(5)$

$\Rightarrow \quad \Delta=81-20$

$\Rightarrow \quad \Delta=61>0,$

جيئن تہ شناختي فرق مثبت۽ غير مڪمل چورس آهي تنهنڪري مساوات جا اصل حقيقي ۽ غير ناطق مساوي آهن

تصديق:

$x^2-9x+5=0,$

ٻہ درجي فارمولي جو استعمال ڪندي

$$x=\frac{9\pm\sqrt{81-20}}{2}$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{61}}{2}$$

هتي مساوات جا اصل حقيقي غير ناطق ۽ غير مساوي آهن تصديق ٿي

حل:

$9x^2=6x-1$ (iv)

$\Rightarrow 9x^2-6x+1=0$

هتي $a=9$, $b=-6$ ۽ $c=1$

$\because \quad \Delta=b^2-4ac$

$\therefore \quad \Delta=(6)^2-4(9)(1)$

$\Rightarrow \quad \Delta=36-36$

$\Rightarrow \quad \Delta=0,$

جيئن تہ شناختي فرق پورو چورس ۽ ٻڙي آهي تنهنڪري مساوات جا اصل حقيقي، ناطق ۽ برابر آهن

تصديق:

$9x^2-6x+1=0$

$(3x)^2-2(3x)(1)+(1)^2=0$

$(3x-1)^2=0$

$\Rightarrow \quad 3x-1=0$ يا $3x-1=0$

$\Rightarrow \quad x=\frac{1}{3}$ يا $x=\frac{1}{3}$

هتي مساوات جا اصل حقيقي، ناطق ۽ برابر آهن تصديق ٿي.

مثال 2:

ثابت ڪري ڏيکاريو ته مساوات, $abc^2x^2+c\left(3a^2+b^2\right)x+3a^2+b^2-ab=0$ جا اصل ناطق عدد آهن

حل:

$$abc^2x^2+c\left(3a^2+b^2\right)x+3a^2+b^2-ab=0$$

هتي $A=abc^2$, $B=c\left(3a^2+b^2\right)$ ۽ $C=3a^2+b^2-ab$

هاڻي $\Delta=B^2-4AC$

$$\Delta=\left[c\left(3a^2+b^2\right)\right]^2-4\left(abc^2\right)\left(3a^2+b^2-ab\right)$$
$$=c^2\left(3a^2+b^2\right)^2-4abc^2\left(3a^2+b^2-ab\right)$$
$$=c^2\left[\left(3a^2+b^2\right)^2-4ab\left(3a^2+b^2\right)+4a^2b^2\right]$$
$$=c^2\left[\left(3a^2+b^2\right)^2-2\left(3a^2+b^2\right)(2ab)+(2ab)^2\right] \quad \left[\because\ 4ab=2(2ab)\right]$$
$$=c^2\left[\left(3a^2+b^2-2ab\right)^2\right]$$
$$=\left[c\left(3a^2+b^2-2ab\right)\right]^2$$

جيئن ته Δ جو ملهه مڪمل چورس آهي

تنهنڪري مساوات جا اصل، ناطق عدد آهن

20.1 (v) ڏنل ٻه درجي مساوات ۾ شامل اڻڄاتل مقدارن جو ملهه لهڻ جڏهن ان جي اصلن جو قسم مليل هجي.

ڏنل ٻه درجي مساوات ۾ شامل اڻڄاتل مقدار جو ملهه لهڻ لاءِ هيٺيون مثالون اسانجي مدد ڪنديون جڏهن ته مساوات جي اصلن جو قسم مليل هجي.

مثال 1:

p جي ڪهڙي قيمت لاءِ مساوات $3x^2+5x+p=0$ ڪي

(i) مساوي اصل هوندا.

(ii) ناطق اصل هوندا.

(iii) منجهيل اصل هوندا.

حل:

$$3x^2+5x+p=0$$

هتي $a=3$، $b=5$ ۽ $c=p$

$\because \quad \Delta=b^2-4ac$

$\therefore \quad \Delta=(5)^2-4(3)(p)=25-12p,$

مساوي اصلن لاءِ

$$\Delta = 0$$

يعني $25 - 12p = 0$

$\Rightarrow \quad -12p = -25,$

$\Rightarrow \quad p = \frac{25}{12},$

انهيءَ ڪري $p = \frac{25}{12},$ تي ڏنل مساوات کي ٻہ مساوي اصل هوندا

(ii) ناطق اصلن لاءِ

Δ کي پورو چورس هجڻ گهرجي

يعني $25 - 12p$ کي ضرور پورو چورس ٿيڻ گهرجي جيڪو هينين قيمتن تي ٿيندو $p = 0$، $p = 2$ ۽ $p = -2$ وغيره

اهڙي طرح $p = 0, 2, -2$ ۽ ٻين قيمتن تي شناختي فرق پورو چورس ٿيندو

(iii) منجهيل اصلن لاءِ

يعني $25 - 12p < 0$

$\Rightarrow \quad 12p > 25$

$\Rightarrow \quad p > \frac{25}{12}$

اهڙي طرح ڏنل مساوات کي مساوي اصل هوندا

جڏهن $p > \frac{25}{12},$

مثال 2: جيڪڏهن مساوات $x^2 - 15 - k(2x - 8) = 0$ کي مساوي اصل هجن تہ پوءِ P جي قيمت لهو

حل: اسان وٽ آهي $x^2 - 15 - k(2x - 8) = 0,$ ان کي معياري صورت ۾ لکندي

اسانکي مليو $x^2 - 2kx + 8k - 15 = 0$

هتي $a = 1$ $b = -2k,$ ۽ $c = 8k - 15$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\therefore \quad \Delta = (-2k)^2 - 4(1)(8k - 15)$

$\Rightarrow \quad \Delta = 4k^2 - 4(8k - 15)$

مساوي اصلن لاءِ

$\Delta = 0$

$\therefore \quad 4k^2 - 4(8k - 15) = 0$

$\Rightarrow \quad k^2 - 8k + 15 = 0$ (ٻنهي پاسن کي 4 سان ونڊيندي)

$\Rightarrow \quad k^2 - 5k - 3k + 15 = 0$

$\Rightarrow \quad k(k - 5) - 3(k - 5) = 0$

$\Rightarrow \quad (k - 5)(k - 3) = 0$

يعني $k - 5 = 0$ يا $k - 3 = 0$

$k = 3 \qquad \Rightarrow \quad k = 5$

$k = 3$

اهڙي طرح k جون قيمتون 3 ۽ 5 آهن

مثال 3:

p جي ڪهڙي قيمت لاءِ، مساوات $2x^2-px+18=0,$ کي حقيقي ۽ غير مساوي اصل هوندا

حل:

هتي $2x^2-px+18=0,$

$a=2,\ b=-p$ ۽ $c=18$

$\because \quad \Delta=b^2-4ac$

$\therefore \quad \Delta=(-p)^2-4(2)(18)=p^2-144$

حقيقي ۽ غير مساوي اصلن لاءِ

$\because \quad \Delta>0$

$\therefore \quad p^2-144>0$

$\Rightarrow \quad p^2>144$

$\Rightarrow \quad p>12$ يا $p<-12$

اهڙي طرح ڏنل مساوات کي مساوي اصل هوندا جيڪڏهن $p<-12$ يا $p>12$

مشق 20.1

1. شناختي فرق جو استعمال ڪندي، هيٺين مساواتن جي اصلن جو قسم لهو

(i) $x^2+5x-6=0$ (ii) $x^2=6x$ (iii) $2x^2+8=6x$

(iv) $1+6x+9x^2=0$ (v) $24x^2+12x+36=0$ (vi) $x=x^2+1$

(vii) $3x^2+6=5x$ (viii) $3x^2+9=0$

2. k جي اُها حقيقي قيمت لهو جنهن تي هيٺين ۾ درجي مساواتن کي(i) ساڳيو حقيقي اصل هجي (ii) مختلف اصل هجي (اشارو: ساڳي حقيقي حل لاءِ $\Delta=0$ ۽ مختلف حقيقي حل لاءِ $\Delta>0$

(i) $x^2-3x+k=0$ (ii) $x^2+k=4$

(iii) $x^2+kx+2=0$ (iv) $(k-1)x^2-4x+2=0$

(v) $x^2+kx+4=0$ (vi) $9x^2+kx=-16$

(vii) $(k-2)x^2=4x+(k+2)$ (viii) $x^2+1=kx$

3. هيٺ ڏنل هر هڪ ۾ درجي مساوات ۾ m جو مُلھ لهو جيڪو اصلن کي برابر ڪري

(i) $(m+1)x^2+2(m+3)x+(2m+3)=0,$ بشرطيڪ $m\neq-1$

(ii) $9x^2+mx+16=0$

4. ثابت ڪري ڏيکاريو تہ هيٺين ۾ درجي مساواتن جا اصل حقيقي عدد آهن

(i) $x^2-2x\left(k+\frac{1}{k}\right)x+3=0,\ \forall k\in R-\{0\}$

(ii) $2nx^2+2(l+m+n)x+(l+m)=0,\ \forall l,m,n\in\mathbb{R}$ ۽ $m\neq0$

5. ثابت ڪري ڏيکاريو تہ هيٺين ۾ درجي مساواتن جا اصل ناطق عدد آهن.

(i) $(l-m)x^2+(m+n-l)x-n=0,\ \forall l,m,n\in\mathbb{R}$ ۽ $l\neq m$

(ii) $(a+c-b)x^2+2cx+(b+c-a)=0,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}$

6. p ۽ q جي ڪهڙين قيمتن تي ٻه درجي مساوات $x^2+(2p-4)x-(3q+5)=0$ کي مساوي اصل هوندا

7. ثابت ڪري ڏيکاريو تہ ڏنل ٻه درجي مساوات $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ جا اصل حقيقي آهن ۽ اهي مساوي ٿيندا جيڪڏهن $a=b=c$.

20.2 ايڪي يا هڪ جا ٽيان مول ۽ ان جون خاصيتون (Cube Roots of Unity and their properties):

20.2. (i) ايڪي جا ٽيان مول لهڻ.

فرض ڪريو تہ x ايڪي جو ٽيون مول آهي تہ پوءِ

$$x^3=1$$

$$\Rightarrow \quad x^3-1^3=0$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2+x+1)=0, \quad \left[\because a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\right]$$

يعني $x-1=0$

$$\Rightarrow \quad x=1$$

يا $x^2+x+1=0,$

هتي $a=b=c=1,$

ٻه درجي فارمولي جو استعمال ڪندي اسان وٽ آهي

$$\therefore \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-1\times 3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}, \quad (\because i^2=-1)$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \quad ۽ \quad x=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

اهڙي طرح ايڪي جا ٽيان مول

1 ۽ $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ آهن

20.2. (ii) ايڪي جي منجهيل ٽئين مولن کي ω ۽ ω^2 طور سڃاڻپ ڪرڻ:

ايڪي جا ٻہ منجهيل ٽيان مول

$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ۽ $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ آهن انهن ٻنهي منجهيل ٽئين مولن لاءِ اسين يوناني حرف "ω" جو استعمال ڪنداسين جنهن کي اوميگا "omega" پڙهبو آهي.

فرض ڪريو تہ $\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ تہ پوءِ $\omega^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ انهي ڪري هاڻي ايڪي جا ٽيئي مول $1,\omega$ ۽ ω^2 آهن.

20.2. (iii) ايڪي جي ٽئين مولن جي خاصيتن جي تصديق ڪرڻ:

ايڪي جي ٽئين مولن جون خاصيتون آهن:

(i) ايڪي جو هر هڪ منجهيل ٽيئون مول ٻيئي جو چورس آهي:

تصديق:

ايڪي جو هڪ منجهيل ٽيئون مول $\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ آهي

هاڻي

$$\therefore \quad \omega^2 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1-2i\sqrt{3}+3i^2}{4} = \frac{1-2i\sqrt{3}+3(-1)}{4} \quad (\because i^2=-1)$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{4} = \frac{2(-1-i\sqrt{3})}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Now} \quad (\omega^2)^2 = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{-1+2i\sqrt{3}+3i^2}{4} = \frac{1+2i\sqrt{3}+3(-1)}{4} \quad (\because i^2=-1)$$

$$\Rightarrow \quad (\omega^2)^2 = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{2(-1+i\sqrt{3})}{4} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad (\omega^2)^2 = \omega.$$

انهي ڪري ايڪي جو هر هڪ منجهيل ٽيئون مول ٻيئي جو چورس آهي. تصديق ٿي.

(ii) ايڪي جي سيني ٽيئن مولن جو جوڙ ٻڙي. يعني $1+\omega+\omega^2=0$

تصديق:

L.H.S $1+\omega+\omega^2$

جڏهن ته $\left(\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ ۽ } \omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$

$$= 1+\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$= \frac{2-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2-2}{2} = \frac{0}{2} = 0 = \text{R.H.S.}$$

تصديق ٿي.

(iii) ايڪي جي سيني ٽيئن مولن جي ضرب اُپت 1 آهي يعني $1=1\cdot\omega\cdot\omega^2$

تصديق:

L.H.S $\omega\cdot\omega^2\cdot 1$

$$= 1\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1-i^2 3}{4}$$

$$= \frac{1-(-1)(3)}{4}, \quad (\because i^2=-1)$$

$$= \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$= \text{R.H.S}$$

يعني $1\cdot\omega\cdot\omega^2 = 1$

يا $\omega^3 = 1$

تصديق ٿي.

(iv) ايڪي جو هر هڪ منجهيل ٽيون مول ٻيئي جو اُبتڙ آهي

تصديق اسان کي خبر آهي تہ $\omega^3 = 1,$

$$\Rightarrow \quad \omega \cdot \omega^2 = 1,$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\omega^2} \quad \text{يا} \quad \omega^2 = \frac{1}{\omega}$$

اهڙي طرح ايڪي جو هر هڪ منجهيل ٽيئون مول ٻيئي جو اُبتڙ آهي.

(v) ω^3 جي هر هڪ سڄي سگهہ، هڪ جي برابر ٿيندي.

$$\because \quad \omega^3 = 1,$$

$$\therefore \quad \left(\omega^3\right)^m = (1)^m = 1 \quad \forall m \in Z.$$

$$\omega^{3m} = 1.$$

اهڙي طرح تصديق ٿي تہ ω^3 جي هر هڪ سڄي سگهہ، هڪ جي برابر ٿيندي.

20.2. (iv) ايڪي جي ٽئين مول جي خاصيتن جو استعمال ڪندي واسطو رکندڙ مسئلن کي حل ڪرڻ:

مثال 1: -27 جا سمورا ٽيئان مول لهو

حل: فرض ڪريو تہ -27 جو ٽيون مول x آهي

$$\therefore \quad x = (-27)^{\frac{1}{3}} \quad \text{يعني}$$

$$x^3 = -27$$

$$\Rightarrow \quad x^3 + 27 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x)^3 + (3)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x+3)\left(x^2 - 3x + 9\right) = 0, \qquad \left[a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^3\right)\right]$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3,$$

$$x^2 - 3x + 9 = 0 \qquad \text{يا}$$

هتي $a = 1$، $b = -3$ ۽ $c = 9$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{9 - 36}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{-27}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{-1 \times 27}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{i^2 \times 27}}{2} \qquad \left(\because i^2 = -1\right)$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-(-3)\pm i3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-3\left(-1 \quad i\sqrt{3}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-3\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{2} \quad \text{ۓ} \quad x=\frac{-3\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=-3\omega^2 \quad \text{ۓ} \quad x=-3\omega$$

انهي كري 27- جا سمورا ثيئان مول -3 -3ω ۓ $-3\omega^2$ آهن

مثال 2: ثابت كري ڏيكاريو تہ

(a) $2+\omega=\dfrac{3}{2+\omega^2}$

(b) $2n=1$ جزن تائين... $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)$ جڏهن تہ $n\in N$

(a) حل:

L.H.S $=2+\omega$

$$=\frac{(2+\omega)(2+\omega^2)}{(2+\omega^2)} \qquad \left(\text{ساں ضرب ۓ ونڊ ڪندي } (2+\omega^2)\right)$$

$$=\frac{4+2\omega+2\omega^2+\omega^3}{2+\omega^2}$$

$$=\frac{4+2(\omega+\omega^2)+1}{2+\omega^2} \qquad (\because \omega^3=1)$$

$$=\frac{5+(-1)}{2+\omega^2} \qquad (\because \omega+\omega^2=-1)$$

$$=\frac{5-2}{2+\omega^2}=\frac{3}{2+\omega^2}$$

ثابت ٿيو

(b) **L.H.S** $=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)\ldots$ جزن تائين $2n$ $\quad \forall n\in N$

$$=\left[(-\omega^2)(-\omega)\right]\left[(1+\omega^3\cdot\omega)(1+\omega^6\cdot\omega^2)\right]\ldots \text{ جزن تائين } n \qquad \left(\begin{array}{l}\because 1+\omega=-\omega^2\\ 1+\omega^2=-\omega\\ \omega^3=\omega^6=1\end{array}\right)$$

$$=(\omega^3)\left[(1+\omega)(1+\omega^2)\right]\ldots. \text{ جزن تائين } n$$

$$=(\omega^3)\left[(-\omega^2)(-\omega)\right]\ldots \text{ جزن تائين } n$$

$$=(\omega^3)(\omega^3)\ldots \text{ جزن تائين } n$$

$$=(1)(1)\ldots \text{ جزن تائين } n$$

$$=(1)^n=1.$$

انهي كري ثابت ٿيو

مثال 3: ثابت ڪريو تہ

ثابتي:

$$(x+y+z)(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)=x^3+y^3+z^3-3xyz,$$

جڏهن تہ ω ۽ ω^2 ايڪي جا منجهيل ٽيئان مول آهن.

$$\text{L.H.S} =(x+y+z)(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)$$
$$=(x+y+z)\left[(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)\right]$$
$$=(x+y+z)\left[x^2+xy\omega^2+xz\omega+xy\omega+y^2\omega^3+yz\omega^2+xz\omega^2+yz\omega^4+z^2\omega^3\right]$$
$$=(x+y+z)\left[x^2+y^2(1)+z^2(1)+xy(\omega^2+\omega)+yz(\omega^2+\omega^4)+zx(\omega+\omega^2)\right]$$
$$=(x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2+xy(-1)+yz(-1)+zx(-1)\right],$$
$$=(x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right] \qquad \left(\because\ \omega^3=1, \omega^2+\omega=-1 \text{ ۽ } \omega^2+\omega^4=\omega+\omega^2=-1\right)$$
$$=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$
$$=\text{R.H.S}$$

انهي ڪري ثابت ٿيو

مشق 20.2

1. هيٺين جا سمورا ٽيئان مول لهو

(i) 64 (ii) -125 (iii) 216

2. هيٺيان لهو

(i) $(1+\omega^2)^4$ (ii) $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)$

(iii) $(2+5\omega+2\omega^2)^6$ (iv) $(-1+\sqrt{-3})^4+(-1-\sqrt{-3})^4$

3. ثابت ڪري ڏيکاريو تہ

(i) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)=(\omega+\omega^2)^4$

(ii) $(a+b)(a\omega+b\omega^2)(a\omega^2+b\omega)=a^3+b^3$

(iii) $(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)=a^2+b^2+c^2-ab-ba-ca$

(iv) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^9+\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^9-2=0$

(v) $(1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3=0$

20.3. ٻہ درجي مساوات جا اصل ۽ عددي مُنيد

20.3. (i) ٻہ درجي مساوات جي اصلن ۽ عددي مُنين جي وچ ۾ تعلق لهڻ

فرض ڪريو تہ مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ جا اصل α ۽ β سان ظاهر ڪجن ٿا

تہ پوءِ $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ۽ $\beta=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\therefore \quad \alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a} \qquad (1)$$

۽ $$\alpha\beta=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha\beta=\frac{(-b)^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a} \qquad (2)$$

تنهنڪري (1) ۽ (2) مان اسان کي هيٺيان مکيه تعلق مليا

اصلن جي جوڙ اُپت $= -\dfrac{x \text{ جو عددي مُنڊ}}{x^2 \text{ جو عددي منڊ}}$

اصلن جي ضرب اُپت $= \dfrac{\text{مستقل رقم}}{x^2 \text{ جو عددي منڊ}}$

جيڪڏهن α ۽ β مساوات جا اصل آهن، $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$

تہ پوءِ

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ ۽ $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

20.3. (ii) حل ڪرڻ کانسواءِ ڏنل ٻه درجي مساوات جي اصلن جي جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت لهڻ.

مثال حل ڪرڻ کانسواءِ هيٺين مساواتن مان هر هڪ جي اصلن جي جوڙ ۽ ضرب اُپت لهو

(i) $4x^2+6x+1=0$ (ii) $3\left(5x^2+1\right)=17x$

حل: (i)

$4x^2+6x+1=0$

هتي $a=4$، $b=6$ ۽ $c=1$

جيئن تہ $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ ۽ $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

تنهنڪري $\alpha+\beta=-\dfrac{6}{4}$ ۽ $\alpha\beta=\dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow$ $\alpha+\beta=-\dfrac{3}{2}$ ۽ $\alpha\beta=\dfrac{1}{6}$

حل: (ii)

$3\left(5x^2+1\right)=17x$

هتي $15x^2-17x+3=0$

$a=15$، $b=-17$ ۽ $c=3$

جيئن تہ $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ ۽ $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

$\alpha+\beta=-\left(\dfrac{-17}{15}\right)$ ۽ $\alpha\beta=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$

$\alpha+\beta=\dfrac{17}{15}$ ۽ $\alpha\beta=\dfrac{1}{5}$

20.3. (iii) ڏنل ٻه درجي مساوات ۾ شامل نامعلوم عددن جو ملهه لهڻ جڏهن

(a) اصلن جي جوڙ اُپت ۽ اصلن جي ضرب اُپت جي يج اُپت پاڻ ۾ برابر هجن.

(b) اصلن جي چورسن جي جوڙ اُپت، ڏنل عدد جي برابر هجي.

(c) اصل پاڻ ۾ ڏنل عدد جو فرق رکن.

(d) اصل ڏنل تعلق کي پورو ڪن (مثال طور تعلق $2\alpha + 5\beta = 7,$ جڏهن ته α ۽ β مساوات جا اصل آهن)

(e) اصلن جي جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت ٻئي هڪ ڏنل عدد جي برابر هجن

(a) جڏهن اصلن جي جوڙ اُپت ۽ اصلن جي ضرب اُپت جي يچ اُپت پاڻ ۾ برابر هجن

مثال: k جي قيمت لهو جيڪڏهن مساوات $6x^2 - 3kx + 5 = 0$ جي اصلن جي جوڙ اُپت ۽ اصلن جي ضرب اُپت پاڻ ۾ برابر آهن

حل: فرض ڪريو ته مساوات $6x^2 - 3kx + 5 = 0$ جا اصل α ۽ β آهن

هتي $a = 6 \quad b = -3 \quad$ ۽ $c = 5$

هاڻي $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{(-3k)}{6} = \dfrac{3k}{6}$ ۽ $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{6}$

اسان کي مليل آهي ته

اصلن جي ضرب اُپت = اصلن جي جوڙ اُپت

يعني $\alpha + \beta = \alpha\beta$

$$\therefore \quad \frac{3k}{6} = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{5}{3}.$$

مثال: p جي قيمت لهو جيڪڏهن مساوات $2x^2 + (8 - 4p)x + 3p = 0$ جي اصلن جي جوڙ اُپت، اصلن جي ضرب اُپت جي ٻيڻ جي برابر آهي.

حل: فرض ڪريو ته مساوات $2x^2 + (8 - 4p)x + 3p = 0$ جا اصل α ۽ β آهن

هتي $a = 2$، $b = 8 - 4p$ ۽ $c = 3p$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(8 - 4p)}{2} = 2p - 4 \quad \text{۽} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{3p}{2}$$

سوال ۾ ڏنل شرط موجب، اسان وٽ آهي

$$\alpha + \beta = 2(\alpha\beta)$$

يعني $2p - 4 = 2\left(\dfrac{3p}{2}\right) = 3p$

$$\Rightarrow \quad p = -4.$$

(b) جڏهن اصلن جي چورسن جي جوڙ اُپت ڏنل عدد جي برابر هجي:

مثال: k جو ملهه لهو جيڪڏهن مساوات، $2x^2 + 3kx + k^2 = 0$ جي اصلن جي چورسن جي جوڙ اُپت 5 جي برابر آهي

حل: فرض ڪريو ته مساوات $2x^2 + 3kx + k^2 = 0$ جا اصل α ۽ β آهن

هتي $a = 2$، $b = 3k$ ۽ $c = k^2$

هاڻي $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{3k}{2}$ ۽ $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{k^2}{2}$

ڏنل شرط موجب

$$\alpha^2 + \beta^2 = 5$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=5 \qquad \because [a^2+b^2=(a+b)^2-2ab]$$
$$\Rightarrow \quad \left(\frac{-3k}{2}\right)^2-2\left(\frac{k^2}{2}\right)=5$$
$$\Rightarrow \quad \frac{9k^2}{4}-k^2=5$$
$$\Rightarrow \quad \frac{9k^2-4k^2}{4}=5$$
$$\Rightarrow \quad 5k^2=5\times 4$$
$$\Rightarrow \quad k^2=4$$
$$\Rightarrow \quad k=\pm 2$$

(c) جڏهن اصل ڏنل عدد جو فرق رکن:

مثال: p جو ملهه لهو جيڪڏهن مساوات $x^2-px+8=0$ جا اصل 2 جو فرق رکن ٿا.

حل: فرض ڪريو تہ مساوات $x^2-px+8=0$ جا اصل α ۽ β آهن.

هتي $a=1$ ، $b=-p$ ۽ $c=8$

هاڻي $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{(-p)}{1}=p$ ۽ $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{8}{1}=8$

ڏنل شرط موجب

$\alpha-\beta=2$

ٻنهي پاسن جو چورس ڪرڻ سان اسان کي مليو

$(\alpha-\beta)^2=4$

$$\Rightarrow \quad (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4 \qquad \left[\because (a-b)^2=(a+b)^2-4ab\right]$$
$$\Rightarrow \quad p^2-4(8)=4$$
$$\Rightarrow \quad p^2-32=4$$
$$\Rightarrow \quad p^2=36$$
$$\Rightarrow \quad p=\pm 6$$

(d) جڏهن اصل ڏنل تعلق کي پورو ڪن (مثال طور تعلق $2\alpha+5\beta=7$, جڏهن β ۽ α مساوات جا اصل آهن)

مثال: k جو ملهه لهو جيڪڏهن مساوات $x^2-5x+k=0$ جا اصل α۽ β تعلق $2\alpha+5\beta=7$ کي پورو ڪن ٿا.

حل: ڏنل مساوات, $x^2-5x+k=0$ ۾

هتي $a=1$ ، $b=-5$ ۽ $c=k$

فرض ڪريو تہ ڏنل مساوات جا اصل α۽ β آهن

جيئن تہ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ۽ $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ $\because$

تنهنڪري $\therefore \quad \alpha+\beta=-\frac{(-5)}{1}=5$

$\Rightarrow \quad \alpha=5-\beta \qquad \cdots$ (i)

$\alpha\beta=\frac{k}{1}=k$

$\Rightarrow \quad \alpha\beta = k \quad \cdots \text{(ii)}$

۽اسان کي مليل آهي تہ

$\because \quad 2\alpha + 5\beta = 7$

$\therefore \quad 2(5-\beta)+5\beta = 7$ يعني تہ

$\Rightarrow \quad 10-2\beta+5\beta = 7$

$\Rightarrow \quad 3\beta = -3$

$\Rightarrow \quad \beta = -1$

$\therefore$ مساوات (i) مان اسان وٽ آهي

$\alpha = 5-(-1) = 5+1 = 6,$

k جي قيمت لهڻ لاءِ اسين مساوات (ii) ۾ α ۽ β جون قيمتون رکنداسين ۽ اسانکي مليو:

$k = 6(-1) = -6$

$\Rightarrow \quad k = -6$

(e) جيڪڏهن اصلن جي جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت بئي هڪ ڏنل عدد جي برابر هجن:

مثال: k جو ملهہ لهو جيڪڏهن مساوات $6x^2-3kx+5=0$ ۾ اصلن جي جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت بئي $\frac{5}{6}$ جي برابر آهن

حل: فرض ڪريو تہ مساوات, $6x^2-3kx+5=0$ جا اصل α۽ β آهن

تہ پوءِ

$$\alpha+\beta = -\frac{b}{a} \quad -\frac{(-3k)}{6} = \frac{k}{2} \quad \cdots \text{(i)}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{5}{6} \quad ۽ \quad \cdots \text{(ii)}$$

ڏنل شرط موجب، اصلن جي جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت $\frac{5}{6}$ جي برابر آهن

يعني تہ $\alpha+\beta = \alpha\beta = \frac{5}{6}$

$$\Rightarrow \quad \frac{k}{2} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{5}{3}$$

انهي ڪري $k = \frac{5}{3}$ تي ڏنل مساوات جي اصلن جي جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت بئي $\frac{5}{6}$ جي برابر آهن.

مشق 20.3

1. حل ڪرڻ ڪانسواءِ هيٺ ڏنل هر هڪ ٻه درجي مساوات جي اصلن جي جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت لکو.

(i) $x^2 - x - 1 = 0$ (ii) $2x^2 - 3x - 4 = 0$

(iii) $x^2 - \frac{3}{4}a^2 = ax$ (iv) $7x^2 - 5kx + 7k = 0$

2. m جو ملھ لھو جيڪڏھن

(i) مساوات $x^2 + (3m-7)x + 5m = 0$ جي اصلن جي جوڙ اُپت ان جي ضرب اُپت جو $\frac{3}{2}$ پيرا آهي

(ii) مساوات $2x^2 - 3x + 4m = 0$ جي اصلن جي جوڙ اُپت ان جي ضرب اُپت جو 6 پيرا آهي.

3. p جي قيمت لھو جيڪڏھن

(i) مساوات $x^2 - px + 6 = 0$ جي اصلن جي چورسن جي جوڙ اُپت 13 جي برابر آهي.

(ii) مساوات $x^2 - 2px + (2p-3) = 0$ جي اصلن جي چورسن جي جوڙ اُپت 6 آهي

4. m جو ملھ لھو جيڪڏھن

(i) مساوات $x^2 - 5x + 2m = 0$ جا اصل پاڻ ۾ 1 جو فرق رکن ٿا.

(ii) مساوات $x^2 - 8x + m + 2 = 0$ جا اصل پاڻ ۾ 2 جو فرق رکن ٿا.

5. k جو ملھ لھو جيڪڏھن

(i) مساوات $5x^2 - 7x + k - 2 = 0$ جا اصل تعلق $2\alpha + 5\beta = 1$ کي پورو ڪن ٿا.

(ii) مساوات $3x^2 - 2x + 7k + 2 = 0$ جا اصل تعلق $7\alpha - 3\beta = 18$ کي پورو ڪن ٿا.

6. p جو ملھ لھو جيڪڏھن هيٺين ٻه درجي مساواتن جي اصلن جي جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت ٻئي ڏنل عدد 4 جي برابر آهن.

(i) $(2p+3)x^2 + (7p-5)x + (3p-10) = 0$

(ii) $4x^2 - (5p+3)x + 17 - 9p = 0$

20.4 هڪ ٻه درجي مساوات جي اصلن جو همشڪلي عمل
(Symmetric function of roots of quadratic equation):

20.4. (i) هڪ ٻه درجي مساوات جي اصلن جو همشڪلي عمل بيان ڪرڻ:

فرض ڪريو ته α ۽ β هڪ ٻه درجي مساوات جا اصل آهن ته پوءِ α ۽ β ۾ هڪ عمل f کي همشڪلي عمل (Symmetric Function) ڪونبو جيڪڏهن α ۽ β کي بدلائڻ سان اهو عمل ساڳيو رهي. يعني ته $f(\alpha,\beta) = f(\beta,\alpha)$. $\alpha+\beta$ ۽ $\alpha\beta$ کي α ۽ β جا بنيادي همشڪلي عمل چئبو آهي.

اها ڳالھ ڌيان ۾ رکجي ته $\alpha - \beta \neq \beta - \alpha$, انهيءَ لاءِ $\alpha - \beta$ اصلن جو همشڪلي عمل نہ آهي.

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ ۽ $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ جو استعمال ڪندي، اسين ٻه درجي مساوات جي اصلن جو همشڪلي عمل لھي سگھون ٿا جيڪو مساوات جي عددي منڍن جي صورت ۾ هوندو
همشڪلي عمل $\alpha+\beta$ ۽ $\alpha\beta$ جي صورت ۾ ظاهر ڪري سگھجن ٿا.

همشڪلي عمل جو مُلهه لهڻ لاءِ اسين ان عمل کي $\alpha+\beta$ ۽ $\alpha\beta$ جي صورت ۾ ظاهر ڪنداسين.
همشڪلي عملن جون مثالون هيٺين ريت آهن

- $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
- $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
- $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right]^2-2(\alpha\beta)^2$

مثال: $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$ جو ملھ لھو جيڪڏھن $\alpha=2$ ۽ $\beta=3$ ۽ ثابت ڪري ڏيکاريو تہ اھو α ۽ β جو همشڪلي عمل آهي. جڏهن تہ α ۽ β ٻہ درجي مساوات جا اصل آهن.

حل: فرض ڪريو تہ $f(\alpha,\beta)=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta,$

ڏنل آهي تہ $\alpha=2$ ۽ $\beta=3$

$\therefore \quad f(2,3)=2^2+3^2+(2)(3)=4+9+6=19$

هاڻي

$f(\beta,\alpha)=\beta^2+\alpha^2+\beta\alpha=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta=f(\alpha,\beta)$

$\because$ جيئن تہ $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$

$\therefore$ تنهنڪري f همشڪلي عمل آهي

انهيءَ ڪري ڏنل اظهار اصلن α ۽ β جو همشڪلي عمل آهي.
ثابت ٿيو

20 4 (ii) همشڪلي عمل کي گراف وسيلي ظاهر ڪرڻ:

آرٽيڪل 20.4.1 ۾ اسين اڳيئي ٻہ درجي مساوات جي اصلن جا همشڪليعمل بيان ڪري چڪا آهيون، مثال طور $\alpha+\beta$ ، $\alpha\beta$ ، $\alpha^3+\beta^3$ ، $2\alpha\beta$ ، $\alpha^2+\beta^2$ ، $\alpha^3+\beta^3$ وغيره.

جڏهن ڪو همشڪلي عمل (اظهار) کي مستقل $c\in\mathbb{R}$ جي برابر ڪيو وڃي تہ اسان کي همشڪلي مساوات ملندي جيڪا اسان هن ريت لکنداسين $f(\alpha,\beta)=c$. هر مساوات کي گراف ۾ ٽپڪن جي سيٽ طور ظاهر ڪري سگهجي ٿو، جنهن کي $G(f)$ سان ظاهر ڪبو آهي ۽ هن ريت بيان ڪبو

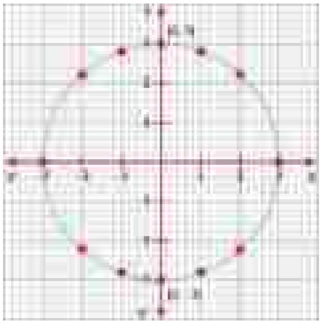
$$G(f)=\{(\alpha,\beta)\,|\,f(\alpha,\beta)=c\wedge\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$$

مثال 1: مساوات $\alpha^2+\beta^2=9$ کي گراف واري صورت ۾ ظاهر ڪريو ۽ ان جو گراف ٺاهيو

حل: ڏنل آهي تہ $\alpha^2+\beta^2=9$

$\Rightarrow \quad \beta=\pm\sqrt{9-\alpha^2}$

گراف ڪڍڻ لاءِ اسين ڪجھ ٽپڪا ڪڍنداسين. α جون مختلف قيمتون لڳائيندي. اسان کي β جون واسطيدار قيمتون ملن ٿيون.



α	0	1	2	3	−1	−2	−3
β	±3	±2.828	±2.2360	0	±2.828	±2.2360	0

اهڙي طرح همشڪلي عمل $\alpha^2+\beta^2$ هڪ گول کي ظاهر ڪري ٿو جڏهن اهو مستقل $c=9$ جي برابر ڪيو ويو

20.4. (iii) ٻه درجي مساوات جي اصلن جو همشڪلي عمل ان جي عددي مٿين جي صورت ۾ لهڻ

فرض ڪريو تہ مساوات

$$ax^2+bx+c=0, a\neq 0 \quad \text{(i)}$$

جا اصل α ۽ β آهن تہ پوءِ (ii) ... $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

۽ (iii) ... $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

مٿيون مساواتون (ii) ۽ (iv)، ٻہ درجي مساوات (i)جي اصلن جا بنيادي همشڪلي عمل ظاهر ڪن ٿيون

مثال: جيڪڏهن مساوات $x^2-px+q=0$, جا اصل α ۽ β آهن تہ پوءِ هيٺين جو ملهہ لهو

(i) $\alpha^2+\beta^2$ (ii) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$

حل: ڏنل آهي تہ مساوات $x^2-px+q=0$ جا اصل α ۽ β آهن.

هتي $a=1$ ، $b=-p$ ۽ $c=q$

$$\therefore \quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{(-p)}{1}=p$$

۽ $$\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{q}{1}=q$$

هاڻي

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \quad \cdots \text{(i)}$$

$$=(p)^2-2q \quad (\because \alpha\beta=q \text{ ۽ } \alpha+\beta=p)$$

$$=p^2-2q$$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} \quad \cdots \text{(ii)}$$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{p^2-2q}{q} \quad (\because \alpha\beta=q \text{ ۽ } \alpha+\beta=p)$$

مشق 20.4

1. جيڪڏهن α ۽ β هڪ ٻه درجي مساوات جا اصل آهن ته پوءِ هيٺين همشڪلي عملن کي $\alpha+\beta$ ۽ $\alpha\beta$. جي صورت ۾ لکو

(i) $(\alpha-\beta)^2$ (ii) $(\alpha+\beta)^3$ (iii) $\alpha^2\beta^{-1}+\beta^2\alpha^{-1}$

(iv) $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$ (v) $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}$ (vi) $\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)^2$

2. جيڪڏهن مساوات $2x^2-3x+7=0$, جا اصل α ۽ β آهن ته پوءِ هيٺين همشڪلي عملن جون قيمتون لهو.

(i) $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2$ (ii) $\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}$ (iii) $\frac{1}{a\alpha+1}+\frac{1}{a\beta+1}$

3. جيڪڏهن مساوات $px^2+qx+q=0, p\neq 0,$ جا اصل α ۽ β آهن ته پوءِ $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ جو مُلهه لهو.

4. همشڪلي مساوات $\alpha+\beta=8$ کي گراف وسيلي ظاهر ڪريو جڏهن ته α ۽ β ٻه درجي مساوات جا اصل آهن ۽ گراف پڙ ناهيو.

20.5 ٻه درجي مساواتن جي جوڙجڪ.

20.5.(i) ڏنل اصلن جي ٻه درجي مساوات لاءِ فارمولو.

ٺاهڻ: x^2- (اصلن جي جوڙ اُپت) $x+$ (اصلن جي ضرب اُپت) $=0$

فرض ڪريو ته مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ جا اصل α ۽ β آهن

ته پوءِ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ۽ $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

هاڻي مساوات (i) کي هيٺين ريت ٻيهر لکو

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \qquad \text{بشرطيڪ } a\neq 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0$$

$\Rightarrow$ x^2-(اصلن جي جوڙ اُپت)$x+$(اصلن جي ضرب اُپت)$=0$

جڏهن ته $\frac{-b}{a}$ ۽ $\frac{c}{a}$ ترتيبوار اصلن جي جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت کي ظاهر ڪن ٿا.

هاڻي ان کي نيڪ هيٺين ريت لکي سگهون ٿا

$x^2-Sx+P=0$ جڏهن ته P ۽ S ڏنل ٻه درجي مساوات جي اصلن جي ترتيب وار جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت کي ظاهر ڪن ٿا.

مثال: ٻه درجي مساوات ناهيو جنهن جا اصل آهن:

(i) $-\frac{4}{5},\frac{3}{7}$ (ii) $7\pm 2\sqrt{5}$

حل (i): فرض ڪريو تہ $\alpha = -\frac{4}{5}$ ۽ $\beta = \frac{3}{7}$

$$\therefore \quad S = \alpha + \beta = -\frac{4}{5} + \frac{3}{7} = \frac{-28+15}{35} = \frac{-13}{35}$$

۽ $$P = \alpha\beta = \left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{-12}{35}$$

جڏهن اصل مليل هجن تہ مساوات ٿيندي:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

i.e, يعني تہ $$x^2 - \left(\frac{-13}{35}\right)x + \left(\frac{-12}{35}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 35x^2 + 13x - 12 = 0.$$

اها گهربل مساوات آهي.

حل (ii): فرض ڪريو تہ $\alpha = 7 + 2\sqrt{5}$ ۽ $\beta = 7 - 2\sqrt{5}$

$$\therefore \quad S = \alpha + \beta = 7 + 2\sqrt{5} + 7 - 2\sqrt{5} = 14$$

۽ $$P = \alpha\beta = \left(7 + 2\sqrt{5}\right)\left(7 - 2\sqrt{5}\right) = 49 - 20 = 29$$

جڏهن اصل مليل هجن تہ مساوات ٿيندي:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 14x + 29 = 0$$

اها گهربل مساوات آهي.

20.5.(ii) ٻہ درجي مساوات ٺاهيو جنهن جا اصل هيٺيان آهن:

(a) $2\alpha+1, 2\beta+1$ (b) α^2, β^2 (c) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ (d) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ (e) $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$,

جڏهن تہ α,β هڪ ٻہ درجي مساوات جا اصل آهن.

مثال: جيڪڏهن مساوات $x^2 - 5x + 6 = 0$ جا اصل α,β آهن تہ پوءِ هڪ مساوات ٺاهيو جنهن جا اصل هيٺ ڏنل آهن.

(i) $2\alpha+1, 2\beta+1$ (ii) α^2, β^2 (iii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

(iv) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ (v) $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

حل (i): جيئن تہ مساوات $x^2 - 5x + 6 = 0$ جا اصل α,β آهن ۽ هتي $a=1$, $b=-5$ ۽ $c=6$

تنهنڪري

$$\therefore \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6, \text{ ۽ } \alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-5)}{1} = 5$$

گهربل مساوات جا اصل $2\alpha+1$ ۽ $2\beta+1$ آهن.

هاڻي اسين انهن جي جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت لهنداسين.

$$S=(2\alpha+1)+(2\beta+1)$$
$$\Rightarrow\quad S=2(\alpha+\beta)+2$$
$$\Rightarrow\quad S=2(5)+2 \qquad (\because\ \alpha+\beta=5)$$
$$\Rightarrow\quad S=10+2=12$$
هاڻي
$$P=(2\alpha+1)(2\beta+1)$$
$$P=4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1$$
$$\Rightarrow\quad P=4(6)+2(5)+1 \qquad (\because\ \alpha\beta=6 \text{ ۽ } \alpha+\beta=5)$$
$$\Rightarrow\quad P=24+10+1=35$$
$x^2+12x+35=0$ گهربل مساوات آهي.

حل (ii): گهربل مساوات جا اصل α^2 ۽ β^2 آهن.

$$S=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(5)^2-2(6)=25-12=13, \quad (\because\ \alpha\beta=6 \text{ ۽ } \alpha+\beta=5)$$
۽
$$P=\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(6)^2=36$$
$$\because\quad x^2-Sx+P=0$$
$$\therefore\quad x^2-13x+36=0,$$
اها گهربل مساوات آهي

حل (iii): گهربل مساوات جا اصل $\frac{1}{\alpha}$ ۽ $\frac{1}{\beta}$ آهن.

$$S=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{5}{6}, \qquad (\because\ \alpha\beta=6 \text{ ۽ } \alpha+\beta=5)$$
۽
$$P=\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{6}$$
$$x^2-Sx+P=0$$
$$\therefore\quad x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$$
$$\Rightarrow\quad 6x^2-5x+1=0,$$
اها گهربل مساوات آهي.

حل (iv): گهربل مساوات جا اصل $\frac{\alpha}{\beta}$ ۽ $\frac{\beta}{\alpha}$ آهن.

$$S=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta} \qquad (\because\ \alpha\beta=6 \text{ ۽ } \alpha+\beta=5)$$
$$=\frac{25-2(6)}{6}=\frac{25-12}{6}=\frac{13}{6},$$
۽
$$P=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{6}{6}=1$$
$$x^2-Sx+P=0$$
$$\therefore\quad x^2-\frac{13}{6}x+1=0$$
$$\Rightarrow\quad 6x^2-13x+6=0,$$
اها گهربل مساوات آهي.

حل (V): گهربل مساوات جا اصل $\alpha+\beta$ ۽ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ آهن.

$$S=(\alpha+\beta)+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$
$$=(\alpha+\beta)+\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$$
$$=(\alpha+\beta)\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}\right)$$
$$=5\left(1+\frac{1}{6}\right)=5\left(\frac{7}{6}\right)=\frac{35}{6} \qquad (\because \alpha\beta=6 \text{ ۽ } \alpha+\beta=5)$$
$$P=(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$
$$=(\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)=\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}=\frac{25}{6} \qquad (\because \alpha\beta=6 \text{ ۽ } \alpha+\beta=5)$$
$$x^2-Sx+P=0$$
$$\therefore \quad x^2-\frac{35}{6}x+\frac{25}{6}=0$$
$$\Rightarrow \quad 6x^2-35x+25=0,$$
اها گهربل مساوات آهي.

20.5.(iii) α،β جون قيمتون لهڻ جڏهن هڪ مساوات جا اصل $\frac{1}{\alpha}$ ۽ $\frac{1}{\beta}$ آهن.

مثال: جيڪڏهن مساوات $x^2-6x+8=0$ جا اصل $\frac{1}{\alpha}$ ۽ $\frac{1}{\beta}$ آهن ته پوءِ α ۽ β جون قيمتون لهو.

حل: جيئن ته مساوات $x^2-6x+8=0$ جا اصل $\frac{1}{\alpha}$ ۽ $\frac{1}{\beta}$ آهن.

هتي $a=1$، $b=-6$ ۽ $c=8$

تنهنڪري $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{b}{a}=-\left(\frac{-6}{1}\right)=6,$

$$\Rightarrow \quad \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=6$$
$$\Rightarrow \quad \alpha+\beta=6\alpha\beta \qquad \ldots \text{(i)}$$
۽
$$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{c}{a}=\frac{8}{1}=8$$
$$\Rightarrow \quad \alpha\beta=\frac{1}{8} \qquad \ldots \text{(ii)}$$
مساوات (i) مان، اسان کي مليو.
$$\beta=6\left(\frac{1}{8}\right)-\alpha=\frac{3-4\alpha}{4} \qquad \ldots \text{(iii)}$$

مساوات (ii) ۾ β جي قيمت رکڻ سان اسان کي مليو.

$$\alpha\left(\frac{3-4\alpha}{4}\right)=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8\alpha}{4}(3-4\alpha)-1=0$$

$$\Rightarrow \quad 2\alpha(3-4\alpha)-1=0$$

$$\Rightarrow \quad 6\alpha-8\alpha^2-1=0$$

$$\Rightarrow \quad 8\alpha^2-6\alpha+1=0$$

$$\Rightarrow \quad 8\alpha^2-4\alpha-2\alpha+1=0$$

$$\Rightarrow \quad 4\alpha(2\alpha-1)-1(2\alpha-1)=0$$

$$\Rightarrow \quad (2\alpha-1)(4\alpha-1)=0$$

$2\alpha-1=0$ يا $4\alpha-1=0$

$\Rightarrow \quad \alpha=\frac{1}{2}$ يا $\alpha=\frac{1}{4},$

تہ پوءِ مساوات (iii) مان اسان کي مليو:

$\beta=\dfrac{3-4\left(\frac{1}{2}\right)}{4}=\dfrac{1}{4}$ يا $\beta=\dfrac{3-4\left(\frac{1}{4}\right)}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2},$

انهيءَ کري $\alpha=\frac{1}{2}$ ۽ $\beta=\frac{1}{4}$ يا $\alpha=\frac{1}{4}$ ۽ $\beta=\frac{1}{2}$

مشق 20.5

1. مساواتون ٺاهيو جن جا اصل آهن:

(i) $2,-3$ (ii) ω,ω^2 (iii) $2+i, 2-i$ (iv) $2\sqrt{2},-2\sqrt{2}$

2. جيڪڏهن مساوات $6x^2-3x+1=0$ جا اصل α ۽ β آهن تہ پوءِ أهي مساواتون ٺاهيو جن جا اصل هيٺ ڏنل آهن.

(i) $2\alpha+1, 2\beta+1$ (ii) α^2,β^2 (iii) $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$

(iv) $\frac{\alpha}{\beta},\frac{\beta}{\alpha}$ (v) $\alpha+\beta,\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

3. أها مساوات لهو جنهن جا اصل ڏنل مساوات $px^2-qx+r=0, p\neq 0$ جي اصلن جا أبتڙ هجن.

4. أها مساوات لهو جنهن جا اصل ڏنل مساوات $x^2-px+q=0$ جي اصلن جي ٻيڻ جي برابر هجن.

5. أها مساوات لهو جنهن جا اصل ڏنل مساوات $px^2+qx+r=0$ جي اصلن کان 2 وڌيڪ هجن.

6. أها شرط لهو جڏهن مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ جو هڪ اصل

(i) ٻيئي جو ٽيڻو هجي. (iii) ٻيئي جو جمعي ابتڙ هجي.

(ii) ٻيئي جو چورس هجي. (iv) ٻيئي جو ضربي ابتڙ هجي.

20.6 ٻه درجي صورت ۾ ايندڙ وڌن درجن واريون مساواتون:

20.6.(a) ڪعبي يا ٽي درجي مساوات حل ڪرڻ جڏهن مساوات جو هڪ اصل مليل هجي.

فرض ڪريو ته $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ هڪ ڪعبي مساوات آهي، جنهن جو هڪ اصل α آهي.

فرض ڪريو ته $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$

۽ فرض ڪريو ته $f(x) = 0$ جو هڪ اصل α آهي ته پوءِ

$f(x) = (x - \alpha)\cdot f_1(x)$ جڏهن ته هڪ $f_1(x)$ ٻه درجي اظهار آهي.

مثال: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ کي حل ڪريو جيڪڏهن ان مساوات جو هڪ اصل 1 آهي.

حل: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

اهو ٻڌايل آهي ته هڪ اصل 1 آهي.

يعني $x = 1$ هڪ ضرب ڏيندڙ جُزو آهي.

مصنوعي ورهاست واري طريقي موجب

1	1	−6	11	−6
	↓	1	−5	6
	1	−5	6	0 = پاڇي

اهڙي طرح اسان وٽ هڪ ٻه درجي مساوات هيٺين ريت آهي.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3x + 6 = 0$$
$$\Rightarrow x(x-2) - 3(x-2) = 0$$
$$\Rightarrow (x-2)(x-3) = 0$$

i.e, $x - 2 = 0$ يا $x - 3 = 0$

$\Rightarrow x = 2$ يا $x = 3$

تنهنڪري حل سيٽ $= \{1, 2, 3\}$

20.6.(b) چو درجي مساوات کي حل ڪرڻ جيڪڏهن مساوات جا ٻه حقيقي اصل مليل هجن.

فرض ڪريوته $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0, a_0 \neq 0$ هڪ چو درجي مساوات آهي ۽ ان جا ٻه حقيقي اصل α ۽ β آهن.

جيڪڏهن α ۽ β، $f(x) = 0$ جا ٻه اصل آهن ته پوءِ

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)\cdot f_1(x)$$

جڏهن ته $f_1(x)$ ٻه درجي اظهار آهي.

مثال: چو درجي مساوات $x^4 - 9x^3 + 19x^2 + 9x - 20 = 0$ جا باقي رهيل اصل لهو جيڪڏهن ٻه اصل 5 ۽ 1 آهن.

حل: ڏنل مساوات $x^4 - 9x^3 + 19x^2 + 9x - 20 = 0$ آهي، جنهن جا ڏنل اصل 1 ۽ 5 آهن يعني ته ضرب ڏيندڙ جُزا 5 ۽ 1 آهن.

مصنوعي ورهاست واري طريقي موجب اسان وٽ آهي.

5	1	−9	19	9	−20
	↓	5	−20	−5	20
1	1	−4	−1	4	0 = پاڇي
	↓	1	−3	−4	
	1	−3	−4	0 = پاڇي	

اهڙي طرح اسان وٽ ٻه درجي مساوات هيٺين ريت آهي.

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 4x + x - 4 = 0$$
$$\Rightarrow x(x-4) + 1(x-4) = 0$$
$$\Rightarrow (x-4)(x+1) = 0$$

يعني ته $x - 4 = 0$ يا $x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = 4 \Rightarrow x = -1$

تنهنڪري باقي رهيل اصل 4 ۽ 1− آهن.

مشق 20.6

1. هينين ڪعبي مساواتن جا باقي رهيل ٻہ اصل لهو جيڪڏهن هڪ اصل مليل آهي.

(i) $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ ۽ $x = 1$

(ii) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ ۽ $x = 3$

(iii) $x^3 - 28x + 48 = 0$ ۽ $x = 2$

2. هينين چو درجي مساواتن جا باقي رهيل اصل لهو جيڪڏهن ان جا ٻہ اصل ڏنل آهن.

(i) $12x^4 - 8x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$ ۽ $x = 1, -\frac{1}{2}$

(ii) $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$ ۽ $x = 1, -1$

(iii) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$ ۽ $x = 3, -4$

3. m جو ملھ لهو ۽ مساوات $2x^3 - 3mx^2 + 9 = 0$ جا باقي رهيل اصل ٻہ لهو جيڪڏهن ان جو هڪ اصل 3 آهي.

4. جيڪڏهن مساوات $x^3 - 3ax^2 - x + 6 = 0$ جو هڪ اصل 1 آهي تہ پوءِ a جي قيمت لهو. ان جا باقي رهيل اصل پڻ لهو.

5. a ۽ b جون قيمتون لهو جيڪڏهن مساوات $x^4 - ax^2 + bx + 252 = 0$ جا اصل 6 ۽ -2 آهن، ان جا باقي رهيل اصل پڻ لهو.

20.7 همزاد مساواتون (Simultaneous Equations):

ٻہ يا ٻہ کان وڌيڪ مساواتون گڏجي همزاد مساواتن جو مجموعو ناهين ٿيون، ٻن بدلجندڙن جون قيمتون لهڻ لاءِ اسان کي مساواتن جو جوڙو کپي ٿو.

انهن سيني ترتيب ڏنل جوڙن (x, y) جو سيٽ جيڪي مساواتن جي مجموعي کي پورو ڪن ٿا، ان کي مجموعي جو حل سيٽ چئبو آهي.

20.7.(i)(a) ٻن بدلجندڙن ۾ ٻن مساواتن جي مجموعي کي حل ڪرڻ جڏهن هڪ مساوات هڪ درجي ۽ ٻي مساوات ٻہ درجي هجي.

مساواتن جي مجموعي کي حل ڪرڻ جو مڪمل طريقو هينين مثالن سان واضح بيان ڪجي ٿو. جڏهن هڪ مساوات هڪ درجي ۽ ٻي مساوات ٻہ درجي هجي.

مثال 1: مساواتن $2x + y = 10$ ۽ $4x^2 + y^2 = 68$ جي مجموعي کي حل ڪريو.

حل:

$2x + y = 10 \quad \cdots \quad (i)$

۽ $4x^2 + y^2 = 68 \quad \cdots \quad (ii)$

مساوات (i) مان اسان کي مليو.

$y = 10 - 2x \quad (iii)$

اھا y جي رقم مساوات (ii) ۾ رکڻ سان اسان کي مليو:

$$4x^2 + (10 - 2x)^2 = 68$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 + 100 - 40x + 4x^2 - 68 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 8x^2 - 40x + 32 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-5x+4=0$$
$$\Rightarrow \quad x^2-4x-x+4=0$$
$$\Rightarrow \quad (x-4)(x-1)=0$$
$\Rightarrow \quad x-4=0$ يا $x-1=0$

$\Rightarrow \quad x=4$ يا $x=1$

مساوات (iii) ۾ x جون اهي قيمتون رکڻ سان

جڏهن $x=4$ تہ پوءِ $y=10-2(4)=2$

جڏهن $x=1$ تہ پوءِ $y=10-2(1)=8$

اهڙي طرح حل سيٽ $\{(4,2),(1,8)\}$ آهي.

مثال 2: مساواتن $3x-2y=7$ ۽ $xy=20$ جي مجموعي کي حل ڪريو.

حل:

$3x-2y=7 \quad \cdots \quad$ (i)

۽ $xy=20 \quad \cdots \quad$ (ii)

مساوات (i) مان اسان وٽ آهي.

$$x=\frac{7+2y}{3} \qquad \text{(iii)}$$

x جي اها رقم مساوات (ii) ۾ رکندي. اسان کي مليو.

$$\left(\frac{7+2y}{3}\right)y=20$$
$$\Rightarrow \quad 7y+2y^2=20\times 3=60$$
$$\Rightarrow \quad 2y^2+7y-60=0$$
$$\Rightarrow \quad 2y^2-8y+15y-60=0$$
$$\Rightarrow \quad 2y(y-4)+15(y-4)=0$$
$$\Rightarrow \quad (y-4)(2y+15)=0$$
يعني $y-4=0$ يا $2y+15=0$

$\Rightarrow \quad y=-\dfrac{15}{2} \qquad \Rightarrow \quad y\ \ 4$

y جون اهي قيمتون مساوات (iii) ۾ رکندي

جيڪڏهن $y=4$ تہ پوءِ $x=\dfrac{7+2(4)}{3}=\dfrac{15}{3}=5$

جيڪڏهن $y=-\dfrac{15}{2}$ تہ پوءِ $x=\dfrac{7+2\left(\frac{-15}{2}\right)}{3}=-\dfrac{8}{3}$

اهڙي طرح حل سيٽ $\left\{(5,4),\left(-\dfrac{8}{3},-\dfrac{15}{2}\right)\right\}$ آهي.

(b) 20.7.(i) جڏهن ٻئي مساواتون ٻه درجي آهن:

اسين هيٺين مثالن جي ذريعي مساواتن جي ان مجموعي جي حل جي طريقي جي وضاحت ڪريون ٿا جنهن ۾ ٻئي مساواتون ٻه درجي آهن.

مثال 3: مساواتن $x^2+y^2=4$ ۽ $2x^2-y^2=8$ جي مجموعي کي حل ڪريو.

حل:

$$x^2+y^2=4 \quad \cdots \quad (i)$$

$$2x^2-y^2=8 \quad \cdots \quad (ii)$$ ۽

y^2 کي خارج ڪرڻ لاءِ اسين مساواتن (i) ۽ (ii) کي جوڙ ڪريون ٿا ۽ اسان کي مليو.

$$\therefore \quad 3x^2=12$$

$$\Rightarrow \quad x^2=4$$

$$\Rightarrow \quad x=\pm 2,$$

$\therefore$ مساوات (i) ۾ $x=\pm 2$ جو استعمال ڪندي اسان کي مليو.

$(2)^2+y^2=4$	$(-2)^2+y^2=4$
$\Rightarrow \quad 4+y^2=4$	$\Rightarrow \quad 4+y^2=4$
$\Rightarrow \quad y^2=4-4=0$	$\Rightarrow \quad y^2=4-4=0$
$\Rightarrow \quad y=0$	$\Rightarrow \quad y=0$

اهڙي طرح $\{(-2,0),(2,0)\}$ حل سيٽ آهي.

مثال 4: مساواتن $x^2+y^2=13$ ۽ $xy=6$ جي مجموعي کي حل ڪريو.

حل:

$$x^2+y^2=13 \quad \ldots \quad (i)$$

$$xy=6 \quad \ldots \quad (ii)$$ ۽

ان قسمن جي مساواتن مان اسان مستقل رقم کي خارج ڪنداسين.

مساوات (i) کي 6 سان ۽ مساوات (ii) کي 13 سان ضرب ڪندي اسان حاصل ڪيو.

$$\therefore \quad 6x^2+6y^2=78 \quad \ldots \quad (iii)$$

$$13xy=78 \quad \ldots \quad (iv)$$ ۽

مساوات (iii) مان مساوات (iv) کي ڪٽ ڪندي اسان حاصل ڪيو.

$$6x^2-13xy+6y \;=0$$

$$\Rightarrow \quad 6x^2-9xy-4xy+6y^2=0$$

$$\Rightarrow \quad 3x(2x-3y)-2y(2x-3y)=0$$

$2x-3y=0$ يا $3x-2y=0$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{3y}{2}$ يا $x=\dfrac{2y}{3}$

اهڙي طرح اسان وٽ مساواتن جا ٻه جوڙا آهن.

$$\left.\begin{array}{l} xy = 6 \\ x = \frac{3y}{2} \end{array}\right\} \text{(A)}$$

۽

$$\left.\begin{array}{l} xy = 6 \\ x = \frac{2y}{3} \end{array}\right\} \text{(B)}$$

مجموعي (A) ۾

$$\left(\frac{3y}{2}\right)y = 6, \quad \left(\because x = \frac{3y}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 3y^2 = 2\times 6$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = \frac{2\times 6}{3} = 4$$

$$y = \pm 2$$

جڏهن $y = \pm 2$ تہ پوءِ $x = \frac{3}{2}(\pm 2) = \pm 3$

مجموعي (B) ۾

$$\left(\frac{2y}{3}\right)\cdot y = 6 \quad \left(\because x = \frac{2y}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 2y^2 = 3\times 6$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = \frac{3\times 6}{2} = 9$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm 3,$$

جڏهن $y = \pm 3$ تہ پوءِ $x = \frac{2}{3}(\pm 3) = \pm 2$

اهڙي طرح حل سيٽ آهي

$$\{(3,2),(-3,-2),(2,3),(-2,-3)\}.$$

20.7.(ii) ٻه درجي مساوات سان حل ٿيندڙ عام زندگي جا مسئلا حل ڪرڻ:

مثال 1: ٻہ لاڳيتا يا سلسليوار واڌو سچا عدد لهو، جنهن جي ضرب اپت 72 آهي.

حل: فرض ڪريو تہ x ۽ $x+1$ ٻہ لاڳيتا واڌو سچا عدد آهن.

ڏنل شرط موجب

$$x(x+1) = 72$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + x - 72 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x+9)(x-8) = 0 \quad \text{(جُزن وسيلي)}$$

$$\Rightarrow \quad x+9 = 0 \quad \text{يا} \quad x-8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -9 \quad \Rightarrow \quad x = 8$$

منفي عدد $x = -9$ کي نظرانداز ڪندي.

گهربل لاڳيتا عدد 8 ۽ 9 آهن.

مثال 2: هڪ مستطيلي زمين جي ٽڪري جي ايراضي 320 چورس ميٽر آهي. زمين جي ٽڪري جي ويڪرائي ان جي ڊيگهہ کان 4 ميٽر گهٽ آهي. زمين جي ٽڪري جي ڊيگهہ ۽ ويڪرائي لهو.

حل: فرض ڪريو تہ زمين جي ٽڪري جي ڊيگهہ x آهي تہ پوءِ ان جي ويڪر $x-4$ ٿيندي.

ڏنل آهي تہ:

$$\text{زمين جي ٽڪري جي ايراضي} = 320m^2$$

$$\Rightarrow \quad x(x-4) = 320 \quad [\because \text{ايراضي} = \text{ويڪر} \times \text{ڊيگهہ}]$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 4x - 320 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 20x + 16x - 320 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x(x-20) + 16(x-20) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (x-20)(x+16) = 0$$
$\Rightarrow \quad x - 20 = 0$ يا $x + 16 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 20 \quad \Rightarrow \quad x = -16$

$x = -16$ کي نظرانداز ڪندي چاڪاڻ تہ ڊيگھہ هميشہ واڌو هوندي آهي.

اهڙي طرح زمين جي ٽڪري جي ڊيگھہ 20 ميٽر ۽ ويڪرائي 16 ميٽر آهي.

مشق 20.7

مساواتن جي هيٺين مجموعن کي حل ڪريو.

1. $2x - y = 3$ ۽ $x^2 + y^2 = 2$
2. $2x + y = 4$ ۽ $x^2 - 2x + y^2 = 0$
3. $\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 2$ ۽ $4x + 3y = 25$
4. $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$ ۽ $x^2 + (y+1)^2 = 10$
5. $x^2 + y^2 = 25$ ۽ $(4x - 3y)(x - y - 5) = 0$
6. $x^2 + y^2 = 16$ ۽ $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$
7. $x^2 + y^2 = 5$ ۽ $xy = 2$
8. $x^2 + xy = 5$ ۽ $x^2 - 2xy = 2$
9. $x + \frac{4}{y} = 1$ ۽ $y + \frac{4}{x} = 25$
10. 12 کي ٻن حصن ۾ ورهايو، اهڙي طرح جو انهن جي چورسن جي جوڙ اُپت انهن جي ضرب اپت جي ٻيڻ کان 4 وڌيڪ آهي.
11. هڪ عبادت گاهہ جي ڊيگھہ ان جي ويڪر کان 4 ميٽر وڌيڪ آهي، جيڪڏهن عبادت گاهہ جي ايراضي $36m^2$ آهي تہ پوءِ ان جي ڊيگھہ ۽ ويڪر لهو.
12. ٻن عددن جي چورسن جي جوڙ اُپت 100 آهي. هڪ عدد ٻيئي کان 2 وڌيڪ آهي تہ پوءِ عددن جا مُلهہ لهو.
13. ڪوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي پايي جي ڊيگھہ عمود جي ڊيگھہ کان 3 وڌيڪ آهي. جيڪڏهن ٽڪنڊي جو هئپاٽينيوز 34 آهي تہ پوءِ پايو ۽ عمود لهو.
14. ٻيور پاسي ٽڪنڊي جو عمود $12cm$ آهي، ٽڪنڊي جي غير مساوي پاسي جي اوچائي $12cm$ آهي، ٽڪنڊي جي ٽنهي پاسن جي ڊيگھہ لهو.
15. ٻن عددن جو فرق 5 آهي ۽ انهن جي چورسن جو فرق 275 آهي تہ پوءِ عدد لهو.

جائزي واري مشق 20

1. درست جواب چونڊيو

i. جيڪڏهن مساوات $2x^2+5x+3=0$ جا حاصل p ۽ q آهن ته پوءِ $p+q=$ ________

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{5}{2}$ (d) $-\frac{5}{2}$

ii. جيڪڏهن مساوات $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ جا اصل $\frac{1}{\beta}$ ۽ $\frac{1}{\alpha}$ آهن ته پوءِ $\alpha+\beta=$ ______

(a) $-\frac{b}{a}$ (b) $\frac{b}{c}$ (c) $-\frac{b}{c}$ (d) $-\frac{c}{b}$.

iii. جيڪڏهن مساوات $(p+1)x^2+(2p+3)x+(3p+4)=0$ جي اصلن جي جوڙ اُپت -1 آهي ته پوءِ اصلن جي ضرب اُپت ______ آهي.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

iv. مساوات $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ جي اصلن جو قسم ______ سان حاصل ٿيندو.

(a) اصلن جي جوڙ اُپت (b) اصلن جي ضرب اُپت
(c) شناختي فرق (c) ڪوبہ نہ

v. جيڪڏهن ٻہ درجي مساوات جي اصلن جي جوڙ اُپت $\frac{b}{a}$ آهي ۽ اصلن جي ضرب اُپت $\frac{c}{a}$ آهي تہ پوءِ مساوات ______ آهي.

(a) $ax^2+bx+c=0$ (b) $ax^2+bx-c=0$
(c) $ax^2-bx+c=0$ (d) $ax^2-bx-c=0$

vi. گهربل مساوات ______ ٿيندي جنهن جا اصل ڏنل مساوات $ax^2+bx+c=0$ جي اصلن جا اُبتڙ آهن.

(a) $ax^2+bx+c=0$ (b) $cx^2+bx+a=0$
(c) $cx^2+ax+b=0$ (d) $cx^2-bx-a=0$

vii. جيڪڏهن مساوات $x^2-2x-15=0$ جا اصل α ۽ β آهن تہ پوءِ $\alpha^2+\beta^2=$ ______

(a) 34 (b) -34 (c) 26 (d) -26

viii. جيڪڏهن حقيقي عددي مُڪين واري ٻہ درجي مساوات جو $\Delta=b^2-4ac$ هڪ پورو چورس آهي تہ پوءِ اصلن جو قسم ______ آهي.

(a) حقيقي ۽ مساوي (b) حقيقي، ناطق ۽ غير مساوي
(c) حقيقي، غير ناطق ۽ غير مساوي (d) خيالي

ix. جيڪڏهن ٻہ درجي مساوات جو هڪ اصل $2+\sqrt{3}$ آهي تہ پوءِ ٻيو اصل ______ ٿيندو.

(a) 2 (b) $-2+\sqrt{3}$ (c) $2-\sqrt{3}$ (d) $-2-\sqrt{3}$

x. ٻہ درجي مساوات ______ ٿيندي جنهن جا اصل ايڪي جا منجهيل ٽيان مول آهن.

(a) $x^2-x-1=0$ (b) $x^2-x+1=0$
(c) $x^2+x+1=0$ (d) $x^2+x-1=0$

2. هيٺين ٻه درجي مساواتن جي اصلن جو قسم لهو.

i) $x^2-7x+12=0$ ii) $x^2-14x+49=0$

iii) $x^2-x+7=0$ iv) $x^2-5=0$

3. k جي ڪهڙي قسم لاءِ مساوات $x^2+kx+4=0$ کي

i) مساوي اصل آهن ii) منجهيل اصل آهن

iii) حقيقي اصل آهن iv) ناطق اصل آهن

4. 729 جا ٽيان مول لهو.

5. هيٺين ٻه درجي مساواتن جي اصلن جي جوڙ أپت ۽ ضرب أپت لهو.

i) $x^2-7x+29=0$ ii) $x^2-px+q=0$

iii) $7x-8=5x^2$ iv) $11x=9x^2-28$

6. ٻه درجي مساوات جي اصلن جي همشڪلي عمل کي بيان ڪريو.

7. اها ٻه درجي مساوات لهو جنهن جا اصل $1-\sqrt{3}$ ۽ $1+\sqrt{3}$ آهن.

8. اها مساوات لهو جنهن جا اصل ڏنل مساوات $x^2-10x+16=0$ جي اصلن جا ابتڙ آهن.

9. هيٺ ڏنل هر هڪ مساواتن جي مجموعي کي حل ڪريو.

i) $x^2+y^2=10$, $x+y=3$ ii) $x^2+y^2=37$, $2x+5y=32$

خلاصو

- ٻه درجي مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ جو شناختي فرق $\Delta=b^2-4ac$ آهي.
  - i. جيڪڏهن $\Delta=b^2-4ac>0$ ته پوءِ اصل حقيقي ۽ غير مساوي هوندا.
  - ii. جيڪڏهن $\Delta=b^2-4ac<0$ ته پوءِ اصل غير حقيقي (منجهيل يا خيالي) هوندا.
  - iii. جيڪڏهن $\Delta=b^2-4ac=0$ ته پوءِ اصل ناطق ۽ برابر هوندا ۽ هر هڪ $-\dfrac{b}{2a}$ جي برابر هوندو.
  - iv. جيڪڏهن a,b,c ناطق آهن ۽ $\Delta=b^2-4ac$ هڪ مڪمل چورس آهي ته پوءِ اصل ناطق ۽ غير مساوي هوندا نه ته پوءِ غير ناطق هوندا.
- ايڪي جا ٽيان مول 1، ω ۽ ω^2 آهن.
- ايڪي جي ٽئين مولن جون خاصيتون
  - i. ايڪي جو هر هڪ منجهيل ٽيون مول ٻيئي جو چورس آهي.
  - ii. ايڪي جي ٽنهي ٽئين مولن جي جوڙ أپت ٻڙي آهي
  - iii. ايڪي جي ٽنهي ٽيئن مولن جي ضرب أپت 1 آهي.
  - iv. ايڪي جو هر هڪ منجهيل ٽيون مول ٻيئي جو ابتڙ آهي.
- جيڪڏهن ٻه درجي مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ جا اصل α ۽ β آهن: ته پوءِ

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \quad ۽ \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

- ٻه درجي مساوات جي اصلن جا همشڪلي عمل اُهي عمل هوندا آهن جيڪي ساڳيا رهندا جيڪڏهن اصلن کي بدلايو وڃي. يعني $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$

21 يونٽ

جزوي پاڱا
PARTIAL FRACTION

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي پڙهڻ ڪانپوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته

- واجب، غير واجب ۽ ناطق اٽپورن کي بيان ڪن.
- هڪ آلجبرائي اٽپور کي ان جي جزوي پاڱن ۾ ورهائن جڏهن ان جو ڇيد مشتمل هجي.
  - هڪ درجي اڻ ورجايل جزن تي
  - هڪ درجي ورجايل جزن تي
  - ٻه درجي اڻ ورجايل جزن تي
  - ٻه درجي ورجايل جزن تي

تعارف: ڪنهن ناطق اٽپور ڪي ٻن يا وڌيڪ ڀاڱن جي جوڙ اُپت يا تفاوت ۾ ٽوڙجي ته انهن ڀاڱن ڪي جزوي ڀاڱا چئبو آهي. جزوي ڀاڱا تڏهن ئي لهي سگهجن ٿا جڏهن انس واري گهڻ رقمي جو درجو چيد واري گهڻ رقمي جي درجي کان لازمي طور ننڍو هجي.

مثال طور

(i) $$\frac{2x+3}{(x-1)(x+4)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+4}$$

(ii) $$\frac{-(4x^2+x+11)}{(x^2+1)(x-3)}=\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{5}{x-3}$$

21.1 واجب، غيرواجب ۽ ناطق اٽپورن ڪي بيان ڪرڻ.

واجب اٽپور (Rational Fraction):

اسين ڄاڻون ٿا ته $\frac{p}{q}$ صورت وارو عدد ناطق عدد ڪوٺبو آهي

جيڪڏهن $p,q\in Z$ ۽ $q\neq 0$

ساڳي ريت ٻن گهڻ رقمين جي ونڊ اُپت، $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ڪي آلجبرائي ناطق اظهار ڪوٺبو

جيڪڏهن $Q(x)\neq 0$ ۽ ان ڪي عام طرح سان ناطق اظهار چئبو آهي.

مثال:

(i) $$\frac{2x^3-5x^2-3x-10}{x^2-1}$$ (ii) $$\frac{5x+8}{3x^2-2x-1}$$

واجب اٽپور (Proper fraction):

هڪ ناطق اٽپور $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ڪي واجب اٽپور ڪوٺبو جيڪڏهن انس $P(x)$ جو درجو، چيد $Q(x)$ جي درجي کان ننڍو هجي.

مثال:

(i) $$\frac{9x^2-9x+6}{(x-1)(2x-1)(x+2)}$$ (ii) $$\frac{6x+27}{3x^3-9x}$$

غير واجب اٽپور (Improper fraction):

هڪ ناطق اٽپور $\frac{P(x)}{Q(x)}$ غير واجب اٽپور ڪوٺبو جيڪڏهن انس $P(x)$ جو درجو چيد $Q(x)$ جي درجي جي برابر هجي يا ان کان وڌو هجي .

مثال:

(i) $$\frac{2x^3-5x^2-3x-10}{x^2-1}$$ (ii) $$\frac{6x^3-5x^2-7}{3x^2-2x-1}$$

(iii) $$\frac{x^2+1}{x^2-1}$$

ڪوبہ غير واجب اٽپور هڪ گهڻ رقمي ۽ واجب اٽپور جي جوڙ اُپت ۾ ورهائي سگهجي ٿو

مثال طور:

$$\frac{3x^2-2x+1}{x+2}=3x-8+\frac{17}{x+2}$$

هتي $\frac{3x^2-2x+1}{x+2}$ هڪ غير واجب اٽپور. $3x-8$ هڪ گهڻ رقمي ۽ $\frac{17}{x+2}$ هڪ واجب اٽپور آهي هڪ غير واجب اٽپور کي گهڻ رقمي ۽ واجب اٽپور جي جوڙ اُپت ۾ رهائڻ لاءِ اسان کي انس کي ڇيد سان ونڊ ڪرڻ جي ضرورت پوندي.

21.2 جزوي ڀاڱن ۾ هڪ اٽپور جي تحليل:

هڪ ناطق اٽپور کي. جزوي ڀاڱن ۾ ورهائڻ لاءِ اهو لازمي آهي تہ، ناطق اٽپور واجب اٽپور هجي جيڪڏهن اهو نہ آهي تہ پوءِ ان کي لازمي طور واجب اٽپور ۾ ونڊ وسيلي بدلائبو.

21.2.(i) هڪ آلجَبرائي اٽپور کي ان جي جزوي ڀاڱن ۾ ورهائڻ جڏهن ان جو ڇيد مشتمل هجي.

- هڪ درجي اڻ ورجايل جزن تي (Non- repeated linear factors):
- هڪ درجي ورجايل جزن تي (Repeated linear factors):
- ٻہ درجي اڻ ورجايل جزن تي (Non- repeated quadratic factors):
- ٻہ درجي ورجايل جزن تي (Repeated quadratic factors):

صورتI : جڏهن ڇيد هڪ درجي اڻ ورجايل جزن تي مشتمل هجي.

فرض ڪريو تہ $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ هڪ ناطق اٽپور آهي جڏهن تہ ان جو ڇيد $Q(x)$ هڪ درجي اڻ ورجايل جُزن جو ضرب اُپت هجي جيڪو هينئن ريت لکبو

$$Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3).....(x-a_n)$$

هاڻي $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ هينئن ريت ورهائي سگهجي ٿو

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\frac{A_3}{x-a_3}+...+\frac{A_n}{x-a_n}.$$

هتي مستقلن A_1، A_2، A_3، ....، A_n کي ڳوليو ويندو. هينئن مثال ذريعي ان طريقي جي وضاحت ڪجي ٿي،

مثال 1:

$\frac{11-3x}{(x-1)(x+3)}$ کي جزوي ڀاڱن ۾ ورهايو

حل:

فرض ڪريو تہ (i) ... $\frac{11-3x}{(x-1)(x+3)}=\frac{A_1}{(x-1)}+\frac{A_2}{(x+3)}$

هتي A_1 ۽ A_2 نامعلوم مستقل آهن جن کي معلوم ڪبو مساوات (i) مان

مساوات (i) مان،

$$\frac{11-3x}{(x-1)(x+3)}=\frac{A_1(x+3)+A_2(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

ٻنهي پاسن کي $(x-1)(x+3)$ سان ضرب ڪندي،اسان حاصل ڪيو

$$11-3x=A_1(x+3)+A_2(x-1) \cdots \text{(ii)}$$

مستقل A_1 ۽ A_2 لهڻ لاءِ x جون قيمتون چونڊبيون

A_1 حاصل ڪرڻ لاءِ، اسين مساوات (ii) جي ٻنهي پاسن ۾ $x=1$ رکنداسين

اسان کي مليو $\quad 11-3(1)=A_1(1+3)+A_2(0)$

$$\Rightarrow \quad 8=4A_1$$

$$\Rightarrow \quad A_1=2$$

A_2 حاصل ڪرڻ لاءِ اسين مساوات (ii) ۾ $x=-3,$ رکنداسين

اسان کي مليو $\quad 11-3(-3)=A_1(0)+A_2(-3-1)$

$$\Rightarrow \quad 20=-4A_2$$

$$\Rightarrow \quad A_2=-5$$

آخر ۾ مساوات (i) ۾ A_1 ۽ A_2 جون قيمتون رکندي

اسان حاصل ڪيو $\quad \dfrac{11-3x}{(x-1)(x+3)}=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{-5}{x+3}.$

مثال 2:

$\dfrac{6x^3+5x^2-7}{2x^2-x-1}$ کي جزوي ڀاڱن ۾ ورهايو.

حل: جيئن تہ ڏنل ناطق اٿپور هڪ غير واجب اٿپور آهي. انهي ڪري انس کي ڇيد سان ونڊ ڪندي. اهو اٿپور، واجب اٿپور ۾ بدلائبو. جيڪو هيٺ ڏنل آهي

$$\frac{6x^3+5x^2-7}{2x^2-x-1}=\frac{6x^3+5x^2-7}{(x-1)(2x+1)}=3x+4+\frac{7x-3}{(x-1)(2x+1)} \quad \cdots \text{(i)}$$

هاڻي اسين اظهار $\dfrac{7x-3}{(x-1)(2x+1)}$ کي جزوي ڀاڱن ۾ ورهائڻ لاءِ ڪٽون ٿا.

فرض ڪريو تہ $\quad \dfrac{7x-3}{(x-1)(2x+1)}=\dfrac{A_1}{x-1}+\dfrac{A_2}{2x+1} \cdots \text{(ii)}$

هتي A_1 ۽ A_2 نامعلوم مستقل آهن جيڪي معلوم ڪبا.

مساوات (ii) مان

$$\frac{7x-3}{(x-1)(2x+1)}=\frac{A_1(2x+1)+A_2(x-1)}{(x-1)(2x+1)}$$

ٻنهي پاسن کي $(x-1)(2x+1)$ سان ضرب ڪندي اسان کي مليو

$$7x-3=A_1(2x+1)+A_2(x-1) \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

مستقل A_1 ۽ A_2 معلوم ڪرڻ لاءِ x جون قيمتون چونڊيبيون

A_1 جو ملهه لهڻ لاءِ، مساوات (iii) ۾ $x=1$, رکندي

اسانکي مليو $7(1)-3=A_1(2+1)+A_2(0)$

$$4=3A_1$$

$$A_1=\frac{4}{3}$$

A_2 جو ملهه لهڻ لاءِ مساوات (iii) ۾ $x=-\frac{1}{2}$, رکندي

اسانکي مليو $7\left(-\frac{1}{2}\right)-3=A_1(0)+A_2\left(-\frac{1}{2}-1\right)$

$$-\frac{13}{2}=-\frac{3}{2}A_2$$

$$A_2=\frac{13}{3}$$

مساوات (ii) ۾ مستقلن A_1 ۽ A_2 جون قيمتون رکندي، اسان کي مليو

$$\frac{7x-3}{(x-1)(2x+1)}=\frac{4}{3(x-1)}+\frac{13}{3(2x+1)}$$

آخر ۾، مساوات (i) هن ريت ٿيندي.

$$\frac{6x^3+5x^2-7}{2x^2-x-1}=3x+4+\frac{4}{3(x-1)}+\frac{13}{3(2x+1)}$$

مشق 21.1

هيٺين کي جزوي ڀاڱن ۾ ورهايو.

1. $\frac{12}{x^2-9}$

2. $\frac{4(x-4)}{x^2-2x-3}$

3. $\frac{x^2-3x+6}{x(x-2)(x-1)}$

4. $\frac{3(2x^2-8x-1)}{(x+4)(x-1)(2x-1)}$

5. $\frac{x^2+9x+8}{x^2+x-6}$

6. $\frac{x^2-x-14}{x^2-2x-3}$

7. $\frac{3x^3-2x^2-16x+20}{(x-2)(x+2)}$

صورت II: جڏهن ڇيد هڪ درجي ورجايل جزن تي مشتمل هجي.

فرض ڪريو تہ $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ هڪ ناطق اڻپور آهي جڏهن تہ ان جو ڇيد $Q(x)$ هڪ درجي ورجايل جزن جي ضرب اُپت آهي جنهن کي هن ريت لکي سگهجي ٿو: $Q(x)=(x-a)^n$

هاڻي $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ هيٺين ريت ورهائبو:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^1}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

هتي مستقل A_1، A_2، A_3، ....، A_n معلوم ڪري سگهجن ٿا. اهو طريقو هيٺين مثالن ذريعي واضح ڪيو ويو آهي.

مثال 1:

$\frac{2x+3}{(x-2)^2}$ کي جزوي ڀاڱن ۾ ورهايو.

حل:

فرض ڪريو تہ ...(i) $\frac{2x+3}{(x-2)^2}=\frac{A_1}{(x-2)}+\frac{A_2}{(x-2)^2}$

هتي A_1 ۽ A_2 نامعلوم مستقل آهن جيڪي معلوم ڪبا

مساوات (i) مان

$$\frac{2x+3}{(x-2)^2}=\frac{A_1(x-2)+A_2}{(x-2)^2}$$

ٻنهي پاسن کي $(x-2)^2$ سان ضرب ڪندي

اسان کي مليو $2x+3=A_1(x-2)+A_2$

(ii) $2x+3=A_1x-2A_1+A_2$

مستقل A_1 ۽ A_2 لهڻ لاءِ اسان مساوات (ii) جون ساڳيون رقمون برابر رکنداسين

هاڻي مساوات (ii) ۾ x جا عددي منڊ برابر رکندي، اسانکي مليو

$2=A_1$

وري مساوات (ii) ۾ مستقلن کي برابر رکندي، اسان حاصل ڪيو.

$$3=-2A_1+A_2$$

$$\Rightarrow\quad 3=-2(2)+A_2 \qquad (\because A_1=2)$$

$$\Rightarrow\quad 7=A_2$$

آخر ۾ مساوات (i) ۾ A_1 ۽ A_2 جون قيمتون رکندي اسان حاصل ڪيو

$$\frac{2x+3}{(x-2)^2}=\frac{2}{(x-2)}+\frac{7}{(x-2)^2}$$

مثال 2:

$\frac{5x^2-2x-19}{(x+3)(x-1)^2}$ کي جزوي ياڱن ۾ ورهايو

حل: فرض ڪريو ته

$$\frac{5x^2-2x-19}{(x+3)(x-1)^2}=\frac{A_1}{(x+3)}+\frac{A_2}{(x-1)}+\frac{A_3}{(x-1)^2}\cdots(i)$$

هتي A_1, A_2 ۽ A_3 نامعلوم مستقل آهن جن جون قيمتون معلوم ڪبيون.

مساوات (i) جي ٻنهي پاسن کي $(x+3)(x-1)^2$ سان ضرب ڪندي،

$$5x^2-2x-19=A_1(x-1)^2+A_2(x+3)(x-1)+A_3(x+3)\cdots(ii)$$

$$\Rightarrow\quad 5x^2-2x-19=A_1x^2+2A_1x+A_1+A_2x^2+2A_2x-3A_2+A_3x+3A_3$$

$$5x^2-2x-19=(A_1+A_2)x^2+(A_3+2A_2-A_1)x+(A_1-3A_2+3A_3)\cdots(iii)$$

مستقلن A_1, A_2 ۽ A_3 کي لهڻ لاءِ، x جون قيمتون چونڊبيون. A_1 جي قيمت لهڻ لاءِ ، اسان مساوات(ii) ۾ $x=-3,$ رکنداسين ته اسان کي مليو.

$$5(-3)^2-2(-3)-19=A_1(-4)^2+A_2(0)(-4)+A_3(0)$$

$$\Rightarrow\quad 32=16A_1$$

$$\Rightarrow\quad A_1=2$$

هاڻي مساوات (iii) جي ٻنهي پاسن جي ساڳي رقمن کي برابر رکنداسين

مساوات (iii) x^2 جي عددي مَنين کي برابر رکندي، اسان حاصل ڪيو

$$5=A_1+A_2$$

$$\Rightarrow\quad 5=2+A_2 \qquad (\because A_1=2)$$

$$\Rightarrow\quad A_2=3$$

وري مساوات (iii) ۾ x جي عددي مَنين کي برابر رکندي، اسان حاصل ڪيو

$$-2=A_3+2(3)-2(2)$$

$$-2=A_3+2$$

$$A_3=-4$$

آخر ۾ مستقلن A_1, A_2 ۽ A_3 جون قيمتون مساوات (i) ۾ رکڻ سان، اسان حاصل ڪيو

$$\frac{5x^2-2x-19}{(x+3)(x-1)^2}=\frac{2}{(x+3)}+\frac{3}{(x-1)}-\frac{4}{(x-1)^2}$$

مشق 21.2

هيٺين کي جزوي ياڱن ۾ ورهايو

1. $\frac{4x-3}{(x+1)^2}$
2. $\frac{x^2+7x+3}{x^2(x+3)}$
3. $\frac{5x^2-30x+44}{(x-2)^3}$
4. $\frac{18+21x-x^2}{(x-5)(x+2)^2}$
5. $\frac{x^2-x+3}{(x-1)^3}$

صورتIII: جڏھن ڇيد ۾ درجي اڻ ورجايل جزن تي مشتمل ھجي.

فرض ڪريو ته $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ ھڪ ناطق اڻپورو آھي جڏھن ته ان جو ڇيد $Q(x)$ ۾ درجي ناقابل تخفيف ۽ اڻ ورجايل جزن جو ضرب اُپت آھي.

ھاڻي $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ ھن ھيٺين ريت ورھائبو

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+A_2}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_3x+A_4}{a_2x^2+b_2x+c_2}+\dots+\frac{A_{2n-1}x+A_{2n}}{a_nx^2+b_nx+c_n}$$

ھتي مستقلن A_1، A_2، A_3،....، A_{2n} کي معلوم ڪبو

ھيٺين مثالن ذريعي طريقي کي واضح ڪيو ويو آھي.

مثال 1:

$\frac{7x^2+5x+13}{(x+1)(x^2+2)}$ کي جزوي ڀاڱن ۾ ورھايو.

حل:

فرض ڪريو ته

$$\frac{7x^2+5x+13}{(x+1)(x^2+2)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2x+A_3}{x^2+2}\quad\cdots\text{(i)}$$

ھتي A_1, A_2 ۽ A_3 نامعلوم مستقل آھن جيڪي معلوم ڪبا.

مساوات (i) جي ٻنھي پاسن کي $(x+1)(x^2+2)$ سان ضرب ڪندي، اسان حاصل ڪيو

$$7x^2+5x+13=A_1(x^2+2)+(A_2x+A_3)(x+1)\cdots\text{(ii)}$$

$$\Rightarrow\quad 7x^2+5x+13=A_1x^2+2A_1+A_2x^2+A_2x+A_3x+A_3$$

$$\Rightarrow\quad 7x^2+5x+13=(A_1+A_2)x^2+(A_2+A_3)x+(2A_1+A_3)\cdots\text{(iii)}$$

مستقلن A_1, A_2 ۽ A_3 کي لھڻ لاءِ، x جون قيمتون چونڊبيون. A_1 کي لھڻ لاءِ اسين مساوات (ii) ۾ $x=-1,$ رکڻ حاصل ڪيون ٿا.

$$7(-1)^2+5(-1)+13=A_1((-1)^2+2)+(A_2(-1)+A_3)(-1+1)$$

$$\Rightarrow\quad 15=3A_1$$

$$\Rightarrow\quad A_1=5$$

مساوات (iii) جي ساڳي رقمن کي برابر رکندي اسان حاصل ڪيو

$$7=A_1+A_2 \quad \text{۽} \quad 5=A_2+A_3$$

$$\Rightarrow\ 7=5+A_2 \qquad \Rightarrow\ 5=2+A_3$$

$$\Rightarrow\ A_2=2 \qquad \Rightarrow\ A=3$$

آخر ۾ مساوات (i) ۾ A_1, A_2 ۽ A_3 جون قيمتون رکندي اسان حاصل ڪيو

$$\frac{7x^2+5x+13}{(x+1)(x^2+2)}=\frac{5}{(x+1)}+\frac{2x+3}{(x^2+2)}$$

مثال 2:

$\frac{2x+7}{(x^2+3)(x^2+6)}$ کي جزوي ڀاڱن ۾ ورهايو

حل:

فرض ڪريو تہ

$$\frac{2x+7}{(x^2+3)(x^2+6)}=\frac{A_1x+A_2}{x^2+3}+\frac{A_3x+A_4}{x^2+6} \quad \cdots \text{(i)}$$

هتي A_1, A_2, A_3 ۽ A_4 نامعلوم مستقل آهن جيڪي معلوم ڪبا

مساوات (i) جي ٻنهي پاسن کي $(x^2+3)(x^2+6)$ سان ضرب ڪندي اسان حاصل ڪيو

$$2x+7=(x^2+6)(A_1x+A_2)+(x^2+3)(A_3x+A_4)$$

$$\Rightarrow 2x+7=(A_1+A_3)x^3+(A_2+A_4)x^2+(6A_1+3A_3)x+(6A_2+3A_4) \cdots \text{(ii)}$$

مساوات (ii) جي ٻنهي پاسن جي ساڳي رقمن کي برابر رکندي، اسان حاصل ڪيو.

$$A_1+A_3=0 \quad \cdots \text{(iii)}$$
$$A_2+A_4=0 \quad \cdots \text{(iv)}$$
$$6A_1+3A_3=2 \quad \cdots \text{(v)}$$
$$6A_2+3A_4=7 \quad \cdots \text{(vi)}$$

مساوات (iii) ۽ (v) کي گڏ حل ڪندي اسانکي مليو $A_1=\frac{2}{3}$ ۽ $A_3=-\frac{2}{3}$

ساڳي ريت $A_2=\frac{7}{3}$ ۽ $A_4=-\frac{7}{3}$

آخر ۾ مستقلن A_1, A_2, A_3 ۽ A_4 جون قيمتون مساوات (i) ۾ رکندي اسان حاصل ڪيو

$$\frac{2x+7}{(x^2+3)(x^2+6)}=\frac{\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}}{x^2+3}+\frac{-\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}}{x^2+6}=\frac{2x+7}{3(x^2+3)}+\frac{2x\quad 7}{3(x^2+6)}$$

مشق 21.3

هيٺين کي جزوي ڀاڱن ۾ ورهايو

1. $\frac{x^2-x-13}{(x^2+7)(x-2)}$
2. $\frac{6x-5}{(x^2+10)(x+1)}$
3. $\frac{15+5x+5x^2-4x^3}{x^2(x^2+5)}$
4. $\frac{3x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+3)}$
5. $\frac{x^2-x+2}{(x+1)(x^2+3)}$

صورت IV: جڏهن ڇيد ۾ درجي ورجايل جزن تي مشتمل هجي.

فرض ڪريو تہ $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ هڪ ناطق اڻپور آهي جڏهن تہ ان جي ڇيد $Q(x)$ کي ٻہ درجي ناقابل تخفيف ۽ ورجايل جزا آهن. سولائي خاطر ان کي هن ريت ڪٽبو $Q(x)=(ax^2+bx+c)^n$

هاڻي $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ هينئين ريت ورهائبو

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+A_2}{ax^2+bx+c}+\frac{A_3x+A_4}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{A_{2n-1}x+A_{2n}}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

هتي مستقل A_1، A_2، A_3، ....، A_n معلوم ڪبا

هينئين مثالن جي ذريعي طريقي کي واضح ڪجي ٿو.

مثال 1:

$\frac{5x^2+2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$ کي جُزوي پاڱن ۾ ورهايو

حل: فرض ڪريو ته

$$\frac{5x^2+2}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{A_1x+A_2}{x^2+x+1}+\frac{A_3x+A_4}{\left(x^2+x+1\right)^2}\quad\cdots\quad(i)$$

هتي A_1, A_2, A_3 ۽ A_4 نامعلوم مستقل آهن جيڪي معلوم ڪبا

مساوات (i) جي ٻنهي پاسن کي $\left(x^2+x+1\right)^2$ سان ضرب ڪندي اسان حاصل ڪيو

$$5x^2+2=\left(x^2+x+1\right)\left(A_1x+A_2\right)+A_3x+A_4$$

$$\Rightarrow\quad 5x^2+2=x^3A_1+x^2A_1+x^2A_2+xA_1+xA_2+xA_3+A_2+A_4$$

$$\Rightarrow\quad 0.x^3+5x^2+0.x+2=x^3A_1+x^2\left(A_1+A_2\right)+x\left(A_1+A_2+A_3\right)+\left(A_2+A_4\right)\cdots(ii)$$

مساوات (ii) جي ٻنهي پاسن جي ساڳي رقمن کي برابر ڪندي، اسان کي مليو

$$A_1=0\qquad\cdots\quad(iii)$$
$$A_1+A_2=5\qquad\cdots\quad(iv)$$
$$A_1+A_2+A_3=0\qquad\cdots\quad(v)$$
$$A_2+A_4=2\qquad\cdots\quad(vi)$$

مساوات (iv) ۾ $A_1=0,$ رکندي اسان کي مليو $A_2=5$

ساڳي ريت مساوات (v) ۾ A_1 ۽ A_2 جي قيمت رکندي، اسانکي مليو

$$0+5+A_3=0$$
$$\Rightarrow\qquad A_3=-5$$

وري، مساوات(vi) ۾ A_2 جي قيمت رکڻ سان

$$5+A_4=2$$
$$\Rightarrow\qquad A_4=-3$$

آخر ۾ مساوات (i), ۾ مستقلن A_1, A_2, A_3 ۽ A_4 جون قيمتون رکڻ سان، اسانکي مليو

$$\frac{5x^2+2}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{0.x+5}{x^2+x+1}+\frac{-5x-3}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

مثال 2:

$\dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x\left(x^2+1\right)^2}$ کي جزوي ياڱن ۾ ورهايو.

حل:

فرض ڪريو ته

$$\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2x+A_3}{\left(x^2+1\right)}+\frac{A_4x+A_5}{\left(x^2+1\right)^2}\quad\cdots\quad(i)$$

هتي A_1, A_2, A_3, A_4 ۽ A_5 نامعلوم مستقل آهن جيڪي معلوم ڪبا

مساوات (i) جي ٻنهي پاسن کي $x\left(x^2+1\right)^2$ سان ضرب ڪندي اسان حاصل ڪيو

$$x^4+x^3+x^2+x+1=A_1\left(x^2+1\right)^2+x\left(A_2x+A_3\right)\left(x^2+1\right)+x\left(A_4x+A_5\right)$$

$$\Rightarrow\quad x^4+x^3+x^2+x+1=A_1x^4+2A_1x^2+A_1+A_2x^4+A_2x^2+A_3x^3+A_3x+A_4x^2+A_5x$$

$$\Rightarrow\quad x^4+x^3+x^2+x+1=\left(A_1+A_2\right)x^4+A_3x^3+\left(2A_1+A_2+A_4\right)x^2+\left(A_3+A_5\right)x+A_1\quad\cdots\quad(ii)$$

مستقل A_1, A_2, A_3, A_4 ۽ A_5 لهڻ لاءِ اسان مساوات (ii) جي ساڳي رقمن کي برابر رکنداسين هاڻي اسان وٽ آهي

$$1=A_1+A_2\quad\cdots\quad(iii)$$
$$1=A_3\quad\cdots\quad(iv)$$
$$1=2A_1+A_2+A_4\quad\cdots\quad(v)$$
$$1=A_3+A_5\quad\cdots\quad(vi)$$
$$1=A_1\quad\cdots\quad(vii)$$

مساوات (iii) ۾، A_1 جي قيمت رکندي، اسان کي مليو

$$1=A_1+A_2$$
$$\Rightarrow\quad 1=1+A_2$$
$$\Rightarrow\quad A_2=0$$

مساوات (vi) ۾ A_3 جي قيمت رکندي، اسان کي مليو

$$1=1+A_5$$
$$A_5=0$$

مساوات (v) ۾ A_1 ۽ A_2 جون قيمتون رکندي، اسان کي مليو

$$1=2(1)+(0)+A_4$$
$$A_4=-1$$

آخر ۾ مساوات (i) ۾ A_1, A_2, A_3, A_4 ۽ A_5 جون قيمتون رکندي. اسان حاصل ڪيو

$$\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{\left(x^2+1\right)}-\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

مشق 21.4

هيٺين کي جزوي ياڱن ۾ ورهايو

1. $\frac{x^2}{(x^2+1)^2(1-x)}$

2. $\frac{x^2+x+2}{x^2(x^2+3)^2}$

3. $\frac{x^2}{(1+x)(1+x^2)^2}$

4. $\frac{7}{(x+1)(2+x^2)^2}$

5. $\frac{49}{(x-2)(3+x^2)^2}$

جائزي واري مشق 21

1. دُرست جواب چونڊيو

i. هڪ غير واجب اٽپور______ جي ذريعي واجب اٽپور ۾ آڻي سگھجي ٿو.

(a) جوڙ (b) ضرب

(c) ڪٽ (d) ونڊ

ii. $\frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ جي جزوي ياڱن جي صورت __________ آهي.

(a) $\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x+b}+\frac{C}{x+c}$ (b) $\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$

(c) $\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x+c}$ (d) ڪوبہ نہ

iii. $\frac{x-3}{x^3+3x}$ جا جزوي ياڱا________ آهن

(a) $\frac{-1}{x}-\frac{x-1}{x^2+3}$ (b) $\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x^2+3}$

(c) $\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x^2+3}$ (d) $\frac{-1}{x}+\frac{x+1}{x^2+3}$

iv. $\frac{x^3+1}{(x-1)(x+2)}$ هڪ ________ آهي.

(a) واجب اٽپور (b) غير واجب اٽپور

(c) هڪ ذاتي عنصر (d) مستقل رقم

v. اٽپور $\frac{2x+5}{x^2+5x+6}$ کي __________ چئبو آهي.

(a) واجب اٽپور (b) غير واجب اٽپور (c) ٻئي واجب ۽ غير واجب اٽپور (d) ڪوبہ نہ

2. واجب، غير واجب ۽ ناطق اٽپور کي بيان ڪريو

3. هيٺين کي جزوي ڀاڱن ۾ ورهايو

(i) $\dfrac{5x+8}{(x-1)(x+2)}$ (ii) $\dfrac{9x^2+5x+7}{x(x+2)(x-5)}$

(iii) $\dfrac{x^2+2x+3}{(x^2+1)(x-2)}$ (iv) $\dfrac{x^3+8x^2+9}{(x^2+x+1)(x+1)}$

(v) $\dfrac{x+5}{(x^2+1)^2(x-3)}$ (vi) $\dfrac{7x+3}{(x-1)^2(x+2)}$

یونٽ 22

بنيادي شماريات

BASIC STATISTICS

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هي يونٽ پڙهڻ کانپوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- تعددي تقسيم جي باري ۾ ڄاڻن ۽ سکن تہ ڪيئن:
  - گروهي تعددي جدول جي جوڙجڪ ڪجي.
  - برابر جماعتي وقفن وارا ڪالمي نقشا ناهجن.
  - غير مساوي جماعتن وارا ڪالمي نقشا ناهجن.
  - تعددي گهڻ پاسي جي جوڙجڪ ڪجي.
- مجموعي تعددي ورهاست جي باري ۾ ڄاڻن ۽ سکن تہ ڪيئن :
  - هڪ مجموعي تعددي جدول جي جوڙجڪ ڪجي.
  - مجموعي تعددي گهڻ پاسو ناهجي.
- مرڪزي رجحان جي ماپن جي باري ۾ ڄاڻن ۽ سکن تہ ڪيئن
  - گروهي ۽ غير گروهي مواد لاءِ هيٺيان لهجن.
  - حسابي سراسري وصف وسيلي ۽ فرض سراسري کان انحرافن جو استعمال ڪندي.
  - مذياني سراسري، ڪثرتي سراسري، مهندسي سراسري ۽ هارموني سراسري.
- حسابي سراسري جي خاصيتن جي سڃاڻپ ڪن.
- قدري سراسري ۽ متحرڪ سراسري لهن.
- مذيان، چوٿائي ڪنڊ مشاهدن ۽ ڪثرتي سراسري جو گراف وسيلي اندازو لڳائين.
- پکڙجڻ جي پيمانن جي باري ۾ ڄاڻن ۽ سکن تہ ڪيئن:
  - وسعت جي وصف بيان، سڃاڻپ ۽ ماپ ڪجي. تغير، سراسري انحراف ۽ معياري انحراف لهجي.

تعارف(Introduction):

شماريات (Statistics) رياضي جي هڪ مکيه شاخ آهي جنهن جو واسطو مواد جي ميڙ، ترتيب، اظهار، تشريح ۽ تجزيئي سان هوندو آهي ته جيئن بامعني نتيجا ۽ نمونا ڪڍيا وڃن. جيڪي دانشمنداڻا فيصلا ۽ ڪارگر حڪمت عملي ناهڻ ۾ مدد ڏين ٿا.اسين اڳيئي سادي مواد جي درجه بندي، گراف ذريعي اظهار ۽ ڪجهه مرڪزي رجحان جي ماپن واري بنيادي تصورن سان واقف آهيون. هتي اسين انهن جي تفصيل سان ڪوجنا ڪنداسين ۽ تصورن کي متحرڪ سراسريون ۽ پکڙجڻ جي ماپن ڏانهن وڌائينداسين.

مواد (Data) ڪنهن به شمارياتيجاچ جو بنياد آهي ۽ اهو دلچسپي واري بدلجندڙ تي سوال پڇڻ، ڳڻپ ۽ ماپ ڪرڻ، رپورٽس، خبرون، مضمون ڏسڻ سان گڏ ٿيندو آهي. مواد جي بلڪل بنيادي صورت خام مواد (Raw data) آهي جيڪو غير جماعتي يا غير گروهي (Unclassified/ungrouped) آهي ۽ ان مان سڌي ريت ڪو بامعني نتيجو ڪڍڻ مشڪل آهي.

اهڙو مواد جائزن، ڳالهه ٻولهه (انٽرويوز) ۽ سوالنامن جو استعمال ڪندي حاصل ٿيئي ٿو انهن کي مواد جا بنيادي ذريعا (Primary sources) پڻ چئبو آهي. خام يا غير گروهي مواد جي درجه بندي ڪرڻ ۽ ترتيب ڏيڻ ڪانپوءِ اسين گروهي يا درجه بندي ٿيل مواد (Grouped or classified data) ذريعي ڪارائتي معلومات حاصل ڪري سگهون ٿا. اخبارن، رپورٽن ۽ مضمونن کي ثانوي مواد جا ذريعا (Secondary sources) ڪوٺبو آهي ڇاڪاڻ ته اهي درجه بندي ٿيل مواد ڏانهن وني وڃن ٿا.

مواد ٻن قسمن ۾ ورهايل آهي: خاصيتي مواد (Quantitative /Categorical data) ۽ مقداري مواد (Quantitative /numeric data)
جنس، رت جو گروپ، پرون، رنگ، معياري درجا، رول نمبر وغيره خاصيتي مواد آهن. اُوچائي، وزن، پگهار، ڳار جون pH قيمتون، سالیانا منافعو ڪنهن ڪمپني جو، شاگردن جون مارڪون ڪنهن مضمون ۾ وغيره مقداري مواد آهن.

خاصيتي مواد ۽ مشاهدا رڳو خاصيتون يا قيمتون هوندا آهن. جنهن ۾ ڪابه عددي اهميت نه هوندي آهي. پر ان ۾ درجه بندي يا ترتيب (وڌندڙ يا گهٽجندڙ) ٿي به سگهي ٿي يا نه به ٿي سگهي ٿي. خاصيتي مواد جنهن ۾ ترتيب هجي ته ان کي ناليوارو مواد نه ته پوءِ قطاري مواد چئبو آهي. جنس، رت جو گروپ، پرون، رنگ، مذهب ناليوارو مواد آهن.

مثال طور اسين مرد ۽ عورت واري مشاهدن ۾ درجه بندي نٿا ڪري سگهون ته ڪير وڌي يا گهٽ حيثيت وارو آهي. شاگردن جا گريڊ (A، B، C، فيل) يا ڪاڌي جو معيار (بهترين، سٺو، چڱو، خراب، بدترين) اهو مواد درجه بندي يا ترتيب ۾ اچي سگهي ٿو اهو ۽ اهو قطاري مواد ٿيندو.

خاصيتي مواد جا مشاهدا عدد هوندا آهن جنهن جي عددي اهميت ۽ ترتيب هوندي آهي. عدد رڳو سڄا عدد ٿي سگهن ٿا يا ڏهائي جي صورت ۾ پڻ ٿي سگهن ٿا. جيڪڏهن مقداري مواد جا مشاهدا رڳو سڄا عدد آهن ته پوءِ مواد کي غير مسلسل مواد (Discrete data) ڪوٺبو. ٻي صورت ۾ اهو مسلسل مواد (Continuous data) ڪوٺبو رپين ۾ پگهار، ڪنهن اسڪول ۾ في ڪلاس ڇوڪرين جو تعداد، چار سڪا گڏ اُڇلائڻ تي پورين (Heads) جو تعداد، اهي سڀ غير مسلسل مواد کي ظاهر ڪن ٿا. اُوچائي، وزن جي ماپ، ڳارن جون pH واريون قيمتون اهي سڀ مسلسل مواد کي ظاهر ڪن ٿا.

مواد جي قسمن جي وچ ۾ فرق ڪرڻ نهايت اهم آهي ته جيئن مناسب طريقي سان شمارياتي تجزين تي لڳايو وڃي يا مواد جي وڌيڪ تجزيئي لاءِ نشان ڏيکاريندڙ جي ماپ ڪجي.

22.1 تعددي تقسيم (Frequency distribution):

مشاهدن جي وڏي تعداد واري غير گروهي مواد مان بامعني معلومات ڪڍڻ لاءِ، اسين مواد کي ننڍن جماعتن يا گروهن ۾ ورهائيندا آهيون. ساڳي مشاهدن کي هڪ جڳهه رکڻ لاءِ جماعتن کي ناهيو ويندو آهي. غير مسلسل

جماعتون (Discrete classes) هڪ عدد يا خاصيت تي مشتمل هونديون آهن جڏهن ته مسلسل جماعتن (Continuous Classes) ۾ عددن جي وسعت هوندي آهي. ڪنهن خاص جماعت ۾ مشاهدن جي تعداد کي ان جي تعدد (Frequency) چئبو آهي.

گروهي مواد جي جدولي اظهار کي تعددي تقسيم (Frequency distribution) چئبو آهي. اها جماعتن ۽ انهن جي واسطيدار تعدد تي مشتمل هوندي آهي. تعددي تقسيم بنيادي تجزيئي لاءِ وڏيڪ واضح سمجھ مهيا ڪري ٿو.

ڪنهن جماعت جنهن جو تعدد ”f“هجي ته پوءِ ان جي نسبتي (Relative) ۽ في سيڪڙو تعدد (Parentage Fraquemy) ترتيبوار $\left(\frac{f}{n}\right)$ ۽ $\left(\frac{f}{n}\times 100\right)$ آهن جڏهن ته مشاهدن جي ڪل تعداد ”n“ آهي. سيني نسبتي تعددن جي جوڙ اُپت 1 جي برابر هوندي آهي ۽ في سيڪڙو تعددن جي جوڙ اُپت 100 هوندي آهي.

22.1(i) گروهي تعددي جدول جي جوڙجڪ ڪرڻ (Construct grouped frequency table):

گروهي تعددي جدول يا تعددي ورهاست کي ناهڻ جو طريقو ان ڳالھ تي منحصر ڪري ٿو ته اسين کهڙي ريت گروھ يا جماعتون ناهيون ٿا. اسين جوڙجڪ جي هينين ٻن طريقن تي غور ڪريون ٿا.

(a) غير مسلسل جماعتن جي تعددي جدول (Frequency table with discrete classes):

غير مسلسل جماعتون اهي جماعتون هونديون آهن جن ۾ ساڳيئي مشاهدن کي شامل ڪرڻ لاءِ هڪڙو عدد يا خاصيت هوندي آهي.اسين غير مسلسل جماعتن جو تڏهن استعمال ڪندا آهيون جڏهن مواد جا ٿورا مشاهدا پنهنجي پاڻ کي وڏيڪ ٻيرا ورجائن غير مسلسل جماعتن واري تعددي جدول کي غير مسلسل تعددي جدول پڻ ڪوٺبو آهي. ڪڏهن ڪڏهن نسبتي ۽ في سيڪڙو تعددن کي جدول جي آخر ۾ لڳائبو آهي جيڪڏهن گهرج هجي ته. ڏنل ڊيٽا سيٽ (Data Set) ۾ ٽن ڪالمن تي مشتمل غير مسلسل جماعتن واري تعددي جدول کي ناهڻ لاءِ اسين هينيان قدم کڻندا آهيون.

1. مختلف مشاهدن جو جماعتن يا گروهن جي صورت سجاڳپ ڪيو ۽ انهن کي ڪنهن بہ ترتيب ۾ پهرين ڪالم ۾ لکو جيڪڏهن مواد ناليوارو آهي قطاري يا مقداري مواد لاءِ جماعتن کي وڌنڌ ترتيب ۾ لکو.
2. ٻيئي ڪالم ۾ مواد کي جماعتن ۾ ورهائڻ لاءِ مطابقت جي نشانين يا ٽيلي نشان (Tally Marla) جو استعمال ڪريو.
3. ٽيئن ڪالم ۾ هر هڪ جماعت جي تعدد کي لکڻ لاءِ مطابقت جي نشانين کي ڳڻيو.

مثال 1: هڪ ڪلاس جي 30 شاگردن جي رت جي گروپن لاءِ گروهي تعددي جدول ناهيو.

A+ O+ B+ A+ A− AB+ B+ O+ O+ A− A− AB− A+ O− B+
B+ O− B+ O− AB− O− A− AB− A− O+ B− O+ A− AB− O−

حل:

هتي $n = 30$ ۽ مواد ناليوارو آهي اٺ ڌار ڌار رت جا گروپ A+، B+، AB+، O+، A−، B−، AB− ۽ O− اهي اٺ جماعتون آهن جيڪي پهرين ڪالم ۾ لکيا ويا آهن. مواد کي ورهائڻ لاءِ ٻيئي ڪالم ۾ ٽيلي نشانين جواستعمال ڪندي ۽ ان ڪانپوءِ ٽيئن ڪالم ۾ تعدد لکڻ لاءِ انهن کي ڳڻندي

اسانکي گهربل گروهي تعددي جدول ملي جيڪا شاگردن جي رت جي گروپن کي ورهائي ٿي.

گروهي تعددي جدول

جماعتون ”رت جا گروپ“	ٽيلي نشان	تعدد ”شاگردن جي تعداد“
A+	𝍸 |	6
B+	𝍸	5
AB+	|||	3
O+	𝍸 ||	7
A−	|||	3
B−	|	1
AB−	||	2
O−	|||	3
ڪُل تعداد	---	$n = 30$

مثال 2: هڪڙي بازار ۾ 40 سرسري چونڊيل گراهڪن جا جواب هيٺ ڏنل آهن جڏهن انهن کان پڇيو ويو "توهان خدمتن مان ڪيترو مطمئن آهيو؟" انهن جي جوابن جي گروهي تعددي جدول ناهيو. نسبتي ۽ في سيڪڙو تعددون پڻ لکو.

ڏاڍو	گهٽو نه	گهٽو نه	ڏاڍو	ڪجھ	بلڪل نه	ڏاڍو	گهٽو نه
ڏاڍو	گهٽو نه	ڏاڍو	ڏاڍو	ڏاڍو	گهٽو نه	ڏاڍو	ڪجھ
پڪ ناهي	ڏاڍو	بلڪل نه	ڏاڍو	ڏاڍو	ڏاڍو	گهٽو نه	ڪجھ
بلڪل نه	پڪ ناهي	گهٽو نه	گهٽو نه	پڪ ناهي	ڏاڍو	ڏاڍو	ڏاڍو
ڏاڍو	ڪجھ	ڏاڍو	ڪجھ	گهٽو نه	پڪ ناهي	ڏاڍو	ڪجھ

حل:

هتي $n = 40$ ۽ مواد قطاري آهي. وڌندڙترتيب (گهٽ کان وڌ) ۾ پنج مختلف مطمئن ڪندڙ درجا جماعتون آهن. ٽيلي نشانن ۽ تعددن سان اسان گروهي تعددي جدول حاصل ڪئي. نسبتي۽في سيڪڙو تعددون پڻ چوٿين ۽ پنجين ڪالم ۾ ڪڍيل آهن.

جماعتون "مطمئن ڪندڙ درجا"	ٽيلي نشان	تعدد (f)	نسبتي تعدد $\left(\frac{f}{n}\right)$	في سيڪڙو تعدد (%) $\left(\frac{f}{n}\times100\right)$
بلڪل نه	$\vert\vert\vert$	3	$\frac{3}{40} = 0.075$	$\frac{3}{40}\times 100 = 7.5$
گهٽو نه	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert\vert\vert$	8	0.2	20
پڪ ناهي	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$	5	0.125	12.5
ڪجھ	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert$	6	0.15	15
ڏاڍو	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert\vert\vert$	18	0.45	45
ڪُل تعداد	---	$n = 40$	1	100

نوٽ ڪيو ته:

a. مثال 2 جي گروهي تعددي جدول مان، اسين سولائي سان فيصلو ڪري سگهون ٿا ته گراهڪن مان سڀ کان وڏي تعداد "ڏاڍو" واري آهي جڏهن ته گراهڪن جي گهٽ تعداد "بلڪل نه" واري آهي.

b. اهو چوڻ نيڪ ۽ سمجهه ۾ ايندڙ آهي ته 45% گراهڪ ڏاڍا مطمئن هئا بجاءِ ان جي ته 40 مان 18 گراهڪ ڏاڍا مطمئن هئا.

مثال 3:

هڪ شهر جي 45 خاندانن کان جڏهن موبائيلن جي تعداد بابت پڇيو ويو جيڪي اُهي استعمال ڪن ٿا ته جيڪي جواب انهن ڏنا اُهي هيٺين ريت نوٽ ڪيا ويا انهن جوابن جي غير مسلسل تعددي جدول ناهيوانهن جوابن جي نسبتي ۽ في سيڪڙو تعدد لکو.

3	1	3	2	2	2	2	1	2	1	2	2	3	3	3	3	4	1	1	0	2	4	1
3	3	2	3	2	2	5	1	6	1	6	2	1	5	3	2	4	2	4	7	4	2	

حل:

هتي $n = 45$ ۽ مواد مقداري آهي ۽ خاص طور سان غير مسلسل آهي مواد جا مختلف عدد وڌندڙ ترتيب ۾ هي آهن. 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7 جيڪي ٿورا عدد آهن ۽ پنهنجي پاڻ کي وري وري ورجائن ٿا.
پهرين ڪالم ۾ اهي اٺ جماعتون آهن. ٻيئي ڪالم ۾ ٽيلي نشانن کي لکندي ۽ ڳڻيندي اسين 45 خاندانن جي موبائيل جي تعداد کي ورهائڻ جي گهربل غير مسلسل تعددي جدول حاصل ڪرڻ لاءِ ٽيئن ڪالم ۾ تعددن کي لکنداسين.

غير مسلسل تعددي جدول

جماعتون "موبائيلن جو تعداد"	ٽيلي نشان	تعداد "خاندانن جو تعداد"
0	|	1
1	𝍸 ||	7
2	𝍸 𝍸 𝍸	15
3	𝍸 𝍸 ||	12
4	𝍸	5
5	||	2
6	||	2
7	|	1
ڪُل تعداد	---	$n\ = 45$

مثال 4: هڪ ڪمپني جي سرسري چوندبل 1.5 لٽرن واري بوتلن ۾ ٺڏي مشروب جي مقدار جي ماپ (لٽرن ۾) ڪئي وئي جيڪا هيٺ ڏنل آهي. ٺڏي مشروب جي ماپ ٽيل مقدار جي غير مسلسل تعددي جدول ناهيو. نسبتي ۽ في سيڪڙو تعددون پڻ لهو.

1.48	1.51	1.50	1.49	1.49	1.49	1.51	1.48	1.49	1.52
1.51	1.49	1.51	1.50	1.50	1.50	1.51	1.49	1.49	1.50

حل: مواد مقداري ۽ خاص طور سان مسلسل آهي. مختلف عدد 1.48 ,1.49 ,1.50 ,1.51 ۽ 1.52 وڌندڙ ترتيب ۾ پنج جماعتون آهن. ٽيلي نشانين ۽ تعددن جي مدد سان اسين غير مسلسل تعددي جدول حاصل ڪريون ٿا. چوٿين ۽ پنجين ڪالمن ۾ نسبتي ۽ في سيڪڙو تعددون پڻ معلوم ڪري لکيون ويون آهن.

جماعتي حدون ٺڏي مشروب جي مقدار (لٽرن ۾)	ٽيلي نشان	تعداد "بوتلن جو تعداد"	نسبتي تعداد $\left(\frac{f}{n}\right)$	في سيڪڙو تعداد (%) $\left(\frac{f}{n}\times 100\right)$
1.48	||	2	$\frac{2}{20}=0.1$	$\frac{2}{20}\times 100=10$
1.49	𝍸 ||	7	0.35	35
1.50	𝍸	5	0.25	25
1.51	𝍸	5	0.25	25
1.52	|	1	0.05	5
ڪُل تعداد	---	$n = 20$	1	100

(b) مسلسل جماعتن واري تعددي جدول (Frequency table with continuous classes):

جڏهن مواد مقداري (مسلسل يا غير مسلسل) هجي ۽ گهٽ ورجائڻ ۽ وڌيڪ ڦيرگهير وارا مشاهدا عددن جي ڪنهن خاص حد تائين ورهائيل هجن ته پوءِ اسين مسلسل جماعتون (Continuous classes) استعمال ڪنداسين. اهي جماعتون اڪيلا عدد نه آهن پر عددن جي وسعت (وقفا) آهن هر هڪ جماعت انهن عددن تي مشتمل هوندي آهي جيڪي جماعتي حدن جي اندر هوندا آهن هڪ مسلسل تعددي جدول مسلسل جماعتن سان گڏوگڏ ترتيبوار تعددن تي مشتمل هوندي آهي. اسين اڳيئي گذريل ڪلاس ۾ غير مسلسل مواد لاءِ تعددي تقسيم پڙهي چڪا آهيون هتي اسين ڏهائي جي ڪنهن به درجي واري مسلسل ۽ غير مسلسل مواد

جي بنيادي تصورن جي عمومي ڳالھ ڪنداسين ۽ انھن جو استعمال ڪنداسين. اسين پھريان انھن ڪجھ اهم اصطلاحن جو دور ڪنداسين ۽ بيان ڪنداسين جيڪي ان عمل ۾ فعال طور استعمال ٿين ٿا.

وسعت (Range): اهو ڏنل مواد جي سڀ کان وڏي ۽ سڀ کان ننڍي رقمن (مشاهدن) جو فرق آهي.

(سڀ کان ننڍي رقم) − (سڀ کان وڏي رقم) = وسعت ... (1)

جماعتي حدون (Class limits): هي اُهي عدد آهن جنهن سان جماعت جي سڃاڻپ ٿيندي آهي هر هڪ جماعت لاءِ هڪ سڀ کان ننڍو عدد هوندو آهي جنهن کي هيٺين جماعتي حد (Lower class limit) يعني (LCL) چئبو آهي ۽ سڀ کان وڏي عدد کي مٿين جماعتي حد (Upper class limit) يعني (UCL) چبئو آهي. ڪنهن خاص جماعت ۾ اُهي سڀ مشاهدا شامل هوندا جيڪي LCL کان وٺي UCL تائين هجن.

جماعتي وقفو يا ويڪر (h) (Class interval/width): ڪنهن جماعت جي ماپ/ ڊيگهه کي جماعتي وقفو يا ويڪر چئبو آهي ۽ اهو ڪن ٻه ٻن لاڳيتن LCLs، يا VCLs جو فرق معلوم ڪري لهبو آهي. اسين عام طرح سان سڀني جماعتن لاءِ مستقل جماعتي وقفو يا ويڪر استعمال ڪندا آهيون جنهن کي h سان ظاهر ڪبو آهي ۽ هيٺين ريت لهي سگهي ٿو.

$$h=\frac{1}{10^m}\left\lceil\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{K}}\times 10^m\right\rceil \qquad (2)\ldots$$

جڏهن ته جماعتن جو تعداد K، وسعت R ۽ مشاهدن ۾ وڌ ۾ وڌ ڏهائي درجن جو تعداد m آهي.

جيڪڏهن مواد غير مسلسل آهي ته پوءِ $m = 0$، جيڪڏهن مواد مسلسل آهي ۽ ان جون رقمون ڏهائي جي هڪ درجي تائين هجن ته پوءِ $m = 1$ ساڳي ريت m جون ٻيون قيمتون ٻه لکبيون.نشاني ⌈.⌉ سان مٿيون اندازو (Ceiling approximation) ظاهر ڪبو آهي جيڪو h جو سڄي عدد وارو قطعي ملھ حاصل ڪرڻ لاءِ استعمال ڪبو آهي. هڪ سڄي عدد جو مٿيون اندازو ساڳيو سڄو عدد ٿيندو جڏهن ته ڏهائي اٽپور جو مٿيون اندازو ان کان وڏو فوراً ايندڙ سڄو عدد ٿيندو. مثال طور: $\lceil 4\rceil=4$، $\lceil 1.6\rceil=2$، $\lceil 1.9\rceil=2$، $\lceil 7.5\rceil=8$.

جماعتن جو تعداد (K)(Number of classes): جماعتن جي تعداد کي K سان ظاهر ڪبو آهي. اها تعداد 5 کان 15 تائين هوندي آهي پر اهو مشاهدن جي تعداد ۽ وسعت تي منحصر ڪري ٿو. اها تعداد جيڪڏهن مليل نہ هجي ته پوءِ احتياط سان چوندي يا لهي ويندي آهي.K جي تمام وڏي ملھ سان خراب گروھ بندي ۽ معلومات جو نقصان ٿيندو. ايچ اسٽرجز (1926) (H- Sturges) مشاهدن جي تعداد n جو استعمال ڪندي جماعتن جو مناسب تعداد K لهڻ لاءِ هڪ اصول تجويز ڪيو. اسٽرجز جو اصول هن ريت بيان ڪجي ٿو.

$$\mathrm{K}=\lceil 1+3.322\log(\mathrm{n})\rceil \qquad (3)\ldots$$

جڏهن ته log (n) جو مطلب، بنياد 10 سان n جو لاگرٿم آهي ۽ ⌈.⌉ مٿيون اندازو آهي اها ڳالھ ڌيان ۾ رکڻ گهرجي ته اسٽرج وارو اصول $15 \le n \le 200$ لاءِ وڌيڪ مناسب آهي . مثال طور: جيڪڏهن $n = 25$ ته پوءِ

$K = \lceil 1 + 3.322\log(25)\rceil = \lceil 5.6439\rceil = 6$ جماعتون

جماعتن جي وچ ۾ وٿي (d) (Spacing between the classes):

هڪ جماعت جي LCL ۽ ايندڙ جماعت UCL جي وچ ۾ مستقل فرق کي جماعتن جي وچ ۾ وٿي (d) چئبو آهي.

جيڪڏهن m ڏهائي درجن جو وڌ ۾ وڌ تعداد آهي ته پوءِ

$$d=\frac{1}{10^m},\ m=0,1,2,\ldots \qquad (4)\ldots$$

غير مسلسل مواد لاءِ $m = 0$ ۽ $d = 1$، جيڪڏهن مواد ڏهائي جي هڪ درجي تائين مليل آهي ته پوءِ $m = 1$ ۽ $d = 0.1$. ڏهائي جي ٻن درجن واري مواد لاءِ $m = 2$ ۽ $d = 0.01$

مسلسل تعددي جدول ٺاهڻ جو طريقو:

مقداري مواد لاءِ مسلسل تعددي جدول ٺاهڻ جا قدم:

1. مشاهدن جو تعداد (n) لکو ۽ مواد جي سجاڳپ ڪريو: مسلسل يا غير مسلسل مواد ۾ وڌ ۾ وڌ ڏهائي درجن جو تعداد (m) پڻ لکو.
2. مساوات (1) جو استعمال ڪندي وسعت (R) لهو ۽ اسٽرج جو اصول مساوات (3) استعمال ڪندي جماعتن جو تعداد (K) لهو جيڪڏهن مليل نه هجي ته
3. مساوات (2) جو استعمال ڪندي جماعتي ويڪر (h) ويڪر معلوم ڪريو ۽ مساوات (4) جو استعمال ڪندي جماعتن جي وچ واري وٿي (d) لهو. انتهائي حالتن ۾ اسان کي "$h+d$" کي جماعتي ويڪرطور ڪٽڻو پوندو آهي يا هڪ وڌيڪ جماعت جو اضافو ڪرڻو پوندو.
4. جماعتي حدون معلوم ڪريو ته جيئن پڪ ٿيئي ته سڀ مشاهدا K جماعتن ۾ شامل ٿيا آهن. اسين سڀ کان ننڍي مشاهدي کي شروعاتي LCL طور استعمال ڪري سگهون ٿا. شروعاتي UCL هن ريت لهبي:
$UCL = LCL + h - d$ شروعاتي LCL ۽ UCL ۾ مسلسل h کي جوڙ ڪندي ۽ ٻين جماعتن جا LCLs ۽ VCLs لکو.
5. مسلسل تعددي جدول جي پهرين ڪالم ۾ جماعتي حدن کي جماعتن طور لکو.
6. مواد کي جماعتن ۾ ورهائڻ لاءِ ٻيئي ڪالم ۾ ٽيلي نشانين جو استعمال ڪريو يا رقمن کي لکو. ٽيلي نشانين کي ترجيح ڏني ويندي آهي.
7. سڀني جماعتن جي تعددن کي ٽئين ڪالم ۾ لکڻ لاءِ ٽيلي نشانن يا رقمن کي ڳڻيو.

مثال 1:

هڪ دُڪان ۾ 60 لڳاتار ڏينهن لاءِ بجلي جو استعمال (kwh ۾) هيٺين ريت ڏنل آهي. ٽيلي نشان وارو طريقو استعمال ڪندي تعددي تقسيم ٺاهيو.

106	107	76	82	109	107	115	93	187	95	139	119	115	128	115
123	125	111	92	86	70	126	[68]	130	129	194	82	90	158	118
123	146	80	136	137	110	141	152	104	111	140	184	[204]	178	75
113	162	131	99	185	181	84	486	100	98	148	90	110	107	78

حل: هتي $n = 60$ مواد غير مسلسل آهي ۽ $m = 0$ ، $R = 204 - 68 = 136$ جماعتن جي تعداد لاءِ اسٽرج جو اصول استعمال ڪندي:

$$K = \lceil 1 + 3.322 \log(60) \rceil = \lceil 6.9070 \rceil = 7.$$

$$h = \left\lceil \frac{136}{7} \right\rceil = \lceil 19.4285 \rceil = 20, \text{ ۽ } d = 1.$$

شروعاتي LCL=68 سان شروعاتي UCL =1–20+68=87

انهن ۾ h=20 کي جوڙ ڪندي اسان کي ٻيون حدون مليون. پهرين ڪالم ۾ جماعتي حدون، ٻيئي ڪالم ۾ ٽيلي نشان ۽ ٽئين ڪالم ۾ تعددن کي لکندي، اسان گهربل تعددي جدول حاصل ڪئي.

تعددي تقسيم

تعدد	ٽيلي نشان	جماعتي حدون
10	𝍸 𝍸	68 – 87
13	𝍸 𝍸 |||	88 – 107
15	𝍸 𝍸 𝍸	108 – 127
10	𝍸 𝍸	128 – 147
4	||||	148 – 167
6	𝍸 |	168 – 187
2	||	188 – 207
$n = 60$	---	ڪُل تعداد

مثال 2: 24 جڳهن تي هڪ تار جي ريل جي قطر جون ٿيل ماپون تقريبا 0.01mm تائين درست آهن:

2.10, 2.29, 2.32, 2.21, 2.14, 2.22, 2.28, 2.18, 2.17, 2.20, 2.23, 2.13, 2.26, 2.10, 2.21, 2.17, 2.28, 2.15, 2.34, 2.27, 2.11, 2.23, 2.25, 2.16.

تعددي ورهاست ناهيو.

حل: هتي $n = 24$ ۽ ڏهائي جي ٻن درجن تائين مسلسل مواد آهي. تنهنڪري $m = 2$ ۽

$$K = [1 + 3.322\log(24)] = 6 \quad ۽ \quad R = 2.34 - 2.10 = 0.24$$

$$d = \frac{1}{100} = 0.01 ،\ h = \frac{1}{100}\left[\frac{R}{K} \times 100\right] = 0.04$$

LCL=2.10 ۽ $h = 0.04$ سان شروعات ڪندي ڇهه جماعتون آهن.

2.10-2.13، 2.14-2.17، 2.18-2.21، 2.22-2.25، 2.26-2.29، 2.30-2.33.

پر 2.34 ڪنهن بہ جماعت ۾ شامل نٿو ڪري سگهجي. ان انتهائي حالت ۾ اسين جماعتي ويڪر $h + d = 0.05$ استعمال ڪنداسين.گهربل ڇهه جماعتون آهن: 2.10-2.14، 2.15-2.19، 2.20-2.24، 2.25-2.29، 2.30-2.34، 2.35-2.39 ۽ قطر جي ماپن واري گهربل تعددي ورهاست آهي.

تعددي جدول

جماعتي حدون	2.10 – 2.14	2.15 – 2.19	2.20 – 2.24	2.25 – 2.29	2.30 – 2.34	2.35 – 2.39	ڪُل تعداد
ٽيلي نشان	|||	~~||||~~	~~||||~~ |	~~||||~~ |	|||		---
تعدد	3	5	6	6	3	0	$n = 24$

ڌيان ۾ رکو تہ: مثال 2 ۾، 2.34 کي شامل ڪرڻ لاءِ اسان رڳو هڪ وڌيڪ جماعت جو اضافو ڪري سگهون ٿا. جدول هن ريت ٿيندي.

ڪلاس حدون	2.10 – 2.13	2.14 – 2.17	2.18 – 2.21	2.22 – 2.25	2.26 – 2.29	2.30 -2.33	2.34 – 2.37
ٽيلي نشان	||||	~~||||~~	||||	||||	~~||||~~	|	|
تعدد	4	5	4	4	5	1	1

مسلسل جماعتن واري گروهي تعددي جدولن جا ڪجهہ بيا مکيہ اصطلاح:

حقيقي جماعتي حدون (Class boundaries):

اُهي عدد جيڪي هڪ جماعت کي پاسي واري جماعتن کان ڌار ڪن حقيقي جماعتي حدون ڪوٺبا آهن. هڪ جماعت لاءِ ان جي هيٺين حقيقي جماعتي حد (LCB) ۽ مٿين حقيقي جماعتي حد (UCB) ترتيبوار LCL ۽ UCL مان هيٺين ريت حاصل ڪبيون آهن.

هڪ جماعت لاءِ: $LCB = LCL - \frac{d}{2}$ ۽ $UCB = UCL + \frac{d}{2}$ جڏهن تہ d جماعتن جي وچ ۾ وٿي آهي.

جماعتي نشان يا وچيان ٽپڪا (Class marks/mid points):

جماعتي نشان يا وچيان ٽپڪا x سان ظاهر ڪبا آهن. اهي مسلسل جماعتن واري گروهي مواد جي جماعتن جي جماعتي حدن يا حقيقي جماعتي حدن جون حسابي سراسريون هونديون آهن.

هڪ جماعت لاءِ: $x = \frac{LCL+UCL}{2}$ يا $x = \frac{LCB+UCB}{2}$

مجموعي تعدد (Cumulative Frequency): لفظ "Cumulative"جو مطلب آهي تہ لاڳيتو جوڙ سان ڪنهن شي جو وڌڻ يا وڌو ٿيڻ جيڪڏهن اسين جماعتن جي تعددن کي هڪ ٻيئي پنيان جوڙ ڪندا رهون. هر پيري ڪل تعدد ۾ ايندڙ جماعت جي تعدد کي جوڙ ڪندي اسين مجموعي تعدد حاصل ڪنداسين ڪنهن خاص جماعت لاءِ مجموعي تعدد، ان جماعت تائين سيني تعددن جي جوڙ اُپت هوندي آهي.

مثال 3: هيٺ ڏنل تعددي جدول لاءِ حقيقي جماعتي حدون، جماعتي نشان ۽ مجموعي تعدد لهو.

جماعتي حدون	7.1-7.3	7.4-7.6	7.7-7.9	8.0-8.2	8.3-8.5	8.6-8.8	8.9-9.1
تعدد	3	5	9	14	11	6	2

حل: هتي $n = 50$ ۽ $d = 0.1$ حقيقي جماعتي حدون، جماعتي نشان ۽ مجموعي تعدد هيٺين جدول ۾ معلوم ڪيا ويا آهن

جماعتي حدون	حقيقي جماعتي حدون	جماعتي نشان	تعدد	مجموعي تعدد
7.1-7.3	7.05-7.35	7.2	3	3
7.4-7.6	7.35-7.65	7.5	5	3+5=8
7.7-7.9	7.65-7.95	7.8	9	17
8.0-8.2	7.95-8.25	8.1	14	31
8.3-8.5	8.25-8.55	8.4	11	42
8.6-8.8	8.55-8.85	8.7	6	48
8.9-9.1	8.85-9.15	9.0	2	n = 50
ڪُل تعداد	----	----	**n = 50**	----

نوٽ ڪريو ته:

1. اسين ڏسي سگهون ٿا هڪ جماعت جي UCB ۽ ان کانپوءِ اينديڙ جماعت جي LCB ساڳيون آهن.
2. شروعاتي جماعت جي LCB ۾ h کي لاڳيتو جوڙ ڪرڻ سان اسين باقي بچيل سڀ جماعتون حاصل ڪريون ٿا.
3. شروعاتي جماعتي نشان ۾ "h" جوڙ ڪرڻ سان اسان باقي بچيل سڀ جماعتي نشان حاصل ڪري سگهون ٿا.
4. آخري جماعت جي مجموعي تعدد سيني مشاهدن جو ڪُل تعداد آهي.

مشق 22.1

1. ڏنل مواد جي قسم جي سڃاڻپ ڪريو (غير مسلسل يا مسلسل يا ناليوارو يا قطاري) ۽ مشاهدن جي ڪُل تعداد لکو.

a. 30 ڏينهن لاءِ شاپنگ مال ۾ روز اينديڙ ماڻهن جو تعداد

b. هڪ مهيني لاءِ، هڪ ماڻهو جو ورزش گاهه ۾ گذاريل وقت (روزانو منٽن ۾)

c. 45 گاڏي جي بيٽرين جي عمر (سالن ۾)

d. 2 مهينن لاءِ بجلي جو استعمال (Kwh في ڏينهن ۾)

e. هڪ ڪلاس جي 55 شاگردن جو وزن (ڪلو گرامن ۾)

f. 20 ماڻهن جي پرڻ جو رنگ.

g. هڪ ڪلاس جي 70 شاگردن جا حاصل ڪيل گريڊ

h. 10 ماڻهن جي ڪوويڊ (COVID) جي تشخيصي ٽيسٽ جا نتيجا (مثبت يا منفي)

i. اسڪول جي 30 استادن جي ازدواجي حيثيت

j. توهان جي ڪلاس جي شاگردن جي مستقل رهائش جو ضلعو.

2. هڪ اسڪول جا 20 شاگرد جيڪي ڏيهي دوري تي وڃن پيا انهن جي تعليمي درجن (پڙهائي جي موجوده ڪلاس) جي گروهي تعددي جدول ناهيو. تعليمي درجا آهن:

VIII, X, X, VIII, VI, IX, X, IX, X, VIII, VII, VIII, VI, X, VI, V, IV, VII, IX, IX.

3. هڪ ٻولي سکڻ واري ڪورس ۾ حاضر ٿيڻ لاءِ 20 شاگردن آمدورفت لاءِ جيڪي طريقا استعمال ڪيا اُهي هيٺ ڏنل آهن. في سيڪڙو تعدد سان گڏ گروهي تعددي جدول ناهيو.

بس	پنڌ	پنڌ	موٽر سائيڪل	پنڌ	موٽر گاڏي	بس	موٽر سائيڪل	پنڌ	پنڌ
بس	بس	موٽر گاڏي	موٽر گاڏي	بس	پنڌ	پنڌ	موٽر گاڏي	بس	موٽر گاڏي

4. گروهي تعددي ورهاست ۾ 40 خاندانن جي جوابن جي درجہ بندي ڪريو جڏهن انهن کان پڇيو ويو تہ اُهي ڪيترا پيرا شهر کان ٻاهر موڪلون گذاريندا آهن. نسبتي تعدد پڻ لکو

اڪثر	هميشه	تمام گهٽ	ڪڏهن به نہ	ڪڏهن ڪڏهن	اڪثر	تمام گهٽ	ڪڏهن به نہ
ڪڏهن ڪڏهن	ڪڏهن به نہ	تمام گهٽ	ڪڏهن ڪڏهن	هميشه	ڪڏهن ڪڏهن	ڪڏهن به نہ	ڪڏهن ڪڏهن
ڪڏهن به نہ	اڪثر	اڪثر	ڪڏهن ڪڏهن	هميشه	هميشه	ڪڏهن ڪڏهن	ڪڏهن ڪڏهن
اڪثر	اڪثر	هميشه	تمام گهٽ	هميشه	ڪڏهن ڪڏهن	تمام گهٽ	اڪثر
هميشه	اڪثر	ڪڏهن به نہ	ڪڏهن به نہ	ڪڏهن ڪڏهن	هميشه	ڪڏهن به نہ	هميشه

5. تعددي جدول ۾ مختلف اسڪولن جي نگران شاگردن (پريفيڪٽس) جي ٽوپين جي رنگن کي ترتيب ڏيو

سائو	ناسي	ناسي	ڪارو	نيلو	سائو	ناسي	ڪارو	نيلو	ڪارو
ڳاڙهو	ڪارو	سائو	ڳاڙهو	نيلو	ڳاڙهو	ڪارو	ڳاڙهو	سائو	نيلو

6. هڪڙي ڪلاس ٽيسٽ ۾ 25 شاگردن جون 5 مان ڪنيل مارڪون هيون:.4.0,0.5,4.5,1.0,3.5,3.5,5.0
2.5, 4.0, 2.5, 1.0, 2.0, 4.0, 3.5, 0.0, 3.0, 5.0, 1.0, 2.0, 2.0, 4.5, 2.5, 3.0, 3.5, 1.5
غير مسلسل جماعتن ۽ نسبتي تعددن سان گڏ تعددي جدول ٺاهيو.

7. ٽيسٽ کان هڪ ڏينهن اڳ ۾ هڪ ويب سائيٽ تان هڪ اُستاد جا ليڪچر هر هڪ ڪلاڪ ۾ جيترا دفعا ڊائون لوڊ ٿيا ان جا نتيجا هي آهن. 1, 1, 2, 1, 3, 3, 4, 1, 4, 1, 2, 3, 3, 2, 4, 2, 3, 2, 3, 2, 1, 0, 0, 1
غير مسلسل تعددي جدول ۾ مواد جي درجہ بندي ڪريو.

8. هڪ ڪلاس ۾ 18 ڏينهن ۾ غير حاضر شاگردن جو تعداد هيٺ ڏنل آهي.
4, 3, 0, 1, 2, 5, 6, 8, 10, 7, 11, 15, 13, 14, 3, 4, 12, 12 مواد جي مسلسل جماعتن سان گڏ تعددي جدول ٺاهيو.

9. ڪاليج جي 40 شاگردن جا وزن تقريباً پائونڊن ۾ هن ريت آهن:. 138, 148, 146, 146, 119, 164, 152,
173, 158, 154, 150, 144, 142, 140, 165, 132,150, 147, 147, 153, 144, 156, 135, 126, 140, 125, 168,
157, 138, 135, 149, 136, 135, 142, 161, 145,176, 163, 145, 128
ان مواد جي مسلسل تعددي جدول ٺاهيو حقيقي جماعتي حدون، جماعتي نشان ۽ مجموعي تعددون پڻ لکو

10. ساڳي ملھ واري 48 رزسٽرن (Resistors) جي هڪ ٽولي جي روڪ (Resistance) جي قيمت اوھم ۾ هن ريت آهي.
21.0, 22.4, 22.8, 21.5, 22.6, 21.1, 21.6, 22.3, 22.9, 20.5, 21.8, 22.2, 21.0, 21.7, 22.5, 20.7, 23.2,
22.9, 21.7, 21.4, 22.1, 22.2, 22.3, 21.3, 22.1, 21.8, 22.0, 22.7, 21.7, 21.9, 21.1, 22.6, 21.4, 22.4,
22.3, 20.9, 22.8, 21.2, 22.7,21.6, 22.2, 21.6, 21.3, 22.1, 21.5, 22.0, 23.4, 21.2.
مسلسل تعددي جدول ٺاهيو. مجموعي ۽ في سيڪڙو تعددون پڻ لکو.

11. ڌاتو جي 50 ٽڪرن جو مايو (ڪلوگرامن ۾) 0.1 ڪلو گرامن تائين تقريباً درست ماپيو ويو ۽ اهو هيٺ ڏنل آهي. مائن جي تعددي ورهاست ٺاهيو. نسبتي ۽ في سيڪڙو تعددون پڻ لکو.

8.0	8.3	7.7	8.1	7.4	8.6	7.1	8.4	7.4	8.2	8.4	8.8	7.9	8.1	8.2	7.5	8.3
8.8	8.0	7.7	8.3	8.2	7.9	8.5	7.9	8.0	8.4	7.2	8.7	8.0	9.1	8.5	7.6	8.2
7.8	7.8	8.7	8.5	8.4	8.5	8.1	7.8	8.2	7.7	7.5	8.5	8.1	7.3	9.0	8.6	

(ii) 22.1 برابر جماعتي وقفن وارا ڪالمي نقشا (Histogram) ٺاهڻ:

مقداري مواد جي گراف واري اظهار لاءِ ڪالمي نقشا استعمال ٿيندا آهن. ان ۾ مسلسل ۽ غير مسلسل جماعتن وارين تعددي جدولن ۾ لاڳاپيل تصور استعمال ٿيندا آهن. پر وارن مستطيلن جو استعمال ڪندي ڪالمي نقشو ڪڍيو ويندو آهي. جماعتن ۾ عددن جي ورهاست سان مستطيلن جي پاين کي نشان هنيا ويندا

آهن ۽ مستطيلن جون ايراضيون يا اُوچائيون جماعتي تعددن سان متناسب هونديون آهن. برابر جماعتي وقفن واري ڪالمي نقشن ۾مستطيلن جون ٻئي ايراضيون ۽ اُوچائيون تعدد سان متناسب هونديون آهن.

غير مسلسل تعددي جدولن سان واسطو رکندڙ ڪالمي نقشن ۾، مستطيلن جا پايا مواد جي مختلف عددن کي ظاهر ڪن ٿا ۽ اُوچائيون عام طرح سان جماعتن جي تعددن کي ظاهر ڪن ٿيون. هر هڪ مستطيل جي ويڪر مستقل جماعتي وقفي سان ڪٺندي آهي.

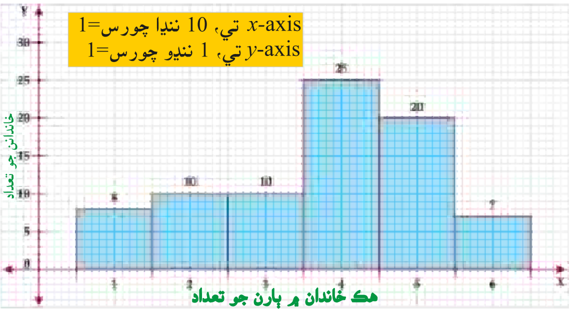
برابر جماعتي وقفن واري مسلسل تعددي جدولن سان واسطو رکندڙ ڪالمي نقشن ۾ مستطيلن جا پايا حقيقي جماعتي حدن کي ظاهر ڪن ٿا ۽ اُوچائيون عام طرح سان جماعتن جي تعددن کي ظاهر ڪنديون آهن. هر هڪ مستطيل جي ويڪر جماعتي وقفي جي برابر هوندي آهي.

ڪالمي نقشا ڪيڻ وقت محورن کي چٽي طرح ليبل ڪرڻ گهرجي ۽ پئمانن کي بيان ڪرڻ گهرجي. x-محور (x-axis) 0 کان شروع ناهي ڪرڻو. y– محور (y-axis) 0 کان لازمي شروع ٿيڻ گهرجي. تعددن کي مستطيلن جي متان پڻ لڳائڻ گهرجي. هيٺين مثالن ۾ ڪالمي نقشا ناهڻ جي طريقي کي واضح ڪيو ويو آهي.

مثال 1: 80 خاندانن جو هيٺيون مواد استعمال ڪندي، ڳوٺن ۾ هر هڪ خاندان جي ٻارن جي تعداد لاءِ ڪالمي نقشو ناهيو.

هڪ خاندان ۾ ٻارن جو تعداد	1	2	3	4	5	6
خاندانن جو تعداد	8	10	10	25	20	7

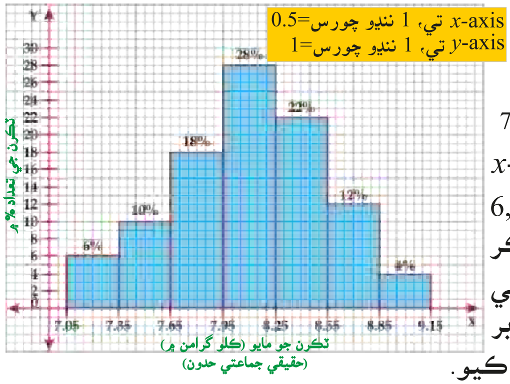
حل:



مواد هڪ غير مسلسل تعددي جدول ظاهر ڪري ٿو x-axis تي ساڳيئي وقفي وارين جماعتن کي ظاهر ڪندڙ مختلف عدد 1, 2, 3, 4, 5, 6 لکندي. ان ڪانپوءِ 25 تائين سيني تعددن کي شامل ڪرڻ لاءِ مناسب پئماني سان تعددن کي y-axis تي لکندي جيڪي 0 کان شروع ٿين ٿا. مستطيلن کي ناهيندي جن جا برابر ويڪر وارا پايا مختلف عددن تي آهن ۽ اُوچائين کي تعددن جي برابر ڪٺندي اسان هيٺيون ڪالمي نقشو حاصل ڪيو. محورن کي ليبل ڪيو ويو آهي ۽ پئمانن کي بيان ڪيو ويو آهي.

مثال 2: هيٺين ورهاست لاءِ في سيڪڙو تعددي وارو ڪالمي نقشو ناهيو.

ٽڪر جو ماپو(ڪلوگرامن ۾)	7.1 - 7.3	7.4 - 76	7.7 - 7.9	8.0 - 8.2	8.3 - 8.5	8.6 - 8.8	8.9 - 9.1
ٽڪرن جو تعداد	3	5	9	14	11	6	2



حل: ڏهائي جي هڪ درجي تائين مسلسل مواد جي مسلسل تعددي جدول ڏنل آهي. تہ پوءِ $n = 50$، $m = 1$ ۽ $d = 0.1$

حقيقي جماعتي حدون آهن: 7.05 - 7.35، 7.35 - 7.65، 7.65 - 7.95، 7.95 - 8.25، 8.25 - 8.55، 8.55 - 8.85، 8.85 - 9.15. انهن کي x-axis تي ۽ واسطيدار في سيڪڙو تعددن 6, 10, 18, 28, 22, 12, 4 کي y-axis تي ترتيبوار پئمانن سان لکندي $h = 0.3$ ويڪر وارن ۽ پاسي وارن مستطيلن کي ناهيندي جن جا پايا حقيقي جماعتي حدن تي آهن ۽ اُوچائيون في سيڪڙو تعددن جي برابر آهن. اسان گهربل في سيڪڙو وارو ڪالمي نقشو حاصل ڪيو.

22.1 (iii) غير مساوي جماعتن وارا ڪالمي نقشا ٺاهڻ (Construct histograms with unequal class intervals):

غير مساوي جماعتن واري ڪالمي نقشن واري صورت ۾ پاسي وارا مستطيل ٺاهبا آهن ته جيئن انهن جون ايراضيون (نه ڪي اوچائيون) تعددن سان متناسب هجن. اهو ڪرڻ لاءِ اسان مستطيلن جون ترميم ٿيل اُوچائيون (Adjusted heights) بيان ڪنداسين متناسب ايراضين ۾ تعددن جي پڪ ڪرڻ لاءِ جيڪڏهن f^* ۽ h^* هڪ جماعت جي ترتيبوار تعدد ۽ اوچائي آهن ته پوءِ

(1) مستطيل جي ترميم ٿيل اُوچائي $^* = \dfrac{f^*}{h^*}$

ته جيئن

(2) مستطيل جي ايراضي $^* =$ ويڪر × اُوچائي $= h^* \times \dfrac{f^*}{h^*} = f^*$

مساوات (i) مان، اسين ڏسون ٿا ته ترميم ٿيل اُوچائيون f^* سان تناسب ۾ نه آهن. پر مساوات (ii) ۾ ايراضيون تناسب ۾ آهن اها اسان جي گهرج پوري ڪري ٿي. غير مساوي جماعتي وقفن واري ڪالمي نقشن ڪي ٺاهڻ جا قدم اهي ساڳيا آهن جيڪي اڳ ۾ هئا پر اسان ڪي ترميم ٿيل اُوچائيون y-axis تي لازمي لڪٽيون پونديون.

مثال: هيٺين مواد لاءِ غير مساوي جماعتي وقفن وارو ڪالمي نقشو ٺاهيو

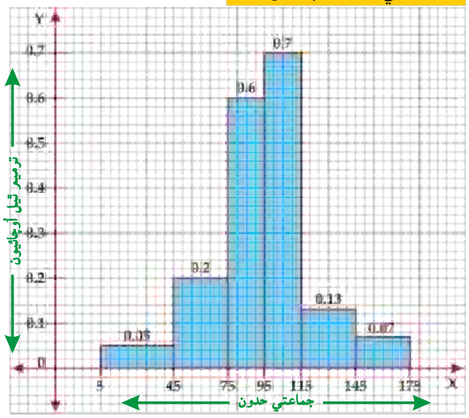
150 - 170	120 - 140	100 - 110	80 - 90	50 - 70	10 - 40	جماعتي حدون
2	4	14	12	6	2	تعدد

حل: اسين ڏسي سگهون ٿا ته ڏنل مواد غير مساوي جماعتي وقفن واري تعددي جدول ڏيکاري ٿو. سڀ کان اڳ ۾، اسين حقيقي جماعتي حدون ۽ ترميم ٿيل اُوچائيون لهنداسين. هتي $d = 10$

مستطيلن جون ترميم ٿيل اُوچائيون (f^* / h^*)	تعدد (f^*)	جماعتي وقفا (h^*)	حقيقي جماعتي حدون	جماعتي حدون
$\frac{2}{40} = 0.05$	2	40	5-45	10 – 40
$\frac{6}{30} = 0.2$	6	30	45-75	50 – 70
0.6	12	20	75-95	80 – 90
0.7	14	20	95-115	100 – 110
≈ 0.13	4	30	115-145	120-140
≈ 0.07	2	30	145-175	150-170

x-axis تي حقيقي جماعتي حدون ۽ y-axis تي ترميم ٿيل اُوچائيون لڪندي، اسين سيني جماعتن جا مستطيل ٺاهيون ٿا جن جي ويڪر غير مساوي جماعتي وقفن جي برابر آهي ۽ اُوچائيون برابر آهن. ترميم ٿيل اوچائين جي جيڪي مٿيئن جدول ۾ معلوم ڪري چڪا آهيون.اهڙي طرح اسان غير مساوي جماعتي وقفن وارو ڪالمي نقشو حاصل ڪيو آهي. اسين تصديق ڪري سگهون ٿا ته مستطيلن جون ايراضيون متناسب آهن ۽ خاص طور سان برابر آهن تعددن جي. هتي

x-axis تي، 1 ننڍو چورس =5
y-axis تي، 5 ننڍا چورس =0.1



مستطيل -1 جي ايراضي $= 40 \times 0.05 = 2$

مستطيل -2 جي ايراضي $= 30 \times 0.2 = 6$

مستطيل -3 جي ايراضي $= 20 \times 0.6 = 12$

۽ اهڙي ريت اڳيان به

22.1 (iv) تعددي گهڻ پاسي جي جوڙجڪ ڪرڻ (Construct a frequency polygon):

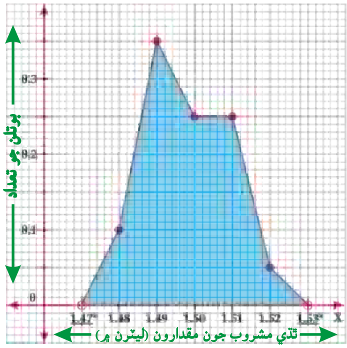
تعددي گهڻ پاسو ان مقداري مواد جي گراف واري اظهار جو هڪ طريقو آهي جيڪو تعددي ورهاست ۾ ترتيب ڏنل هوندو آهي. اسين اهڙا گراف اڪثر اخبارن ۾ (خاص طور سان ڪاروباري حصي ۾)، موسم جي اڳڪٿي واري خبرن ۾، ۽ ڪرڪيٽ ميچ جي انگ اکر (Stats) ۾ (جيڪو Statistics جو مخفف آهي) لفظ گهڻ پاسو (Polygon) سان مراد پلين (Plane) جي هڪ اهڙي بند شڪل جيڪا گهٽ ۾ گهٽ ٽن ليڪ ٽڪرن کي پاڻ ۾ ڳنڍڻ سان ٺهي. مثال طور ٽڪنڊا، چورس، پنج ڪُنڊا وغيره. هتي سڪنداسين ته اهو جاميٽري جو تصور تعددي ورهاست سان ڪيئن لاڳاپيل آهي. تعددي گهڻ پاسا ورهاست جي شڪل سجاڻڻ لاءِ جديد شمارياتي تجزين ۾ استعمال ٿيندا آهن.

تعددي گهڻ پاسي کي ناهڻ لاءِ ٽپڪا (x, y) لڳائبا جڏهن ته x-محددي (Abscissa) جماعتي نشان آهن ۽ y-محددي (Ordinates) جماعتي تعددون آهن. بيو ته اسين 0 تعدد وارن بن فرضي جماعتن کي شامل ڪنداسين، هڪ شروعات ۾ ۽ ٻي آخر ۾ ۽ انهن لاءِ واسطيدار ٽپڪا x-axis تي لڳائينداسين. آخر ۾ گهربل بند شڪل حاصل ڪرڻ لاءِ، اسين گراف تي پڪڙيل ٽپڪن کي ليڪ ٽڪرن سان ملائينداسين. ان بند شڪل کي تعددي گهڻ پاسو چئبو آهي جنهن جو پايو x-axis تي هوندو آهي ۽ ان جون چوٽيون تعددن کي ظاهر ڪن ٿيون. وضاحت خاطر، پريل نشان (•) حقيقي جماعتن کي ظاهر ڪن ٿا ۽ خالي نشان (○) فرض ڪيل جماعتن کي ظاهر ڪن ٿا. محورن کي ليبل ڪبو ۽ مناسب پئمانن کي بيان ڪبو.

مثال 1: هيٺين مواد لاءِ نسبتي تعددي گهڻ پاسو ناهيو.

ٿڌي مشروب جي مقدار لٽرن ۾	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلن جو تعداد	2	7	5	5	1

x-axis تي، 5 ننڍو چورس=0.01
y-axis تي، 5 ننڍو چورس=0.05

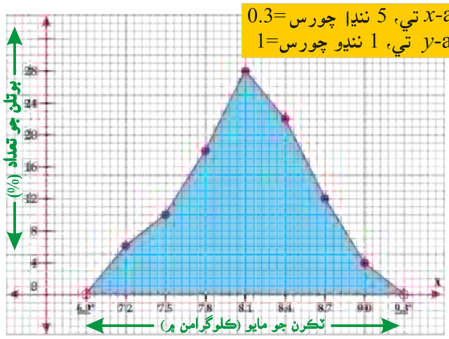


حل: ڏنل مواد غير مسلسل تعددي جدول کي ظاهر ڪري ٿو. مختلف عدد: 1.48، 1.49، 1.50، 1.51، 1.52 جماعتي نشان (x) آهن تعددون (y) آهن: 2، 7، 5، 5، 1 سڀ ڪان اڳ ۾ اسين نسبتي تعدون لهنداسين جيڪي هي آهن 0.1، 0.35، 0.25، 0.25 ۽ 0.05 بن فرضي جماعتن سان لڳايل ٽپڪا آهن (1.47*, 0)، (1.48, 0.1)، (1.49, 0.35)، (1.50, 0.25)، (1.51,0.25)، (1.52, 0.05) ۽ (1.53*, 0) ٽپڪن کي ليڪ ٽڪرن سان ملائيندي، اسان نسبتي عددي گهڻ پاسو حاصل ڪيو.

مثال 2: هيٺين ورهاست لاءِ، في سيڪڙو تعددي گهڻ پاسو ناهيو.

ٽڪرن جو مايو (ڪلوگرامن ۾)	7.1 - 7.3	7.4 - 7.6	7.7 - 7.9	8.0 - 8.2	8.3 – 8.5	8.6 – 8.8	8.9 – 9.1
ٽڪرن جو تعداد	3	5	9	14	11	6	2

x-axis تي، 5 ننڍا چورس =0.3
y-axis تي، 1 ننڍو چورس=1



حل: مواد، مساوي جماعتي وقفي $h = 0.3$ واري مسلسل تعددي ورهاست ظاهر ڪري ٿو. لڳائڻ وارا ٽپڪا (x, y) آهن جڏهن ته x جماعتي نشانن کي ظاهر ڪري ٿو جيڪي آهن: 7.2، 7.5، 7.8، 8.1، 8.4، 8.7، 9.0 ۽ y في سيڪڙو تعددن کي ظاهر ڪري ٿو جيڪي آهن. 6، 10، 18، 28، 22، 12، 4.
فرضي جماعتي نشان شامل ڪندي ۽ مناسب پئمائن کي استعمال ڪندي گهربل في سيڪڙو تعددي گهڻ پاسو هيٺين ٽپڪن سان ناهيو ويو آهي.(6.9*, 0)، (7.2, 6)، (7.5, 10)، (7.8, 18)، (8.1, 28)، (8.4, 22)، (8.7, 12)، (9.0, 4) ۽ (9.3*, 0)

22.2. مجموعي تعددي ورهاست (Cumulative frequency distribution):

مجموعي تعددي ورهاست هڪ جدول آهي جنهن ۾ مٿيون حقيقي جماعتي حدون ۽ انهن سان واسطو رکندڙ مجموعي تعدون پڻ درج هونديون آهن. اسين اڳيئي مجموعي تعددون جي لهڻ بابت ڄاڻون ٿا. مجموعي تعددون انهن مشاهدن جي تعداد کي جوڙ ڪري لهبيون آهن جيڪي جماعتن جي UCBs کان ننڍا هوندا آهن ۽ اسين انهن مجموعي تعددن کي هيٺيون مجموعي تعددون "Less than Cumulat frequencies" چوندا آهيون اهي "0" کان شروع ۽ مشاهدن جي ڪُل تعداد "n" تي ختم ٿينديون آهن. اسان کي شروع ۾ هڪ فرضي UCB شامل ڪرڻي پوندي جنهن جي مجموعي تعدد 0 هجي.

مٿيون مجموعي تعددون "The greater than cummulative frequencies" جماعتن جي LCB کان وڏن سڀني مشاهدن کي جوڙ ڪرڻ سان لهبيون آهن. اهي "n" کان شروع ۽ "0" تي ختم ٿينديون آهن. پر اسان عملي طور اڪثر هيٺيون مجموعي تعددون استعمال ڪندا آهيون. اڳتي ايندڙ بحث ۾ اسين سولائي خاطر "هيٺيون مجموعي تعددون" لاءِ اصطلاح "مجموعي تعدد" استعمال ڪنداسين.

22.2 (i) هڪ مجموعي تعددي جدول جي جوڙجڪ ڪرڻ:

گروهي مقداري مواد جي مجموعي تعددي جدول ناهڻ لاءِ هيٺيان قدم آهن.

1. مٿيون حقيقي جماعتي حدون ۽ مجموعي تعددون لهو.
2. شروع ۾، مجموعي تعدد 0 واري هڪ فرضي مٿيئن حقيقي جماعتي حد جو اضافو ڪريو.
3. سڀني UCBs ۽ ترتيبوار مجموعي تعددن کي ظاهر ڪرڻ لاءِ هڪ جدول ناهيو.

مثال 1: هيٺيون مواد استعمال ڪندي هڪ مجموعي تعددي جدول ناهيو.

شاگردن جون مارڪون	1	2	3	4	5
شاگردن جو تعداد	2	5	4	3	1

حل: ڏنل مواد هڪ غير مسلسل تعددي ورهاست ظاهر ڪري ٿو.

هتي $d = 1$ ۽ $n = 15$ جماعتي حدن ۾ $\frac{d}{2}$ کي جوڙ ڪندي، UCBs کي لهڻ ۽ ان ڪانپوءِ مجموعي تعددن کي معلوم ڪندي اسان پاسي واري جدول حاصل ڪئي. شروع ۾ مجموعي تعدد "0" واري هڪ فرضي UCB شامل ڪندي جنهن جو ملهه $\underline{0.5}$* آهي، اسان گهربل مجموعي تعددي جدول حاصل ڪئي جيڪا آهي:

جماعتون	UCBs	تعددون	مجموعي تعددون
1	1.5	2	2
2	2.5	5	7
3	3.5	4	11
4	4.5	3	14
5	5.5	1	15 = n

شاگردن جون مارڪون (UCBs)	$\underline{0.5}$*	1.5	2.5	3.5	4.5	4.5
شاگردن جو تعداد (مجموعي تعددون)	0	2	7	11	14	15

مثال 2: بجلي جي استعمال جي مواد واري مجموعي تعددي جدول ناهيو.

بجلي جو استعمال (kWh)	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
ڏينهن جو تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: ڏنل مواد هڪ مسلسل تعددي ورهاست آهي.

هتي $d = 1$ ۽ $n = 60$، UCBs آهن: 87.5. 107.5, 127.5, 147.5, 167.5, 187.5, 207.5

شروعات ۾ $\underline{67.5}$* ملهه واري فرضي UCB شامل ڪريو اسان وٽ هيٺين مجموعي تعددي جدول آهي.

بجلي جو استعمال (kWh)	$\underline{67.5}$*	87.5	107.5	127.5	147.5	167.5	187.5	207.5
ڏينهن جي تعداد	0	10	23	38	48	52	58	60

(ii) 22.2 مجموعي تعددي گهڻ پاسو ٺاهڻ:

هڪ مجموعي تعددي ورهاست گراف وسيلي هڪ مجموعي تعددي گهڻ پاسو (Commutative frequency polygon) سان ظاهر ڪبي آهي ان کي لهر دار ليڪ (Ogive) پڻ چئبو آهي. اسين مجموعي تعددي جدول جي ٽٻڪن (x, y) کي ظاهر ڪرڻ شروع ڪنداسين (UCBs: x ۽ y:مجموعي تعددون) ته پوءِ انهن کي ليڪ ٽڪرن سان ملايو. آخر ۾ اسين x-axis تي چوٽي واري ٽٻڪي تان عمود ناهينداسين ته جيئن هڪ بند شڪل ملي جيڪا گهربل (Ogive) يا مجموعي تعددي گهڻ پاسو آهي.

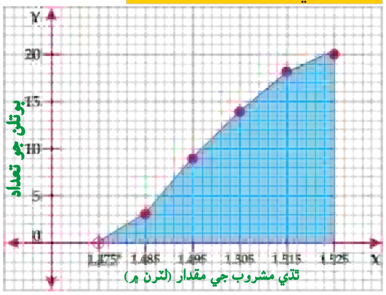
مثال 1: هيٺين مواد لاءِ هڪ Ogive (مجموعي تعددي گهڻ پاسو) ناهيو.

تڏي مشروب جي مقدار (لٽرن ۾)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلن جو تعداد	2	7	5	5	1

حل: هتي $n=20$ ۽ $d=0.01$ ، UCBs ۽ مجموعي تعددن کي لهندي اسان مجموعي تعددي جدول حاصل ڪريون ٿا جڏهن ته *1.475 هڪ فرضي شروعاتي UCB آهي.

x-axis تي، 5 ننيا چورس =0.01
y-axis تي، 2 ننيا چورس =5

x-axis
y-axis



تڏي مشروب جي مقدار (لٽرن ۾)	1.475*	1.485	1.495	1.505	1.515	1.525
بوتلن جو تعداد	0	2	9	14	19	20

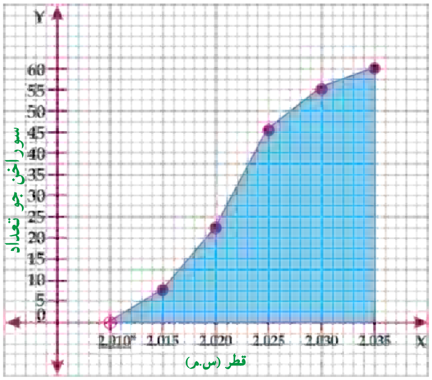
هاڻي، اسين گراف تي هي ٽٻڪا ظاهر ڪريون ٿا: (1.475*, 0) ، (1.485, 2)، (1.495, 9)، (1.505, 14)، (1.515, 19) ۽ (1.525, 20) انهن کي اسين ليڪ ٽڪرن سان ملائينداسين ۽ آخر ۾ اسين گهربل Ogive يا مجموعي تعددي گهڻ پاسو حاصل ڪرڻ لاءِ آخري ٽٻڪي کان x-axis ڏانهن هڪ عمود ڪيڏنداسين. محورن کي واضح طور ليبل ڪرڻ سان گڏ مناسب پيمانن کي بيان ڪيو ويندو.

مثال 2: هڪ انجڻ ۾ ڪيل 60 سوراخن جي قطرن (سينٽي ميٽرن ۾) جي هيٺين ورهاست لاءِ Ogive ناهيو. اهو مواد ڪنهن خاص تحقيق ۾ ماپيل آهي.

قطر (س.م)	2.011– 2.014	2.016 – 2.019	2.021 - 2.024	2.026 – 2.029	2.031 – 2.034
سوراخن جي تعداد	7	16	23	9	5

حل: ڏنل جدول هڪ مسلسل تعددي جدول آهي جنهن ۾ $n=60$ ۽ $d=0.002$ ۽ UCBs ۽ مجموعي تعددن جو استعمال ڪندي. اسان هڪ مجموعي تعددي جدول حاصل ڪئي جنهن ۾ ٽٻڪا آهن: (2.010*, 0) ، (2.010, 7) ، (2.020, 23) ، (2.025, 46) ، (2.030, 55) (2.035, 60) اهي ٽٻڪا اسان کي گهربل Ogive يا مجموعي تعددي گهڻ پاسو ڏين ٿا.

x-axis تي، 1 ننيو چورس =0.001
y-axis تي، 2 ننيا چورس =5



مشق 22.2

1. هينين مواد لاءِ في سيڪڙو ڪالمي نقشو، تعددي گهڻ پاسو، مجموعي تعددي جدول ۽ Ogive حاصل ڪريو.

شاگردن جون مارڪون	1	2	3	4	5
شاگردن جو تعداد	2	5	4	3	1

2. غير مساوي جماعتي وقفن واري هينين مراد لاءِ ڪالمي نقشو ناهيو.

جماعتي حدون	0-39	40-49	50-79	80-99
تعددون	6	8	12	4

3. ڏنل مواد لاءِ ڪالمي نقشو، تعددي گهڻ پاسو، مجموعي تعددي جدول ۽ Ogive ناهيو.

هفتيوار ڪمائيل رقم	20-40	50-70	80-90	100-110	120-140	150-170
ماڻهن جو تعداد	2	6	12	14	4	2

4. هينين مواد لاءِ ڪالمي نقشو، نسبتي تعددي گهڻ پاسو ۽ Ogive ناهيو.

جماعتي حدون	10.5-10.9	11.0-11.4	11.5-11.9	12.0-12.9	13.0-13.4
تعددون	2	7	10	12	8

22.3 مرڪزي رجحان جون ماپون (Measures of central tendency):

مواد ۾ مرڪزي ٽبڪي (Central point) جي چوڌاري سيني مشاهدن جي ميڙ ڪرڻ واري صلاحيت کي مرڪزي رجحان (Central tendency) چئبو آهي. مواد جو مرڪزي ٽبڪي کي مرڪزي رجحان جي ماپ (Measure of Central tendency) يا سولائي خاطر سراسري (Average) چئبو آهي مرڪزي رجحان جي ماپ سجي مواد کي هڪ واحد مرڪزي ٽبڪي سان ظاهر ڪري ٿي ۽ سجي مواد جي مختصر ۽ جامع سجاڻپ آهي.اسين عام طور عددن ۽ خاصيتن جي سراسرين بابت بار بار ڳالهائيندا آهيون. مثال طور: هينين بيانن تي غور ڪريو.

1. "هڪ ڪلاس ۾ شاگردن جي اڪثريت B گريڊ حاصل ڪيو" هتي B گريڊ هڪ سراسري آهي.
2. "علي روزانو ورزش گاهه ۾45 منٽ گذاري ٿو" هتي علي ورزش گاهه(GYM) ۾ سراسري وقت في ڏينهن 45 منٽ گذاري ٿو. اهو واضح آهي ته هن شايد 45 منٽن کان گهٽ يا وڌيڪ وقت گذاريو هجي.
3. "T20" ۾ هڪ رانديگر جو سراسري اسڪور" جيڪو منحصر ڪري ٿو انهن اسڪورن تي جيڪي هن سيني ميچن ۾ راند ڪري ڪيا سراسري اسڪور ڪُل اسڪورن کي عام ڪري ٿو.

22.3.(i) مرڪزي رجحان جي ماپن کي لهڻ اسين عام طرح سان مواد جي سراسري يا مرڪزي رجحان جي ماپ سيني مشاهدن کي جوڙ ڪري ۽ پوءِ مشاهدن جي ڪُل تعداد سان ونڊ ڪندي حاصل ڪندا آهيون جيڪا خاص طور سان حسابي سراسري (arithmetic mean) آهي سراسريون لهڻ جا ٻيا به ڪيترائي طريقا آهن اسين هتي هينين پنجن قسمن تي غور ڪنداسين.

(1) حسابي سراسري (Arithmetic mean) (2) مڌياني سراسري (Median) (3) ڪثرتي سراسري (Mode)
(4) مهندسي سراسري (Geometric mean) (5) هارموني سراسري (Harmonic mean)

انهن سراسرين جا ڪجهه فائدا ۽ نقصان آهن جڏهن انهن جي هڪٻئي سان ڀيٽ ڪجي، هڪ سراسري جو سڀ کان سٺو استعمال مواد جي قسم تي پڻ منحصر ڪري ٿو.

22.3 (i) (a) حسابي سراسري وصف وسيلي ۽ فرضي سراسري کان انحراف (Deviation) جو استعمال ڪندي:

حسابي سراسري سيني مشاهدن جي وچ ۾ برابري واري اصول تي ٻيڻل آهي. اسين سيني n مشاهدن کي جوڙ اُپت وسيلي ڳنڍائيندا آهيون ۽ پوءِ ان جوڙ اُپت کي n برابر حصن ۾ ورهائيندا آهيون. جيڪڏهن x_1، x_2، x_3،...، x_n n عدد آهن ته پوءِ انهن جي حسابي سراسري (ظاهر ڪبو آهي x سان) آهي

$$(1)\quad \bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \quad \text{يا} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1} x_i}{n}$$

جڏھن تہ "Σ"ھڪ وڏو يوناني اکر سگما "SIGMA" آھي جيڪو جوڙ اُپت لاءِ استعمال ٿيندو آھي. نوٽ ڪيو تہ:

- حسابي سراسري مواد جي وسعت اندر ھڪ يگانو عدد آھي
- جيڪڏھن مواد مقداري ھجي تہ پوءِ اسين حسابي سراسري سڌي ريت لھي سگھون ٿا ناليواري يا قطاري مواد لاءِاسين ترتيبوار عددي علامتون يا درجا استعمال ڪندا آھيون.
- حسابي سراسري ناليواري مواد لاءِ موزون ناھي

وصف يا سڌي طريقي وسيلي حسابي سراسري:

سڌي طريقي يا وصف وسيلي مان مراد آھي تہ مشاھدن جي جاءِ يا پئماني کي بدلائڻ کانسواءِ ڏنل مواد مان سڌي ريت حسابي سراسري لھڻ.

وصف وسيلي يا سڌي طريقي ۾ اسين ھينيان فارمولا استعمال ڪندا آھيون.

غير گروھي مواد لاءِ

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\frac{\sum x}{n}$$

گروھي مواد لاءِ

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i f_i}{\sum f_i}=\frac{\sum xf}{\sum f}$$

جڏھن تہ x_i غير گروھي مواد ۾ ڌار ڌار مشاھدن کي ظاھر ڪري ٿو ۽ گروھي مواد ۾ جماعتي نشانن کي ظاھر ڪري ٿو جڏھن تہ f_i واسطيدار جماعتي تعددون آھن. سولائي خاطر اسين ھينين لکت کي فارمولن ۾ نظر انداز ڪري سگھون ٿا.

مثال ۱: وصف وسيلي ھيٺ ڏنل ڊيٽا سيٽن جي حسابي سراسري لھو

(i). 2, 3, 7, 5, 5, 13, 1, 7, 4, 8, 3, 4, 3 (ii). 7, 5, 74, 10 (iii). 18.92, 27.9, 34.7, 39.68

حل

وصف وسيلي يا سڌي طريقي سان اسان وٽ آھي.

(i). $$\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{2+3+7+5+5+13+1+7+4+8+3+4+3}{13}=\frac{65}{13}=5.$$

وصف وسيلي اسان وٽ آھي:

(ii). $$\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{7+5+74+10}{4}=\frac{96}{4}=24.$$

(iii). $$\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{18.92+27.9+34.7+39.68}{4}=\frac{121.2}{4}=30.3.$$

نوٽ ڪريو تہ: تمام وڏين رقمن (يا ٻين کان مختلف رقمن) سان حسابي سراسري اثرانداز ٿئي ٿي.

مثال1 (ii) ۾ $\bar{x}=24$ سيني مشاھدن 74,5,7 ۽10 کان گھڻو پري آھي جو جو74 تمام وڏي رقم آھي.

مثال پنج شاگردن جا گريڊ، جن گروھ جي شڪل ۾ پڙھائي ڪئي، ھئا:- A,B,C,B+,A+ حسابي سراسري جو استعمال ڪندي گريڊن جي سراسري ڳوليو:

حل: مواد قطاري آھي ۽ عددن سان درجا ڏيئي سگھجن ٿا. اسين گريڊن A+,A,B+,B,C+,C کي ترتيب وار 6,5,4,3,2,1 سان ظاھر ڪريون ٿا تہ پوءِ.

$$\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{6+1+4+3+5}{5}=\frac{19}{5}=3.8\approx 4.$$

انھي ڪري گريڊن جي سراسري B+ آھي

مثال وصف وسيلي، ھينين مواد ۾ ٿڌي مشروب جي مقدارن جي حسابي سراسري لھو

ٿڌي مشروب جي مقدار (لٽرن ۾)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلن جو تعداد	2	7	5	5	1

حل: غير مسلسل جماعتن ۾ گروهي مواد آهي جماعتي نشان (x) آهن 1.52,1.51,1.50,1.49,1.48 حساب جدول ۾ ڊيڪاريل آهن آخر ۾

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{29.96}{20} = 1.498 \text{ لٽر}$$

x	f	xf
1.48	2	$1.48 \times 2 = 2.96$
1.49	7	10.43
1.50	5	7.5
1.51	5	7.55
1.52	1	1.52
	$\sum f = 20$	$\sum xf = 29.96$

حسابي سراسري جو استعمال ڪندي، ٿڌي مشروب جو سراسري مقدار 1.498 لٽر آهي.

مثال وصف استعمال ڪندي گراهڪن جي اطمينان جي معيار جي حسابي سراسري لهو

اطمينان جي معيار	بلڪل نه	گهٽو نه	پڪ ناهي	ڪجھ	ڏاڍو
گراهڪن جو تعداد	3	8	5	6	18

حل: اسين قطاري بدلجندڙ جي خاصيتن "بلڪل نه، گهٽو نه، پڪ ناهي، ڪجھ ۽ ڏاڍو" کي ترتيبوار درجن 5,4,3,2,1 سان ظاهر ڪريون ٿا.

وصف مطابق

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{(1)(3)+(2)(8)+(3)(5)+(4)(6)+(5)(18)}{3+8+5+6+18} = \frac{148}{40} = 3.7 \approx 4.$$

انهي ڪري اطمينان جي معيار جي سراسري چوٿون درجو آهي جيڪو "ڪجھ" آهي.

مثال 60 ڏينهن لاءِ هڪ دُڪان جي بجلي جي استعمال (kWh ۾) جي حسابي سراسري لهو

بجلي جو استعمال	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
ڏينهن جو تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل

مواد مسلسل تعددي جدول ڏيکاري ٿو. اسين پر واري جدول ۾ جماعتي نشان ۽ ڪهربل جوڙ اُوبتون لهون ٿا

وصف يا سڌي طريقي موجب. $\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{7270}{60} = 121.166$

دُڪان جي بجلي جي استعمال جي حسابي سراسري 121.166kWh آهي

جماعتي حدون	جماعتي نشان (x)	تعدد (f)	xf
68-87	77.5	10	775
88-107	97.5	13	1267.5
108-127	117.5	15	1762.5
128-147	137.5	10	1375
148-167	157.5	4	630
168-187	177.5	6	1065
188-207	197.5	2	395
ڪُل تعداد	---	$\sum f = 60$	7270

نوٽ ڪيو ته:

غير گروهي مواد ۽ غير مسلسل تعددي جدول جون حسابي سراسريون ساڳيون آهن. پر مسلسل تعددي ورهاست واري مواد جي حسابي سراسري واسطيدار غير گروهي مواد جي سراسري جي برابر نه آهي پر ويجهو آهي

انحرافن يا اڻ سڌي طريقن وسيلي حسابي سراسري:

جيڪڏهن x_i مشاهدا آهن ۽ A هڪ فرضي يا عارضي سراسري (مواد جي وسعت جي اندر يا ٻاهر ڪو به عدد) آهي ته پوءِ A سان انحراف $D_i = x_i - A$ آهن.

انحرافن جي بنياد تي ٻہ اڻ سڌا طريقا آهن: مختصر ۽ فرضي طريقا. اهي وڏي رقمن واري وسيع مواد لاءِ استعمال ڪندا آهيون.

مختصر طريقو: (Short cut Method)

مختصر طريقو استعمال ڪندي حسابي سراسري هيٺين ريت لهبي آهي.

غير گروهي مواد لاءِ

$$\bar{x} = A + \frac{\sum D}{n}$$

۽

گروهي مواد لاءِ

$$\bar{x} = A + \frac{\sum Df}{\sum f}$$

غير گروهي مواد لاءِ x_i مشاهدا آهن، گروهي مواد لاءِ x_i جماعتي نشان آهن. گروهي مواد لاءِ اهو بهتر آهي تہ سڀ کان وڏي تعدد سان واسطو رکندڙ x_i کي "A" ڪٽجي

فرضي طريقو: (Ceding Method)

فرضي طريقو استعمال ڪندي حسابي سراسري لهڻ جا فارمولا آهن.

غير گروهي مواد لاءِ

$$\bar{x} = A + h\frac{\sum u}{\sum n}$$

۽

گروهي مواد لاءِ

$$\bar{x} = A + h\frac{\sum uf}{\sum f}$$

جڏهن تہ $u_i = \frac{x_i - A}{h}$ يا سولائي خاطر $u = \frac{x - A}{h}$ کي فرضي بدلجندڙ (Coded Variable) ڪوٺبو آهي غير گروهي مواد لاءِ x_i مشاهدا آهن ۽ گروهي مواد لاءِ x_i جماعتي نشان آهن.

مثال ڇهہ شاگردن جون ڪُل مارڪون، جيڪي امتحان لاءِ ٽولي جي صورت ۾ پڙهيا، هن ريت آهن 640,610 580,710,680,685 اڻ سڌا طريقا استعمال ڪندي مارڪن جي حسابي سراسري لهو جڏهن تہ (i) $A = 650$ ۽ $h = 10$. (ii) $A = 680$ ۽ $h = 20$.

حل مختصر طريقو بيان ڪري ٿو تہ:

$$\bar{x} = A + \frac{\sum D}{n}$$

فرضي طريقو بيان ڪري ٿو تہ:-

$$\bar{x} = A + h\frac{\sum u}{n},$$

جڏهن تہ $u = \frac{x - A}{h}$.

ٻنهي حصن لاءِ، ڳڻپ حساب جدولن ۾ ڌار ڌار ڏيکاريل آهن.

(i) $A = 650$ ۽ $h = 10$.

x	$D = x - 650$	$u = \frac{x - 650}{10}$
610	-40	-4
640	-10	-1
685	35	3.5
680	30	3
710	60	6
580	-70	-7
	$\sum D = 5$	$\sum u = 0.5$

مختصر طريقي موجب، اسان وٽ آهي

$$\bar{x} = 650 + \frac{5}{6} = 650.833.$$

فرضي طريقي موجب، اسان وٽ آهي

$$\bar{x} = 650 + 10 \times \frac{0.5}{6} = 650 + \frac{5}{6} = 650.833.$$

(ii) $A = 680$ ۽ $h = 20.$

x	$D = x - 680$	$u = \frac{x-680}{20}$
610	-70	-3.5
640	-40	2
685	5	0.25
680	0	0
710	30	1.5
580	-100	-5
	$\sum D = -175$	$\sum u = -8.75$

مختصر طريقي موجب اسان وٽ آهي:

$$\bar{x} = 680 + \left(\frac{-175}{6}\right) = 680 - 29.1666$$

$$\bar{x} = 650.833.$$

فرضي طريقي موجب

$$\bar{x} = 680 + 20\left(\frac{-8.75}{6}\right)$$

$$\bar{x} = 680 - 29.1666 = 650.833.$$

A۽h جي چونڊ جو خيال ڪرڻ بنا مارڪن جي حسابي سراسري 650.833 يا 651 آهي

مثال مختصر ۽ فرضي طريقن وسيلي ٿڌي مشروب جي مقدارن (لٽرن ۾) جي حسابي سراسري لهو

ٿڌي مشروب جي مقدارن (لٽرن ۾)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلن جو تعداد	2	7	5	5	1

حل هتي اسين $A = 1.49$ ۽ $h = 0.01$ جو استعمال ڪريون ٿا حساب وضاحت سان جدول ۾ آهن.

x	f	$D = x - 1.49$	$u = \frac{x-1.49}{0.01}$	Df	uf
1.48	2	-0.01	-1	-0.02	-2
1.49	7	0	0	0	0
1.50	5	0.01	1	0.05	5
1.51	5	0.02	2	0.1	10
1.52	1	0.03	3	0.03	3
	$\sum f = 20$			$\sum Df = 0.16$	$\sum uf = 16$

مختصر طريقي موجب

$$\bar{x} = A + \frac{\sum Df}{\sum f} = 1.49 + \frac{0.16}{20} = 1.498.$$

فرضي طريقي موجب

$$\bar{x} = A + h \times \frac{\sum uf}{\sum f} = 1.49 + 0.01\left(\frac{16}{20}\right) = 1.498.$$

اسين اهو ڏسون ٿا ته ٻنهي اڻ سڌي طريقن ۾ وصف وسيلي جواب ساڳيا آهن.

مثال 50 ڏاتو جي ٽڪرن جي ماپن جي حسابي سراسري مختصر ۽ فرضي طريقن سان لهو.

ٽڪر جو ماپو(ڪلو گرامن ۾)	7.1-7.3	7.4-7.6	7.7-7.9	8.0-8.2	8.3-8.5	8.6-8.8	8.9-9.1
ٽڪرن جو تعداد	3	5	9	14	11	6	2

حل $A = 8.1$ ۽ $h = 0.1$ ڪٽندي اسين جدول ۾ حساب ڪريون ٿا.

جماعتي حدون	جماعتي نشان (x)	f	$D = x - 8.1$	$u = \frac{x-8.1}{0.1}$	Df	uf
7.1-7.3	7.2	3	-0.9	-9	-2.7	-27
7.4-7.6	7.5	5	-0.6	-6	-3	-30
7.7-7.9	7.8	9	-0.3	-3	-2.7	-27
8.0-8.2	8.1	14	0	0	0	0
8.3-8.5	8.4	11	0.3	3	3.3	33
8.6-8.8	8.7	6	0.6	6	3.6	36
8.9-9.1	9.0	2	0.9	9	1.8	18
		$\sum f = 50$			$\sum Df = 0.3$	$\sum uf = 3$

مختصر طريقي موجب $\bar{x} = A + \frac{\sum Df}{\sum f} = 8.1 + \frac{0.3}{50} = 8.106$.

فرضي طريقي موجب $\bar{x} = A + h \times \frac{\sum uf}{\sum f} = 8.1 + 0.1 \times \left(\frac{3}{50}\right) = 8.106$.

انهي ڪري مايي جي سراسري 8.106 ڪلو گرام آهي

22.3(i) .(b) مڌيان، ڪثرتي سراسري، مهندسي سراسري ۽ هارموني سراسري:

حسابي سراسري (برابري تي بيٺل) ڪان علاوه مواد جي مرڪزي رجحان جون ماپون لهڻ لاءِ ڪجهه بيا طريقا بہ آهن. مثال طور اسان جي چونڊن واري نظام ۾ هر ڪنهن کي ووٽ ڏيڻ جو حق آهي پر منتخب نمائندا نيٺ اڪثريت جي بنياد تي چونڊبا آهن جيئن تہ چيو وڃي ٿو تہ "اڪثريت کي اختيار آهي".

اهڙي صورت ڪثرتي سراسري (Mode) کي ظاهر ڪري ٿي جيڪو سڀ ڪان گهڻو ايندڙ مشاهدو آهي. ساڳي ريت مڌيان جو مرڪز ترتيب ڏنل ڊيٽا سيٽ جي سڀ ڪان وچيون حصو هوندو آهي. مهندسي ۽ هارموني سراسريون (Geometric and Harmonic Means) حسابي سراسري وانگر فطري طور حسابي آهن ان جي برعڪس مڌيان ۽ ڪثرتي سراسري فطري طور بياني آهن.

مڌيان (Median)

هڪ ترتيب ڏنل مواد ۾ مڌيان هڪ اهڙي رقم آهي جيڪا مواد کي ٻن برابر حصن ۾ ورهائي ٿي مڌيان معلوم ڪندي اسين اهو فرض ڪندا آهيون تہ وڌندڙ يا گهٽجندڙ ترتيب واري سڄي مواد جو مرڪزي ٽڪرو وچين جاءِ تي آهي

نوٽ

- مواد ۾ مڌيان هميشہ يگانو هوندو آهي.
- اسين مقداري مواد جو مڌيان لهي سگهون ٿا.
- خاصيتي مواد لاءِ رڳو قطاري مواد جو مڌيان لهڻ اهم هوندو آهي.
- مڌيان سمورن مشاهدن تي برابري سان انحصار نٿو ڪري.
- مڌيان، مواد جي وڏين رقمن (يا ٻين ڪان مختلف رقمن) سان متاثر نہ ٿيندو آهي "n" مشاهدن واري ترتيب ڏنل غير گروهي مواد لاءِ مڌيان "m" مواد جو سڀ ڪان وچيون حصو آهي ۽ هيٺين ٻن صورتن ذريعي بيان ڪري سگهجي ٿو

جيڪڏهن n اڪي آهي تہ پوءِ $m = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ هون مشاهدو (1)

ٻي صورت ۾

جڏهن n ٻڏي آهي تہ پوءِ $m = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{n}{2}\right) \text{ هون } + \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{ هون مشاهدو}\right]$ (2)

غير مسلسل جماعتن واري گروهي مواد لاءِ، مجموعي تعددن جي مدد سان اسين (1) ۽ (2) جو استعمال ڪندي مڌيان کي چونڊيندا آهيون

مسلسل جماعتن واري گروهي مواد لاءِ مڌيان $\left(\frac{n}{2}\right)$ هون مشاهدو رکندڙ جماعت ۾ هوندو آهي

ان جماعت کي مڌياني جماعت (جماعت m) پڻ چئبو آهي.

فارمولو هن ريت آهي

$$m = L + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right) \quad (3)$$

جڏهن تہ "L" مڌياني جماعت جي LCB آهي مڌياني جماعت جي ويڪر h ۽ تعدد f آهي مڌياني جماعت جي بلڪل اڳ واري جماعت جي مجموعي تعدد C آهي.

مثال هيٺين جو مٿيان لهو

(i). 2, 3, 7, 5, 5, 13, 1, 7, 4, 8, 3, 4, 3,   (ii). 7, 5, 74, 10   (iii). 18.92, 27.9, 37.4, 39.68

حل (i). مواد کي وڌنڌڙ ترتيب ۾ لکندي. 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 7, 7, 8, 13

هتي $n = 13$ (اڪي) تنهنڪري

$m = \left(\frac{13+1}{2}\right)$ هون مشاهدو = ستون مشاهدو = 4.

(ii). وڌنڌڙ ترتيب ۾ اسان وٽ آهن 5, 7, 10, 74

هتي $n = 4$ (ٻڌي) تنهنڪري

$m = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{n}{2}\right) \text{هون} + \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{هون مشاهدو}\right] = \frac{1}{2}\left[\text{ٻيون + ٽيون مشاهدو}\right] = \frac{1}{2}[7+10] = 8.5$

(iii). هتي $n = 4$ (ٻڌي). مواد اڳيئي ترتيب واري صورت ۾ آهي

$m = \frac{1}{2}\left[\text{ٻيون + ٽيون مشاهدو}\right] = \frac{1}{2}[27.9+37.4] = 32.65.$

مثال شاگردن جي هيٺين ٻن ٽولين جو مٿياني گريڊ معلوم ڪريو

(i). A+, B+, C, B, A   (ii) C+, A, B, B, B+, C, B+, A, A+, C .

(i). ترتيب ٿيل مواد آهي C, B, B+, A, A+ ۽ $n = 5$ (اڪي) تنهنڪري

$m = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ هون = $\left(\frac{5+1}{2}\right)$ هون = ٽيون مشاهدو = $B+$ اهو مٿياني گريڊ آهي.

(ii). وڌنڌڙ ترتيب ۾ آٽھ ڪانيوءِ اسان وٽ آهي C, C, C+, B, B, B+, B+, A, A, A+ هتي، $n = 10$

۽ وچيان مشاهدا $\left(\frac{n}{2}\right)$ هون ۽ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ هون آهن

يعني ته پنجون ۽ ڇهون مشاهدا جيڪي B ۽ B+ گريڊ (مختلف) آهن انهي ڪري اسين اهو نتيجو ڪڍي سگهون ٿا ته مٿياني گريڊ B ۽ B+ گريڊن جي وچ ۾ برابر ورهائجي ويو آهي

مثال 40 گراهڪن جي هيٺين مواد ۾ اطمينان واري معيار جو مٿيان معلوم ڪريو.

اطمينان وارو معيار	بلڪل نه	گهٽو نه	ڪجهه ناهي	ڪجهه	ڏاڍو
گراهڪن جو تعداد	3	8	5	6	18

حل $n = 40$ (ٻڌي) تنهنڪري ٻه وچيان مشاهدا 20 هون ۽ 21 هون آهن. اهي ٻئي جماعت "ڪجهه" ۾ موجود آهن تنهنڪري اطمينان واري معيار جو مٿيان "ڪجهه" آهي.

مثال هيٺين مواد ۾ ٿڌي مشروب جو مٿياني مقدار لهو

ٿڌي مشروب جي مقدار (لٽر ۾)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلن جو تعداد	2	7	5	5	1

حل

هتي (ٻڌي) $n = \sum f = 20$

تنهنڪري، $m = \frac{1}{2}\left[\text{ڏهون + يارنهون مشاهدا}\right]$

مجموعي تعددن کي معلوم ڪندي اسين ڏسون ٿا ته ڏهون ۽ يارنهون مشاهدا مجموعي تعدد واري جماعت ۾ موجود آهن.

x	f	مجموعي تعددون
1.48	2	2
1.49	7	9
1.50	5	14
1.51	5	19
1.52	1	20
	$\sum f = 20$	

لٽر $m=\frac{1}{2}[1.50+1.50]=\frac{1}{2}(3)=1.50$

مثال مواد جو استعمال ڪندي هڪ دُڪان جي60 ڏينهن لاءِ بجلي جي استعمال جو مڏيان لهو.

بجلي جو استعمال	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
ڏينهن جو تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: هتي $n=60$, ۽ $h=20$ هڪ مسلسل تعددي جدول آهي تنهنڪري اسانکي حقيقي جماعتي حدون ۽ مجموعي تعددون معلوم ڪرڻيون پونديون جيئن هيٺين جدول ۾ ڏنل آهي.

جماعتي حدون	حقيقي جماعتي حدون	f	مجموعي تعددون
68-87	67.5-87.5	10	10
88-107	87.5-107.5	13	23
108-127	107.5-127.5	15	38 (جماعت $-m$)
128-147	127.5-147.5	10	48
148-167	147.5-167.5	4	52
168-187	167.5-187.5	6	58
188-207	187.5-207.5	2	60
		$n=60$	

مڏياني جماعت (جماعت $-m$) اها جماعت آهي جيڪا $\left(\frac{n}{2}\right)$ هون مشاهدو رکي ٿي. يعني ته 30 هون مشاهدو تنهنڪري مجموعي تعدد 38 واري جماعت مڏياني جماعت آهي (جماعت $-m$) 108-127 آهي (جيئن جدول ۾ نمايان ڪيل آهي)

فارمولي جو استعمال ڪندي.

$$m=L+\frac{h}{f}\left(\frac{n}{2}-c\right)=107.5+\frac{20}{15}\left(\frac{60}{2}-23\right)$$

$$\Rightarrow\quad m=107.5+\frac{20}{15}(30-23)=107.5+\frac{20}{15}\times 7=107.5+9.333=116.833 \text{ kWh.}$$

$L=\text{LCB}$ جي m- جماعت $=107.5$

$h=$ وقفو جماعتي جو m- جماعت $=20$

جماعت m- جي تعدد $=15$ ۽

مڏياني جماعت کان بلڪل اڳ واري جماعت جي مجموعي تعدد $=C=23$

چوٿائي ڪندڙ مشاهدا: (Quartiles)

چوٿائي ڪندڙ مشاهدا بيان ڪرڻ لاءِ هڪ ترتيب ڏنل مواد چئن برابر حصن ۾ ورهائي سگهجي ٿو. مواد جي وسعت جي اندر ٽي چوٿائي ڪندڙ مشاهدا هوندا آهن جيڪي مواد کي چار برابر حصن ۾ ورهائڻ ٿا.

پهريون (يا هيٺيون) چوٿائي ڪندڙ مشاهدو Q_1 25% کان 75% جي نسبت ۾ مواد کي ورهائي ٿو

غير گروهي مواد لاءِ: جيڪڏهن $\frac{n}{4}$ سجو عدد نه آهي ته پوءِ

(1) $Q_1=\left(\frac{n+3}{4}\right)$ هون مشاهدو، بي صورت ۾ جيڪڏهن $\frac{n}{4}$ سجو عدد آهي ته پوءِ

$$Q_1 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{n}{4}\right) \text{هون} + \left(\frac{n}{4}+1\right) \text{هون مشاهدو}\right] \qquad (2)$$

غير مسلسل جماعتن واري گروهي مواد لاءِ اسين (1) ۽ (2) جو استعمال ڪندا آهيون
مسلسل جماعتن واري گروهي مواد لاءِ اسين هي فارمولو استعمال ڪنداسين

$$Q_1 = L + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{4} - c\right)$$

جڏهن ته L،Q_1- جماعت جي h, LCB ان جي ويڪر ۽ f ان جو تعداد آهي
Q_1 جماعت کان بلڪل اڳ واري جماعت جي مجموعي تعدد C آهي Q_1- جماعت اها جماعت آهي جيڪا $\left(\frac{n}{4}\right)^{th}$ هين مشاهدي کي رکي ٿي.

بيو (يا وچيون) چوٿائي ڪندڙ مشاهدو Q_2 ترتيب ڏنل مواد کي 50% - 50% نسبت ۾ ورهائي ٿو
اهو ۽ مواد جو مٿيان ٻئي ساڳيا آهن ٽيون (يا مٿيون) چوٿائي ڪندڙ مشاهدو Q_3 ترتيب ڏنل مواد کي 75% - 25% نسبت ۾ ورهائي ٿو

غير گروهي مواد لاءِ

جيڪڏهن $\frac{3n}{4}$ سجو عدد نہ آهي تہ پوءِ

$$Q_3 = \left(\frac{3n+1}{4}\right) \text{هون مشاهدو} \qquad (4)$$

بي صورت ۾ جيڪڏهن $\frac{3n}{4}$ سجو عدد آهي تہ پوءِ

$$Q_3 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3n}{4}\right) \text{هون} + \left(\frac{3n}{4}+1\right) \text{هون مشاهدو}\right] \qquad (5)$$

غير مسلسل جماعتن واري گروهي مواد لاءِ مجموعي تعددن سان گڏ مساواتون (4)۽(5)استعمال ٿينديون آهن
مسلسل جماعتن واري گروهي مواد لاءِ

$$Q_3 = L + \frac{h}{f}\left(\frac{3n}{4} - c\right)$$

جڏهن تہ L، Q_3 جماعت جي h, LCB ان جي ويڪر ۽ f ان جي تعداد آهي. اها جماعت $\left(\frac{3n}{4}\right)$ هون مشاهدو رکي ٿي Q_3- جماعت کان بلڪل اڳ واري جماعت جي مجموعي تعداد C آهي

مثال هيٺين ڊيٽا سيٽن ۾ هيٺيان ۽ مٿيان چوٿائي ڪندڙ مشاهدا لهو

(i). 1000, 1200, 1600, 1500, 1200 (ii). 32, 36, 36, 37, 39, 41, 45, 46

حل (i) ترتيب ڏنل ڊيٽا سيٽ آهي.

1000, 1200, 1200, 1500, 1600

هتي $n = 5$.

Q_1 لاءِ: (سجو عدد ناهي) $\frac{n}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$

تنهنڪري $Q_1 = \left(\frac{n+3}{4}\right)$ هون = ٻيو مشاهدو = 1200

Q_3 لاءِ: (سجو عدد ناهي) $\frac{3n}{4} = \frac{3\times 5}{4} = 3.75$

تنهنڪري $Q_3 = \left(\frac{3n+1}{4}\right)$ هون = چوٿون مشاهدو = 1500

(ii) ڊيٽا سيٽ اڳيئي ترتيب واري صورت ۾ آهي
۽ $n = 8$

(ii): Q_1 لاءِ: (سچو عدد آهي.) $\frac{n}{4} = \frac{8}{4} = 2$

تنهنڪري

$$Q_1 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{n}{4}\right) \text{هون} + \left(\frac{n}{4}+1\right) \text{هون مشاهدو}\right]$$

$$Q_1 = \frac{1}{2}\left[\text{ٻيون} + \text{ٽيون مشاهدو}\right]$$

$Q_1 = \frac{1}{2}(36 + 36) = 36$ لاءِ Q_3

(سچو عدد آهي) $\frac{3n}{4} = \frac{3\times 8}{4} = 6$

تنهنڪري

$$Q_3 = \frac{1}{2}[\text{ڇهون} + \text{ستون مشاهدو}] = \frac{1}{2}[41+45] = 43.$$

مثال 80 ڪتنبن ۾، ٻارن جي تعداد جا هينيان ۽ مٿيان چوٿائي ڪندڙ مشاهدا لهو

ٻارن جو تعداد	1	2	3	4	5	6
ڪتنبن جو تعداد	8	10	10	25	20	7

حل غير تسلسل جماعتن وارو گروهي مواد مليل آهي جنهن ۾ $n = 80$. مجموعي تعددن کي لهندي جيئن جدول ۾ ڪيل آهي

x	f	مجموعي تعداد
1	8	8
2	10	18
3	10	جماعت $-Q_1$ 28
4	25	53
5	20	جماعت $-Q_3$ 73
6	7	80

Q_1 لاءِ (سچو عدد آهي) $\frac{n}{4} = \frac{80}{4} = 20$

تنهنڪري Q_1 سراسري آهي 20 هين ۽ 21 هين مشاهدن جي.اهي ٻئي مجموعي تعداد28 واري جماعت ۾ موجود آهن تنهنڪري

$$Q_1 = \tfrac{1}{2}(3+3) = 3.$$

Q_3 لاءِ $\frac{3n}{4} = \frac{3\times 80}{4} = 60$

مجموعي تعدد 73 واري جماعت ۾ 60 هون ۽ 61 هون مشاهدو موجود آهن

تنهنڪري $Q_3 = \tfrac{1}{2}(5+5) = 5.$

مثال 100 شاگردن جي وزنن (ڪلو گرامن ۾)
جا چوٿائي ڪندڙ مشاهدا لهو. مواد هيٺ ڏنل آهي

وزن (ڪلو گرامن ۾)	70-74	75-79	80-84	85-89	90-94
شاگردن جو تعداد	10	24	46	12	8

حل هتي n=100, h=5 ۽ مسلسل جماعتن وارو گروهي مواد آهي. سپ ڪان اڳ ۾ اسين حقيقي جماعتي حدون ۽ مجموعي تعددون معلوم ڪريون ٿا.
اهي سپ حساب پر واري جدول ۾ خلاصو ڪري ڏنل آهن.

جماعتي حدون	حقيقي جماعتي حدون	f	مجموعي تعدد
70-74	69.5-74.5	10	10
75-79	74.5-79.5	24	34 Q_1- جماعت
80-84	79.5-84.5	46	80 Q_3-جماعت ۽ m
85-89	84.5-89.5	12	92
90-94	89.5-94.5	8	100

Q_1 لاءِ $\frac{n}{4}=\frac{100}{4}=25$

مجموعي تعدد 34 واري
جماعت ۾ 25 هون مشاهدو موجود آهي تنهنڪري Q_1 – جماعت 79 – 75 آهي
ان جماعت ۾

$$Q_1=L+\frac{h}{f}\left(\frac{n}{4}-c\right)=74.5+\frac{5}{24}(25-10)=77.625$$ ڪلو گرام

$Q_2=m$ لاءِ $\frac{n}{2}=\frac{100}{2}=50$

مجموعي تعداد 80 واري جماعت ۾ 50 هون مشاهدو موجود آهي.
تنهن ڪري m– جماعت 84-80 آهي.
انهي لاءِ

$$m=L+\frac{h}{f}\left(\frac{n}{2}-c\right)=79.5+\frac{5}{46}(50-34)=81.239$$ ڪلو گرام

Q_3 لاءِ: $\frac{3n}{4}=\frac{3\times100}{4}=75$

مجموعي تعداد 80 واري جماعت ۾ 75 هون مشاهدو موجود آهي.
تنهنڪري Q_3 - جماعت ۽ m- جماعت بئي ساڳيون آهن جيڪا84-80آهي.
ان جماعت ۾

$$Q_3=L+\frac{h}{f}\left(\frac{3n}{4}-c\right)=79.5+\frac{5}{46}(75-34)=83.956$$ ڪلو گرام

نوٽ ڪيو ته:
جوتائي ڪنڊز مشاهدا فطري طور تي بيهڪ وارا يا مقامي آهن جيستائين مشاهدن جو تعداد ساڳيو رهي ٿو تيستائين انهن جا مقام نہ مٽبا آهن. مثال طور n=10 واري ترتيب ڏنل مواد لاءِ

$Q_1=$ ٽيون مشاهدو، $Q_2=m=\frac{1}{2}\left[\text{پنجون + ڇهون مشاهدو}\right]$

۽ $Q_3=$ اٺون مشاهدو

10 مشاهدن وارو ڪوبہ ترتيب ڏنل ڊيٽا سيٽ انهن مقامن جي پوئيواري ڪندو جيئن تہ هيٺ ڏنل آهي

a. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 $\quad Q_1 = 5,\ m = 10,\ Q_3 = 15$

b. 10, 12, 12, 13, 17, 20, 20, 20, 21, 25 $\quad Q_1 = 12,\ m = 13.5,\ Q_3 = 20.$

c. 1, 1, 1, 3, 12, 12, 13, 17, 19, 30 $\quad Q_1 = 1,\ m = 12,\ Q_3 = 17.$

ڪثرتي سراسري (Mode)

مواد ۾ سڀ کان وڌيڪ ايندڙ مشاهدي کي ڪثرتي سراسري چئبو آهي. ڪثرتي سراسري ان اصول تي انحصار ڪندي آهي تہ ”اڪثريت کي اختيار آهي.“ ڪثرتي سراسري ٻنهي مقداري ۽ خاصيتي مواد لاءِ لهي سگهجي ٿو اهو مواد جنهن ۾ ڪوبہ ڪثرتي سراسري نہ هجي ان کي غير- ڪثرتي (non-modal) چئبو آهي. هڪ ڪثرتي سراسري واري مواد کي يڪ ڪثرتي مواد، ٻہ يا وڌيڪ سراسرين واري مواد کي گهڻ ڪثرتي مواد چئبو آهي. غير گروهي مواد لاءِ هڪ يا وڌيڪ مشاهدا جيڪي ٻين جي مقابلي ۾ سڀ کان وڌيڪ دفعا اچن انهن کي ڪثرتي سراسري يا سراسريون چئبو آهي. جيڪڏهن اهي وجود رکن مسلسل جماعتن واري گروهي مواد لاءِ ڪثرتي سراسري هڪ مشاهدو يا جماعت هوندي آهي جنهن جي تعدد سڀ کان وڌيڪ هجي. جيڪڏهن ٻہ يا ٻہ کان وڌيڪ جماعتن جي سڀ کان وڏي تعدد ساڳي هجي تہ مواد کي گهڻ ڪثرتي چئبو ۽ سڀ کان وڏي تعدد وارا سڀ مشاهدا ڪثرتي سراسريون ڪوٺبا: مسلسل جماعتن واري گروهي مواد لاءِ سڀ کان وڏي تعدد واري جماعت ڪثرتي جماعت (modal Class) ڪوٺبي ۽ ڪثرتي سراسري ان جماعت ۾ موجود هوندو آهي. ڪثرتي جماعت (m-جماعت) ۾ ڪثرتي سراسري (M) لهڻ جو فارمولو آهي.

$$\text{ڪثرتي سراسري} = M = L + \frac{(f_M - f_{M-1}) \times h}{2f_M - f_{M-1} - f_{M+1}}$$

جڏهن تہ L، M- جماعت جي h,LCB ويڪر ۽ f_M ان جي تعدد آهي M- جماعت جي بلڪل اڳ واري ۽ پوءِ واري جماعتن جون تعددون ترتيبوار f_{M-1} ۽ f_{M+1} آهن

مثال1: هيٺين ڊيٽا سيٽن جي ڪثرتي سراسري لهو

(i). 75, 76, 80, 80, 82, 82, 82, 85

(ii). 13, 14, 15, 11, 16, 10, 19, 20, 18, 17

(iii). 1.49, 1.50, 1.51, 1.50, 1.48, 1.51

(iv). 1, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 8, 9, 9, 9, 6, 1, 10

(v). C+, A, B, B, B+, C, B, A, A+, C (گريڊ)

(vi). (رُتبا) چڱو، چڱو، سٺو موڳو، خراب، سٺو

حل (i) 82 = ڪثرتي سراسري جيئن تہ 82 ٽي ڀيرا اچي ٿو جيڪو ٻيئي ڪنهن بہ مشاهدي ڪان وڌيڪ آهي.

(ii). مواد ۾ ڪابہ ڪثرتي سراسري نہ آهي. اهو غير ڪثرتي مواد آهي.

(iii). ڪثرتي سراسريون ٻہ آهن 1.50 ۽ 1.51 جيئن تہ اهي ٻئي برابر اچن ٿا ۽ ٻين ڪان وڌيڪ ڀيرا اچن ٿا

(iv). مواد ٽي ڪثرتي آهي يعني مواد ۾ ٽي ڪثرتي سراسريون آهن: 2، 5 ۽ 9

(v). گريڊ”B“ سڀ ڪان وڌيڪ ڀيرا اچي ٿو تنهنڪري ڪثرتي گريڊ”B“ گريڊ آهي.

(vi). مواد ۾ ٻہ ڪثرتي سراسريون آهن: چڱو ۽ سٺو جيئن تہ اهي ٻئي برابر سڀ ڪان وڌيڪ ڀيرا ايندڙ مشاهدا آهن.

مثال2: 45 ڪٽنبن جي مواد مان، هڪ ڪٽنب جي موبائيلن جي تعداد جي ڪثرتي سراسري لهو

موبائيلن جو تعداد	0	1	2	3	4	5	6	7
ڪٽنبن جو تعداد	1	7	15	12	5	2	2	1

حل غير مسلسل جماعتن وارو گروهي مواد آهي.

هتي 15 سڀ ڪان وڏي تعداد آهي ۽ اها جماعت”2“ سان واسطو رکي ٿي. انهيءَ ڪري موبائيلن جي ڪثرتي تعداد في ڪٽنب 2 آهي

مثال3: هيٺ ڏنل 30 شاگردن جي رت جي گروپن مان، ڪثرتي رت جو گروپ لهو

رت جو گروپ	A+	B+	AB+	O+	A-	B-	AB-	O-
شاگردن جو تعداد	6	5	3	7	3	1	2	3

حل: ڪثرتي رت جو گروپ O+ آهي جيئن تہ اهو سڀ ڪان وڏي تعدد”7“ سان لاڳاپيل آهي

مثال 4: هيٺ ڏنل مواد مان 40 گراهڪن جي اطمينان جي معيار جي ڪثرتي سراسري لهو

اطمينان جو معيار	بلڪل نه	گهٽ نه	پڪ ناهي	ڪجهه	ڏاڍو
گراهڪن جو تعداد	3	8	5	6	18

حل: اطمينان جي معيار جي ڪثرتي سراسري ”ڏاڍو“ آهي جيئن ته اهو سڀ کان وڌيڪ پيرا اچي ٿو.

مثال 5: هيٺين مواد جو استعمال ڪنديً60 ڏينهن لاءِ هڪ دڪان ۾ بجلي جي استعمال ۾ kWh جي ڪثرتي سراسري

بجلي جو استعمال	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
ڏينهن جو تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: مسلسل جماعتن وارو گروهي مواد آهي. سڀ کان وڏي تعداد 15 آهي ڪثرتي جماعت 108-127 آهي حقيقي جماعتي حدون جدول ۾ ڪڍيل اهن. هتي

$$h = 20, L = 107.5, f_M = 15, f_{M-1} = 13, f_{M+1} = 10$$

$$\text{ڪثرتي سراسري} = M = L + \frac{(f_M - f_{M-1}) \times h}{2f_M - f_{M-1} - f_{M+1}}$$

$$M = 107.5 + \frac{(15-13) \times 20}{2(15) - 13 - 10} = 107.5 + \frac{2 \times 20}{30 - 23}$$

$$M = 107.5 + 5.71428 = 113.21428 \text{kWh}.$$

جماعتي حدون	حقيقي جماعتي حدون	تعداد
68 - 87	67.5 - 87.5	10
88 - 107	87.5 - 107.5	13
108 - 127	107.5 - 127.5	15
128 - 147	127.5 - 147.5	10
148 – 167	147.5 - 167.5	4
168 - 187	167.5 - 187.5	6
188 - 207	188.5 - 207.5	2

نوٽ ڪيو ته: مثال 5 ۾ مسلسل تعددي ورهاست يڪ ڪثرتي هئي جيئن ته سڀ کان وڏي تعداد واري ڪڙ هڪڙي جماعت هئي.هيٺين مسلسل تعددي ورهاست جيڪا هڪ تار جي ريل جي قطر کي ظاهر ڪري ٿي ۽ 24 جاين تي قطر ماپيل آهن.اهو مواد ٻه ڪثرتي آهي.

قطر (mm)	2.10-2.13	2.14-2.17	2.18-2.21	2.22-2.25	2.26-2.29	2.30-2.33	2.34-2.37
جاين جو تعداد	4	5	4	4	5	1	1

هتي ٻه ڪثرتي جماعتون ”2.14-2.17“ ۽ ”2.26-2.29“ آهن جيڪي سڀ کان وڏي تعداد ”5“ سان لاڳاپيل آهن هر هڪ جماعت ۾ فارمولو استعمال ڪندي اسين ترتيبوارڪثرتي قطر 2.175mm ۽ 2.263 mm حاصل ڪري سگهون ٿا.

مهندسي سراسري (Geometric Mean)

مهندسي سراسري ۾ سڀني عددن کي برابر اهميت ڏني ويندي آهي. اسين سمورن عددن کي ضرب اُپت وسيلي پاڻ ۾ ملائيندا آهيون ۽ پوءِ ضرب اُپت جو ”n“ ملاوت جو اثر هٽائيندا آهيون. مهندسي سراسري (G.M) ان مواد جي ڪڍڻ اهم آهي جيڪو مقداري ۽ واڌو هجي جيڪڏهن، x_1، x_2، $x_3 \ldots x_n$ سڀ واڌو عدد آهن ته پوءِ

$$\text{G.M.} = (x_1 . x_2 \ldots x_3)^{\frac{1}{n}} = \left[\prod(x)\right]^{\frac{1}{n}} \qquad (1)$$

هتي $\prod$ هڪ وڏو يوناني اکر پائي ”Pi“ آهي جيڪو ضربُ اپت لاءِ استعمال ٿيئي ٿو جيڪڏهن G.M وجود رکي ٿو ته پوءِ اهويڳانو هوندو آهي.

غير گروهي مواد لاءِ، فارمولو (1) کي G.M لهڻ جو بنيادي فارمولو ڪوٺبو آهي. پر جڏهن مشاهدن جون رقمون وڏيون هجن ته پوءِ اسين لاگرٿم وارو فارمولو استعمال ڪنداسين.

جيڪو مساوات (1) جي ٻنهي پاسن جو لاگرٿم وني ۽ خاصيتن جو استعمال ڪندي حاصل ڪبو آهي، جيڪو هن ريت آهي

$$G.M = \text{antilog}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\log x_i}{n}\right] = \text{antilog}\left[\frac{\sum \log x}{n}\right] \qquad (2)$$

مساوات (2) ۾ G.M مواد جي لاگرٿمن جي حسابي سراسري جو ضد لاگرٿم آهي
گروهي مواد لاءِ بنيادي فارمولو آهي:

$$G.M. = \left[(x_1)^{f_1}\times(x_2)^{f_2}\times\ldots\times(x_n)^{f_n}\right]^{\frac{1}{\Sigma f}} = \left[\prod(x)^{f}\right]^{\frac{1}{\Sigma f}} \quad (3)$$

۽ لاگرٿم وارو فارمولو آهي

$$G.M. = \text{antilog}\left[\frac{\sum f.\ \log x}{\sum f}\right] \qquad (4)$$

مساواتن (3) − (4) ۾ f_1 ، f_2 ، … f_n جماعتي تعددون آهن ۽ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ جماعتي نشان آهن
اهي سڀ واڌو آهن. مساوات (4) ۾ ڪابہ تعدد ٻڙي نہ هئڻ گهرجي

مثال1: بنيادي ۽ لاگرٿم وارو فارمولو استعمال ڪندي G.M لهو. انهن مان ڪهڙو بهتر آهي ۽ ڇو؟

(i). 2, 4, 2, 16 (ii). 1.48, 1.52, 1.47, 1.50 (iii). 1000, 1200, 1600, 1500, 1200

حل:(i) بنيادي فارمولو استعمال ڪندي

$$G.M. = (2\times4\times2\times16)^{\frac{1}{4}} = (256)^{\frac{1}{4}} = 4.$$

لاگرٿم وارو فارمولو استعمال ڪندي:

$$G.M. = \text{antilog}\left[\frac{\log(2)+\log(4)+\log(2)+\log(16)}{4}\right]$$

$$G.M. = \text{antilog}\left[\frac{0.3010+0.6021+0.3010+1.2041}{4}\right] = \text{antilog}\ (0.60205)=3.9999 \approx 4.$$

مشاهدن جون رقمون ننڍيون هيون انهي ڪري بنيادي فارمولو بهتر آهي.

(ii). بنيادي فارمولو استعمال ڪندي

$$G.M. = (1.48\times1.52\times1.47\times1.50)^{\frac{1}{4}} = (4-9604)^{\frac{1}{4}} = 1.4924$$

لاگرٿم وارو فارمولو استعمال ڪندي

$$G.M. = \text{antilog}\left[\frac{\log(1.48)+\log(1.52)+\log(1.47)+\log(1.5)}{4}\right]$$

$$G.M. = \text{antilog}\left[\frac{0.1703+0.1818+0.1673+0.1761}{4}\right] = \text{antilog}\ (0.173875)=1.4924.$$

وري بنيادي فارمولو موزون آهي جيئن تہ مشاهدن جون رقمون ننڍيون آهن

(iii). بنيادي فارمولو استعمال ڪندي

$$G.M.=(1000\times1200\times1600\times1500\times1200)^{\frac{1}{5}} = (3456000000000000)^{-\frac{1}{5}} = 1281.48 \approx 1281.5$$

لاگرٿم وارو فارمولو استعمال ڪندي

$$G.M.=\text{antilog}\left[\frac{\log(1000)+\log(1200)+\log(1600)+\log(1500)+\log(1200)}{5}\right]$$

$$G.M.=\text{antilog}\left[\frac{3+3.0792+3.2041+3.1761+3.0792}{5}\right] = \text{antilog}(3.10772)=1281.504 \approx 1281.5$$

لاگرٿم وارو فارمولو بهتر آهي جيئن تہ لاگرٿم وڏين رقمن کي ننڍو ڪندو آهي. استعمال ڪرڻ لاءِ.

مثال هينين مواد ۾ مهندسي سراسري جو استعمال ڪندي تڏي مشروب جي مقدارن جي سراسري لهو.

تڏي مشروب جي مقدار (لٽرن ۾)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلن جو تعداد	2	7	5	5	1

حل: ڏنل مواد، غير مسلسل جماعتن وارو گروهي مواد آهي.
بنيادي فارمولي ۽ لاگرتم واري فارمولي جو ڳڻپ حساب هيٺين جدول ۾ ڏيکاريل آهي

جماعتون (x)	f	$(x)^f$	log(x)	f × log(x)
1.48	2	2.1904	0.1703	0.3406
1.49	7	16.3044	0.1732	1.2124
1.50	5	7.5938	0.1761	0.8805
1.51	5	7.8503	0.1790	0.8950
1.52	1	1.52	0.1818	0.1818
---	$\sum f = 20$	$\prod x^f = 3236.0651$	---	$\sum f \log(x) = 3.5103$

بنيادي فارمولو استعمال ڪندي

$$G.M. = \left[\prod (x)^f\right]^{\frac{1}{\sum f}} = (3236.0651)^{\frac{1}{20}} = 1.49796 \approx 1.498$$ لٽر

لاگرتم وارو فارمولو استعمال ڪندي

$$G.M. = \text{antilog}\left[\frac{\sum f \log x}{\sum f}\right] = \text{antilog}\left[\frac{3.5103}{20}\right]$$

$$G.M. = \text{antilog}\,(0.175515) = 1.4980\ L$$ تڏي مشروب جي مقدارن جو G.M 1.498 لٽر آهي

مثال 3: لاگرتم وارو طريقو استعمال ڪندي بجلي جي استعمال واري مواد جو G.M لهو

بجلي جو استعمال	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
ڏينهن جو تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: فارمولي ۾ ڳڻپ حساب هيٺين جدول ۾ ڪيل آهن

جماعتي حدون	f	جماعتي نشان (x)	Log (x)	$f \times \log(x)$
68-87	10	77.5	1.8893	18.8930
88-107	13	97.5	1.9890	25.8570
108-127	15	117.5	2.0700	31.0500
128-147	10	137.5	2.1383	21.3830
148-167	4	157.5	2.1973	8.7892
168-187	6	177.5	2.2492	13.4952
188-207	2	197.5	2.2956	4.5912
	$\sum f = 60$			$\sum f \log x = 124.0586$

انهي ڪري

$$G.M. = \text{antilog}\left[\frac{\sum f \log x}{\sum f}\right] = \text{antilog}\left[\frac{124.0586}{60}\right] = \text{antilog}\,(2.0676) = 116.8422\ \text{kWh.}$$

مثال 4: G.M جا ٻئي طريقا استعمال ڪندي تار جي ريل جي قطر جي سراسري لهو ماپ 24 جاين تي ٿي آهي

قطر (mm) ۾	2.10-2.13	2.14-2.17	2.18-2.21	2.22-2.25	2.26-2.29	2.30-2.33	2.34-2.37
جاين جو تعداد	4	5	4	4	5	1	1

حل: ڏنل مواد مسلسل جماعتن وارو گروهي مواد آهي فارمولن ۾ گهربل حساب هيٺين جدول ۾ ڪيل آهن

جماعتي حدون	جماعتي نشان (x)	f	x^f	$\log(x)$	$f \times \log x$
2.10-2.13	2.115	4	20.0097	0.3253	1.3012
2.14-2.17	2.155	5	46.4768	0.3334	1.6670
2.18-2.21	2.195	4	23.2134	0.3414	1.3656
2.22-2.25	2.235	4	24.9523	0.3493	1.3972
2.26-2.29	2.275	5	60.9406	0.3570	1.7850
2.30-2.33	2.315	1	2.315	0.3646	0.3646
2.34-2.37	2.355	1	2.355	0.3720	0.3720
		$\sum f = 24$	$\prod x^f = 178967745.4$	---	$\sum f \log x = 8.2526$

بنيادي فارمولي مطابق

$$G.M = \left[\prod x^f\right]^{\frac{1}{\sum f}} = (178967745.4)^{\frac{1}{24}} = 2.2073 \text{ mm}$$

لاگرتم واري فارمولي مطابق

$$G.M. = \text{antilog}\left[\frac{\sum f \log x}{\sum f}\right] = \text{antilog}\left[\frac{8.2526}{24}\right] = 2.2074 \text{ mm}$$

هارموني سراسري (Harmonic Mean)

هارموني سراسري H.M مواد جي معڪوسن جي حسابي سراسري جو معڪوس آهي H.M ۾ اسين سيني غير ٻڙي عددن جي انهن جي معڪوسن جي جوڙ اُپت وسيلي ملائيندا آهيون ۽ ان ڪانپوءِ جوڙ اُپت کي n برابر حصن ۾ ورهائيندي ملاوت جي اثر کي هٽائيندا آهيون. آخر ۾ نتيجي جو معڪوس H.M آهي H.M عام طرح سان مقداري مواد جو ڪيو آهي ۽ اهو هميشه يڪانو هوندو آهي.

جيڪڏهن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ غير ٻڙي n عدد آهن ته پوءِ

غير گروهي : مواد لاءِ

H.M = "معڪوس جي حسابي سراسري" جو معڪوس يعني ته

$$H.M. = \left[\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n}\right] \text{ جو معڪوس} \quad (1)$$

$$= \left[\frac{\sum\left(\frac{1}{x}\right)}{n}\right] \text{ جو معڪوس} = \frac{n}{\sum\left(\frac{1}{x}\right)}$$

گروهي مواد لاءِ جيڪڏهن غير ٻڙي جماعتي نشان x آهن. ته پوءِ

$$H.M. = \frac{\sum f}{\sum\left(\frac{f}{x}\right)} \quad (2)$$

مثال1: هر هڪ 10 ڪلو ميٽرن جي فاصلي لاءِ ماپيل گاڏي جي رفتارن جو H.M لهو. رفتارون آهن 45km/h, 30km/h, 22km/h, 30km/h, 15km/h

حل:

$$H.M. = \frac{n}{\sum\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{5}{\frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{22} + \frac{1}{30} + \frac{1}{45}} = \frac{5}{0.0667 + 0.0333 + 0.0454 + 0.0333 + 0.0222}$$

$$H.M. = \frac{5}{0.2009} = 24.8880.$$

انهيءَ ڪري، H.M. جو استعمال ڪندي گاڏي جي سراسري رفتار 12.4719 km/h آهي

مثال 2: ٿڌي مشروب جي مقدار (لٽرن ۾) 20 بوتلن لاءِ ڏنل آهي. H.M لهو.

ٿڌي مشروب جي مقدارلٽرن ۾	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلن جو تعداد	2	7	5	5	1

حل: ڏنل مواد، غير مسلسل جماعتن وارو گروهي مواد آهي. تنهنڪري

$$H.M. = \frac{\sum f}{\sum\left(\frac{f}{x}\right)} = \frac{2+7+5+5+1}{\frac{2}{1.48}+\frac{7}{1.49}+\frac{5}{1.50}+\frac{5}{1.51}+\frac{1}{1.52}}$$

$$H.M. = \frac{20}{1.3513+4.6980+3.3333+3.3112+0.6579} = \frac{20}{13.3517} = 1.49791$$ لٽر

مثال 3: ڏاتو جي 50 ٽڪرن جي مايي (ڪلو گرامن ۾) جو هارموني سراسري لهو. ان جو مواد ڏنل آهي

مايو (ڪلو گرامن ۾)	7.1-7.3	7.4-7.6	7.7-7.9	8.0-8.2	8.3-8.5	8.6-8.0	8.9-9.1
ٽڪرن جو تعداد	3	5	9	14	11	6	2

حل: ڏنل مواد مسلسل جماعتن وارو گروهي مواد آهي. فارمولي ۾ گهربل حساب جدول ۾ ڪيل آهن

تنهنڪري: $H.M = \frac{\sum f}{\sum\left(\frac{f}{x}\right)}$

$$H.M = \frac{50}{6.1869} = 8.0816 \text{ Kg.}$$

جماعتي حدون	جماعتي نشان (x)	f	$\frac{f}{x}$
7.1-7.3	7.2	3	0.4167
7.4-7.6	7.5	5	0.6667
7.7-7.9	7.8	9	1.1538
8.0-8.2	8.1	14	1.7284
8.3-8.5	8.4	11	1.3095
8.6-8.8	8.7	6	0.6896
8.9-9.1	9.0	2	0.2222
ڪُل تعداد	---	50	6.1869

مشق 22.3

1. هيٺين جو A.M, G.M, H.M مديان ۽ ڪثرتي سراسري لهو (جتي ممڪن هجي)

a. 3.2, 6, 10, 12, 12, -20, 25, 28, 30.8
b. 14, 12, 18, 19, 0, -19, -18, -12, -14
c. 6.5, 11, 12.3, 9, 8.1, 16, 18, 20.5, 25
d. 51, 55, 52, 54, 58, 60, 61, 62, 52, 57, 52, 64
e. A+, O-, AB+, O+, AB+, AB-, B+, AB+, O+, A- (رت جا گروپ)
f. (طرف) اولهه ، اوڀر، ڏکڻ ، اتر
g. B+, Fail, B+, A+, A-, C+, B+, A-, B-, Fail, A-, B+, C- (grades)

2. ڏهن مزدورن جي روز جي ڪمائي رُپين ۾ آهي. 195, 190, 181, 195, 115, 125, 172, 170, 188 معلوم ڪريو AM (وصف وسيلي ۽ انحرافن وسيلي جڏهن A=50 ۽ h=10), G.M (وصف وسيلي ۽ لاگرتم واري طريقي سان), HM, مڌيان ۽ ڪثرتي سراسري

3. A.M. مڌيان ۽ ڪثرتي سراسري جو استعمال ڪندي،60 ماڻهن جي مواد مان ڪتن جي ورتاءُ جي سراسري لهو

ورتاءُ	ڪتن سان پيار ڪن ٿا	ڪتن کي پسند ڪن ٿا	ڪابہ راءِ نہ آهي	ڪتن کي ناپسند ڪن ٿا	ڪتن سان نفرت ڪن ٿا
ماڻهن جو تعداد	20	15	4	13	8

4. هڪ شهر ۾ فوتگي في مهيني واري هيٺين مواد مان موت جي سبب جي ڪثرتي سراسري لهو.

موت جو سبب	T.B.	ذيابيطس	مليريا	ڪالرا (دست ۽ الٽيون)	ڪوويڊ	ڪينسر	B.P.	دل جو دورو
ماڻهن جو تعداد	10	6	2	2	15	10	2	5

5. هڪ دُڪان ۾ 50% رعايتي قيمت تي وڪيل جوتن جون ماپون ڏنل آهن مڌيان Q_1، Q_3 ۽ ڪثرتي وڪيل جوتي جي ماپ لهو جيڪي جوتا ان ڏينهن وڪيا ويا.

جوتي جي ماپ	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5
جوڙين جو تعداد	2	5	15	30	60	40	23	11	4	1

6. هڪ فيڪٽري جي هزار ملازمن جي روز جي مزوري (سون ۾) ڏنل آهي AM, GM, HM مڌيان چوٿائي ڪنڊڙ مشاهدا ۽ ڪثرتي مزدوري لهو.

روز جي مزوري(سَون ۾)	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44
ملازمن جو تعداد	3	13	43	102	175	220	204	139	69	25	6	1

7. هڪ ڪمپني جي گذريل 50 ڏينهن جي عرصي ۾ ڪمايل نفعن جو خلاصو هيٺ ڏنل آهي. مختصر ۽ فرضي طريقن سان نفعن جو AM لهو

(a). $A = 9000, h = 2000$ (b). $A = 11000, h = 2000$

نفعو (رپين ۾)	4000-6000	6000-8000	8000-10000	10000-12000	12000-14000
ڏينهن جو تعداد	5	7	11	21	6

8. شاگردن جون هڪ مضمون ۾ (50مان) ڪنيل مارڪون هيٺ ڏنل گروهي مواد جي جدول ۾ ڏنل آهن. معلوم ڪريو AM, GM سڌي ۽ لاگرتم واري طريقن سان، HM, مڌيان ۽ ڪثرتي سراسري

مارڪون	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
شاگردن جو تعداد	9	18	35	17	5

9. AM, GM, HM مڌيان ، چوٿائي ڪنڊڙ مشاهدا ۽ ڪثرتي سراسري لهو هيٺ ڏنل مواد جي

جماعتي حدون	10.5-10.9	11.0-11.4	11.5-11.9	12.0-12.4	12.5-12.9
تعدد	2	7	10	12	8

(ii) 22.3 حسابي سراسري A.M جي خاصيتن جي سڃاڻپ ڪرڻ

جي خاصيتن جي سڃاڻپ ڪرڻ. هتي اسين، مثالن سان گڏ AM جي ڪجھ مکيہ خاصيتن تي غور ڪريون ٿا

1 غير گروهي مواد ۾، AM کان سمورن مشاهدن جي انحرافن جي جوڙ اُپت ٻُڙي آهي
2 هڪ مستقل ڊيٽا سيٽ جو AM اهو مستقل پاڻ ٿيندو
3. جيڪڏهن هڪ سيٽ جو AM $\bar{x}$ آهي تہ پوءِ $Y = aX + b$ آهي $\bar{y} = a\bar{x} + b$ جڏهن تہ a ۽ b حقيقي عدد آهن
4. جيڪڏهن $AM = GM = HM$ تہ پوءِ ڊيٽا سيٽ جا سڀ مشاهدا ساڳيا يا مستقل هوندا.
5. هڪ غير مستقل مواد لاءِ $AM > GM > HM$
6. هڪ غير مستقل مواد لاءِ. $(AM)\ (HM) \approx (G.M.)^2$
7. جيڪڏهن مڌيان = AM تہ پوءِ مواد همشڪلي آهي نہ تہ ٻي صورت ۾ مواد غير همشڪلي آهي
8. هڪ يڪ ڪثرتي ۽ همشڪلي مواد لاءِ ڪثرتي سراسري = مڌيان = AM
9. هڪ مستقل ڊيٽا ۾، ڪثرتي سراسري = مڌيان= $AM = GM = HM$

مثال١

هيٺين ڊيٽا سيٽن جي حسابي سراسري لهو.

(i). $X=\{19, 19, 19, 19, 19\}$ (ii). $Y=\{3, 4, 6, 1, 6\}$ جيڪڏهن $Z = 3Y + 7$

حل .(i) $X=\{19,19,19,19,19\}$ اهو هڪ مستقل آهي جنهن جون سڀ قيمتون 19 جي برابر آهن تنهنڪري $\bar{x}=19$.

(ii). پهريان اسان معلوم ڪريون ٿا.

$$\bar{y}=\frac{3+4+6+1+6}{5}=\frac{20}{5}=\quad 4$$

هاڻي، جيئن

$Z = 3Y + 7$ تنهنڪري $\bar{z}=3\bar{y}+7=3(4)+7=19.$

اسين تصديق ڪري سگهون ٿا ته جڏهن $Z = 3Y + 7 =\{16,19,25,10,25\}$ ته پوءِ $\bar{z}=19$ دُرست آهي

مثال 2: ثابت ڪري ڏيکاريو تهA.M.کان $\{3,4,6,1,6\}$ ۾ انحراف جي جوڙ اُپت ٻڙي ٿيندي

ثابتي: فرض ڪريو ته

$X=\{3,4,6,1,6\}$ پهريان $\bar{x}$ لهنداسين جيڪو آهي. $\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{20}{5}=4$

هاڻي $\bar{x}$ ڪان انحراف آهن: (3-4),(4-4),(6-4),(1-4) ۽ (6-4) يا رڳو -1, 0, 2, -3 ۽ 2 هاڻي اسان $\bar{x}$ ڪان سيني انحراف جي جوڙ اُپت لهون ٿا

$$\sum(X-\bar{x})=(-1)+(0)+(2)+(-3)+(2)=0.\Rightarrow\sum(X-\bar{x})=0$$

اهڙي طرح ثابت ٿيو.

مثال 3: تصديق ڪريو ته $\{19,19,19,19,19\}$ لاءِ ڪثرتي سراسري= مڌيان =A.M. = G.M. = H.M.

حل: ڏنل مستقل ڊيٽا سيٽ لاءِ سڀ سراسريون معلوم ڪندي. هتي (اڪي) n = 5

$$A.M.=\frac{19+19+19+19+19}{5}=19 \qquad (i)$$

$$G.M.=(19\times19\times19\times19\times19)^{1/5}=19^{5\times\frac{1}{5}}=19. \qquad (ii)$$

$$H.M.=\frac{5}{\frac{1}{19}+\frac{1}{19}+\frac{1}{19}+\frac{1}{19}+\frac{1}{19}}=\frac{5}{\frac{5}{19}}=19. \qquad (iii)$$

(iv) مڌيان = $\left(\frac{5+1}{2}\right)$ هون مشاهدو = ٽيون مشاهدو = 19

(v) ڪثرتي سراسري = 19 (سڀ کان وڌيڪ ايندڙ مشاهدو)

مساوات (i) - (v) مان اسان حاصل ڪيو ڪثرتي سراسري = مڌيان = AM = GM = HM انهي ڪري ثابت ٿيو

مثال 4: AM ۽ مڌيان جو استعمال ڪندي ڏسو ته ڇا ڏنل مواد همشڪلي يا غير همشڪلي آهي

(i). 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 10 (ii). 4, 8, 13, 14, 19, 20, 23

حل:

(i). $$A.M.=\frac{4+5+6+6+6+7+7+7+7+7+7+8+8+8+9+10}{16}=\frac{112}{16}=7$$

$$\text{مڌيان}=\frac{1}{2}[\text{انون + نائون مشاهدو}]=\frac{1}{2}[7+7]=7$$

جيئن ته مڌيان = AM

انهي ڪري مواد همشڪلي آهي

(ii).

$$A.M=\frac{4+8+13+14+19+20+23}{7}=14.42$$

مديان $=\left[\frac{7+1}{2}\right]$ هون مشاهدو = چوٿون مشاهدو = 14

جيئن تہ مديان $\neq$ AM انهي ڪري مواد غير همشڪلي آهي

مثال 5: {4,5,6,6,6,7,7,8} لاءِ تصديق ڪريو تہ

(i). $A.M. > G.M. > H.M.$

(ii). $(G.M)^2 \approx (A.M)(H.M)$.

حل:

$$A.M.=\frac{4+5+6+6+6+7+7+8}{8}=6.125,$$

$$G.M.=(4\times5\times6\times6\times6\times7\times7\times8)^{1/8}=6.006$$

$$H.M.=\frac{8}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}=5.879.$$

جيئن تہ $6.125 > 6.006 > 5.879$ تنهنڪري $A.M. > G.M. > H.M.$

انهي ڪري (i) جي تصديق ٿي

جيئن تہ $(G.M.)^2=36.072$ ۽ $(A.M.)(H.M.)=36.008$: تنهنڪري $(G.M.)^2 \approx (A.M.)(H.M.)$.

انهي ڪري (ii). جي تصديق ٿي

22.3 (iii): قدري سراسري ۽ متحرڪ سراسري لهڻ

(a) قدري سراسري يا وزني سراسري (Weighted mean)

جيڪڏهن مواد ۾ ڪجهہ مشاهدا بين ڪان وڌيڪ اهم هجن تہ پوءِ اسين سراسري ڪڍڻ لاءِ سيني کي برابر وزن يا قدر(نسبتي اهميت) نتا ڏيئي سگهون. اها سراسري جيڪا مشاهدن جي قدرن يا نسبتي اهميت جو استعمال ڪندي ڪڍي وڃي ان کي قدري سراسري يا وزني سراسري چئبو آهي.

جيڪڏهن $x_1, x_2, ..., x_n$ آهي عدد آهن جيڪي مواد ۾ مشاهدن سان لاڳاپيل آهن ۽ $w_1, w_2, ..., w_n$ واسطيدار وزن آهن تہ پوءِ قدري.G.M.A.M ۽ H.M آهن

$$\bar{x}_w=\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum w_i}=\frac{\sum wx}{\sum w},$$

$$G_w=\text{antilog}\left[\frac{\sum w\log x}{\sum w}\right]$$

$$H_w=\frac{\sum w}{\sum\left(\frac{w}{x}\right)}$$

مثال 1: هڪ شاگرد جي سماجي علمن جي ڊپلوما ڪورس جي هر هڪ پڙهيل مضمون جون مارڪون، انهن جي نسبتي قدرن سان گڏ مليل آهن. مارڪن جي قدري سراسري لهو.

مضمون	انگريزي	فرانسيسي	تاريخ	سائنس	رياضي
مارڪون	73	82	60	62	57
وزن	4	3	2	1	1

حل: فارمولا آهن

$$H_w=\frac{\sum w}{\sum\left(\frac{w}{x}\right)},\quad G_w=\text{antilog}\left[\frac{1}{\sum w}\left(\sum w\log x\right)\right] \text{ ۽ } \bar{x}_w=\frac{\sum xw}{\sum w}$$

اسين ڪهربل جوڙ اُپتون هينين جدول ۾ ڪيون ٿا

x	w	$x.w$	$\frac{w}{x}$	log x	w. log x
73	4	292	0.0548	1.8633	7.4532
82	3	246	0.0366	1.9138	5.7414
60	2	120	0.0333	1.7782	3.5564
62	1	62	0.0161	1.7924	1.7924
57	1	57	0.0175	1.7559	1.7559
جوڙ اُيت	11	777	0.1538	---	20.2993

$\bar{x}_w = \frac{777}{11} = 70.6$ مارڪون

$G_w = \text{anti log}\left[\frac{1}{11} \times 20.2993\right]$

$G_w = \text{antilog}(1.8454) = 70.04$ مارڪون

$H_w = \frac{11}{0.1583} = 69.5$ مارڪون

نوٽ ڪريو تہ:

مثال1 ۾ غير قدري سراسريون آهن $\bar{x} = 66.8$، G.M.=66.17 ۽ H.M.=65.58 جيڪي قدري سراسرين کان گهٽ آهن. مارڪن جي قدري سراسري، اهم ڪورسن کي وڌيڪ حصو ڏيندي. شاگرد جي سراسر ڪارڪردگي کي بهترين طريقي سان بيان ڪري ٿي

(b) متحرڪ سراسريون (Moving averages)

جيڪڏهن اسين وقت جي مستقل وقفن (ڏينهن ۾ / مهينين ۾/ سالن وغيره ۾) ۾ ڪنهن دلچسپي واري بدلجندڙ جي سراسري رويي جو تجزيو ڪرڻ چاهيون ٿا تہ پوءِ سراسري ۾ تبديلي جي کوج ڪرڻ ڏاڍو اهم آهي جيئن مخصوص‌وقفن يا مدتن ۾ وقت گذري. ان صورت ۾ وقت جي مخصوص وقفن يا مدتن جي سراسري وقت سان گڏ تبديل يا حرڪت ڪندي رهندي آهي. ۽ انهن سراسرين کي متحرڪ سراسريون (Moving averages) چئبو آهي.

اڪي- وقفي وارين متحرڪ سراسرين جي صورت ۾، اسين متحرڪ سراسرين کي رڳو مخصوص وقفي جي وچ‌وارن خانن ۾ رکندا آهيون ۽ باقي خانا خالي ڇڏبا آهن. متحرڪ سراسرين کي اڳيئي موجود خانن ۾ رکبو آهي. ٻڌي- وقفي وارين متحرڪ سراسرين جي صورت ۾ اسين ٻن وچين خانن جي سراسري رکندا آهيون. ان طريقي سان اڳيئي موجود خانن ۾ متحرڪ سراسرين کي رکي سگهجي ٿو.

هينين مثالن جي مدد سان طريقي کي واضح ڪجي ٿو.

مثال ١: هينيون مواد گذريل سال لاءِ هڪ شي جي ماهوار قيمت رُپيا في مهينو جي حساب سان خلاصو ڪري بيان ڪري ٿو.

مهينو	جنوري	فيبروري	مارچ	اپريل	مئي	جون	جولائي	آگسٽ	سيپٽمبر	آڪٽوبر	نومبر	ڊسمبر
قيمت‌رپيا في مهينو	180	87	91	102	108	139	150	200	220	307	289	330

معلوم ڪريو (i) 3 - مهيني واريون. (ii) 5 - مهيني واريون. (iii) 4 - مهيني واريون متحرڪ سراسريون

حل .(i) پهريان اسين 3 - مهيني واريون متحرڪ سراسريون لهنداسين اسين ٽن لاڳيتي مهينن جي شروعات ڪنداسين: جنوري، مارچ، فيبروري اپريل، مارچ مئي ۽ اهڙي ريت آخري ٽن مهينن آڪٽوبر- ڊسمبر تي ختم ڪنداسين‌اهي3 - مهيني واري وقفي جي وچين مهيني ۾ رکبيون مثال طور جنوري- مارچ واري متحرڪ سراسري فيبروري‌جي پاسي ۾ رکبي 3 - مهيني واريون متحرڪ سراسريون پر واري جدول ۾ مختصر طور ڏنل آهن

مهينو	قيمت	3- مهيني واريون متحرڪ سراسريون
جنوري	180	------------
فيبروري	87	(180+87+91)/3=119.33
مارچ	91	93.33
اپريل	102	100.33
مئي	108	166.33
جون	139	132.33
جولائي	150	163
آگسٽ	200	190
سيپٽمبر	220	242.33
آڪٽوبر	307	272
نومبر	289	308.66
ڊسمبر	330	------------

مهينو	قيمت	5 - ميهني واريون متحرڪ سراسريون
جنوري	180	------------
فيبروري	87	------------
مارچ	91	(180+87+91+102+108)/5=113.6
اپريل	102	105.4
مئي	108	118
جون	139	139.8
جولائي	150	163.4
آگسٽ	200	203.2
سيپٽمبر	220	233.2
اڪٽوبر	307	269.2
نومبر	289	------------
ڊسمبر	330	------------

(ii) 5- مهينن وارين متحرڪ سراسرين لاءِ اسين 5 لاڳيتا مهينا شروع ڪنداسين. جنوري - مئي، فيبروري - جون ۽ اهڙي طرح سان آگسٽ - ڊسمبر تي ختم ڪنداسين متحرڪ سراسريون پاسي واري جدول ۾ ڏيکاريل آهن. اسين ڏسي سگهون ٿا تہ اهڙيون 8 سراسريون آهن. پهريون ۽ آخري ٻہ خانا خالي رکيا. 5 مهينن واريون متحرڪ سراسريون وچ وارن مهينن تي رکيل آهن.

(iii) 4- مهينن وارين متحرڪ سراسرين لاءِ اسين هر دفعي چار لڳاتار مهينن جون ٽوليون ڪٽنداسين جيڪي شروع هن ريت ٿين ٿا: جنوري- اپريل، فيبروري - مئي، سيپٽمبر — ڊسمبر شروع ۾ 4 مهينن جي وچ ۾ سراسريون رکيون ويون آهن ان ڪانپوءِ گهربل 4- مهينن واريون مرڪزي متحرڪ سراسريون حاصل ڪرڻ لاءِ اسين 4- مهينن وارين سراسرين جي هر هڪ جوڙي جي وڏيڪ سراسري ڪيڏنداسين هيٺين جدول ۾ نتيجن جو خلاصو بيان ڪيو ويو آهي. اسان هميشہ ٻڌي- وقفي. وارين متحرڪ سراسرين لاءِ اسين ٻن ڪالمن جو اضافو ڪندا آهيون

مهينا	قيمتون	4-ميهنن واريونمتحرڪ سراسريون (شروعاتي)	4-مهينن واريون متحرڪ سراسريون (مرڪزي)
جنوري	180		------------
فيبروري	87		------------
		115	
مارچ	91		106
		97	
اپريل	102		103.5
		110	
مئي	108		117.375
		124.75	
جون	139		137
		149.25	
جولائي	150		163.25
		177.25	
آگسٽ	200		198.25
		219.25	
سيپٽمبر	220		236.625
		254	
آڪٽوبر	307		270.25
		286.5	
نومبر	289		------------
ڊسمبر	330		------------

نوٽ ڪريو ته: سال جي 12 مهينن جي سراسري واري قيمت (حسابي سراسري) برابر آهي 183.58 رپيا في مهينو. اسين ڏسي سگهون ٿا تہ قيمتون مستقل نہ هيون ۽ 3، 5، 4 مهينن واريون متحرڪ سراسريون سڄي سال جي ترتيبوار وقفن جي تبديلين جو بهتر طريقي سان خلاصو ڪن ٿيون.

22.3 مڊيان، چوٿائي ڪنڊڙ مشاهدن ۽ ڪثرتي سراسري جو گراف وسيلي اندازو لڳائڻ

گراف وسيلي مڊيان ۽ چوٿائي ڪنڊڙ مشاهدن جو هنڌ معلوم ڪرڻ ۽ اندازو لڳائڻ لاءِ اسين مواد جو 0 give (مجموعي تعددي گهڻ پاسو) استعمال ڪندا آهيون. 0 give ۾ مڊيان هيٺيون چوٿائي ڪنڊڙ مشاهدو (Q_1) ۽ مٿيون چوٿائي ڪنڊڙ مشاهدو (Q_3) رڳو انهن ٽٻڪن جا x − محددي يا x-coordinates آهن جن جا y − محددي يا y-coordinates (مجموعي تعدون) ترتيبوار $\frac{n}{2}$ $\frac{n}{4}$ ۽ $\frac{3n}{4}$ آهن.

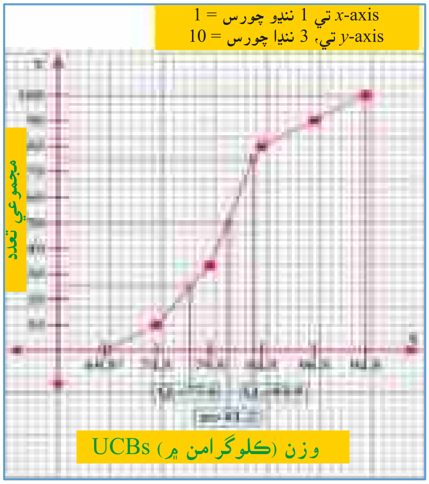
گراف وسيلي ڪثرتي سراسري (جيڪڏهن وجود رکي) جو هنڌ لهڻ ۽ اندازو لڳائڻ لاءِ اسين مواد جو ڪالمي نقشواستعمال ڪندا آهيون. ڪثرتي جماعت اها جماعت آهي جنهن لاءِ مستطيل جي اوچائي سڀ کان وڏي هوندي آهي ۽ ان جماعت ۾ ڪثرتي سراسري ٻن ليڪ ٽڪرن جي ڪاٽيندڙ مشترڪ ٽٻڪي جو x- محددي آهي پهريون ليڪ ٽڪرڪثرتي جماعت ۽ ان کان پوءِ واري جماعت سان واسطو رکندڙ مستطيلن جي ڪاٻي چوٽين کي ملائڻ سان ڪڍبو آهي ٻيو ليڪ ٽڪر ڪثرتي جماعت ۽ ان کان اڳ واري جماعت سان واسطو رکندڙ مستطيلن جي ساڄي چوٽين کي ملائڻ سان ڪڍبو آهي. ڪاٽ جي ٽٻڪي کان x- محور ڏانهن عمود x-محور کي ڪثرتي سراسري جي هنڌ يا مقام تي لڳي ٿو. اهو طريقو،مسلسل جماعتن واري گروهي مواد لاءِ استعمال ڪبو آهي.

مثال1: گراف وسيلي مڊيان، چوٿائي ڪنڊڙ مشاهدا ۽ ڪثرتي سراسري واري وزنن (ڪلو گرامن ۾) جو هنڌ لهو ۽ اندازو لڳايو

وزن (ڪلو گرامن ۾)	70-74	75-79	80-84	85-89	90-94
شاگردن جي تعداد	10	24	46	12	8

حل: اسان وٽ n=100 ۽ ڏنل مواد مسلسل جماعتن وارو گروهي مواد آهي.-ogive ۽ ڪالمي نقشو ڪڍڻ لاءِ اسين پهريان پر واري جدول ۾ حقيقي جماعتي حدون ۽ مجموعي تعددون معلوم ڪيون ٿا.

جماعتي حدون	حقيقي جماعتي حدون	f	مجموعي تعدد
70-74	69.5-74.5	10	10
75-79	74.5-79.5	24	34
80-84	79.5-84.5	46	80
85-89	84.5-89.5	12	92
90-94	89.5-94.5	8	100



مڊيان ۽ چوٿائي ڪنڊڙ مشاهدن لاءِ اسين .y-axis تي $\frac{n}{2}=50$, . $\frac{n}{4}=25$ ۽ $\frac{3n}{4}=75$ جي سڃاڻپ ڪريون ٿا.

ان ڪانپوءِ انهن مان ogive ڏانهن عمود ڪڍندي ۽ ان ڪانپوءِ ogive مان x-axis ڏانهن عمود ڪڍندي اسان کي ترتيبوار مڊيان Q ۽ Q_3 ملي ٿو، اسين انهن ملهن کي هن ريت لکنداسين

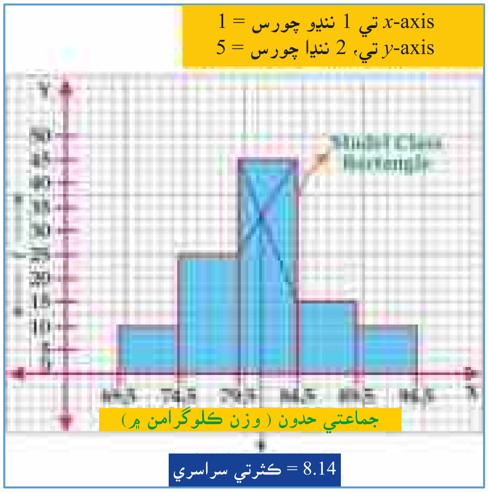
مڊيان ≈ ,81.2

$Q_1 \approx$,77.6

$Q_3 \approx$ .83.9

ڪثرتي سراسري لاءِ اسين پهريان ڪالمي نقشو ڪيون ٿا جيئن هتي ڏيکاريل آهي: ڪثرتي جماعت سڀ کان ڏي اُوچائي واري مستطيل سان واسطو رکي ٿي جيئن شڪل ۾ نمايان آهي.

بہ ليڪ ٽڪر حاصل ڪرڻ لاءِ، اسين ڪثرتي جماعت ۽ ان کانپوءِ واري جماعت جي مستطيلن جي کابي چوٽين کي ملائينداسين ان کانپوءِ ڪثرتي جماعت ۽ ان کان اڳ واري جماعت جي مستطيلن جي ساڄي چوٽين کي ملائينداسين. هاڻي ڪاٽ جي ٽپڪي کان x-axis ڏانهن عمود- کي لڳ ڀڳ 81.4 تي لڳي ٿو جيڪو ڪثرتي سراسري جو هندآهي. انهي ڪري ڪثرتي وزن لڳ ڀڳ 81.4 ڪلو گرام آهي.



مشق 22.4

1. جيڪڏهن W = {148, 145, 160, 157, 156, 160, 160, 165}, ۽ X = {-2, -2, -2, -2} تہ پوءِ
   - a. ثابت ڪري ڏيکاريو تہ W جي A کان سيني انحرافن جي جوڙ اپت ٻڙي آهي.
   - b. ثابت ڪري ڏيکاريو تہ x جي ڪثرتي سراسري = مڌيان = A.M. = G.M. = H.M.
   - c. Y = 3X· جو A.M. لهو
   - d. Z = 3W-11 جو A.M. لهو
   - e. ثابت ڪري ڏيکاريو تہ W جي ڪثرتي سراسري>مڌيان.A.M. > G.M. > H.M.
2. چڪاس ڪريو تہ ڇا X = {7,9,3,3,3,4,1,3,2,2} ۽ Y = {2,1,4,4,4,6,6,5,7,1} همشڪلي آهن؟
3. هڪ ڪٽنب لاءِ پوري مهيني ۾ ڪهربل شين جا ڪهربل وزن (ڪلو گرامن ۾) ۽ قيمتون(رپيا في ڪلو گرام) ڏنل آهن. A.M. ۽ G.M. H.M. جو استعمال ڪندي قيمتن جي مقداري سراسري لهو,

شي	A	B	C	D	E
قيمت (رپيا في ڪلو گرام)	300	200	600	250	650
ڪهربل وزن (ڪلو گرام)	25	5	4	8	3

4. 50خريد ڪيل سرن مان،21سرن جو سراسري مايو24.2 ڪلو گرام آهي ۽ 29 سرن جو سراسري مايو 23.6ڪلوگرام آهي50 سرن جو قدري سراسري مايو لهو
5. هڪ صوبي ۾، چوٿي واري هفتي ۾ ڪوويڊ19جي ڪري ٿيل فوتگين جي تعداد واري مواد مان 3,2 ۽ 4 ڏينهن واريون متحرڪ سراسريون لهو.

ڏينهن	سومر	اڱارو	اربع	خميس	جمعو	ڇنڇر	آچر
فوتگين جو تعداد	102	130	158	188	196	259	310

6. 11سالن ۾ وڪري (ملين رُپين ۾) جون 4 ۽ 5 سالن واريون متحرڪ سراسريون لهو.

سال	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
وڪرو	102	130	158	188	196	259	310	188	196	259	310

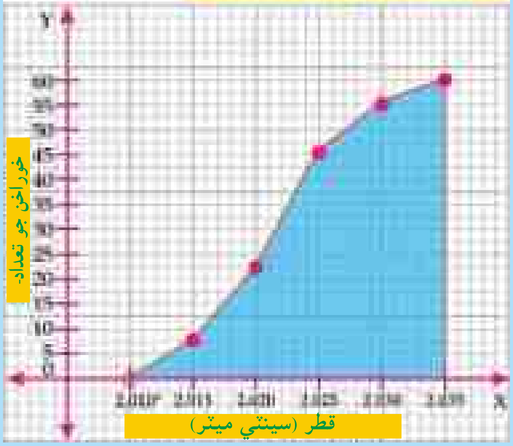
7. ڏنل مواد ۾ گراف وسيلي مڏيان، چوٿائي ڪنڊڙ مشاهدا ۽ ڪثرتي سراسري جو هنڌ لهو ۽ انهن جو اندازو لڳايو.

اضافي وقت (ڪلاڪ في هفتو)	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59
ڏينهن جو تعداد	5	4	7	11	12	8	1

8. هيٺين گرافن ۾ ظاهر ڪيل ماپن جو هنڌ لهو ۽ انهن جو اندازو لڳايو.

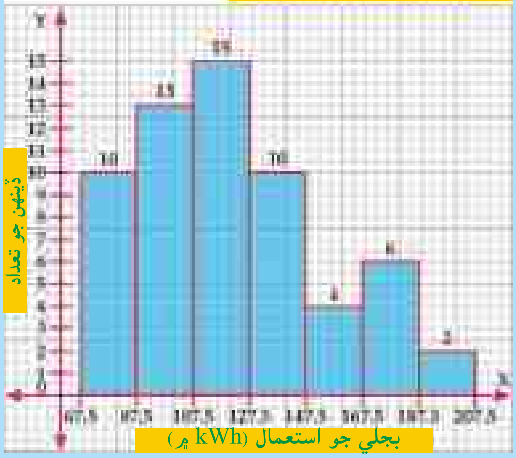
a ڪثرتي سراسري

x-axis تي، 1 ننڍو چورس = 0.001
y-axis تي، 2 ننڍا چورس = 5



b مڏيان ۽ چوٿائي ڪنڊڙ مشاهدا

x-axis تي، 5 ننڍا چورس = 20
y-axis تي، 2 ننڍا چورس = 1



22.4 پکڙجڻ جا پيمانا (Measures of Dispersion)

مواد ۾ تبديلي ۽ موافقت جو خيال ڪئي بنا مرڪزي رجحان جون ماپون ياپيمانا مواد جي سراسري يا مرڪزي رويي تي مرڪوز هوندا آهن. جڏهن مشاهدا سراسري ڪان گهڻو پري هجن ته پوءِ مواد جي ورتاءُ ۽ خاصيتن جي پوري سمجھ لاءِ رڳو مرڪزي رجحان جا پيمانا ڪافي نه هوندا آهن
مثال طور : هيٺين جدول، ٻن شاگردن جي پنجن مضمونن ۾ ڪنيل مارڪون ڏيکاري ٿي.

مضمون	I	II	III	IV	V
شاگرد A جون مارڪون	90	30	85	50	25
شاگرد B جون مارڪون	63	50	60	55	52

جيڪڏهن اسين AM جو استعمال ڪندي
هر هڪ شاگرد جي حاصل ڪيل مارڪن جي سراسري لهون ته پوءِ اسين ڏسون ٿا ته ٻنهي شاگردن جي مارڪن جا AM 56 آهن پر ٻنهي شاگردن جي ڪارڪردگي ماپڻ لاءِ اهو ڪافي آهي جواب نه آهي. شاگرد A جي مارڪن ۾ سراسري جي چوڌاري وڌي گهٽ وڌائي آهي. جڏهن ته شاگرد B جون مارڪون سراسري جي وڌيڪ ويجهيون آهن. سراسري جي چوڌاري ٿوري گهٽ وڌائي يا تبديلي يا ڦهلاو يا پکڙجڻ جي ڪري، شاگرد B جي ڪارڪردگي شاگرد A ڪان وڌيڪ مستحڪم يا هم آهنگ يا قابل اعتبار آهي. سراسرين جي سيني قسمن، جيڪي اسان سکيا آهن جو استعمال ڪندي، اسين شاگردن جي مارڪن جون سراسريون ڏسي سگهون ٿا

سراسري	A.M.	مڏيان	ڪثرتي سراسري	G.M.	H.M.
شاگرد A جون مارڪون	56	50	ڪابه نه	لڳ ڀڳ 49	لڳ ڀڳ 43
شاگرد B جون مارڪون	56	55	ڪابه نه	لڳ ڀڳ 56	لڳ ڀڳ 56

مارڪن ۾ تبديلي جي ڪري، شاگرد A جون جون سراسريون هڪ ٻئي ڪان به گهڻو مختلف آهن.
شاگرد B جون سراسريون هڪٻئي جي وڌيڪ ويجهو آهن.

مستحڪم ۾ هم آهنگ ڪارڪردگي جي ڪري اسين شاگرد A جي ڀيٽ ۾ شاگرد B جون ايندڙ مضمون ۾ مارڪن جي اڳڪٿي ڪرڻ لاءِ بهتر حالت ۾ آهيون.مواد جي گهٽ وڌائي يا تبديلي جو علم فيصلا يا اڳڪٿي ڪرڻ ۾ وڏي اهميت رکي ٿي. انهي ڪري مواد جي بهترسمجهه لاءِ اهو ڏاڍو اهم آهي ته اسين سراسريون لهڻ کان علاوه گهٽ وڌائي يا پکڙجڻ جو درجو لهون. پکڙجڻ جاپيمانا اهو ظاهر ڪن ٿا ته مواد سراسري يا مرڪزي نقطي جي چوڌاري ڪيتري حد تائين پکڙيل آهي. پکڙجڻ جوپيمانو يا ماپون مواد ۾ سراسر تبديلي کي ظاهر ڪري ٿو. استحڪام يا هم آهنگي يا اعتبار جي نقط نظر سان، اهوڀن يا وڌيڪ ڊيٽا سيٽن جي ڀيٽ ڪرڻ لاءِ گهڻو استعمال ڪيا آهن. جيڪڏهن مواد ۾ وڌيڪ گهٽ وڌائي آهي ته پوءِ استحڪام ياهم آهنگي يا اعتبار گهٽ هوندو جيڪڏهن اسانجو واسطو رڳو هڪ ڊيٽاسيٽ جي گهٽ وڌائي يا تبديلي سان آهي ته پوءِ اسين پکڙجڻ جا ماپا ڊيٽا سيٽ جي ايڪن ۾ لهنداسين ۽ انهن ماپن کي پکڙجڻ جا قطعي پيمانا (Absolute measures of dispersion) چئبو آهي. ٻن يا وڌيڪ ساڳي قسم يا ايڪن، مشاهدن جو ساڳيو تعداد ۽ برابر يا ويجهن سراسري وارن ڊيٽا سيٽن جي گهٽ وڌائي يا تبديلي جي ڀيٽ لاءِ پکڙجڻ جي قطعي پيمانن سان ڪري سگهجي ٿي. ٻه يا وڌيڪ مختلف قسم يا ايڪن، مشاهدن جي مختلف تعداد ۽ مختلف سراسرين وارن ڊيٽا سيٽن جي ڀيٽ ڪرڻ لاءِ اسين پکڙجڻ جا نسبتي پيمانا (Relative Measures of dispersion) استعمال ڪندا آهيون جيڪي مواد جي ايڪن ۾ نه هوندا آهن. پر تبديلي جو نسبتي ورتاءُ ڏيکارين ٿا.

22.4(i) وسعت جي وصف، سڃاڻپ ۽ ماپ ڪرڻ. تغير، سراسري انحراف ۽ معياري انحراف لهڻ:

هتي اسين پکڙجڻ(Dispersion) جا ڪجهه اهم پيمانن تي غور ڪنداسين.

(a) وسعت (Range)

مواد جي وسعت مان مراد آهي ته ٻه انتهائي مشاهدن جو فرق. غير گروهي مواد لاءِ، وسعت (R) سڀ کان وڏي مشاهدي (x_L) ۽ سڀ کان ننڍي مشاهدي (x_S) جي وچ ۾ فرق آهي.

يعني ته $R = x_L - x_S$ (1)

گروهي مواد لاءِ، وسعت R آخري جماعت جي UCB يعني (UCB_F) ۽ شروعاتي جماعت جي LCB يعني (LCB_I) جي وچ ۾ فرق آهي

يعني ته $R = UCB_F - LCB_I$ (2)

فارمولن (1) ۽ (2) مان مطلق يا قطعي وسعت (Absolute Range) لهبي آهي، نسبتي وسعت (Relative Range) اسين مساوات (1) ۽ (2) ۾ ترتيبوار $x_L + x_S$ ۽ $UCB_F + LCB_I$ سان ونڊ ڪنداسين تي جيئن ڀيٽ تي سگهي.

نوٽ ڪيو ته:

- نهايت مختلف مشاهدن واري مواد جي گهٽ وڌائي کي وسعت پوري ريت نه ماپندي آهي
- تعددن ۾ ٻين پيراميٽرن جو استعمال ڪرڻ بنا وسعت رڳو مواد جي پڇاڙي وارن مشاهدن جو استعمال ڪندي آهي.

مثال 1: ڏنل ڊيٽا سيٽن جي وسعت لهو.

$X = \{3, 8, 10, 7, 5, 14, 2, 12, 8\}$، $W = \{27.90, 34.70, 54.40, 18.92, 47.60, 39.68\}$

$Z = \{1, 3, 2, 4, 3, 2, 43\}$. ۽ $Y = \{8, 8, 8, 8, 8\}$ نتيجن جو مطلب پڻ ٻڌايو

حل: اسانکي خبر آهي ته غير گروهي مواد لاءِ $R = x_L - x_S$

$R_Z = 43 - 1 = 42$. ۽ $R_Y = 8 - 8 = 0$ ، $R_X = 14 - 2 = 12$ ، $R_W = 54.40 - 18.92 = 35.48$

تنهنڪري، اسين ڊيٽا سيٽ W جي وسعت جو مطلب هن ريت ڪيدي سگهون ٿا. ”ڊيٽا سيٽ W ۾ سڀ مشاهدا پڇاڙي واري مشاهدن 18.92 ۽ 54.40 جي وچ ۾ 35.48 جي فاصلي اندر موجود آهن.“ ڊيٽا سيٽن W ۽ X ۾ مشاهدا پڇاڙي وارين رقمن جي وچ ۾ پوري طرح پکڙيل آهن. تنهنڪري وسعت گهٽ وڌائي يا تبديلي کي با معني انداز ۾ ظاهر ڪري ٿو. سيٽ Y جي وسعت ٻڙي آهي. ڇاڪاڻ ته سڀ مشاهدا ساڳيا آهن ۽ انهن ۾ ڪا به گهٽ وڌائي نه آهي. سيٽ Z ۾ مشاهدن جي اڪثريت 1 ۽ 4 جي وچ ۾ آهي پر هڪ انتهائي مختلف مشاهدي 43 جي ڪري وسعت 42 گمراهه ڪندڙ آهي.

مثال 2: وسعت جو استعمال ڪندي هيٺ ڏنل پنج مضمونن ۾ ٻن شاگردن جي مارڪن جي گهٽ وڌائي جي ڀيٽ ڪريو ۽ نتيجن جو مطلب ڪيو

شاگرد A جون مارڪون	90	30	85	50	25
شاگرد B جون مارڪون	63	50	60	55	52

حل: ٻنهي شاگردن وارو مواد غير گروهي آهي مارڪن جون مطلق وسعتون آهن:
مارڪون $R_A = 90 - 25 = 65$ ۽ مارڪون $R_B = 63 - 50 = 13$

هتي $x_L + x_S$ ٻنهي شاگردن لاءِ ساڳيو آهي. انهي ڪري هتي نسبتي وسعت ڪارائتي نه آهي. مطلق وسعت جي بنياد تي شاگرد A جي ڪارڪردگي شاگرد B جي ڀيٽ ۾ وڌيڪ گهٽ وڌائي ظاهر ڪري ٿي. انهي ڪري شاگرد B جي ڪارڪردگي A کان وڌيڪ موافق آهي.

مثال 3: وسعت جو استعمال ڪندي، پنج مختلف ڪمپنين جون نهيل ساڳيئي قسم جي پنج بيٽرين جي قيمت ۽ عمرجي گهٽ وڌائي معلوم ڪريو. نتيجن جو مطلب ڀڻ ڪيو.

قيمت (هزارن ۾)	8	13	18	23	30
عمر سالن ۾	1.3	1.5	1.8	2.5	3.5

حل: بيٽرين جي قيمت (P)۽ عمر(L) وارو مواد غير گروهي آهي. اهو مواد قسم ۽ ايڪن ۾ به مختلف آهي ٻنهي ڊيٽاسيٽن لاءِ $x_L + x_S$ به مختلف آهن: انهي ڪري اسين گهٽ وڌائي جي ڀيٽ ڪرڻ لاءِ نسبتي وسعت جو استعمال ڪريون ٿا

$$R_P \text{ نسبتي} = \frac{P_L - P_S}{P_L + P_S} = \frac{30-8}{30+8} = \frac{22}{38} = 0.5789$$

$$R_L \text{ نسبتي} = \frac{L_L \quad L_S}{L_L + L_S} = \frac{3.5 \quad 1.3}{3.5+1.3} = \frac{2.2}{4.8} = 0.4583.$$

بيٽرين جي عُمرن ۾ نسبتي تبديلي جي ڀيٽ ۾ پنج مختلف ڪمپنين جي ناهيل بيٽرين جي قيمتن ۾ نسبتي تبديلي وڌيڪ آهي.

مثال 4: ٻن شهرن ڪراچي ۽ مورو مان بنا ڪنهن قاعدي جي چونڊيل ڪجهه ڪٽنبن جي گروهي مواد جو استعمال ڪندي هڪ ڪٽنب جي موبائيلن جي تعداد جي وسعت جي ڀيٽ ڪريو. ڇا اهو ڪافي آهي ته وسعت جي بنياد تي تبديلي جي ڀيٽ ڪجي

موبائيلن جو تعداد	0	1	2	3	4	5	6	7
ڪٽنبن جو تعداد (ڪراچي)	1	7	15	12	5	2	2	1
ڪٽنبن جو تعداد (مورو)	4	13	8	5	2	1	0	1

حل: غير مسلسل جماعتن واري گروهي مواد ۾ جماعتن جي وچ ۾ وٿي $d = 1$ آهي. انهي ڪري وسعت آهي:
موبائيل 8 $R = UCB_F - LCB_I = (7+0.5)-(0-0.5) = 7.5 + 0.5 = 8$ ڪراچي ۽ مورو ۾ هڪ ڪٽنب جي موبائيلن جي تعداد جي وسعت ساڳي آهي يعني ته 8 .موبائيل پر وسعت لاءِ شهرن ۾ ڪٽنبن جي تعداد (تعد) تي غور نه ڪيو ويو آهي. ڪراچي ۽ مورو جي هڪ سراسر ڪٽنب جي موبائيلن جي تعداد جي وچ ۾ گهٽ وڌائي بلڪل مختلف آهي پر اهو وسعت سان ظاهر نٿو ٿي سگهي

مثال 5: هينئين مواد جو استعمال ڪندي هڪ ُدڪان جي بجلي جي استعمال kWh ۾ جي وسعت لهو

بجلي جو استعمال	188-207	168-187	148-167	128-147	108-127	88-107	68-87
ڏينهن جي تعداد	2	6	4	10	15	13	10

حل: مسلسل جماعتن واري گروهي مواد ۾ جماعتن جي وچ ۾ وٿي $d = 1$ آهي تنهنڪري

$$R = UCB_F - LCB_I = \left[207 + \frac{1}{2}\right] - \left[68 - \frac{1}{2}\right] = 207.5 - 67.5 = 140\,\text{kWh}.$$

هتي R ۾ جماعتن جي تعداد جو استعمال نتو ٿئي انهيءَ ڪري گمراهه ڪن ٿي سگهي ٿو.

(b) تغير، سراسري انحراف ۽ معاري انحراف (Variances, Mean deviation and Standard Deviation)

مواد ۾ پکڙجڻ جو ملهه بهتر طريقي سان لهڻ لاءِ تغير، سراسري انحراف ۽ معياري انحراف جي تصورن ۾ رکيو پڇاڙي مشاهدن جي بدران اسين تعددن سان گڏ سڀ مشاهدا استعمال ڪريون ٿا سراسري (عام طرح سان A.M) جي چوڌاري مشاهدي x_i جو انحراف هن ريت بيان ڪيو آهي

سراسري جي چوڌاري انحراف $= D_i = x_i - \bar{x}$ - (1) منفي، مثبت يا ٻڙي ٿي سگهن ٿا پر انحرافن جو جوڙ لهڻ ڪارائتو نه آهي ڇاڪاڻ ته جوڙ اُپت هميشه ٻڙي ايندي.

اهو مسئلو حل ڪرڻ لاءِ، اسان کي منفي انحرافن کان لازمي بچڻو پوندو ۽ اهو ٻن طريقن سان ٿيندو اسين چورس ٿيل انحرافن يا قطعي انحرافن جو استعمال ڪري سگهون ٿا.

سراسري جي چوڌاري چورس ٿيل انحراف $= D_i^2 = \left(x_i - \bar{x}\right)^2$ (2)

سراسري جي چوڌاري قطعي انحراف $= |D_i| = |x_i - \bar{x}|$ (3)

چورس ٿيل انحراف هميشه غير منفي هوندا آهن. هڪ حقيقي عدد جو قطعي ملهه به هميشه غير منفي هوندو آهي. مثال طور $|3| = 3, |-22| = 22, |0| = 0, |-1.5| = 1.5$.

ان ٻنهي طريقن سان اسين پکڙجڻ جا وڌيڪ موزون پيمانا بيان ڪريون ٿا.

تغير (Var يا s^2) A.M جي چوڌاري مشاهدن جي چورس ٿيل انحرافن جي سراسري آهي. سراسري (يا قطعي) انحراف (M.D) A.M, کان مشاهدن جي قطعي انحرافن جي سراسري آهي. ڇاڪاڻ ته پکڙجڻ عام طرح سان مواد جي اصل ايڪن ۾ بامعني هوندو آهي ۽ تغير ۾ چورس ايڪا هوندا آهن انهي ڪري معياري انحراف لهڻ لاءِ اسين ان جو ٻيو مول معلوم ڪريون ٿا معياري انحراف (S يا S.D) تغير جو مثبت ٻيو مول آهي غير گروهي مواد لاءِ جنهن جا مشاهدا $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ هجن ۽ انهن جو : $\text{A.M.} = \bar{x}$

$$Var = s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} \qquad (4)$$

$$M.D. = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n} \qquad (5)$$

$$S.D. = s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} \qquad (6)$$

جڏهن ته $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

گروهي مواد لاءِ، جنهن ۾ x_i جماعتي نشان ۽ f_i جماعتي تعدد آهن ته پوءِ

$$Var = s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f} \qquad (7)$$

$$M.D. = \frac{\sum |x - \bar{x}| f}{\sum f} \qquad (8)$$

$$S.D. = s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f}} \qquad (9)$$

جڏهن ته $\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f}$

فارمولا (4) - (9) قطعي ملهن لاءِ استعمال ٿين ٿا. مواد جي ٻيٽ لاءِ، مواد جي ايڪن ۾ $\bar{x}$ سان ونڊ ڪندي نسبتي ماپا معلوم ڪيا آهن.

مثال 1: شاگرد A ۽ B جي مارڪن جو تغير، سراسري انحراف ۽ معياري انحراف لهو. ڪهڙو شاگرد تسلسل سان ڪارڪردگي ڏيکاري ٿو.

شاگرد A جون مارڪون	90	30	85	50	25
شاگرد B جون مارڪون	63	50	60	55	52

حل: ٻنهي شاگردن جون مارڪون غير گروهي مواد ڏيکارين ٿيون. سڀ کان اڳ ۾ اسين مارڪن جي سراسري لهون ٿا.

شاگرد A لاءِ (x) ۽ شاگرد B لاءِ (y) اسان وٽ آهي.

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{280}{5} = 56 \quad ۽ \quad \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{280}{5} = 56$$

جيئن ته سراسريون برابر آهن تنهنڪري اسين تغير، سراسري انحراف ۽ معياري انحراف جا قطعي پکڙجڻ وارا فارمولا استعمال ڪريون ٿا. هيٺين جدولن ۾ اهي حساب ڏيکاريل آهن

x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$\lvert x-\bar{x}\rvert$
90	34	1156	34
30	-26	676	26
85	29	841	29
50	-6	36	6
25	-31	961	31
جوڙ اُپٽ = 280	0	3670	126

$$Var_A = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n} = \frac{3670}{5} = 734.$$

$$(M.D.)_A = \frac{\sum|x-\bar{x}|}{n} = \frac{126}{5} = 25.2.$$

$$(S.D.) = \sqrt{734} = 27.0924.$$

y	$y-\bar{y}$	$(y-\bar{y})^2$	$\lvert y-\bar{y}\rvert$
63	7	49	7
50	-6	36	6
60	4	16	4
55	-1	1	1
52	-4	16	4
جوڙ اُپٽ = 280	0	118	22

$$Var_B = \frac{\sum(y-\bar{y})^2}{n} = \frac{118}{5} = 23.6.$$

$$(M.D.)_B = \frac{\sum|y-\bar{y}|}{n} = \frac{22}{5} = 4.4.$$

$$(S.D.)_B = \sqrt{23.6} = 4.8578.$$

سڀني فارمولن سان اسان ڏسون ٿا ته شاگرد A جي مارڪن جي گهٽ وڌائي شاگرد B جي مارڪن جي گهٽ وڌائي کان تمام وڌيڪ آهي تنهنڪري شاگرد B جي ڪارڪردگي وڌيڪ تسلسل واري آهي

مثال 2: مختلف ڪمپنين جون ناهيل پنج ساڳي قسم جي بيٽرين جي قيمت ۽ عمر جا معياري انحراف معلوم ڪندي انهن جي گهٽ وڌائي جي ڀيٽ ڪريو نتيجن جو مطلب پڙ ڪيو.

قيمت (هزارن ۾)	8	13	18	23	30
عمر (سالن ۾)	1.3	1.5	1.8	2.5	3.5

حل: قيمت (P) ۽ عمر (L) جو مواد غير گروهي آهي. اهي مواد قسم ۽ ايڪن ۾ به مختلف آهن. سڀ کان اڳ ۾ اسين سراسريون لهون ٿا.

$$\bar{x}_P = \frac{\sum x_P}{n} = \frac{92}{5} = 18.4 \text{ هزار}$$

۽

$$\bar{x}_L = \frac{\sum x_L}{n} = \frac{10.6}{5} = 2.12 \text{ سال}$$

جيئن ته سراسريون مختلف آهن. تنهنڪري اسين پيٽ لاءِ نسبتي معياري انحراف وارو فارمولو استعمال ڪريون ٿا.P ۽ L لاءِ حساب هيٺين جدولن ۾ ڏيکاريل آهن

قيمت (P)	$x_P - \bar{x}_P$	$(x_P - \bar{x}_P)^2$
8	-10.4	108.16
13	-5.4	29.16
18	-0.4	0.16
23	4.6`	21.16
30	11.6	134.56
جوڙ أيٽ = 92	0	293.2

$$s_P = \sqrt{\frac{\sum(x_P - \bar{x}_P)^2}{n}} = \sqrt{\frac{293.2}{5}} = 7.658 \text{ هزار}$$

$$\text{نسبتي } s_P = \frac{s_P}{\bar{x}_P} = \frac{7.658}{18.4} = 0.416.$$

عمر (L)	$x_L - \bar{x}_L$	$(x_L - \bar{x}_L)^2$
1.3	-0.82	1.69
1.5	-0.62	2.25
1.8	-0.32	3.24
2.5	0.38	6.25
3.5	1.38	12.25
جوڙ أيٽ = 10.6	0	25.68

$$s_L = \sqrt{\frac{\sum(x_L - \bar{x}_L)^2}{n}} = \sqrt{\frac{25.68}{5}} = 2.266 \text{ سال}$$

$$\text{نسبتي } s_L = \frac{s_L}{\bar{x}_L} = \frac{2.266}{2.12} = 1.069.$$

بيٽرين جي عمر وارو نسبتي انحراف قيمت واري. کان وڌيڪ آهي ان جو مطلب آهي ته قيمتن وارو مواد، عمرن واري مواد جي پيٽ ۾ وڌيڪ تسلسل وارو آهي. اسين ڏسون ٿا ته جيڪڏهن نسبتي فارمولا استعمال نه ڪجن ته نتيجا مختلف ۽ غلط ٿي سگهن ٿا.

مثال ٿڌي مشروب واري مواد جو تغير، سراسري انحراف ۽ معياري انحراف لهو

ٿڌي مشروب جي مقدار (لٽرن ۾)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلن جو تعداد	2	7	5	5	1

حل: غير مسلسل جماعتن وارو غير گروهي مواد آهي. هيٺين جدول ۾ حساب ڏيکاريل آهن.

مقدار (x)	بوتلن جو تعداد (f)	xf	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	$\lvert x-\bar{x}\rvert$	$(x-\bar{x})^2 f$	$\lvert x-\bar{x}\rvert f$
1.48	2	2.96	-0.018	0.0003240	0.018	0.000648	0.036
1.49	7	10.43	-0.008	0.0000640	0.008	0.000448	0.056
1.5	5	7.5	0.002	0.0000040	0.002	0.00002	0.01
1.51	5	7.55	0.012	0.0001440	0.012	0.00072	0.06
1.52	1	1.52	0.022	0.0004840	0.022	0.000484	0.022
ڪُل	20	29.96	--	--	--	0.00232	0.184

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{29.96}{20} = 1.498 \text{ لٽر}$$

$$Var = s^2 = \frac{\sum(x-\bar{x})f}{\sum f} = \frac{0.00232}{20} = 0.000116 \ (\text{لٽر})^2$$

$$M.D. = \frac{\sum|x-\bar{x}|f}{\sum f} = \frac{0.184}{20} = 0.0092 \text{ لٽر}$$

$$S.D. = s = \sqrt{0.000116} = 0.01078 \text{ لٽر}$$

تڏي مشروب جي مقدارن ۾ گهٽ وڌائي تمام گهٽ يا نظرانداز ڪرڻ جهڙي آهي

مثال 4: بجلي جي استعمال واري مواد جو سراسري انحراف ۽ معياري انحراف لهو

بجلي جو استعمال (kWh)	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
ڏينهن جو تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: هيٺين جدول ۾ حسابن جو خلاصو ڏنل آهي جڏهن تہ x جماعتي نشان کي ظاهر ڪري ٿو

جماعتي حدون	جماعتي نشان (x)	f	xf	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	$\lvert x-\bar{x}\rvert$	$(x-\bar{x})^2 f$	$\lvert x-\bar{x}\rvert f$
68-87	77.5	10	775	-44.167	1950.724	44.167	19507.24	441.67
88-107	97.5	13	1267.5	-24.167	584.0439	24.167	7592.571	314.171
108-127	117.5	15	1762.5	-4.167	17.36389	4.167	260.4583	62.505
128-147	137.5	10	1375	15.833	250.6839	15.833	2506.839	158.33
148-167	157.5	4	630	35.833	1284.004	35.833	5136.016	143.332
168-187	177.5	6	1065	55.833	3117.324	55.833	18703.94	334.998
188-207	197.5	2	395	75.833	5750.644	75.833	11501.29	151.666
ڪل	--	60	7270	--	--	--	65208.35	1606.672

پهريان اسان کي سراسري ڪڍڻي پوندي جيڪا آهي

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{7270}{60} = 121.667 \text{kWh.}$$

هاڻي جوڙ اُپتن جو استعمال ڪندي سراسري انحراف ۽ معياري انحراف آهن

$$M.D. = \frac{\sum|x-\bar{x}|f}{\sum f} = \frac{1606.672}{60} = 26.778 \text{kWh.}$$

$$S.D. = s = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2 f}{\sum f}} \sqrt{\frac{65208.35}{60}} = 32.967 \text{kWh.}$$

مثال 5: ڪراچي ۽ مورو مان ڪجهہ بنا قاعدي چونڊيل خاندانن کان انهن جي موبائيلن جو تعداد پڇيو تہ ان جا نتيجا هن ريت آهن مواد جون سراسريون 5.177۽6.133 موبائيل في خاندان ۽ انهن جا ترتيبوار معياري انحراف 1.412۽3.408 پيٽ ڪري ڏيکاريو تہ ڪهڙي شهر ۾ موبائيل في خاندان جي استعمال ۾ تسلسل آهي.

حل: ڪراچي K مورو M جون موبائيل في خاندان واريون سراسريون مختلف آهن. جيڪي هي آهن

موبائيل في خاندان $\bar{x}_K = 5.773$ ۽ موبائيل في خاندان $\bar{x}_M = 6.133$ معياري انحراف هيٺين ريت آهن

موبائيل في خاندان $s_K = 1.412$ ۽ موبائيل في خاندان $s_M = 3.408$

جيئن تہ ٻنهي شهرن لاءِ سراسريون مختلف آهن تنهنڪري اسين نسبتي ماپا استعمال ڪريون ٿا

$$\text{نسبتي } s_K = \frac{s_K}{\bar{x}_K} = \frac{1.412}{5.733} = 0.246 \text{ ۽ } s_M = \frac{s_M}{\bar{x}_M} = \frac{3.408}{6.133} = 0.555 \text{ ۽ نسبتي}$$

ٻنهي شهرن جا نسبتي معياري انحراف ڏسندي . اسين اهو نتيجو ڪڍون ٿا تہ ڪراچي جي هڪ خاندان جي موبائيلن جي تعداد جي نسبتي گهٽ وڌائي مورو جي هڪ خاندان کان گهٽ آهي انهي ڪري

ڪراچي ۾ موبائيل جي استعمال جي سراسري في خاندان مورو کان وڌيڪ ۽ استعمال وڌيڪ تسلسل وارو آهي.

مشق 22.5

1. هڪ ڪلاس ۾ غير حاضر شاگردن جي تعداد جي وسعت، تغير، سراسري انحراف ۽ معياري انحراف لهو. اهي ٻار گذريل ست ڏينهن کان هن ريت غير حاضر هئا .8 ,1 ,4 ,2 ,3 ,5 ,3

2. 6 وارين ۾ ٻن رانديگرن جي اسڪورن جي وسعت، سراسري انحراف، تغير ۽ معياري انحراف لهو کهڙو رانديگروڌيڪ تسلسل وارو آهي.

رانديگر-A	12	15	0	185	7	19
رانديگر-B	47	12	76	48	4	51

3. ڇهه ڪٽنبن جي آمدني ۽ خرچ جي وسعت ۽ معياري انحراف استعمال ڪندي انهن جي پکڙجڻ جي ڀيٽ ڪريو. نتيجن جو مطلب پڻ ڪڍو

آمدني (هزارن ۾)	10	20	30	40	50	60
خرچ (هزارن ۾)	7	21	23	34	36	53

4. هڪ فٽبال جي مند ۾ ٽيمن A ۽ B جا اسڪور ڪيل گول هيٺ ڏنل آهن. نسبتي معياري انحراف ۽ سراسري انحرافن کي استعمال ڪريو ته جيئن خبر پوي ته ڪهڙي ٽيم وڌيڪ تسلسل سان ڪارڪردگي ڏيکاري.

اسڪور ڪيل گول	0	1	2	3	4
ٽيم A جي کيڏيل راندين جو تعداد	27	9	8	5	4
ٽيم B جي کيڏيل راندين جو تعداد	17	9	6	5	3

5. ڏاتو جي 50 ٽڪرن جي مايي جي ورهاست واري جدول هيٺ ڏنل آهي. وسعت، تغير، معياري انحرف انحراف لهو.

ٽڪرن جو مايو (ڪلوگرامن ۾)	7.1-7.3	7.4-7.6	7.7-7.9	8.0-8.2	8.3-8.5	8.6-8.8	8.9-9.1
ٽڪرن جو تعداد	3	5	9	14	11	6	2

جائزي واري مشق 22

1 صحيح جواب تي نشان لڳايو

(i). حسابي سراسري مواد جي ________ مشاهدن تي منحصر ڪندو آهي.
(a). وچين (b). پڇاڙي وارن (c). سيني (d). ڪوبہ نہ

(ii). ________ لهڻ لاءِ پهريان غير گروهي مواد کي ترتيب ۾ آڻڻو پوندو آهي.
(a) AM (b). ڪثرتي سراسري (c) مڌيان (d) وسعت

(iii). مسلسل تعددي جدول ۾ جماعتن جو تعداد 5 ۽ ________ جي وچ ۾ هوندي آهي
(a). 10 (b). 15 (c). 20 (d). 25

(iv). ________ جو استعمال ڪندي، گراف وسيلي، گروهي مواد جي ڪثرتي سراسري لهبي آهي
(a). ڪالمي نقشو (b). گهڻ پاسو (c). Ogive (d). ٻار چارٽ

(v). جيڪڏهن مواد ۾ ٻين کان مختلف مشاهدا هجن ته "_____" گمراهہ ڪن هوندو آهي.
(a) AM (b). وسعت (c) مڌيان (d). ڪثرتي سراسري

(vi). جيڪڏهن جو{0, 90, k, 10, 100} جو A.M. 40آهي تہ پوءِ k = _____
(a). 0 (b). 90 (c). 10 (d). 100

(vii). مڌيان ۽ چوٿائي ڪندڙ مشاهدا فطري طور ________ آهن.
(a). حسابي (b). مقامي (c). منطقي (d). ڪوبہ نہ

(viii). مٿيون چوٿائي ڪندڙ مشاهدو مواد کي _______ نسبت ۾ ورهائي ٿو.
(a). 50%–50% (b). 25%–25% (c). 75%–25% (d). 40%–60%

(ix). جيڪڏهن مواد ۾ هڪ عدد ٻڙي جي برابر آهي تہ پوءِ__________ معلوم نہ ڪري سگهبو.
(a). A.M. (b). G.M. (c). H.M. (d). مڌيان

(x). جيڪڏهن مواد ۾ سڀ عدد برابر آهن تہ پوءِ
(a). A.M.=G.M.=H.M. (b). وسعت = 0 (c). S.D. = 0 (d). اهي سڀئي

خلاصو

- مقداري مواد مان مراد عدد آهن ۽ ان جا ٻہ قسم آهن هڪ غير مسلسل (رڳو سچا عدد) ۽ ٻيو مسلسل مواد (حقيقي عدد)
- خاصيتي مواد مان مراد بدلجندڙ جون خاصيتون آهي ۽ ان جا ٻہ قسم آهن هڪ ناليوارو (بغير ترتيب جي) ۽ ٻيو قطاري (ترتيب وارو).
- فائديمند معلومات معلوم ڪرڻ لاءِ مواد جي تعددي ورهاست ۾ گروهہ بندي ڪئي ويندي آهي.
- تعددي ورهاست ۾ جماعتون ۽ ترتيبوار تعددون هونديون آهن.
- هڪ ٽيڪي سان بيانِ ڪيل جماعتون غير مسلسل آهن. جڏهن تہ عددن جي هڪ حد سان بيان ڪيل جماعتون، مسلسل جماعتون آهن
- ٽيلي نشان يا رقم لکڻ وارن طريقن سان مشاهدن ڪي جماعتن ۾ ورهايو ويندو آهي.
- استرج (1926) جو اصول استعمال ڪندي. جماعتن جو تعداد لهي سگهجي ٿو.
- مواد جي سڀ کان وڏي مشاهدي ۽ سڀ کان ننڍي مشاهدي جي فرق کي وسعت چئبو آهي
- هڪ جماعت ۾ جيترا مشاهدا اچي سگهن ٿا ان تعداد کي جماعتي وقفو يا ويڪر چئبو آهي
- هڪ جماعت جي شروعاتي ۽ آخري ٽيڪن کي جماعتي حدون چئبو آهي.
- ڪن بہ ٻن لڳاتار جماعتي حدن جي سراسري ڪڍڻ سان حقيقي جماعتي حدون حاصل ڪبيون آهن.
- ڪن بہ ٻن پر وارين جماعتن جي وچ واري فاصلي کي جماعتن جي وچ واري وٿي چئبو آهي.
- نسبتي ۽ في سيڪڙو تعددون ترتيبوار 0 کان 1 ۽ 0 کان 100 تائين هونديون آهن.
- هڪ مخصوص جماعت تائين، سڀني تعددن جي جوڙ اُپت کي مجموعي تعدد چئبو آهي.
- ڪالمي نقشو پر وارن مستطيلن جو گراف آهي. انهن مسطيلن جا پايا حقيقي جماعتي حدن تي هوندا آهن ۽ انهن جون اُوچائيون جماعتي تعددن سان متناسب هونديون آهن.
- تعددي گهڻ پاسو انهن ٽيڪن کي ليڪ ٽڪرن سان ملائڻ سان ٺهندو آهي جن جا x محدد جماعتي نشان هوندا آهن ۽ y محدد تعددون هونديون آهن
- ogive يا مجموعي تعددي گهڻ پاسو انهن ٽيڪن کي ملائڻ سان ٺهندو آهي. جن جا محدد آهن (مجموعي تعددون، حقيقي جماعتي حدون)
- مرڪزي رجحان جو پيمانو مواد جي اها صلاحيت آهي جنهن سان مواد هڪ ٽيڪي جي چوڌاري ميڙ ڪندو آهي
- G.M.A.M ۽ H.M سڀئي مشاهدن جي برابري تي ٻيٽل هوندا آهن.
- مڌيان ترتيب ڏنل ڊيٽا سيٽ جو سڀ کان وچيون حصو آهي.
- مڌيان جو بنياد اڪثريت وارو اصول آهي ۽ اهو سڀ کان وڌيڪ ايندڙ مشاهدو آهي.
- $A.M. \geq G.M. \geq H.M.$ جيڪڏهن مڌيان = AM تہ پوءِ مواد همشڪلي ٿيندو ٻي صورت ۾ مواد غير همشڪلي ٿيندو.
- ڪالمي نقشو استعمال ڪندي، گراف وسيلي ڪثرتي سراسري جو هنڌ ڳولي سگهجي ٿو ۽ ان جو اندازو پڻ لڳائي سگهجي ٿو
- O give جو استعمال ڪندي، گراف وسيلي مڌيان ۽ چوٿائي ڪندڙ مشاهدن جا هنڌ ڳولي سگهجن ٿا ۽ انهن جو اندازو پڻ لڳائي سگهجي ٿو.
- پکڙجڻ جي پيماني مان مراد مواد ۾ پکيڙ يا تبديلي جي مقدار هوندي آهي.
- جيڪڏهن مواد ۾ پکڙجڻ وڌيڪ آهي تہ پوءِ مواد ۾ استحڪام يا تسلسل گهٽ هوندو.
- ٻن پڇاڙي وارن مشاهدن جي فرق وسيلي وسعت مواد ۾ پکڙجڻ جي ماپ ڪندي آهي.
- غير گروهي مواد ۾ سراسري جي چوڌاري سڀني انحرافن جي جوڙ اُپت ٻڙي ٿيندو.
- AM جي چوڌاري مواد جي چورس ٽيل انحرافن جي AM کي تغير چئبو آهي. A.M جي چوڌاري مواد جي قطعي انحرافن جي AM کي سراسري يا قطعي انحراف چئبو آهي.

23 يونٽ

فيثا غورث سڌيان
PYTHAGORAS THEOREM

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي پڙهڻ کانپوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته

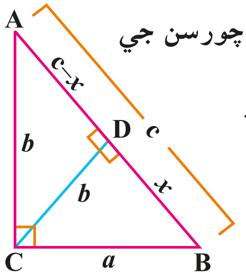
- هيٺين سڌيانن‌کي انهن جي شامل نتيجن سان گڏ سمجهن ۽ گڏيل مسئلن کي حل ڪرڻ لاءِ انهن جو استعمال ڪن
  - گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ هئپاٽينيوز جي ڊيگهه جو چورس ٻين پاسن جي ڊيگهن جي چورسن جي جوڙ اُپت جي برابر ٿيندو. (فيثاغورث سڌيان)
  - جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جي هڪ پاسي جو چورس ٻن ٻين پاسن جي چورسن جي جوڙ اُپت جي برابر هجي ته اهڙو ٽڪنڊو گوني ڪنڊ ٽڪنڊو ٿيندو. (فيثا غورث سڌيان جو عڪس)

تعارف:

فيثا غورث (Pythagoras) هڪ يوناني فلسفي ۽ رياضي دان اٽڪل 570 قبل مسيح ۾ پيدا ٿيو. هن ڪُني ڪنڊ ٽڪنڊي جي پاسن جي وچ ۾ هڪ ڏاڍو اهم تعلق دريافت ڪيو. فيثاغورثي سڌيان يا فيثا غورث سڌيان اقليدسي جاميٽري جو هڪ بنيادي تعلق آهي جيڪو ڪُني ڪنڊ ٽڪنڊي جي ٽن پاسن جي وچ ۾ آهي. هن ان تعلق کي سڌيان جي شڪل ڏني ۽ اهو سڌيان هن جي نالي تي فيثاغورث سڌيان ڪوٺبو آهي. اهو سڌيان مختلف طريقن سان ثابت ٿي سگهي ٿو. هتي اسين ان کي هم شڪل ٽڪنڊن جي تصور کي استعمال ڪندي ثابت ڪنداسين. اسين ان سڌيان جي عڪس کي به بيان ۽ ثابت ڪنداسين ۽ ان کانپوءِ انهن کي عام زندگي جي مسئلن کي حل ڪرڻ لاءِ استعمال ڪنداسين.

23.1.1 فيثا غورث سڌيان (Pythagoras Theorem):

سڌيان 23.1



ڪُني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ هئپاٽينيوز جي ڊيگهه جو چورس ٻين پاسن جي ڊيگهن جي چورسن جي جوڙ اُپت جي برابر ٿيندو.

مليل: ΔABC هڪ ڪُني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي جنهن ۾ ڪُني ڪنڊ ٽِپڪي C تي آهي.
پاسن $\overline{AC},\overline{AB}$ ۽ $\overline{BC}$ جي ڊيگهه ترتيبوار c، b ۽ a آهي.

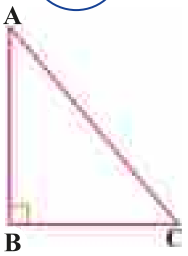
گهربل: $c^2 = a^2 + b^2$

جوڙجڪ: چوٽي C کان پاسي $\overline{AB}$ تي هڪ عمود ڪيو. فرض ڪريو ته $m\overline{BD} = x$

ثابتي:

بيان	دليل
۾ $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta CBD$	
$\angle ACB \cong \angle CDB$	$\angle CDB$ ڪُني ڪنڊ آهي (جوڙجڪ)
$\angle B \cong \angle B$	مشترڪ ڪنڊون
۽ $\angle BAC \cong \angle BCD$	$\angle B$ جا پورائو ڪنڊڙ (ڪامپليمينٽ)
$\therefore \quad \Delta ACB \sim \Delta CBD$	هم شڪل ٽڪنڊن جي وصف مطابق
اهڙي طرح $\dfrac{c}{a} = \dfrac{a}{x}$	هم شڪل ٽڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا
$cx = a^2 \quad ...(i)$	
ٻيهر ۾ $\Delta ACB \leftrightarrow \Delta ADC$	
$\angle ACB \cong \angle ADC$	$\angle ADC$ ڪُني ڪنڊ آهي (جوڙجڪ)
$\angle A \cong \angle A$	مشترڪ ڪنڊون
۽ $\angle CBA \cong \angle DCA$	$\angle A$ جا پورائو ڪنڊڙ
$\therefore \quad \Delta ACB \sim \Delta ADC$	هم شڪل ٽڪنڊن جي وصف مطابق
اهڙي طرح $\dfrac{c}{b} = \dfrac{b}{c-x}$	هم شڪل ٽڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا
$\Rightarrow \quad c(c-x) = b^2$	
يا $c^2 - cx = b^2 ...(ii)$	
$cx + c^2 - cx = a^2 + b^2$ $c^2 = a^2 + b^2$	مساوات (i) ۽ (ii) کي جوڙ ڪرڻ سان

Q.E.D



شامل نتيجو: گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ABC ۾، جنهن جي گوني ڪنڊ B تي آهي.

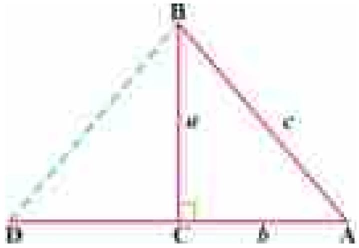
i. $(m\overline{BC})^2 = (m\overline{AC})^2 - (m\overline{AB})^2$

ii. $(m\overline{AB})^2 = (m\overline{AC})^2 - (m\overline{BC})^2$

سڏيان 23.2

(فيثا غورث سڏيان جو عڪس)

جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جي هڪ پاسي جو چورس ٻن ٻين پاسن جي چورسن جي جوڙ اُپت جي برابر هجي ته اهڙو ٽڪنڊو گوني ڪنڊ ٽڪندو ٿيندو.



مليل:

ΔABC ۾ ، $m\overline{BC} = a$ ، $m\overline{AC} = b$ ۽ $m\overline{AB} = c$

اهڙي طرح جو $a^2 + b^2 = c^2$

گهربل: ΔABC هڪ گوني ڪنڊ ٽڪندو آهي.

جوڙجڪ: $\overline{BC}$ تي هڪ عمود $\overline{CD}$ ناهيو اهڙي طرح جو $\overline{CD} \cong \overline{CA}$

ٽبڪن B ۽ D کي ملايو.

ثابتي:

بيان	دليل
ΔDCB هڪ گوني ڪنڊ ٽڪندو آهي	جوڙجڪ
$\therefore \quad (m\overline{BD})^2 = a^2 + (m\overline{DC})^2$	فيثاغورث سڏيان
$\Rightarrow \quad (m\overline{BD})^2 = a^2 + b^2$	
پر $a^2 + b^2 = c^2$	مليل
$\therefore \quad (m\overline{BD})^2 = c^2$	يڪسانيت جي متعدي خاصيت
$\therefore \quad m\overline{BD} = c$	ٻنهي پاسن جو ٻيو مول ڪڍڻ سان
هاڻي	
$\Delta DCB \leftrightarrow \Delta ACB$	
$\overline{CD} \cong \overline{CA}$	جوڙجڪ
$\overline{BC} \cong \overline{BC}$	مشترڪ پاسو
$\overline{BD} \cong \overline{AB}$	هر هڪ پاسو c جي برابر آهي. (مٿي ثابت ٿيل آهي)
$\therefore \quad \Delta DCB \cong \Delta ACB$	پ. پ. پ. ≅ پ. پ. پ
$m\angle DCB = m\angle ACB$	يڪسان ٽڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا
پر $m\angle DCB = 90^\circ$	جوڙجڪ
$\therefore \quad m\angle ACB = 90^\circ$	يڪسانيت جي متعدي خاصيت
اهڙي طرح، ABC هڪ گوني ڪنڊ ٽڪندو آهي	$\therefore \quad m\angle ACB = 90^\circ$

Q.E.D

شامل نتيجو:

فرض ڪريو ته a ، b ۽ c ڪنهن ٽڪنڊي جا پاسا آهن اهڙي طرح جو پاسو c سڀ کان ڊگهو آهي. ته پوءِ

i. جيڪڏهن $a^2+b^2=c^2$ ته پوءِ ٽڪنڊو، گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي.

ii. جيڪڏهن $a^2+b^2>c^2$ ته پوءِ ٽڪنڊو، سوڙهي ڪنڊ ٽڪنڊو آهي

iii. جيڪڏهن $a^2+b^2<c^2$ ته پوءِ ٽڪنڊو، ويڪري ڪنڊ ٽڪنڊو آهي

مثال 1:

هڪ ٽڪنڊي جي پاسن جون ماپون مليل آهن. انهن مان ڪهڙا گوني ڪنڊ ٽڪنڊن کي ظاهر ڪن ٿا.

i. $a=5\text{cm}$ ، $b=12\text{cm}$ ۽ $c=13\text{cm}$

ii. $a=6\text{cm}$ ، $b=7\text{cm}$ ۽ $c=8\text{cm}$

iii. $a=9\text{cm}$ ، $b=12\text{cm}$ ۽ $c=15\text{cm}$

حل:

i. جيئن ته $(13)^2=(5)^2+(12)^2$

يا $169=25+144$

$169=169$

فيثا غورث سڌيان جي عڪس مطابق، a ، b ۽ c گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جا پاسا آهن.

ii. جيئن ته $(8)^2\neq(6)^2+(7)^2$

يعني ته $64\neq 36+49$

يا $64\neq 85$

فيثا غورث سڌيان جي عڪس مطابق، a ، b ۽ c گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جا پاسا نه آهن.

iii. جيئن ته $(15)^2=(12)^2+(9)^2$

$225=144+81$

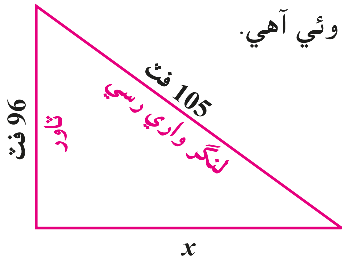
$225=225$

فيثا غورث سڌيان جي عڪس مطابق، a ، b ۽ c گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جا پاسا آهن.

مثال 2:

هڪ ٽاور لاءِ لنگر واري رسي لڳائڻ جي ضرورت آهي. ٽاور جي اُوچائي 96 فٽ آهي.
لنگر واري رسي 105 فٽ ڊگهي آهي معلوم ڪريو ته اها ٽاور کان ڪيترو پري لڳائڻي پوندي:

حل:



فرض ڪريو ته لنگر واري رسي ٽاور کان x فٽ جي فاصلي تي لڳائي وئي آهي.
فيثا غورث سڌيان جي مطابق

$$(105)^2=(96)^2+(x)^2$$

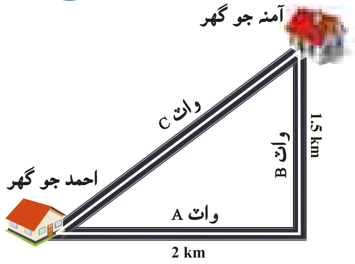
$$\Rightarrow\quad 11025=9216+x^2$$

$$\Rightarrow\quad x^2=1809$$

$$\Rightarrow\quad x=\sqrt{1809}=42.53 \text{ فٽ}$$

اهڙي طرح گهربل فاصلو لڳ ڀڳ 42.53 فٽ آهي.

مثال 3:



آمنہ جي گھر کان احمد جي گھر وڃڻ لاءِ ٻہ رستا آهن. هڪ رستو واٽ C وارو آهي ۽ ٻيئي رستي لاءِ 2 km واري واٽ A کان ٿيندي 1.5 km واري واٽ B ڪٽبي. معلوم ڪريو تہ سڌي واٽ C وارو رستو ڪيترو ننڍو آهي. A ۽ B جي وچ واري ڪند 90^o آهي جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.

حل: فرض ڪريو تہ واٽ C جي ڊيگھ x آهي

فيثا غورث سڌيان جي مطابق

$$x^2 = (2)^2 + (1.5)^2$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{(2)^2 + (1.5)^2} = \sqrt{6.25} = 2.5\text{km}$$

ٻيو رستو استعمال ڪندي، هن کي هي فاصلو طي ڪرڻو پوندو: $2 + 1.5 = 3.5\text{km}$

انهن ٻنهي رستن جي وچ ۾ فرق $= 3.5 - 2.5 = 1\text{km}$

مشق 23

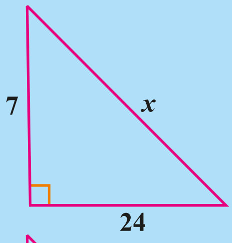
1. ٽڪنڊي جي پاسن جون ماپون هيٺ ڏنل آهن تصديق ڪريو تہ ٽڪنڊو ڳوني ڪند ٽڪنڊو آهي.

i. $a = 16, b = 30, c = 34$ ii. $a = 6, b = 8, c = 10$

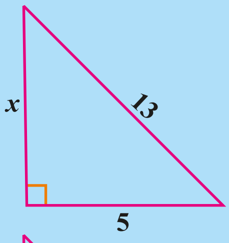
iii. $a = 15, b = 20, c = 25$ iv. $a = 13, b = \sqrt{56}, c = 15$

2. هيٺين شڪلين ۾ نامعلوم رقمون لهو.

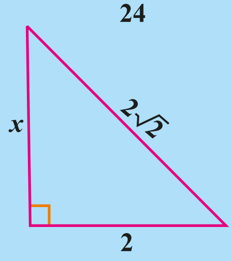
i.



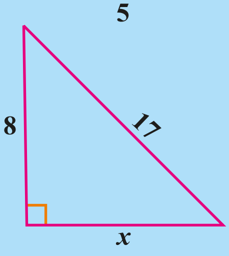
ii.



iii.



iv.

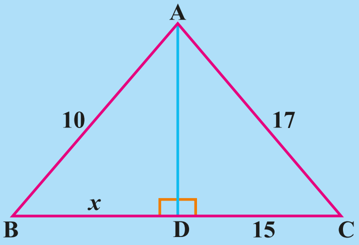


3. هڪ ٽڪنڊي جي ٽن پاسن جون ماپون 9.5cm، 7.5cm ۽ $x$cm آهن. x جي ڪھڙي قيمت تي اهي پاسا ڳوني ڪند ٽڪنڊي کي ظاهر ڪندا.

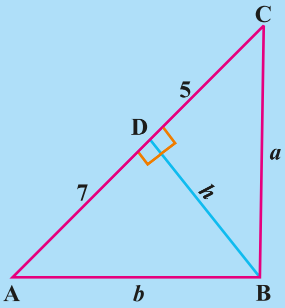
4. ABC هڪ ٻيور پاسو ٽڪنڊو آهي جنهن ۾ $m\overline{AB} = m\overline{AC} = 12\text{cm}$ ۽ $m\overline{BC} = 10\text{cm}$. A کان $\overline{BC}$ تائين عمودي فاصلو لهو.

5. هڪ ڏاڪڻ جو هيٺيون حصو (پايو) پٽ کان 6 فٽن جي فاصلي تي آهي جيڪڏهن ڏاڪڻ جو مٿاهون حصو (چوٽي) پٽ تي 8 فٽن جي اُوچائي تي رکيل آهي تہ پوءِ ڏاڪڻ جي ڊيگھ لهو.

6. پاسي واري شڪل ۾ x جو ملھ لھو.



7. ΔABC ۾ $\angle ADB$ ھڪ گوني ڪنڊ آھي جيئن پر واري شڪل ۾ ڏيکاريل آھي. h،a ۽ b جي ڊيگھ لھو جيڪڏھن ايڪا $m\overline{CD}=5$ ۽ ايڪا $m\overline{AD}=7$.



8. ھڪ مستطيلي تيراڪي لاءِ تلاءُ جا پاسا 50m ۽ 30m ڊگھا آھن ٻن سامھون وارن ڪنڊن چوٽين جي وچ واري ڊيگھ ڇا آھي.

9. ٽپور پاسي، ٽڪنڊي جي ھر ھڪ پاسي جي ڊيگھ 8 ايڪا آھي. ڪنھن بہ ھڪ عمود جي ڊيگھ لھو.

10. ھڪ ٽڪنڊي جي پاسن جي ڊيگھ x،$x+4$ ۽ 20 آھي جيڪڏھن سڀ کان ڊگھي پاسي جي ڊيگھ 20 آھي x جون ڪھڙيون قيمتون گوني ڪنڊ ٽڪنڊو ناھينديون.

11. ھڪ منتظم 18m سڌو اوڀر ڏانھن وڃي ٿو ۽ ان ڪانپوءِ 24m سڌو اُتر ڏانھن وڃي ٿو. شروعاتي ٽِڪي کان ھن جي ھاٽوڪي ھنڌ تائين فاصلو لھو.

12. ھڪ مستطيل ABCD ۾ $m\overline{BC}+m\overline{CD}=17cm$ ۽ $m\overline{BD}+m\overline{AC}=26cm$. مستطيل جي ڊيگھ ۽ ويڪر معلوم ڪريو.

جائزي واري مشق 23

1. دُرست جواب ڳوليو.

i. مستطيل جي اُريب جي ماپ 6.5cm آھي جيڪڏھن ان جي ويڪر 2.5cm آھي تہ پوءِ ان جي ڊيگھ ________ آھي.

(a) 9cm (b) 4cm
(c) 6cm (d) 3cm

ii. ھيٺين مان ڪھڙا گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جا پاسا آھن

(a) 3, 4, 5 (b) 2, 3, 4
(c) 5, 6, 7 (d) 4, 5, 6

iii. ھڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي وڏي ۾ وڏي ڪنڊ ________ آھي:
In
(a) 100º (b) 90º
(c) 80º (d) 110º

iv. گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾، هئپاٽينيوز ________ جي سامهون وارو پاسو آهي.

(a) سوڙهي ڪنڊ (b) گوني ڪنڊ

(c) ويڪري ڪنڊ (d) ڪوبه نه

v. جيڪڏهن ڪنهن گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جا پاسا a، b، c آهن ۽ سڀ کان وڏو پاسو c آهي ته پوءِ

(a) $c^2 = a^2 + b^2$ (b) $b^2 = c^2 + a^2$

(c) $a^2 = b^2 + c^2$ (d) $c^2 = a^2 - b^2$

vi. جيڪڏهن گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي ٻن پاسن جون ڊيگهون 5cm ۽ 12cm آهن ته پوءِ هئپاٽينيوز __________ آهي:

(a) 16 (b) 15

(c) 14 (d) 13

vii. جيڪڏهن ٻيور پاسي گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جو هئپاٽينيوز $3\sqrt{2}$cm آهي ته پوءِ هر هڪ پاسي جي ڊيگهه______ آهي.

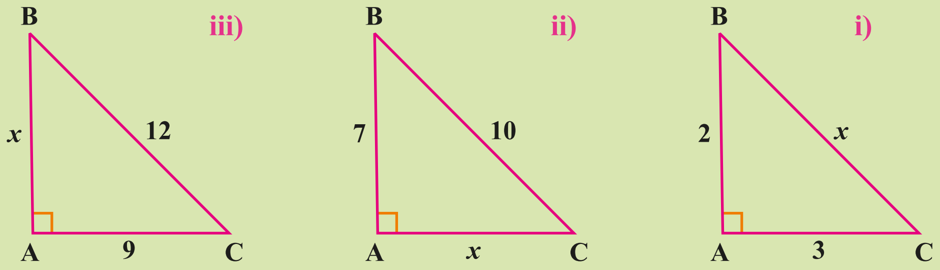
(a) 2cm (b) 5cm

(c) 3cm (d) 1cm

2. فيثاغورث سڌيان جي وضاحت ڪريو.

3. هڪ 25m ڊگهي ڏاڪڻ، اُڀي ڀت تي رکيل آهي. ڏاڪڻ جو پايو. ڀت کان 7m جي فاصلي تي آهي. معلوم ڪريو ته ڏاڪڻ ڀت تي ڪيتري اُوچائي تي رکيل آهي.

4. هينين مان هر هڪ شڪل ۾ نامعلوم رقمن کي معلوم ڪريو.



خلاصو

- گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾، هئپاٽينيوز جي ڊيگهه جو چورس ٻين پاسن جي ڊيگهن جي چورسن جي جوڙ اُيت جي برابر آهي.
- جيڪڏهن ٽڪنڊي جي هڪ پاسي جو چورس ٻين پاسن جي چورسن جي جوڙ اُيت جي برابر آهي ته پوءِ ٽڪنڊو گوني ڪنڊ ٽڪنڊو ٿيندو.

يونٽ 24

نسبت ۽ تناسب

RATIO AND PROPORTION

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي پڙهڻ کانپوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته

- هينيان سڌيان انهن جي شامل نتيجن سان گڏ سمجهن ۽ گڏيل مسئلن کي حل ڪرڻ لاءِ انهن جو استعمال ڪن.
  - ٽڪنڊي جي هڪ پاسي جي پورروچوٽ، ليڪ جيڪا ٻين ٻن پاسن کي ڪپي ٿي، اها ٻنهي پاسن کي تناسب ۾ ورهائي ٿي.
  - جيڪڏهن ڪا ليڪ ڪنهن ٽڪنڊي جي ٻن پاسن کي متناسب ٽڪرن ۾ ورهائي ٿي ته پوءِ اها ٽڪنڊي جي ٽين پاسي جي پورروچوٽ ٿيندي.
  - ٽڪنڊي جي ڪنهن ڪنڊ جو اندريون اڌ ڪندڙ سامهون واري پاسي کي، ڪنڊ جي پاسن جي ڊيگهه جي نسبت ۾ ورهائي ٿو.
  - جيڪڏهن ٻه ٽڪنڊا هم شڪل آهن، ته مطابقت رکندڙ پاسن جون ڊيگهون متناسب هونديون.

24.1 نسبت ۽ تناسب (Ratio and proportion):

هن باب ۾، اسين ٽڪنڊن جي هم شڪلي سان گڏوگڏ ٽڪنڊي جي پاسن جي نسبت ۽ تناسب سان واسطو رکندڙ سڌيان پڙهنداسين انهي کري سڀ کان اڳ ۾ اسان کي نسبت، تناسب ۽ هم شڪلي جي تصورن جو دؤر ڪرڻو آهي.

نسبت (Ratio):

ساڳي قسم ۽ ساڳي ايڪن وارين، مقدارن جي ڀيٽ کي نسبت چئبو آهي a ۽ b جي نسبت کي $a:b$ يا $\frac{a}{b}$ سان ظاهر ڪبو آهي جڏهن ته a کي مُنڍ (Antecedent) ۽ b کي پُڇڙ (Consequent) چئبو آهي.

مثال طور:

25 لٽر ۽ 5 لٽر جي نسبت $25:5$ يا $5:1$ آهي.

تناسب (Proportion):

بن نسبتن جي برابري کي تناسب چئبو آهي

جيڪڏهن ٻه نسبتون $a:b$ ۽ $c:d$ برابر آهن. ته پوءِ اسين هن ريت لکنداسين:$a:b=c:d$ يا $a:b::c:d$

۽ ان کي تناسب چوندا آهيون

تناسب $a:b=c:d$ ۾ a ۽ d کي ٻاهريان رکن (Extremes) جڏهن ته b ۽ c کي اندريان رُکن (Means) چئبو آهي.

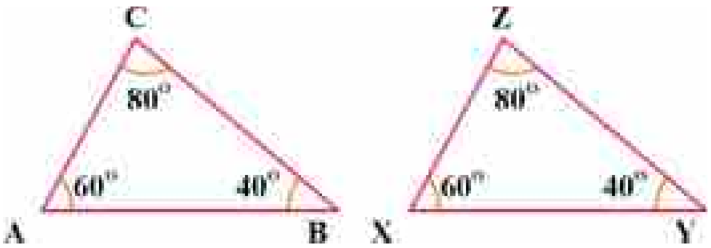
تناسب ۾، وچين رکنن جي ضرب اُپت ٻاهرين رکنن جي ضرب اُپت جي برابر هوندي آهي.

هم شڪل ٽڪنڊا (Similar Triangles):

ٻه ٽڪنڊا ABC ۽ PQR هم شڪل ٽڪنڊا ڪوٺبا جيڪڏهن انهن جون مطابقت رکندڙ ڪندون يڪسان هجن.

نشانين ۾ اسين هن ريت لکنداسين $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

ڏنل شڪل ۾ $\Delta ABC \sim \Delta XYZ$



هم شڪل ٽڪنڊن لاءِ هيٺيون سڌيان ڏاڍو اهم آهي.

” جيڪڏهن ٻه ٽڪنڊا هم شڪل آهن ته پوءِ انهن جا مطابقت رکندڙ پاسا متناسب هوندا“

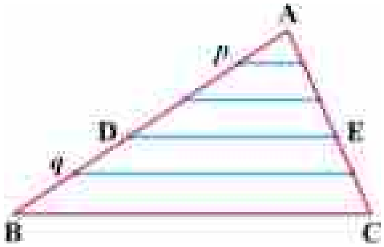
اسين اهو سڌيان آخر ۾ ثابت ڪنداسين

سڌيان 24.1

ٽڪنڊي جي هڪ پاسي جي پورروچوٽ، ليڪ جيڪا ٻين ٻن پاسن کي ڪپي ٿي، اها ٻنهي پاسن کي تناسب ۾ ورهائي ٿي.

مليل: ΔABC ۾ $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ۽ $\overline{DE}$ ٻين پاسن $\overline{AB}$ ۽ $\overline{AC}$ کي ترتيبوار ٽپڪن D ۽ E تي ڪپي ٿي.

گهربل: $\dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}} = \dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}}$



جوڙجڪ: ڏيگهه جو ايڪو اهڙي طرح ڪنيو وڃي جو $p = m\overline{AD}$ ۽ $q = m\overline{BD}$ ايڪا جڏهن ته p ۽ q قدرتي عدد آهن. $\overline{AD}$ کي p يڪسان ليڪ ٽڪرن ۾ ورهايو ۽ $\overline{BD}$ کي q يڪسان ليڪ ٽڪرن ۾ ورهايو.

انهي ڪري $\dfrac{p}{q} = \dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}}$ ورهاست وارن ٽپڪن مان $\overline{BC}$ جي پور وچوٽ ليڪون ڪڍيون وڃن.

ثابتي:

بيان	دليل
پورروچوٽ ليڪن سان $\overline{AD}$ کي p يڪسان ٽڪرن ۾ ورهايو ويو آهي	جوڙجڪ
$\overline{AE}$ پڻ ساڳي پور وچوٽ ليڪن سان p يڪسان ٽڪرن ۾ ورهايو ويو آهي	پورو چوٽ ليڪون ڪپيندڙ ليڪ تي برابر تعداد ۾ يڪسان ٽڪر ناهين ٿيون
ساڳي ريت $\overline{EC}$ پڻ q يڪسان ٽڪرن ۾ ورهايو ويو آهي	جيئن ته $\overline{BD}$ پورچوٽ ليڪن سان q يڪسان ٽڪرن ۾ ورهايو ويو آهي.
هاڻي $\dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}} = \dfrac{p}{q}$	جيئن ته $\overline{AE}$ ۽ $\overline{EC}$ ترتيبوار p ۽ q يڪسان ٽڪرن ۾ ورهايل آهن (متي ثابت ٿيل آهي)
پر $\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \dfrac{p}{q}$	جوڙجڪ
انهي ڪري $\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$	مساوات جي متعدي خاصيت

Q.E.D

شامل نتيجو 1:

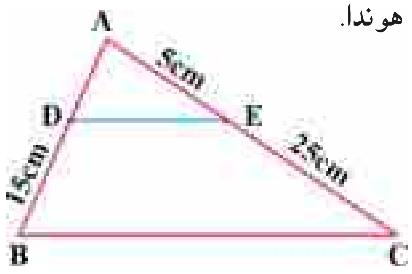
متين سڌيان جي شڪل مان اهو ثابت ڪري سگهجي ٿو ته $\dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{EC}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DB}}$

شامل نتيجو 2:

متي سڌيان جي شڪل مان اهو ثابت ڪري سگهجي ٿو ته $\frac{m\overline{AE}}{m\overline{AC}} = \frac{m\overline{AD}}{m\overline{AB}}$.

شامل نتيجو 3:

جيڪڏهن هڪ ليڪ ٽپور پاسي ٽڪنڊي جي پايي جي پورو چوٽ آهي ۽ ٻين ٻن يڪسان پاسن کي ڪپي ٿي ته پوءِ انهن ٻنهي پاسن تي مطابقت رکندڙ ٽڪر يڪسان هوندا.



مثال:

پر واري شڪل ΔABC ۾ $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

$m\overline{AD}$ لهو جيڪڏهن $m\overline{AE} = 5cm$ ، $m\overline{BD} = 15cm$

۽ $m\overline{CE} = 25cm$.

حل:

$$\because \quad \overline{DE} \parallel \overline{BC}$$

$$\therefore \quad \frac{m\overline{AD}}{m\overline{BD}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$$

يعني ته $\frac{m\overline{AD}}{15} = \frac{5}{25}$

$$\Rightarrow \quad m\overline{AD} = \frac{15 \times 5}{25}$$

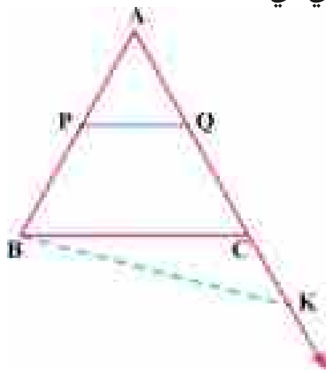
$$\Rightarrow \quad m\overline{AD} = 3cm$$

سڌيان 24.2

جيڪڏهن ڪا ليڪ ڪنهن ٽڪنڊي جي ٻن پاسن کي متناسب ٽڪرن ۾ ورهائي ٿي ته پوءِ اها ٽڪنڊي جي ٽيئن پاسي جي پورو چوٽ ٿيندي.

مليل: ΔABC ۾، $\overline{AB}$ ۽ $\overline{AC}$ کي $\overline{PQ}$ ترتيبوار ٽبڪن P ۽ Q تي ڪپي ٿي.

اهڙي طرح جو $\frac{m\overline{AQ}}{m\overline{QC}} = \frac{m\overline{AP}}{m\overline{PB}}$



گهربل: $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$

جوڙجڪ: جيڪڏهن $\overline{PQ}$ پورو چوٽ نه آهي جي ته $\overline{BC}$ ته $\overline{BK}$

ڪيو جيڪو $\overrightarrow{AC}$ سان ٽبڪي K تي ملي جيڪو C کان مختلف آهي.

اهڙي طرح جو $\overline{PQ} \parallel \overline{BK}$

ثابتي:

دليل	بيان
جوڙجڪ	ΔABK ۾ $\overline{PQ} \parallel \overline{BK}$
ٽڪنڊي جي هڪ پاسي جي پورروچوٽ ليڪ ٻين پاسن کي تناسب ۾ ورهائي ٿي	$\frac{m\overline{AP}}{m\overline{PB}} = \frac{m\overline{AQ}}{m\overline{QK}}$
مليل	پر $\frac{m\overline{AP}}{m\overline{PB}} = \frac{m\overline{AQ}}{m\overline{QC}}$
مساوات جي متعدي خاصيت	انهي ڪري $\frac{m\overline{AQ}}{m\overline{QK}} = \frac{m\overline{AQ}}{m\overline{QC}}$
برابر نسبتن ۾ جيڪڏهن مُنڍ برابر آهن ته پوءِ پچڙ به برابر هوندا.	$\Rightarrow m\overline{QK} = m\overline{QC}$
يڪسان ٽڪرن جي وصف مطابق	يعني $\overline{QK} \cong \overline{QC}$
Q ٻنهي ۾ مشترڪ ٽبڪو آهي.	هي تڏهن ممڪن آهي جڏهن ٽبڪا K ۽ C نهڪي ايندا
اسان جو مفروضو غلط آهي	انهي ڪري $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$

Q.E.D

شامل نتيجو:

ڪنهن ٽڪنڊي جي ٻن پاسن جي وچين ٽبڪن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر ٽيئن پاسي جي پورروچوٽ ٿيندو.

مثال: ڀر واري شڪل ۾، ΔABC جي ٻن پاسن $\overline{AC}$ ۽ $\overline{BC}$ کي $\overline{DE}$ ترتيبوار ٻن ٽبڪن D ۽ E تي ڪپي ٿو. پايي واريون ڪندون A ۽ B لهو جيڪڏهن $m\angle ADE = 130°$ ۽ $m\angle BED = 100°$ جڏهن ته پاسن جون ڊيگهون مليل آهن جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.

حل:

جيئن ته $\angle ADE$ ۽ $\angle CDE$ سپليمينٽري آهن.

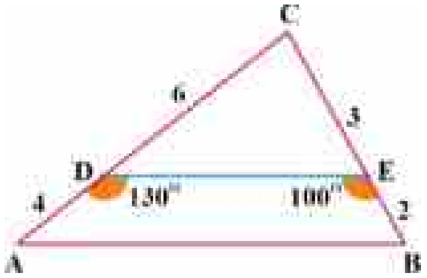
تنهنڪري $m\angle CDE = 50°$ $(\because m\angle ADE = 130°)$

ساڳي ريت

$m\angle DEC = 80°$

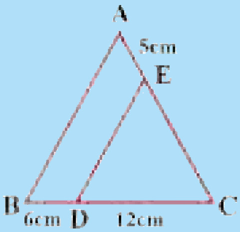
$\because \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ يعني ته $\overline{DE}$ ٻن پاسن $\overline{AC}$ ۽ $\overline{BC}$ کي تناسب ۾ ڪپي ٿو

$\therefore \overline{DE} \parallel \overline{AB}$

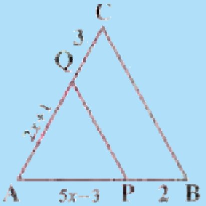


انهي ڪري $m\angle A = m\angle CDE$ چاڪاڻ تہ پورروچوٽ ليڪن جون مطابقت رکندڙ ڪندون برابر هونديون آهن
يعني تہ
$$m\angle A = 50°$$
ساڳي ريت
$$m\angle B = m\angle DEC = 80°$$

مشق 24.1



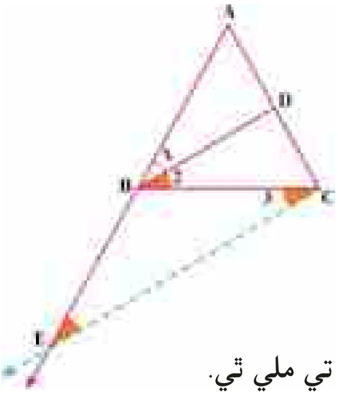
1. ΔABC ۾ $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ، $m\overline{CE}$ لهو جيڪڏهن
$m\overline{AE} = 5cm$ ۽ $m\overline{BD} = 6cm$ ، $m\overline{DC} = 12cm$



2. ΔABC ۾ $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ، x جوملهه لهو جيڪڏهن
$m\overline{AQ} = 2x+1$ ، $m\overline{PB} = 2$ ، $m\overline{AP} = 5x-3$ ۽
$m\overline{QC} = 3$
3. ثابت ڪريو تہ ٽرئپينزيم جي پورروچوٽ پاسن جي پورروچوٽ ڪڍيل ليڪ غير پورروچوٽ پاسن کي تناسب ۾ ڪپي ٿي.
4. ثابت ڪريو تہ هڪ ٽڪنڊي جي ڪنهن پاسي جي وچين ٽبڪي مان ڪڍيل ليڪ جيڪا ٻيئي پاسي جي پورروچوٽ هجي تہ اها ٽيئن پاسي کي اڌ ڪندي.
5. ثابت ڪريو تہ ٽرئپيزيم جي ٻن غير پورروچوٽ پاسن کي تناسب ۾ ڪپيندڙ ليڪ ٽيئن پاسي جي پورو چوٽ هوندي.

سڌيان 24.3

ٽڪنڊي جي ڪنهن ڪند جو اندريون اڌ ڪندڙ سامهون واري پاسي کي، ڪند جي پاسن جي ڊيگهہ جي نسبت ۾ ورهائي ٿو.



مليل:
ΔABC جي $\angle ABC$ جو اڌ ڪندڙ $\overline{BD}$ آهي.
يعني تہ
$$<1 \cong <2$$
گهربل:
$$\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DC}} = \frac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}}$$
جوڙجڪ:
$\overline{BD}$ جي پورروچوٽ ليڪ $\overrightarrow{CE}$ ڪڍو جيڪا $\overrightarrow{AB}$ سان ٽبڪي E تي ملي ٿي.

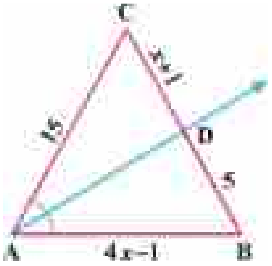
ثابتي:

بيان	دليل
$\because \quad \overline{EC} \parallel \overline{BD}$	جوڙجڪ
$\therefore \quad m\angle E = m\angle 1 \ldots (i)$	پورروچوٽ ليڪن جون نسبتي ڪندون
$m\angle 2 = m\angle 3$	پورروچوٽ ليڪن جون متبادل ڪندون مليل
پر $m\angle 1 = m\angle 2$	
تنھنڪري $m\angle 1 = m\angle 3$	مساوات جي متعدي خاصيت
$m\angle E = m\angle 3$	مساوات (i) جو استعمال ڪندي
ΔBCE ۾	ٽڪنڊي جي يڪسان ڪندن جا سامھون وارا
$\overline{BC} \cong \overline{BE}$	پاسا يڪسان ھوندا آھن.
ΔACE ۾	
$\because \quad \overline{BD} \parallel \overline{EC}$	جوڙجڪ
$\therefore \quad \dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{DC}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{BE}}$	ٽڪنڊي جي ھڪ پاسي جي پورروچوٽ ليڪ بين پاسن کي نسبت ۾ ورھائي ٿي.
يا	
$\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{DC}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}}$	$\overline{BC} \cong \overline{BE}$ (متي ثابت ٿيو)

Q.E.D

شامل نتيجو: جيڪڏھن ٽڪنڊي جي ڪنھن ڪند جو اندريون اڌ ڪندڙ سامھون واري پاسي کي اڌ ڪري ته ٽڪنڊو ٻيور پاسو ٽڪنڊو ھوندو.

مثال:



پر واري شڪل ۾ ΔABC جي ڪند $\angle A$ جو اڌ ڪندڙ $\overrightarrow{AD}$ آھي. x جو ملھ لھو جيڪڏھن $m\overline{AC} = 15$ cm ، $m\overline{AB} = 4x-1$ cm ، $m\overline{CD} = x+1$ cm ۽ $m\overline{BD} = 5$cm ٽڪنڊي جي قسم پڻ ٻڌايو جڏھن ته $x \in N$

حل:

$\because$ $\angle A$ جو اڌ ڪندڙ $\overrightarrow{AD}$ آھي

$$\therefore \quad \frac{m\overline{CD}}{m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}}$$

يعني ته
$$\frac{x+1}{5} = \frac{15}{4x-1}$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 - x + 4x - 1 = 75$$
$$\Rightarrow \quad 4x^2 + 3x - 76 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 4x^2 + 19x - 16x - 76 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x(4x+19) - 4(4x+19) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (x-4)(4x+19) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x - 4 = 0 \quad \text{يا} \quad 4x + 19 = 0$$

$\Rightarrow \quad x = -\dfrac{19}{4}$	$\Rightarrow \quad x = 4$
$\because \quad -\dfrac{19}{4} \notin N$	

$\therefore$ اسين $\dfrac{-19}{4}$ کي نظر انداز ڪنداسين

انهيءَ ڪري $x = 4$

هاڻي

$$m\overline{AB} = 4x - 1$$
$$= 4 \times 4 - 1$$
$$= 15$$

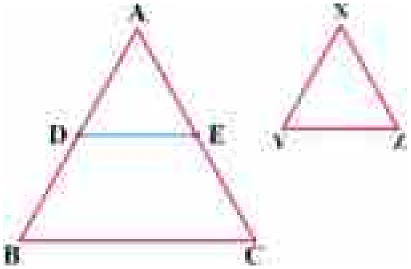
$\because \quad m\overline{AB} = m\overline{AC} = 15 \text{ cm}$

۽ $m\overline{BC} = x + 1 + 5 = 10 \text{ cm}$

$\therefore \quad \Delta ABC$ ٻيور پاسو ٽڪنڊو آهي.

سڌيان 24.4

جيڪڏهن ٻه ٽڪنڊا هم شڪل آهن، ته مطابقت رکندڙ پاسن جون ڊيگهون متناسب هونديون.



مليل: ΔABC ۽ ΔXYZ هم شڪل ٽڪنڊا آهن.

يعني ته $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta XYZ$ ۾

$\angle A \cong \angle X$

$\angle B \cong \angle Y$

۽ $\angle C \cong \angle Z$

گهربل:

$$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{XY}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{YZ}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{XZ}}$$

جوڙجڪ:

$\overline{AB}$ مان، $\overline{XY} \cong \overline{AD}$ ڪپيو ۽ $\overline{AC}$ مان $\overline{XZ} \cong \overline{AE}$ ڪپيو. $\overline{DE}$ کي ناهيو.

ثابتي:

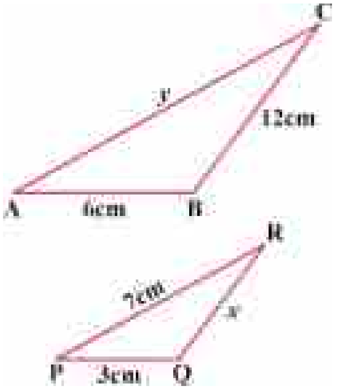
بيان	دليل
$\Delta ADE \leftrightarrow \Delta XYZ$ ۾	
$\overline{AD} \cong \overline{XY}$	جوڙجڪ
$\angle A \cong \angle X$	مليل
$\overline{AE} \cong \overline{XZ}$	جوڙجڪ
$\Delta ADE \cong \Delta XYZ$	پ. ڪ. پ مفروضو
$\angle ADE \cong \angle Y$	يڪسان ٽڪنڊن جون مطابقت رکندڙ ڪنڊون
پر $\angle B \cong \angle Y$	مليل
تنهنڪري $\angle ADE \cong \angle B$	متعدي خاصيت
انهي ڪري	

$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$	نسبتي ڪندون $\angle ADE$ ۽ $\angle B$ يڪسان آهن.
$\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AD}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{AE}}$	سڌيان 1 (شامل نتيجو)
يا $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{XY}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{XZ}}$ ...(i)	$m\overline{AE} = m\overline{XZ}$ ۽ $m\overline{AD} = m\overline{XY}$
ساڳي ريت $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{XY}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{YZ}}$ ...(ii)	متئين طريقي سان
انهي ڪري $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{XY}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{YZ}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{XZ}}$	(i) ۽ (ii) مان

Q.E.D

شامل نتيجو:
ٻن ٽڪنڊن جي مطابقت ۾ جيڪڏهن هڪ ٽڪنڊي جون ٻہ ڪندون ٻيئي ٽڪنڊي جي ٻن ڪندن سان يڪسان هجن تہ پوءِ انهن جا مطابقت رکندڙ پاسا تناسب ۾ هوندا.

مثال 1:
ڏنل شڪل ۾، ΔABC ۽ ΔPQR هم شڪل آهن.
x ۽ y جا مُلهہ لهو جيڪڏهن $m\overline{AB} = 6cm$ ، $m\overline{BC} = 12cm$ ،
$m\overline{PQ} = 3cm$ ۽ $m\overline{PR} = 7cm$



حل:
ΔABC ۽ ΔPQR هم شڪل ٽڪنڊا آهن.
$\therefore$ انهن جون مطابقت رکندڙ ڪندون برابر آهن.

يعني تہ $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{QR}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{PR}}$

$\Rightarrow \dfrac{6}{3} = \dfrac{12}{x} = \dfrac{y}{7}$ (ڏنل ماپن جو استعمال ڪندي)

$\Rightarrow \dfrac{6}{3} = \dfrac{12}{x}$ ۽ $\dfrac{6}{3} = \dfrac{y}{7}$

يا $2 = \dfrac{12}{x}$ يا $2 = \dfrac{y}{7}$

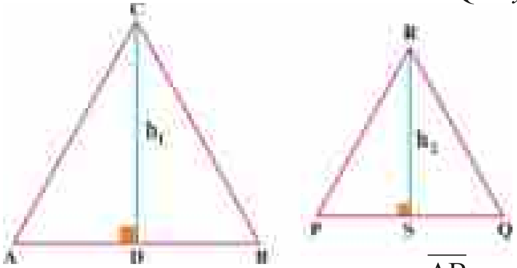
يا $2x = 12$ يا $14 = y$

$\Rightarrow x = 6$ cm يا $y = 14$ cm

انهي ڪري x ۽ y جا ملهہ ترتيبوار 6cm ۽ 14cm آهن.

مثال 2:

ڏنل شڪل ۾، ΔABC ۽ ΔPQR هم شڪل آهن ۽ $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}}=\frac{x}{y}$ جڏهن ته h_1 ۽ h_2 ڏنل ٽڪنڊن جون اُوچائيون آهن.



ثابت ڪريو ته:

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{\Delta ABC \text{ جي ايراضي}}{\Delta PQR \text{ جي ايراضي}}$$

ثابتي:

اسان وٽ آهي $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}}=\frac{x}{y}$

$\because$ ΔABC ۽ ΔPQR هم شڪل آهن

$\therefore$ $\frac{m\overline{AC}}{m\overline{PR}}=\frac{m\overline{BC}}{m\overline{QR}}=\frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}}=\frac{x}{y}$ ... (i)

$\Delta ADC \leftrightarrow \Delta PSR$ ۾

$m\angle A=m\angle P$ (ڏنل)

$\because$ $m\angle D=m\angle S=90^\circ$ ۽

$\therefore$ $\Delta ADC \sim \Delta PSR$

انهي ڪري

$\frac{h_1}{h_2}=\frac{m\overline{AC}}{m\overline{PR}}=\frac{x}{y}$ (مساوات (i) جو استعمال ڪندي)

هاڻي

$$\frac{\Delta ABC \text{ جي ايراضي}}{\Delta PQR \text{ جي ايراضي}}=\frac{x^2}{y^2}=\frac{\frac{1}{2}\left(m\overline{AB}\right)h_1}{\frac{1}{2}\left(m\overline{PQ}\right)h_2}$$

$$=\frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}}\times\frac{h_1}{h_2}$$

$$=\frac{x}{y}\times\frac{x}{y} \qquad \left(\because \frac{h_1}{h_2}=\frac{x}{y} \text{ ۽ } \frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}}=\frac{x}{y}\right)$$

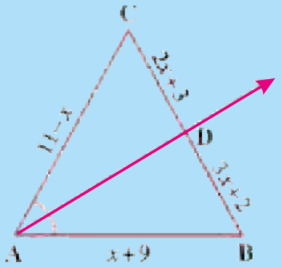
$$=\frac{x^2}{y^2}$$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

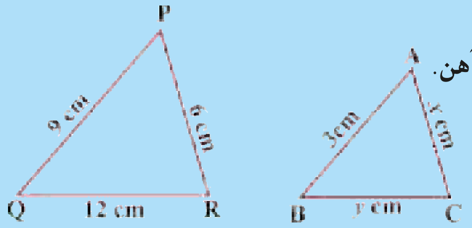
مٿين مثال مان اسين نتيجو ڪيون ٿا ته

ٻن هم شڪل ٽڪنڊن جي ايراضين جي نسبت، ڪن به ٻن مطابقت رکندڙ پاسن جي نسبت جي چورس جي برابر آهي.

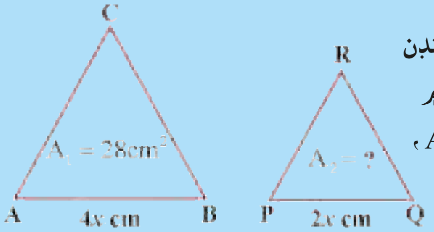
مشق 24.2



1. پاسي واري شڪل ۾، ΔABC جي $\angle A$ جو اڌ ڪندڙ $\overrightarrow{AD}$ آهي. x جو ملهه لهو جيڪڏهن $m\overline{AB}=x+9$ ، $m\overline{AC}=11-x$ ، $m\overline{CD}=2x+3$ ۽ $m\overline{BD}=3x+2$. ٽڪنڊي جي قسم پڻ ٻڌايو.



2. پاسي واري شڪل ۾، ΔABC ۽ ΔPQR هم شڪل آهن. x ۽ y جو ملهه لهو جيڪڏهن پاسن جون ڊيگهون شڪل ۾ ڏيکاريل آهن.



3. فرض ڪريو ته A_1 ۽ A_2 ترتيبوار ٻن هم شڪل ٽڪنڊن ΔABC ۽ ΔPQR جون ايراضيون آهن جيئن ته شڪل ۾ ڏيکاريل آهي. معلوم ڪريو A_2 جيڪڏهن $A_1 = 28cm^2$ ، $m\overline{AB}=4\,x cm$ ۽ $m\overline{PQ}=2\,x cm$.

4. ٻن هم شڪل ٽڪنڊن جي مطابقت رکندڙ پاسن جي نسبت $2:x-5$ ۽ انهن جي ايراضين جي نسبت $1:9$ آهي. x جو ملهه لهو.

5. ثابت ڪريو ته ٻن گوني ڪنڊ ٽڪنڊن جا پاسا متناسب هوندا جيڪڏهن هڪ ٽڪنڊي جي سوڙهي ڪنڊ ٻئي جي سوڙهي ڪنڊ جي برابر هجي.

6. هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ گوني ڪنڊ کان هئپاٽينيوز تي ڪڍيل عمود ٽڪنڊي کي ٻن ٽڪنڊن ۾ ورهائي ٿو. ثابت ڪريو. ته انهن مان هر هڪ اصل ٽڪنڊي جو هم شڪل آهي.

جائزي واري مشق 24

1. دُرست جواب تي نشان لڳايو

i. تناسب ۾، وچين رُڪنن جي ضرب اُپت ٻاهرين رُڪنن جي______ جي برابر آهي.

(a) جوڙ اُپت (b) فرق (c) وند اُپت (d) ضرب اُپت

ii. ______ هميشه هم شڪل هوندا آهن.

(a) گوني ڪند ٽڪنڊا (b) اٽپور پاسو ٽڪنڊا (c) سوڙهي ڪند ڪنڊا (d) ٽپور پاسو ٽڪنڊا

iii. ٽڪنڊن جي هم شڪلي جي علامت_____ آهي.

(a) $=$ (b) $\cong$ (c) $\sim$ (d) $\leftrightarrow$

iv. جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جي پايي جي پوروچوٽ ليڪ هڪ پاسي کي $3:2$ ۾ ورهائي ٿي ته پوءِ اها ٻيئي پاسي کي ______ ۾ ورهائيندي.

(a) 3:2 (b) 2:3 (c) 2:6 (d) 5:3

v. جيڪڏهن هڪ ليڪ ٽڪنڊي جي ٻن پاسن کي ساڳي نسبت ۾ ڪپي ٿي ته پوءِ اها ٻيئي پاسي جي ______ هوندي.

(a) پوروچوٽ ليڪ (b) غير پوروچوٽ ليڪ (c) نهڪندر ليڪ (d) ڪوبہ نہ

vi. ΔABC ۾ $\angle A$ جو اڌ ڪندڙ $\overline{BC}$ کي ______ نسبت ۾ ورهائي ٿو جيڪڏهن $m\overline{AB} = 6cm$ ۽ $m\overline{AC} = 8cm$.

(a) 5:8 (b) 3:4 (c) 1:1 (d) 5:7

vii. ٽپور پاسي ٽڪنڊي جي هڪ ڪنڊ جو اڌ ڪندڙ سامهون واري پاسي کي ______ ۾ ورهائي ٿو.

(a) 2:3 (b) 3:2 (c) 1:1 (d) 5:2

viii. ٻن هم شڪل ٽڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا______ هوندا آهن.

(a) برابر (b) غير مساوي (c) متناسب (d) ڪوبہ نہ

ix. جيڪڏهن هم شڪل ٽڪنڊن جي ٻن مطابقت رکندڙ پاسن جي نسبت 5:7 آهي ته پوءِ انهن جي ايراضن جي نسبت______ جي برابر هوندي.

(a) 5:7 (b) 7:5 (c) 25:7 (d) 25:49

x. جيڪڏهن ٻن هم شڪل ٽڪنڊن جي ايراضين جي نسبت $121 : 36$ آهي ته پوءِ انهن جي مطابقت رکندڙ پاسن جي نسبت_____ ٿيندي.

(a) 6:10 (b) 6:11 (c) 11:6 (d) 10:6

xi. جيڪڏهن هم شڪل ٽڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا $x : 2$ نسبت ۾ آهن ۽ ايراضين جي نسبت 4:9 آهي ته پوءِ $x =$ ________.

(a) 3 (b) −3 (c) a ۽ b ٻئي (d) ڪوبہ نہ

xii. ٻہ ٽپور پاسا ٽڪنڊا ______ پڻ هوندا آهن.

(a) يڪسان ٽڪنڊا (b) هم شڪل ٽڪنڊا (c) متناسب (d) هڪجيترا ٽڪنڊا

خلاصو

- ٻن ساڳي مقدارن جي ڀيٽ کي نسبت چئبو آهي.
- نسبت $a:b$ ۾ a کي منڍ چئبو آهي ۽ b کي پُڇڙ چئبو آهي.
- ٻن نسبتن جي برابري کي تناسب چئبو آهي.
- تناسب ۾ وچين رڪنن جي ضرب اُپت ٻاهرين رڪنن جي ضرب اُپت جي برابر هوندي آهي.
- ٻہ ٽڪنڊا هم شڪل ڪونبا جيڪڏهن اُهي مساوي ڪندن وارا ٽڪنڊا هجن.
- جيڪڏهن ٻہ ٽڪنڊا هم شڪل آهن تہ پوءِ انهن جا مطابقت رکندڙ پاسا متناسب هوندا.
- ٽڪنڊي جي هڪ پاسي جي پور وچوٽ ليڪ جيڪا ٻين ٻن پاسن کي ڪپي ٿي اها ليڪ انهن ٻنهي پاسن کي تناسب ۾ ڪپيندي.
- جيڪڏهن هڪ ليڪ ٽڪر ٽڪنڊي جي ٻن پاسن کي ساڳي نسبت ۾ ڪپي ٿو تہ پوءِ اهو ٽيئن پاسي جي پوروچوٽ هوندو.
- ٽڪنڊي جي ڪنهن ڪنڊ جو اندريون اڌ ڪندڙ سامهون واري پاسي کي، ڪنڊ جي پاسن جي ڊيگهہ جي نسبت ۾ ورهائي ٿو.

یونٽ 25

گول جا زھه
CHORD OF A CIRCLE

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

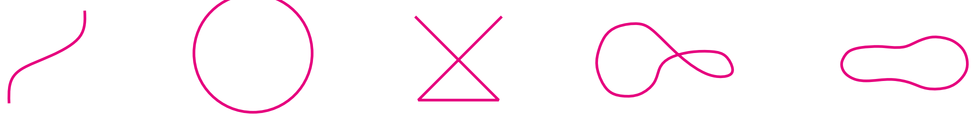
هن يونٽ جي پڙهڻ کانپوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته

- هيٺين سِڌيان کي انهن جي شامل نتيجن سان گڏ سمجهڻ ۽ گڏيل مسئلن کي حل ڪرڻ لاءِ انهن جو استعمال ڪن
  - ٽن غير هم ليڪ ٽٻڪن مان صرف ۽ صرف هڪ گول گذري سگهي ٿو
  - گول جر مرڪز مان نڪرندڙ ليڪ جيڪا زھه (جيڪو قطر نہ آهي) کي اڌو اڌ ڪري ٿي. اها زھه تي عمودي هوندي.
  - گول جي مرڪز مان زھه تي عمود ،ان زھه کي اڌو اڌ ڪندو.
  - جيڪڏهن هڪ ئي گول جا ٻہ زھه يڪسان آهن تہ پوءِ اهي مرڪز کان هڪ ئي فاصلي تي هوندا.
  - گول جا ٻہ زھه جيڪي مرڪز کان هڪجيتري فاصلي تي آهن ، تہ اهي يڪسان آهن.

تعارف (Introduction):

گذريل ڪلاسن ۾ يونٽن ۾، اسان جاميٽري جي تفصيل سان پڙهيو آهي جنهن ۾ ٽڪنڊا ۽ چوڪنڊا شامل هئا جيڪي سڀ ليڪ ٽڪرن سان ٺهن ٿا. ليڪ ٽڪرن ۾ وڪڙ نه هوندا آهن. هتي اسين ثابتي سان گڏ ان سڌيانن ۽ ان سان لاڳاپيل مثالن تي ڌيان ڏينداسين جن جو تعلق گول سان آهي.

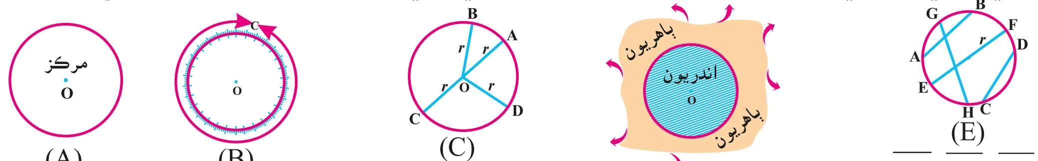
حقيقي دنيا جي شين جي شڪلين کي سمجهڻ ۾ گول اهم ڪردار ادا ڪن ٿا. گولن جي بناءِ اسين گولائي واري رستي تي گاڏي جي حرڪت، گرهن جي مدارن ۾ شروعاتي واڌارو ، ڪنهن جوهر (Atom) ۾ اليڪٽرانن جي حرڪت ، واچوڙن جون شڪليون وغيره کي سمجهڻ جي قابل نه هونداسين. اڳتي وڌيل(Advanced) شڪلين کي پڙهڻ لاءِ گول بنياد ناهن ٿا. اهي شڪليون آهن. بيضوي شڪليون ، گولا ، سلينڊر ، ۽ مخروط جيڪي وڻن جي ٿڙن ، پاڻي جي قطرن ، تارن ، نڙن ، ڦوڪڻن، گول سنبوسن(پائيز)، ڦيٿن، بال بيئرنگ وغيره ۾ استعمال ٿيندا آهن. حرڪت ڪندڙ ٽٻڪو جنهن رستي تي هلي ٿو ان رستي کي ڏنگي ليڪ (Curve) چئبو آهي. هڪ کليل ڏنگي ليڪ (Open curve) جا شروعاتي ۽ پڇاڙي وارا ٽٻڪا مختلف هوندا آهن. هڪ بند ڏنگي ليڪ(Closed curve) جنهن ٽٻڪي کان شروع ٿئي ٿي ان تي ختم ٿئي ٿي. يا جنهن جا شروعاتي ۽ پڇاڙيءَ وارا ٽٻڪا نه هجن، اها ڏنگي ليڪ جيڪا پنهنجي پاڻ کي نه ڪپي ، ان کي سادي ڏنگي ليڪ(Simple curve) چئبو آهي ٻي صورت ۾ اها غير سادي ڏنگي ليڪ ڪوٺبي. اها ڏنگي ليڪ جيڪا سادي هئڻ سان گڏوگڏ بند به هجي ته نه ان کي سادي بند ڏنگي ليڪ چئبو آهي. مثال طور شڪل(i) ۾ ڏنگي ليڪن کي ڏسو.



(A) سادي، کليل (B) سادي، بند (C) غير سادي، کليل (D) غير سادي، بند (E) سادي، بند

شڪل(i) ، کليل ، بند ، سادي ، ۽ غير سادي ڏنگي ليڪون

گول هڪ سادي بند ڏنگي ليڪ آهي ۽ ان جا سڀ ٽٻڪا هڪ مقرر ٽٻڪي کان ساڳي فاصلي تي آهن. ان مقرر ٽٻڪي کي مرڪز چئبو آهي. گول جي حد (Boundary) جي ڊيگهه کي گول جو گهيرو چئبو آهي. هڪ ليڪ ٽڪر جيڪو گول جي مرڪز ۽ گول جي گهيري جي ڪنهن به ٽٻڪي کي ملائي ان کي رداسي ٽڪر (Radial segment) چئبو آهي ۽ ان جي ڊيگهه کي گول جو رداس چئبو آهي. اهي ٽٻڪا جيڪي گول جي اندر هجن اهي گول جو اندريون (Interior of circle) ناهين ٿا ۽ اهي ٽٻڪا جيڪي باهر هجن اُهي گول جو باهريون(Exterior of circle) ناهين ٿا. هڪ ليڪ ٽڪر جيڪو گول جي ڪن به ٻن ٽٻڪن کي ملائي انکي گول جو زهه(Chord)چئبو آهي. اهو زهه جيڪو گول جي مرڪز مان گذري تنهن کي قطر(Diameter) يا مرڪزي زهه چئبو آهي ۽ ان جي ڊيگهه، گول جي سڀني زهن جي ڊيگهن کان سڀ کان وڏي هوندي آهي. اهي اصطلاحون شڪل(ii) ۾ واضح ڪجن ٿيون.



(A) گول جو مرڪز O ($\odot$O)

(B) گول جو گهيرو "C"

(C) رداس r ۽ رداسي ٽڪر $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$

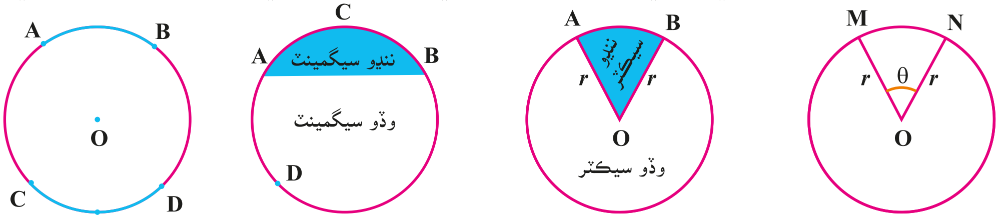
(D) اندريون ۽ باهريون (≡)

(E) زهه $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{GH}$ قطر $\overline{EF}$ $(m\overline{EF} = 2r)$

شڪل (ii)

جيڪڏهن r گول جو رداس آهي تہ پوءِ ان جو قطر ، گهيرو ۽ ايراضي ترتيبوار $2r$ ، $2\pi r$ ۽ πr^2 آهن. جڏهن تہ π (يوناني اکرپائي) هڪ غيرناطق عدد آهي.π گول جي گهيري جي ان جي قطر سان نسبت آهي. ان جو لڳ ڀڳ ملهہ 22/7 آهي پر اهو ان جي برابر نہ آهي. حقيقت ۾ ... $\pi = 3.141592653$ اسين ڏسون ٿا تہ ... $22/7 = 3.142857142$ جو ملهہ π جي ملهہ سان رڳو ڏهائي جي ٻن درجن تائين ساڳيو آهي.

گول جي گهيري جي ڪنهن حصي کي گول جو قوس (Arc) چئبو آهي. هڪ زهہ گول جي اندرين علائقي (Interior) کي ٻن حصن يا ڦاڪن يا سيگمينٽس (Segments) ۾ ورهائي ٿو. قطر گول کي ٻن برابر سيگمينٽس ۾ ورهائي ٿو. سيگمينٽ جي حدبندي هڪ قوس ۽ لاڳاپيل زهہ سان ٿيندي آهي. ڪنهن خاص زهہ لاءِ گول جي اندرين علائقي جي وڏي حصي واري سيگمينٽ کي وڏي سيگمينٽ (Major segment) چئبو آهي. ۽ ٻيئي واري کي ننڍي سيگمينٽ (Minor segment) چئبو آهي. انهن سان مطابقت وارا قوس ترتيبوار وڏو قوس (Major arc) ۽ ننڍو قوس (Minor arc) ڪوٺبا آهن. گول جي اندرين علائقي جو حصو جيڪو ڪنهن قوس ۽ ٻن رداسي ٽڪرن سان گهيريل هجي، ان کي گول جو سيڪٽر (Sector of a circle) چئبو آهي. سيڪٽر جا بہ قسم هوندا آهن. وڏو سيڪٽر (Major sector) ۽ ننڍو سيڪٽر (Minor Sector) لفظ Subtend جي معني آهي ”جڪڙڻ“ ۽ اهو عام طرح سان گول ۾ زهہ يا قوس جي هيٺيان ڪنهن ٽِڪي تي ڪنڊ ناهڻ لاءِ استعمال ٿيندو آهي. مرڪزي ڪنڊ (Central angle) اها ڪنڊ هوندي آهي جيڪا ڪو قوس گول جي مرڪز تي ناهي ٿو. يعني گول جو مرڪز مرڪزي ڪنڊ جي چوٽي(Vertex) هوندي آهي. شڪل (iii) اهي تصور واضح ڪري ٿي.



(A)
قوس AB ، CED

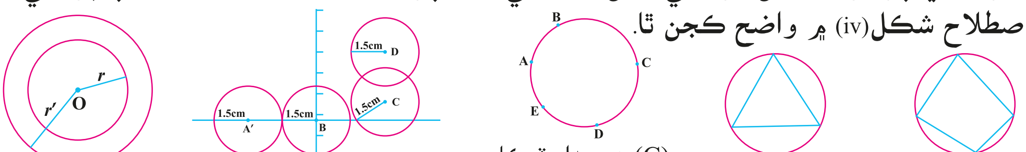
(B)
ننڍو قوس ACB
وڏو قوس ADB
(ننڍيا ۽ وڏا سيگمينٽ)

(C)
سيڪٽر(قوس AB
۽ $\overline{OA}$ ، $\overline{OB}$ سان ٺهيل)

(D)
مرڪزي ڪنڊ $\angle MON = \theta$
چوٽي O ۽ ٻانهون $\overline{OM}$ ، $\overline{ON}$

شڪل (iii)

گول جو مقام ۽ ماپ معلوم ڪرڻ لاءِ ترتيبوار مرڪز ۽ رداس استعمال ٿيندا آهن. بہ گول يڪسان ٿيندا جيڪڏهن انهن جا رداس برابر هجن. ساڳيئي مرڪز وارا بہ گول هم مرڪز(Concentric) گول ڪوٺبا. هڪ ئي ليڪ تي موجود ٽِڪا هم ليڪ (Collinear) چورائبا آهن ٻي صورت ۾ غير هم ليڪ (Non-collinear) ڪوٺبا. هڪ ئي گول تي موجود ٽِڪن کي هم مدار(Concyclic) ٽِڪا چئبو آهي. اهڙو گول جيڪو ڪنهن ٽڪندي جي ٽنهي چوٽين مان گذري ان کي گهيريندڙ گول (Circum circle) چئبو آهي. اهو چوڪندو جنهن جون سڀ چوٽيون ڪنهن گول تي هجن تہ ان کي مدار چوڪندو (Cyclic Quadrilateral) چئبو آهي. اهي سڀ اصطلاح شڪل(iv) ۾ واضح ڪجن ٿا.



(A) هم مرڪز گول
(B) يڪسان گول
(C) هم مدار ٽِڪا
(D) گهيريندڙ گول
(E) مدار چوڪندو

شڪل (iv)

25.1 گول جا زهه (Chords of a Circle):

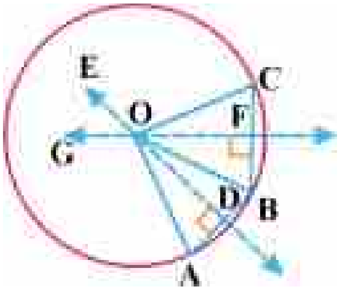
سڌيان 25.1: ٽن غير هم ليڪ ٽپڪن مان صرف ۽ صرف هڪ گول گذري سگهي ٿو.

مليل:

فرض ڪريو ته A, B ۽ C تي غير هم ليڪ ٽپڪا آهن.

گهربل:

ٽپڪن A, B ۽ C مان صرف ۽ صرف هڪ گول گذري سگهي ٿو



جوڙ جڪ:

ليڪ ٽڪر $\overline{AB}$ ۽ $\overline{BC}$ ڪيو $\overline{AB}$ ۽ $\overline{BC}$ جا ترتيبوار عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{ED}$ ۽ $\overleftrightarrow{GF}$ ڪيو. $\overleftrightarrow{ED}$ ۽ $\overleftrightarrow{GF}$ هڪٻئي کي ٽپڪي O تي ڪپين ٿا. $\overline{OA}$، $\overline{OB}$ ۽ $\overline{OC}$ ڪيو.

ثابتي:

بيان	دليل
$\overleftrightarrow{ED}$ جا سڀ ٽپڪا A ۽ B کان هڪجيتري فاصلي تي آهن يعني $m\overline{OA}=m\overline{OB}$ ... (i)	$\overleftrightarrow{ED}$ عمودي اڌ ڪندڙ آهي $\overline{AB}$ جو ۽ O هڪ ٽپڪو آهي $\overleftrightarrow{ED}$ تي.
$\overleftrightarrow{GF}$ جا سڀ ٽپڪا B ۽ C کان هڪجيتري فاصلي تي آهن يعني $m\overline{OB}=m\overline{OC}$ ... (ii)	$\overleftrightarrow{GF}$ عمودي اڌ ڪندڙ آهي $\overline{BC}$ جو ۽ $\overleftrightarrow{GF}$ ٽپڪي O مان گذري ٿي.
ٽپڪو O، $\overleftrightarrow{ED}$ ۽ $\overleftrightarrow{GF}$ جو هڪ ئي ميلاپ وارو ٽپڪو آهي ... (iii)	$\overleftrightarrow{ED}$ ۽ $\overleftrightarrow{GF}$ غير پورو چوٽ ليڪون آهن.
ٽپڪو O، هڪجيتري فاصلي تي آهي A, B ۽ C کان يعني ته $m\overline{OA}=m\overline{OB}=m\overline{OC}=r$ ... (iv)	(i) ۽ (ii) مان متعددي خاصيت
رکو مرڪز O ۽ رداس r وارو گول ٽپڪن A، B ۽ C مان گذري ٿو. ... (v)	$\overline{OA}$، $\overline{OB}$ ۽ $\overline{OC}$ رداسي ٽڪر آهن ۽ (iii) مان
A، B ۽ C غير هم ليڪي ٽپڪا آهن ... (vi) انهيءَ ڪري هڪ ۽ صرف هڪ ئي گول وجود رکي ٿو جنهن جو مرڪز O ۽ رداس r آهي ۽ جيڪو غير هم ليڪ ٽپڪن A, B ۽ C مان گذري ٿو	مليل (iii)، (iv)، (v) ۽ (vi) مان

Q.E.D

شامل نتيجو: گول جا ڪي به ٽي ڌار ٽپڪا غير هم ليڪ هوندا آهن.

نوٽ 1: سڌيان 25.1 ان گول جي وجود ۽ يڪتائي جو مظاهرو ڪري ٿو جيڪو ڪن به ٽن غير هم ليڪ ٽپڪن مان ڪڍي سگهجي.

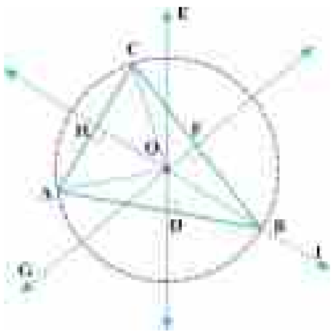
نوٽ 2: ٽي ڪان وڌيڪ تعداد وارا ٽپڪا جيڪي هڪ گول تي آهن اهي غير هم ليڪ هوندا.

مثال 1:

ثابت ڪيو تہ صرف ۽ صرف هڪ ئي گول ڪنهن ٽڪندي جي ٽنهي چوٽين مان گذري سگهي ٿو.

مليل:

ΔABC جنهن جون چوٽيون A , B ۽ C آهن.



گهربل:

صرف ۽ صرف هڪ گول ΔABC جي چوٽين مان گذري سگهي ٿو.

جوڙ جڪ:

ΔABC جي پاسن $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ ۽ $\overline{AC}$ جا ترتيبوار عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{DE}$، $\overleftrightarrow{FG}$ ۽ $\overleftrightarrow{HI}$ ڪيو جيڪي ٽپڪي O تي ڪپين ٿا. $\overline{OA}$، $\overline{OB}$ ۽ $\overline{OC}$ ڪيو.

ثابتي:

بيان	دليل
O رڳو هڪ ئي ميلاپ وارو ٽپڪو آهي $\overleftrightarrow{DE}$، $\overleftrightarrow{FG}$ ۽ $\overleftrightarrow{HI}$ جو.	$\overleftrightarrow{DE}$، $\overleftrightarrow{FG}$ ۽ $\overleftrightarrow{HI}$ غير پورو چوٽ ليڪون آهن ۽ O انهن سيني تي موجود آهي.
ΔABC جو گهيريندڙ مرڪز O آهي. ٽپڪو O، ΔABC جي چوٽين کان هڪجيتري فاصلي تي آهي.	وصف مطابق
يعني تہ $m\overline{OA} = m\overline{OB} = m\overline{OC} = r$ مرڪز O ۽ رداس r وارو گول، ΔABC جي چوٽين مان گذري ٿو.	گهيريندڙ مرڪز جي وصف مطابق $\overline{OA}$، $\overline{OB}$ ۽ $\overline{OC}$ رداسي ٽڪر آهن.

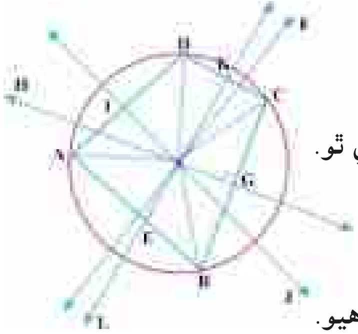
Q.E.D

مثال 2:

ثابت ڪريو تہ چوڪندي جي چوٽين مان صرف ۽ صرف هڪ ئي گول گذري سگهي ٿو.

مليل:

هڪ چوڪندو ABCD



گهربل:

چوڪندي ABCD جي چوٽين مان صرف ۽ صرف هڪ ئي گول گذري ٿو.

جوڙجڪ:

$\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$ ۽ $\overline{AD}$ جا عمودي اڌ ڪندڙ ترتيبوار $\overleftrightarrow{EF}$، $\overleftrightarrow{GH}$، $\overleftrightarrow{IJ}$ ۽ $\overleftrightarrow{KL}$ ڪيو. اهي سڀ ٽپڪي O تي ملن ٿا. $\overline{OA}$، $\overline{OB}$، $\overline{OC}$ ۽ $\overline{OD}$ ناهيو.

ثابتي:

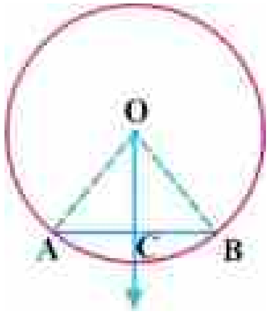
بيان	دليل
$\overleftrightarrow{EF}$ جا سڀ ٽڪبا A ۽ B کان هڪجيتري فاصلي تي آهن.	$\overleftrightarrow{EF}$ عمودي اڌ ڪندڙ آهي $\overline{AB}$ جو.
∴ $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ (i)	O موجود آهي $\overleftrightarrow{EF}$ تي.
ساڳي ريت، $\overline{OB} \cong \overline{OC}$ (ii)	مٿين ساڳيو طريقو
$\overline{OC} \cong \overline{OD}$ (iii)	مٿين ساڳيو طريقو
$\overline{OD} \cong \overline{OA}$ (iv)	مٿين ساڳيو طريقو
$\overleftrightarrow{EF}$، $\overleftrightarrow{GH}$، $\overleftrightarrow{IJ}$ ۽ $\overleftrightarrow{KL}$ جو رڳو هڪ ئي ميلاپ وارو ٽڪبو O آهي.	O انهن سڀني ليڪن تي موجود آهي.
ٽڪبو O چوڪندي جي چوٽين A، B، C ۽ D کان هڪجيتري فاصلي تي آهي. انهيءَ ڪري $m\overline{OA} = m\overline{OB} = m\overline{OC} = m\overline{OD} = r$	(i) کان (iv) مان
مرڪز O ۽ رداس r وارو هڪ ئي گول چوڪندي جي چوٽين A, B, C ۽ D مان گذري ٿو.	$\overline{OA}$، $\overline{OB}$، $\overline{OC}$ ۽ $\overline{OD}$ رداسي ٽڪر ناهن ٿا.

Q.E.D

مشق 25.1

1. ڇا هڪ گول ٽن هم ليڪ ٽڪبن مان گذري سگهي ٿو. دليل سان واضح ڪريو.
2. ڇا توهان ڪنهن چار غير هم ليڪ ٽڪبن مان هڪ گول ڪڍي سگهو ٿا. دليل سان واضح ڪريو.
3. ثابت ڪري ڏيکاريو ته صرف ۽ صرف هڪ گول چورس جي چوٽين مان گذري سگهي ٿو.
4. ثابت ڪري ڏيکاريو ته صرف ۽ صرف هڪ گول پور پنج ڪندي جي چوٽين مان گذري سگهي ٿو.
5. ٽي ڳوٺ اهڙي ريت واقع آهن جو A جي اوپر ۾ 6Km جي فاصلي تي B آهي ۽ B جي اتر ۾ 8Km جي فاصلي تي C آهي. مسطر يا فٽ پٽي ، پلڪار ۽ ونڊٽي پلڪار جو استعمال ڪندي مسجد جو مقام لهو ته جيئن هر هڪ ڳوٺ مان سڀ ساڳي فاصلي جو پنڌ ڪن. اهو پڻ معلوم ڪريو ته هر هڪ ڳوناٽي کي ڳهٽو پنڌ ڪرڻو پوندو.

سڌيان 25.2: گول جي مرڪزمان نڪرندڙليڪ جيڪازهه(جيڪو قطر نه آهي)کي اڌواڌڪري ٿي.اهازهه تي عمود هوندي.



مليل : هڪ گول جنهن جو مرڪز O تي آهي ۽ $\overline{AB}$ هڪ زهه آهي جيڪو مرڪز مان نٿو گذري يعني O اهو قطر نه آهي. هڪ سڌي ليڪ OC جيڪا $\overline{AB}$ کي ٽڪبي C تي اڌو اڌ ڪري ٿي.

يعني ته $m\overline{AC} = m\overline{BC}$

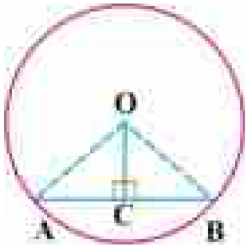
گهربل: $\overline{OC} \perp \overline{AB}$

جوڙجڪ : $\overline{OA}$ ۽ $\overline{OB}$ ناهيو.

ثابتي:

بيان	دليل
۾ $\Delta OCA \leftrightarrow \Delta OCB$	
$m\overline{OA} = m\overline{OB}$	ساڳي گول جا رداس
$m\overline{AC} = m\overline{BC}$	مليل
$m\overline{OC} = m\overline{OC}$	مشترڪ پاسو
$\Delta OCA \cong \Delta OCB$	پ . پ . پ ≅ پ . پ . پ
$m\angle OCA = m\angle OCB \quad \cdots (i)$	يڪسان ٽڪندن جون مطابقت رکندڙ ڪندون
$m\angle OCA + m\angle OCB = 180° \cdots (ii)$	سپليمينٽري ڪندن جو موضوع
$m\angle OCA = 90° = m\angle OCB$	(i) ۽ (ii) مان
$\overleftrightarrow{OC} \perp \overline{AB}$ اهڙيءَ طرح	عمود جي وصف مطابق

Q.E.D



سڌيان 25.3: گول جي مرڪز مان زهه تي عمود، ان زهه کي اڌو اڌ ڪندو.

مليل : هڪ گول جنهن جو مرڪز O تي آهي ۽ $\overline{AB}$ ان جو زهه آهي. مرڪز O کان عمود $\overline{OC}$ ملي ٿو $\overline{AB}$ سان ٽپڪي C تي يعني $\overline{AB} \perp \overline{OC}$ انهيءَ ڪري $\angle OCA$ ۽ $\angle OCB$ گوني ڪندون آهن.

گهربل : $\overline{OC}$ اڌو اڌ ڪري ٿو $\overline{AB}$ کي ٽپڪي C تي.

جوڙجڪ : $\overline{OA}$ ۽ $\overline{OB}$ ڪيو.

ثابتي:

بيان	دليل
۾ $\Delta AOC \leftrightarrow \Delta BOC$	
$m\angle OCA = 90° = m\angle OCB$	مليل
$\overline{OA} \cong \overline{OB}$	ساڳي گول جا رداسي ٽڪر
$\overline{OC} \cong \overline{OC}$	مشترڪ پاسو
انهيءَ ڪري $\Delta AOC \cong \Delta BOC$	هه . پ ≅ هه . پ
$\because$ $\overline{AC} \cong \overline{BC}$	يڪسان ٽڪندن جا مطابقت وارا پاسا
$\therefore$ $\overline{OC}$، زهه $\overline{AB}$ کي اڌو اڌ ڪري ٿو.	$\overline{AB}$ جو وچيون ٽپڪو C آهي.

Q.E.D

شامل نتيجو 1:

هڪ گول جي زهه جو عمودي اڌ ڪندڙ گول جي مرڪز مان گذرندو.

شامل نتيجو 2:

گول جي مرڪز ۽ زهه جي وچ ۾ گهٽ ۾ گهٽ فاصلو ان جي وچين ٽپڪي ڪان هوندو آهي.

نوٽ:

سڌيان 25.2 ۽ 25.3 گول جي زهه ۽ مرڪز مان گذرندڙ ان جي اڌ ڪندڙ ليڪ ٽڪر جي وچ ۾ تعلق کي نمايان ڪن ٿا.

انهن سڌيان ۽ فيثاغورث سڌيان جي مدد سان اسين گول جي زهه جي ڊيگهه لهي سگهون ٿا.

مثال 1:

هڪ زهہ جي ڊيگهہ لهو جنهن جو گول جي مرڪز کان عمودي فاصلو 5cm آهي ۽ رداس 9cm آهي.

حل :

هڪ گول ڪٽو جنهن جو مرڪز O ۽ زهہ AB آهي. مرڪز O کان عمود، زهہ AB سان ٽبڪي C تي ملي ٿو جيئن پر واري شڪل ۾ ڏيکاريل آهي. ΔOCA ۾فيثا غورث سڌيان جو استعمال ڪندي ، اسان وٽ آهي.

$$\left(m\overline{OA}\right)^2=\left(m\overline{OC}\right)^2+\left(m\overline{AC}\right)^2 \quad \text{يا} \quad 9^2=5^2+\left(m\overline{AC}\right)^2$$

$$\therefore\ m\overline{AC}=\sqrt{81-25}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}\text{ cm.}$$

آخر ۾

(جيئن $\overline{OC}$ ليڪ ٽڪر $\overline{AB}$ کي اڌو اڌ ڪري ٿو) $\overline{AB}=2\left(m\overline{AC}\right)$ = زهہ جي لمبائي

$$=2\left(2\sqrt{14}\right)=4\sqrt{14}=14.967\text{cm}$$

مثال 2:

جيڪڏهن گول جي هڪ زهہ جي ڊيگهہ 8cm آهي ۽ گول جي مرڪز کان زهہ تائين عمودي فاصلو 3cm آهي تہ پوءِ. گول جو رداس ڇا ٿيندو؟

حل:

هڪ گول ڪٽو جنهن جو مرڪز O آهي ۽ ان جو زهہ AB آهي. مرڪز کان عمود 8cm ڊيگهہ واري زهہ AB سان ٽبڪي C تي ملي ٿو جيئن تہ پر واري شڪل ۾ ڏيکاريل آهي ΔOCA ۾ فيثاغورث سڌيان استعمال ڪندي، اسان وٽ آهي.

$$\left(m\overline{OA}\right)^2=\left(m\overline{OC}\right)^2+\left(m\overline{AC}\right)^2$$

$$x^2=3^2+4^2 \quad \text{يا} \quad (\overline{OC}\ \text{اڌو اڌ ڪري ٿو}\ \overline{AB}\ \text{کي})$$

$x^2=25 \ \Rightarrow x=5,$ منفي عدد کي نظرانداز ڪندي

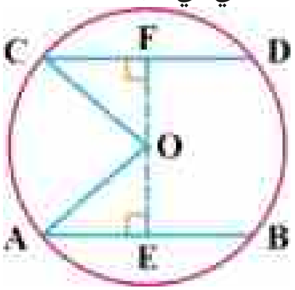
اهڙيءَ طرح $m\overline{OA}=x=5$ cm = رداس

مشق 25.2

1. ثابت ڪري ڏيکاريو تہ گول جا قطر هڪٻئي کي اڌو اڌ ڪن ٿا.
2. ثابت ڪري ڏيکاريو تہ گول جي مرڪز کان زهہ جي وچئين ٽبڪي تي نهنڊڙ ڪنڊ گوني ڪنڊ هوندي.
3. جيڪڏهن زهہ جي ڊيگهہ 8cm آهي ۽ گول جي مرڪز کان زهہ تائين عمودي فاصلو 3cm آهي تہ پوءِ گول جو گهيرو ۽ گول جي ايراضي لهو.
4. زهہ جي ڊيگهہ لهو جيڪو گول جي مرڪز کان k فاصلي تي آهي ۽ سندس رداس r هيٺين ريت آهي.
   a. k=4cm , $r=9$cm   b. k=3cm , $r=6$cm
5. گول جو رداس ڇا ٿيندو جيڪڏهن 10cm ڊيگهہ واري زهہ جوگول جي مرڪزکان فاصلو 3cm آهي.

سڏيان 25.4:

جيڪڏهن هڪ ئي گول جا ٻہ زھ يڪسان آهن تہ پوءِ اهي مرڪز کان هڪ ئي فاصلي تي هوندا.



مليل:

هڪ گول جنهن جو مرڪز O آهي. ان جا ٻہ زھ $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ يڪسان آهن

جڏهن تہ $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ۽ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$.

گهربل:

$\overline{OE} \cong \overline{OF}$

جوڙجڪ:

$\overline{OA}$ ۽ $\overline{OC}$ ڪيو

ثابتي:

بيان	دليل
$m\overline{AE} = \frac{1}{2} m\overline{AB}$ ... (i)	عمود $\overline{OE}$، زھ $\overline{AB}$ کي اڌ ڪري ٿو
$m\overline{CF} = \frac{1}{2} m\overline{CD}$ ... (ii)	عمود $\overline{OF}$، زھ $\overline{CD}$ کي اڌ ڪري ٿو
$\because$ $m\overline{AB} = m\overline{CD}$ ... (iii)	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (مليل آهي)
$\therefore$ $\overline{AE} \cong \overline{CF}$	(i)،(ii) ۽ (iii) جو استعمال ڪندي
گوني ڪند ٽڪنڊن جي مطابقت	
$\Delta AEO \leftrightarrow \Delta CFO$ ۾	
$\overline{OA} \cong \overline{OC}$	ساڳيئي گول جا رداسي ٽڪر
$\overline{AE} \cong \overline{CF}$	مٿي ثابت ٿيل آهي
$\Delta AEO \cong \Delta CFO$	ھ . پ ≅ ھ . پ
$\Rightarrow$ $\overline{OE} \cong \overline{OF}$	يڪسان ٽڪنڊن جا مطابقت وارا پاسا

Q.E.D

شامل نتيجو:

گول جا ٻہ يڪسان زھ مرڪز تي برابر ڪندون ناهين ٿا.

نوٽ 1:

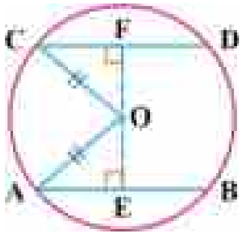
سڏيان 25.4 ٻن زھن جي يڪسانيت ۽ مرڪز کان انهن جي فاصلي جي وچ ۾ لاڳاپي کي واضح ڪري ٿو.

نوٽ 2:

جيڪڏهن ٻہ زھ يڪسان نہ آهن تہ پوءِ اهي مرڪز کان هڪجيتري فاصلي تي نہ هوندا.

سڌيان 25.5: گول جا ٻہ زھ جيڪي مرڪز کان ھڪجيتري فاصلي تي آھن ، تہ اھي يڪسان آھن.

مليل: ھڪ گول جنھن جو مرڪز O آھي گول جا ٻہ زھ $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ مرڪز O کان ھڪجيتري فاصلي تي آھن. يعني تہ $\overline{OF} \cong \overline{OE}$ ان جو مطلب اھو بہ آھي تہ $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ۽ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$



گھربل:

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

جوڙ جڪ:

$\overline{OA}$ ۽ $\overline{OC}$ ڪيو

ثابتي:

بيان	دليل
گوني ڪنڊ ٽڪنڊن جي مطابقت $\Delta AEO \leftrightarrow \Delta CFO$ ۾	
$\overline{OA} \cong \overline{OC}$	ساڳيئي گول جا رداسي ٽڪر
$\overline{OE} \cong \overline{OF}$	مليل
$\therefore$ $\Delta AEO \cong \Delta CFO$	ھ . ٻ ≅ ھ . ٻ
انھيءَ ڪري $m\overline{AE} = m\overline{CF}$ ... (i)	يڪسان ٽڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا
$m\overline{AE} = \frac{1}{2} m\overline{AB}$ ... (ii)	عمود $\overline{OE}$ زھ $\overline{AB}$ کي اڌو اڌ ڪري ٿو
$m\overline{CF} = \frac{1}{2} m\overline{CD}$ ... (iii)	عمود $\overline{OF}$ زھ $\overline{CD}$ کي اڌو اڌ ڪري ٿو
$\because$ $\frac{1}{2} m\overline{AB} = \frac{1}{2} m\overline{CD}$	(i)، (ii) ۽ (iii) جو استعمال ڪندي
$\therefore$ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	

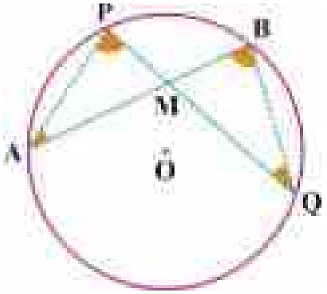
Q.E.D

شامل نتيجو: جيڪڏھن گول جا ٻہ زھ مرڪز تي برابر ڪندون ناھين ٿا تہ پوءِ اھي يڪسان آھن.

نوٽ 1: سڌيان 25.5 عڪس آھي 25.4 جو

نوٽ 2: جيڪڏھن گول جا ٻہ زھ مرڪز کان ھڪجيتري فاصلي تي نہ آھن تہ پوءِ اھي يڪسان نہ ھوندا.

مثال 1:



ثابت ڪري ڏيکاريو تہ جيڪڏھن ھڪ گول جا ٻہ زھ ھڪٻئي کي ڪپين ٿا تہ پوءِ انھن جي ٽڪرن جون ضرب اپتون برابر ٿينديون.

مليل: مرڪز O واري گول جا ٻہ زھ $\overline{AB}$ ۽ $\overline{PQ}$ ھڪٻئي کي ٽپڪي M تي ڪپين ٿا

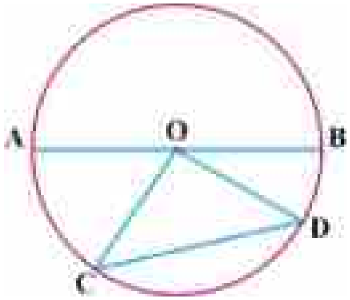
گھربل: $(m\overline{AM}) \times (m\overline{MB}) = (m\overline{PM}) \times (m\overline{QM})$

جوڙ جڪ: $\overline{AP}$ ۽ $\overline{BQ}$ ڪيو.

ثابتي:

بيان	دليل
$\angle PAM \cong \angle BQM$ ... (i)	ساڳيئي قوس PBجون ڪندون
$\angle APM \cong \angle QBM$ ... (ii)	ساڳيئي قوسAQجون ڪندون
$\Delta APM \sim \Delta QBM$	(i) ۽ (ii) مان: (ڪ . ڪ ~ ڪ . ڪ)
$\dfrac{m\overline{AM}}{m\overline{QM}} = \dfrac{m\overline{PM}}{m\overline{BM}}$ ... (iii)	هم شڪل ٽڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا
$(m\overline{AM})\times(m\overline{BM}) = (m\overline{PM})\times(m\overline{QM})$	آمهون سامهون ضرب ڪرڻ سان

Q.E.D



مثال 2:

ثابت ڪري ڏيکاريو تہ هڪ گول ۾ قطر سڀ کان وڏو زه هوندو آهي

مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O آهي ان جو هڪ قطر $\overline{AB}$ آهي.

$\overline{AB}$ کانسواءِ، $\overline{CD}$ گول جو ڪو ٻيو زه آهي.

گهربل: $m\overline{AB} > m\overline{CD}$

جوڙ جڪ: ΔOCD مڪمل ڪرڻ لاءِ $\overline{OC}$ ۽ $\overline{OD}$ ڪيو

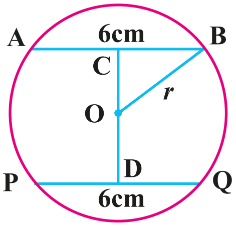
ثابتي:

بيان	دليل
ΔOCD, ۾ $m\overline{OC} + m\overline{OD} > m\overline{CD}$ ... (i)	ٽڪنڊي جي ٻن پاسن جي جوڙ اپت ٽئين پاسي کان وڏي هوندي آهي.
$m\overline{OC} + m\overline{OD} = m\overline{AB}$ ... (ii)	$\overline{OC}$ ۽ $\overline{OD}$رداسي ٽڪرا آهن ۽ قطر جي وصف مطابق
$m\overline{AB} > m\overline{CD}$ ... (iii)	(i) ۽ (ii) جو استعمال ڪندي
زه $\overline{AB}$جي ڊيگهہ جيڪو قطر پڻ آهي وڏي آهي گول جي ڪنهن ٻيئي زه $\overline{CD}$ جي ڊيگهہ کان	(iii) مان ۽ ڪنهن بہ زه $\overline{CD}$ لاءِ سواءِ قطر جي

Q.E.D

مثال 3:

هڪ گول جي ٻن يڪسان زهن جي وچ ۾ فاصلو لهو جڏهن تہ هر هڪ زه جي ڊيگهہ 6cm ۽ گول جو گهيرو 10π cm آهي.



حل: مرڪز O واري گول جا 6m ڊيگهہ وارا بہ يڪسان زه $\overline{AB}$ ۽ $\overline{PQ}$ آهن ۽ رداس r آهي جيئن پرواري شڪل ۾ ڏيکاريل آهي اسان کي $m\overline{CD}$ کپي.

گول جو رداس : $m\overline{OB} = r = \frac{C}{2\pi} = \frac{10\pi}{2\pi} = 5cm.$

گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ΔOCB ۾ فيثاغورث سڌيان استعمال ڪندي، اسان وٽ آهي

$$\left(m\overline{OB}\right)^2 = \left(m\overline{OC}\right)^2 + \left(m\overline{CB}\right)^2$$

(مرڪز کان O عمود $\overline{OC}$، زهه $\overline{AB}$ کي اڌو اڌ ڪري ٿو) $5^2 = \left(m\overline{OC}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}m\overline{AB}\right)^2$

$$5^2 = \left(m\overline{OC}\right)^2 + 3^2 \qquad \Rightarrow m\overline{OC} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4cm$$

چاڪاڻ ته ٻه يڪسان زهه گول جي مرڪز کان هڪجيتري فاصلي تي هوندا آهن. انهيءَ ڪري

$$m\overline{OD} = m\overline{OC} = 4cm$$

آخر ۾

$$m\overline{CD} = m\overline{OC} + m\overline{OD} = 4 + 4 = 8cm$$

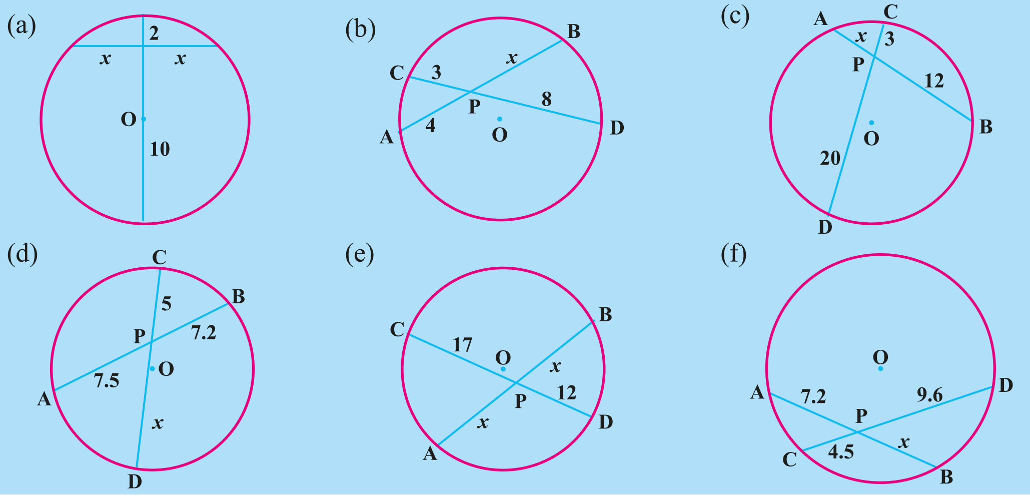
مشق 25.3

1. ثابت ڪريو ته ٻن يڪسان گولن جا ٻه يڪسان زهه انهن جي مرڪزن کان هڪ جيتري فاصلي تي هوندا آهن.
2. ثابت ڪري ڏيکاريو ته ٻن يڪسان گولن جا ٻه زهه جيڪي مرڪز کان هڪجيترو فاصلو رکن ٿا اهي يڪسان هوندا.
3. رداس r واري هڪ گول ۾ α ڊيگهه وارن ٻن يڪسان زهن جي وچ ۾ فاصلو لهو جڏهن ته α ۽ r جون قيمتون هيٺ ڏنل آهن

   (a). $\alpha = 7cm$ and $r = 6cm$ (b). $\alpha = 5cm$ and $r = 4cm$

   (c). $\alpha = 2cm$ and $r = 4cm$ (d). $\alpha = 4cm$ and $r = 9cm$
4. رداس r واري گول ۾ α ۽ β واري ڊيگهه جي ٻن پورو ڇوٽ زهه جي وچ ۾ فاصلو معلوم ڪريو جڏهن ته α، β ۽ r جون قيمتون هيٺ ڏنل آهن.

   a. $\alpha = 6cm, \beta = 8cm, r = 5cm$ b. $\alpha = 3cm, \beta = 6cm, r = 14cm$
5. جيڪڏهن مرڪز O واري گول جا ٻه زهه $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ هڪٻئي کي ٽٻڪي P تي ڪپين ٿا ته پوءِ هيٺين ۾ x جو ملهه لهو.



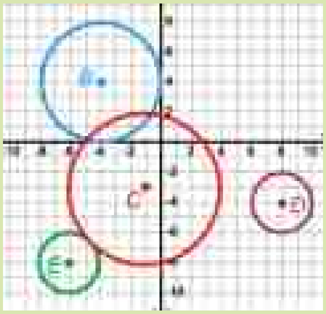
جائزي واري مشق 25

1. درست جواب تي نشان لڳايو

i. سڀ گول هميشہ ________ هوندا آهن.

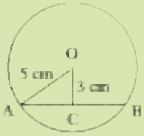
(a) يڪسان (b) هم شڪل
(c) ڇهٽا (d) ڪو بہ نہ

ii. هيٺين شڪل ۾ مرڪز D ۽ E وارا گول ________ آهن.



(a) يڪسان (b) هم شڪل
(c) بئي (a) ۽ (b) (d) ڪو بہ نہ

iii. ڏنل شڪل ۾، زهہ AB جي ڊيگھ ________ آهي.



(a) 4cm (b) 6cm (c) 8cm (d) 15cm

iv. هڪ ۽ صرف هڪ ئي گول ________ ٽيڪن مان گذرندو آهي.

(a) هم ليڪي (b) غير هم ليڪي (c) غير مشترڪ (d) ڪو بہ نہ

v. ”جيڪڏهن ڪنهن گول جا بہ زهہ يڪسان آهن تہ پوءِ اهي مرڪز کان هڪجيتري فاصلي تي هوندا.“ ان بيان جو مفروضو آهي :

(a) گول جا بہ زهہ مرڪز کان هڪ جيتري فاصلي تي آهن
(b) گول جا بہ زهہ يڪسان آهن
(c) هڪ گول جا بہ زهہ هوندا آهن
(d) گول جو مرڪز زهہ کان هڪجيتري فاصلي تي هوندو آهي.

vi. ”جيڪڏهن ڪنهن گول جا بہ زهہ يڪسان آهن تہ پوءِ اهي مرڪز کان هڪجيتري فاصلي تي هوندا“ ان بيان جو نتيجو آهي:

(a) گول جا بہ زهہ مرڪز کان هڪ جيتري فاصلي تي آهن
(b) گول جا بہ زهہ يڪسان آهن
(c) هڪ گول جا بہ زهہ هوندا آهن
(d) گول جو مرڪز زهہ کان هڪ جيتري فاصلي تي هوندو آهي.

vii. هڪ ۽ صرف هڪ ئي گول ٽن غير هم ليڪ ٽپڪن مان گذري ٿو. ان بيان جو مفروضو آهي.

(a) ٽي ٽپڪا غير هم ليڪ آهن (b) هڪ ۽ صرف هڪ ئي گول ٽن ٽپڪن مان گذري ٿو.

(c) ٽن ٽپڪن مان ٻه گول گذرندا (d) ٽي ٽپڪا هم ليڪ آهن.

viii. ”هڪ ۽ صرف هڪ ئي گول ٽن غير هم ليڪ ٽپڪن مان گذري ٿو“ ان بيان جو نتيجو آهي.

(a) ٽي ٽپڪا غير هم ليڪ آهن (b) هڪ ۽ صرف هڪ ئي گول ٽن ٽپڪن مان گذري ٿو.

(c) ٽن ٽپڪن مان ٻه گول گذرندا (d) ٽي ٽپڪا هم ليڪ آهن.

ix. گول هڪ ________ ڏنگي ليڪ جي مثال آهي.

(a) سادي ۽ بند (b) سادي ۽ کليل

(c) غير سادي ۽ بند (d) غير سادي ۽ کليل

خلاصو

- گول هڪ سادي بند ڏنگي ليڪ آهي.
- گول جا سڀ ٽپڪا هڪ مقرر ٽپڪي کان هڪ ئي فاصلي تي هوندا آهن. اهو مقرر ٽپڪو مرڪز ڪوٺبو آهي ۽ مستقل فاصلي کي گول جو رداس چئبو آهي.
- گول جو رداسي ٽڪر هڪ اهڙو ليڪ ٽڪر آهي جيڪو گول جي مرڪز کان ان جي ڪنهن به ٽپڪي تائين هوندو آهي.
- گول جي ڪن به ٻن ٽپڪن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر کي زهه چئبو آهي. مرڪز مان گذرندڙ زهه کي گول جو قطر يا مرڪزي زهه چئبو آهي.
- رداس r واري گول جو قطر، گهيرو ۽ ايراضي ترتيبوار $2r$، $2\pi r$ ۽ πr^2 آهي.
- گول جي گهيري جي ڪنهن به حصي کي قوس چئبو آهي. انهن جا ٻه قسم آهن. وڏو قوس ۽ ننڍو قوس.
- سيڪٽر گول علائقي جا اهي حصا آهن جيڪي ٻن رداسي ٽڪرن ۽ قوس سان گهيريل هجن، ان جا ٻه قسم آهن وڏو سيڪٽر ۽ ننڍو سيڪٽر.
- سيگمينٽ گول علائقي جا اهي حصا آهن جيڪي هڪ زهه ۽ قوس سان گهيريل هجن. ان جا ٻه قسم آهن وڏي سيگمينٽ ۽ ننڍي سيگمينٽ.
- سڀ گول هڪٻئي جا همشڪل هوندا آهن.
- ٻه گول يڪسان هوندا جيڪڏهن انهن جا رداس برابر هجن.
- ساڳي مرڪز وارا گول هم مرڪز ڪوٺبا آهن.
- هڪ ئي گول تي موجود ٽپڪا هم مدار ڪوٺبا آهن.
- هڪ ۽ صرف هڪ گول ئي ٽن غير هم ليڪ ٽپڪن مان گذري سگهي ٿو.
- گول جي مرڪز مان گذرندڙ سڌي ليڪ جيڪا زهه(جيڪو قطر نه آهي) کي اڌو اڌ ڪري اها ان زهه تي عمود هوندي.
- گول جي مرڪز مان ڪنهن زهه تي عمود ، ان زهه کي اڌو اڌ ڪندو آهي.
- جيڪڏهن ڪنهن گول جا ٻه زهه يڪسان آهن ته پوءِ اهي مرڪز کان هڪ جيتري فاصلي تي هوندا.
- گول جا ٻه زهه جيڪي مرڪز کان هڪجيتري فاصلي تي هجن ، اهي يڪسان هوندا.

يونٽ 26

گول جون ڇھٽي ليڪون

TANGENTS OF A CIRCLE

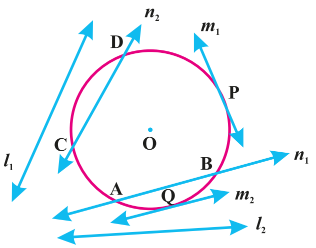
شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي پڙهڻ کانپوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته

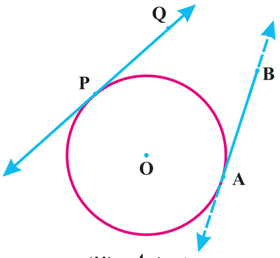
- هينيان سڌيان انھن جي شامل نتيجن سان گڏ سمجھن ۽ گڏيل مسئلن ڪي حل ڪرڻ لاءِ انھن جو استعمال ڪن.
  - جيڪڏھن ھڪ ليڪ گول جي رداسي ٽڪر جي ٻاھرئين ڇيڙي تي عمود ھجي تہ اھا ليڪ ان ٽٻڪي تي گول جي ڇھٽي ليڪ ھوندي.
  - ڇھڻ ٽٻڪي تي، گول جي ڇھٽي ليڪ ۽ گول جو رداسي ٽڪر ٻئي، ھڪٻئي تي عمود ھوندا آھن.
  - ڪنھن گول جي ھڪ ٻاھرين ٽٻڪي تان گول تي ڪڍيل ٻہ ڇھٽي ليڪون، ڊيگھہ ۾ برابر ھونديون.
  - جيڪڏھن ٻہ گول ٻاھريان ڇُھن ٿا تہ انھن جي مرڪزن جي وچ وارو فاصلو ترتيبوارانھن جي رداسن جي جوڙ اُپت يا فرق جي برابر آھي.

تعارف (Introduction):

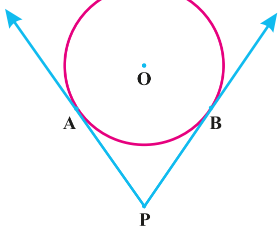
هتي چهڻي ليڪ يا ليڪن سان لاڳاپيل سٽيان ۽ انهن جون ثابتيون زير غور اينديون، رياضي جي هڪ شاخ ڪيلڪيولس (Calculus) ۾ ڊيريويٽو(Derivative) بيان ڪرڻ لاءِ چهڻي ليڪ جو تصور پڻ ڏاڍو اهم آهي. هڪ ليڪ گول کي ڪپي سگهي ٿي ۽ نه به. جيڪڏهن ڪا ليڪ گول کي رڳو هڪ ئي ٽبڪي تي ڇُهي ٿي ته اها گول جي چهڻي ليڪ (Tangent) آهي. چهڻي ليڪ ۽ گول جي وچ ۾ مشترڪ ٽبڪي کي ميلاپ وارو ٽبڪو يا چهڻ ٽبڪو (Point of tangency or point of contract) چئبو آهي ۽ اها ليڪ جيڪا گول کي ٻن ٽبڪن تي ڪپي ته ان کي ڪپيندڙ ليڪ (Secant) چئبو آهي. ڪپيندڙ ليڪ ۽ گول جي وچ ۾ ميلاپ وارا ٻه ٽبڪا هوندا آهن. شڪل (i) ۾ l_1 ۽ l_2 گول کي نٿيون ڇُهن. ليڪون m_1 ۽ m_2 ترتيبوار ٽبڪن P ۽ Q تي چهڻي ليڪون آهن. ليڪون n_1 ۽ n_2 ترتيبوار ٽبڪن A، B ۽ C، D تي ڪپيندڙ ليڪون آهن. چهڻي ٽبڪي کان چهڻي ليڪ جي ڪنهن به ٽبڪي تائين ليڪ ٽڪر کي چهڻي ليڪ ٽڪر (Tangent Segment) چئبو آهي. شڪل (ii) ۾ $\overleftrightarrow{PQ}$ ۽ $\overleftrightarrow{AB}$ گول تي چهڻي ليڪون آهن جڏهن ته ترتيبوار $\overline{PQ}$ ۽ $\overline{AB}$ چهڻي ليڪ ٽڪر آهن. چهڻي ليڪ ٽڪر $\overline{AB}$ جي ڊيگهه $m\overline{AB}$ آهي. گول کان ٻاهر موجود ڪنهن به ٽبڪي P مان ٻه چهڻي ليڪون $\overrightarrow{PA}$ ۽ $\overrightarrow{PB}$ ڪڍي سگهجن ٿيون جيئن شڪل (iii) ۾ ڏيکاريل آهي.



شڪل (i)

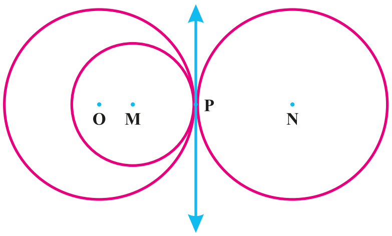


شڪل (ii)

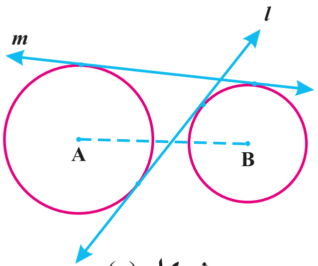


شڪل (iii)

اُهي گول جيڪي هڪٻئي کي اندران يا ٻاهريان ڇهن ٿا. انهن ۾ چهڻ ٽبڪو مشترڪ هوندو آهي. شڪل (iv) ۾ ٽبڪو P مشترڪ چهڻ ٽبڪو آهي انهن گولن جو جنهن جا مرڪز O، M ۽ N آهن مرڪز O ۽ M وارا گول اندريان ڇهن ٿا. جڏهن ته O ۽ N مرڪزن (يا M ۽ N پڻ) وارا گول ٻاهريان ڇهن ٿا. هڪٻئي کي نه ڇهڻ وارا ٻه گول عام چهڻ ليڪون يا مشترڪ چهڻي ليڪون رکي سگهن. ٿا پر انهن جا چهڻ ٽبڪا مختلف هوندا آهن ٻن نه ڇهڻ وارن گولن جي مشترڪ چهڻي ليڪ کي اندرين (يا آڏي) مشترڪ چهڻي ليڪ چئبو جيڪڏهن اها انهن جي مرڪزن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر کي ڪپي، ٻي صورت ۾ ان کي ٻاهرين (يا سڌي طرح) مشترڪ چهڻي ليڪ چئبو آهي شڪل (v) ۾ گولن تي ليڪ m هڪ ٻاهرين (يا سڌي طرح) مشترڪ چهڻي ليڪ آهي جڏهن ته ليڪ l هڪ اندرين (يا آڏي) مشترڪ چهڻي ليڪ آهي.



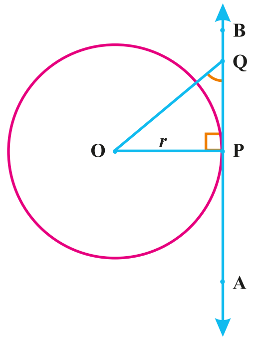
شڪل (iv)



شڪل (v)

26.1 گول تي ڇهٽي ليڪ يا ليڪون

سڌيان 26.1: جيڪڏهن هڪ ليڪ گول جي رداسي ٽڪر جي ٻاهرئين ڇيڙي تي عمود هجي ته اها ليڪ ان ٽبڪي تي گول جي ڇهٽي ليڪ هوندي.



مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O ۽ رداس r آهي. رداس $\overline{OP}$ تي عمود $\overleftrightarrow{AB}$ ڪڍيو ويو آهي يعني ٻاهرئين ڇيڙي P تي $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OP}$.

گهربل: گول جي ٽبڪي P تي $\overleftrightarrow{AB}$ ڇهٽي ليڪ آهي.

جوڙجڪ: $\overline{OQ}$ ڪيو، جڏهن ته $\overleftrightarrow{AB}$ تي P ڪانسواءِ Q هڪ ٽبڪو آهي.

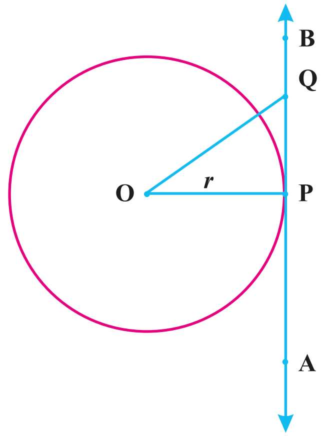
ثابتي:

بيان	دليل
گوني ڪندي ٽڪنڊي OPQ ۾ $m\angle OPQ = 90^\circ$ پر $m\angle OQP < 90^\circ$	P تي $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OP}$ (مليل) گوني ڪند ٽڪنڊي ۾ گوني ڪند ڪانسواءِ ٻيون ڪندون سوڙهي ڪندون هونديون آهن.
انهي ڪري $m\overline{OQ} > m\overline{OP}$	وڏي ڪند جي سامهون وارو پاسو وڏو هوندو آهي.
انهي ڪري Q گول کان ٻاهر موجود آهي. P ڪانسواءِ $\overleftrightarrow{AB}$ جا سڀ ٽبڪا گول کان ٻاهر آهن گول ۽ $\overleftrightarrow{AB}$ جو ميلاپ وارو ٽبڪو رڳو P آهي.	$m\overline{OQ} > r$ Q ڪو ٻيو ٽبڪو آهي P ڪانسواءِ (جوڙجڪ)
انهي ڪري $\overleftrightarrow{AB}$ گول جي ٽبڪي P تي هڪ ڇهٽي ليڪ آهي.	ڇهٽي ليڪ جي وصف مطابق

Q.E.D.

سڌيان 26.2

ڇهڻ ٽبڪي تي، گول جي ڇهٽي ليڪ ۽ گول جو رداسي ٽڪر ٻئي، هڪٻئي تي عمود هوندا آهن.



مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O رداس r ۽ رداسي ٽڪر $\overline{OP}$ آهي. ٽبڪي P تي $\overleftrightarrow{AB}$ هڪ ڇهٽي ليڪ آهي.

گهربل: $\overline{OP} \perp \overleftrightarrow{AB}$

جوڙجڪ: $\overline{OQ}$ ڪيو، جڏهن ته P ڪانسواءِ Q هڪ ٽبڪو آهي $\overleftrightarrow{AB}$ جو.

ثابتي:

بيان	دليل
تبڪو Q گول کان ٻاهر آهي انهي ڪري $m\overline{OQ} > m\overline{OP} = r \quad \cdots \text{(i)}$	P ڪانسواءِ Q کو ٻيو تبڪو آهي $\overleftrightarrow{AB}$ جو $\overline{OP}$ هڪ رداسي ٽڪر آهي $m\overline{OP} = r$ ۽
P ڪانسواءِ $\overleftrightarrow{AB}$ جي سڀني تبڪن جو مرڪزکان فاصلو r کان وڌيڪ آهي تنهنڪري P ڪانسواءِ سڀ تبڪا گول کان ٻاهر آهن	P ڪانسواءِ Q کو ٻيو تبڪو آهي $\overleftrightarrow{AB}$ جو (جوڙجڪ) مان (i)
مرڪز O کان $\overleftrightarrow{AB}$ جي ڪنهن ٻه تبڪي تائين سڀ کان ننڍو ليڪ ٽڪر $\overline{OP}$ آهي.	P ڪانسواءِ $\overleftrightarrow{AB}$ جي ڪنهن ٻه تبڪي Q لاءِ
انهي ڪري $m\angle OPQ = 90°$ ۽ $\overline{OP} \perp \overleftrightarrow{AB}$	ٻيون سڀ ڪندون سوڙهيون ڪندون آهن

Q.E.D.

نوٽ 1:

سڏيان 26.1 ۽ 26.2 ڇهڻ تبڪي تي، گول جي ڇهٽي ليڪ ۽ ان سان واسطيدار رداسي ٽڪر جي وچ ۾ تعلق کي نمايان ڪن ٿا.

نوٽ 2:

سڏيان 26.1 ۽ سڏيان 26.2 هڪٻئي جا عڪس آهن.

شامل نتيجو 1:

ڇهڻ تبڪي تي، گول جي ڇهٽي ليڪ تي ڪا عمودي ليڪ هميشه گول جي مرڪز مان گذرندي.

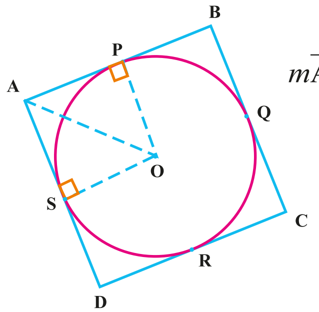
شامل نتيجو 2:

گول جي مرڪز، ڇهٽي تبڪي ۽ ڇهٽي ليڪ جي ڪنهن ٻيئي تبڪي سان ٺهيل ٽڪندو هڪ گوني ڪند ٽڪندو هوندو

شامل نتيجو 3: گول جي ڪنهن هڪ ڏنل تبڪي مان صرف هڪ ئي ڇهٽي ليڪ ڪڍي سگهجي ٿي.

مثال 1: ثابت ڪري ڏيکاريو ته ڪنهن گول کي گهيريندڙ پورو چوت چوڪندو رامبس آهي.

مليل: هڪ گول جو گهيريندڙ پورو چوت چوڪندو $ABCD \parallel^m$ آهي. اهڙي طرح جو $m\overline{AB} = m\overline{CD}$ ۽ $m\overline{AD} = m\overline{BC}$



گهربل: $ABCD \parallel^m$ هڪ رامبس آهي يعني ته $m\overline{AB} = m\overline{BC} = m\overline{CD} = m\overline{AD}$

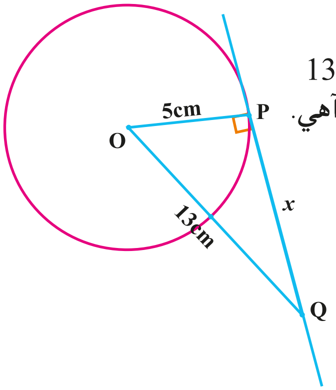
جوڙجڪ: گول جي تبڪن P، Q، R ۽ S تي ترتيبوار $\overline{AB}$،$\overline{BC}$،$\overline{CD}$ ۽ $\overline{AD}$ ڇهٽي ليڪ ٽڪر آهن $\overline{OA}$،$\overline{OS}$ ۽ $\overline{OP}$ ڪڍو.

ثابتي:

دليل	بيان
	۾ $\Delta OSA \leftrightarrow OPA$
ساڳي گول جا رداسي ٽڪر	$\overline{OS} \cong \overline{OP}$
ڇھٽي ليڪ رداسي ٽڪر تي عمود آهي	$m\angle OSA = 90^\circ = m\angle OPA$
ٽڪنڊي جو مشترڪ پاسو	$\overline{OA} \cong \overline{OA}$
ھ . پ ≅ ھ . پ	$\Rightarrow \Delta OSA \cong \Delta OPA$
يڪسان ٽڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا	$m\overline{AS} = m\overline{AP} \cdots (i)$
ساڳي طريقي موجب	ساڳي ريت $\Delta OPB \cong \Delta OQB$
يڪسان ٽڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا	$m\overline{BQ} = m\overline{BP} \cdots (ii)$
ساڳي طريقي موجب	$\Delta OQC \cong \Delta ORC$
يڪسان ٽڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا	$m\overline{QC} = m\overline{RC} \cdots (iii)$
ساڳي طريقي موجب	$\Delta ORD \cong \Delta OSD$
يڪسان ٽڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا	$m\overline{DS} = m\overline{DR} \cdots (iv)$
(i)_(iv) مساواتن کي جوڙ ڪندي	هاڻي $m\overline{AS} + m\overline{BQ} + m\overline{QC} + m\overline{DS}$
	$= m\overline{AP} + m\overline{BP} + m\overline{RC} + m\overline{DR}$
ٻيھر ترتيب ڏيندي	يا $\left(m\overline{AS} + m\overline{DS}\right) + \left(m\overline{BQ} + m\overline{QC}\right)$
	$= \left(m\overline{AP} + m\overline{BP}\right) + \left(m\overline{RC} + m\overline{DR}\right)$
شڪل مان	يا $m\overline{AD} + m\overline{BC} = m\overline{AB} + m\overline{CD} \quad (v)$
پورو چوڪوٽ چوڪندي جي وصف مطابق (مليل)	$2m\overline{BC} = 2m\overline{AB} \Rightarrow m\overline{AB} = m\overline{BC} \quad (vi)$
مليل ۾ (vi) جو استعمال ڪندي	$m\overline{AB} = m\overline{BC} = m\overline{CD} = m\overline{AD}$
	انھي ڪري ABCD $\|^m$ ھڪ رامبس آهي

Q.E.D.

مثال 2: 5cm رداس واري گول جي ڇھٽي ليڪ ٽڪر جي ڊيگھ لھو جنھن جو چيڙو گول جي مرڪز کان 13cm پري آهي.



حل: فرض ڪريو تہ گول جو مرڪز O آهي ۽ ڇھڻ ٽيڪو P آهي.

فرض ڪريو تہ Q ڇھٽي ليڪ جو اھو ٽيڪو آهي جيڪو مرڪز کان 13cm جي فاصلي تي آهي جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي. شڪل مان، اسان وٽ آهي.

$m\overline{OP} = r = 5cm$ ، $m\overline{OQ} = 13cm$ ۽ $m\overline{PQ} = x = ?$

فيثاغورث سڌيان جو استعمال ڪندي

$$\left(m\overline{OQ}\right)^2 = \left(m\overline{OP}\right)^2 + \left(m\overline{PQ}\right)^2$$

$$(13)^2 = (5)^2 + (x)^2$$

$$169 = 25 + x^2$$

يا $x^2 = 169 - 25 = 144$

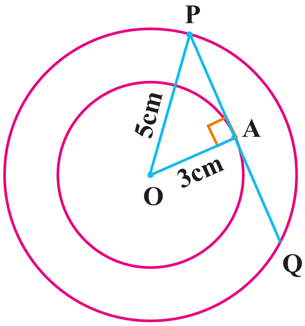
$$m\overline{PQ} = x = \sqrt{144} = 12cm.$$

مثال 3: ٻن هم مرڪز گولن جا ترتيبوار رداس 5cm ۽ 3cm آهن. وڏي گول جي ٽِٻڪن کان ننڍي گول تي ڇهڻي ليڪ ٽڪر جي ڊيگهه لهو. وڏي گول جي زهه جي ڊيگهه پڻ لهو جيڪو ننڍي گول کي ڇُهي ٿو.

حل: ڏنل رداسن وارا ٻه هم مرڪز گول شڪل ۾ ڏيکاريل آهن جن جو مشترڪ مرڪز O آهي.

يعني ته $m\overline{OA}=3cm$ ۽ $m\overline{OP}=5cm$ سڀ کان اڳ ۾ اسانکي $m\overline{AP}$ ۽ $m\overline{AQ}$ لهڻ جي ضرورت آهي.

يعني وڏي گول جي ٽِٻڪن P ۽ Q کان ننڍي گول تي ڇهڻي ليڪ ٽڪرن جي ڊيگهه.



فيثاغورث سڌيان جو استعمال ڪندي اسان وٽ آهي

$$\left(m\overline{OP}\right)^2=\left(m\overline{OA}\right)^2+\left(m\overline{AP}\right)^2$$

يعني $$25=9+\left(m\overline{AP}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(m\overline{AP}\right)^2=16$$

يا $$m\overline{AP}=4cm$$

پر رداسي ٽڪر $\overline{OA}$ اڌو اڌ ڪري ٿو زهه $\overline{PQ}$ کي

تنهنڪري $$m\overline{AP}=m\overline{AQ}$$

$$\Rightarrow \quad m\overline{AQ}=4cm$$

آخر ۾ اسان کي وڏي گول جي زهه $\overline{PQ}$ جي ڊيگهه کپي ٿي جيڪو ننڍي گول کي ڇُهي ٿو.

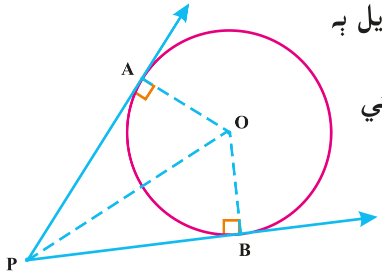
جيڪو آهي:

$$m\overline{PQ}=m\overline{AP}+m\overline{AQ}=8cm$$

مشق 26.1

1. ثابت ڪريو ڏيکاريو ته گول کي گهيريندڙ ٽڪندو هڪ ٽپور پاسو ٽڪندو آهي.
2. ثابت ڪريو ڏيکاريو ته گول کي گهيريندڙ مستطيل هڪ چورس آهي.
3. ٻن هم مرڪز گولن جا ترتيبوار قطر 10cm ۽ 5cm آهن. ٻاهرين گول جي هڪ ٽِٻڪي کان ننڍي گول تي هڪ ڇهڻي ليڪ ٽڪر جي ڊيگهه لهو. ٻاهرين گول جي ان زهه جي ڊيگهه پڻ لهو جيڪو اندرين گول کي ڇُهي ٿو.
4. گول جي مرڪز کان 5cm جي فاصلي تي هڪ ٽِٻڪو آهي. ان ٽِٻڪي کان گول جي ڇهڻي ليڪ ٽڪر جي ڊيگهه 4cm آهي.گول جو قطر، گهيرو ۽ ايراضي لهو.
5. 7cm رداس واري گول جي مرڪز کان هڪ ٽِٻڪو 25cm جي فاصلي تي آهي. ان ٽِٻڪي کان گول تي هڪ ڇهڻي ليڪ ٽڪر جي ڊيگهه معلوم ڪريو.
6. 3cm رداس واري گول جي مرڪز کان ڪيترو پري هڪ 10cm ڊيگهه وارو ڇهڻي ليڪ ٽڪر گول تي ڪيئي سگهجي ٿو؟

سڏيان 26.3: ڪنهن گول جي هڪ ٻاهرين ٽٻڪي تان گول تي ڪڍيل ٻه ڇهٽي ليڪون، ڊيگهه ۾ برابر هونديون.



مليل: هڪ ٻاهرين ٽٻڪي P کان گول جي ٽٻڪن A ۽ B تي ٻه ڇهٽي ليڪون $\overrightarrow{PA}$ ۽ $\overrightarrow{PB}$ آهن

گهربل: $\overline{PA}\cong\overline{PB}$

جوڙجڪ: $\overline{OA}$،$\overline{OB}$ ۽ $\overline{OP}$ ڪڍو

ثابتي:

بيان	دليل
$\overline{OA}\perp\overrightarrow{PA}$ ۽ $m\angle OAP=90^\circ$	ڇهٽي ليڪ رداسي ٽڪر تي عمود آهي
ساڳي ريت $\overline{OB}\perp\overrightarrow{PB}$ ۽ $m\angle OBP=90^\circ$	ڇهٽي ليڪ رداسي ٽڪرتي عمود آهي.
گوني ڪند ٽڪنڊن ۾ $\Delta OAP\leftrightarrow\Delta OBP$	
$\overline{OP}\cong\overline{OP}$	مشترڪ پاسو
$\overline{OA}\cong\overline{OB}$	ساڳيئي گول جا رداسي ٽڪر
$\therefore\ \Delta OAP\cong\Delta OBP$	ھ . پ ≅ ھ . پ
$\therefore\ \overline{PA}\cong\overline{PB}$	يڪسان ٽڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا

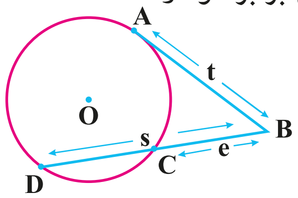
Q.E.D.

نوٽ 1: سڏيان 26.3 ظاهر ڪري ٿو ته ڪنهن گول جون ٻه ڇهٽي ليڪون جيڪي هڪ ٻئي کي گول کان ٻاهر ڪنهن ٽٻڪي تي ڪپين ته اهي ڊيگهه ۾ برابر هونديون.

شامل نتيجو 1: ڪنهن گول جون ٻاهرين ٽٻڪي کان ڪڍيل ڇهٽي ليڪون مرڪز تي يڪسان ڪندون ٺاهن ٿيون.

شامل نتيجو 2: ڪنهن گول جون ٻه پورروچوٽ ڇهٽي ليڪون گول کان ٻاهر ساڳيئي ٽٻڪي تي نه ڪپينديون.

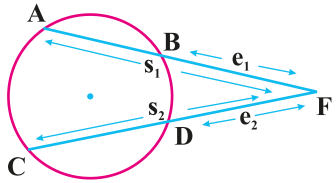
نوٽ 2: جيڪڏهن ڪنهن گول جي ڇهٽي ليڪ ۽ ڪپيندڙ ليڪ هڪٻئي کي گول کان ٻاهر ڪپين جيئن پر واري شڪل ۾ ڏيکاريل آهي. ته پوءِ ڇهٽي ليڪ ٽڪر جي ڊيگهه جو چورس برابر هوندو ڪپيندڙ ليڪ ٽڪرءِ ان جي ٻاهرين حصي جي ڊيگهن جي ضرب اُپت جي.



يعني ته

$$t^2 = s\cdot e \quad \text{يا} \quad \left(m\overline{AB}\right)^2=\left(m\overline{DB}\right)\cdot\left(m\overline{BC}\right)$$

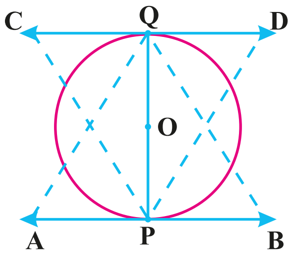
نوٽ 3: جيڪڏهن ٻه ڪپيندڙ ليڪون هڪٻئي کي گول کان ٻاهر ڪپين ٿيون جيئن پر واري شڪل ۾ ڏيکاريل آهي ته پوءِ هڪ ڪپيندڙ ليڪ ٽڪر ۽ ان جي ٻاهرين حصي جي ڊيگهن جي ضرب اُپت برابر هوندي، ٻيئي ڪپيندڙ ليڪ ٽڪر ۽ ان جي ٻاهرين حصي جي ڊيگهن جي ضرب اُپت جي. يعني ته



$$s_1e_1=s_2e_2 \quad \text{يا} \quad \left(m\overline{AF}\right)\times\left(m\overline{BF}\right)=\left(m\overline{CF}\right)\times\left(m\overline{DF}\right)$$

مثال 1:

ثابت ڪريو ته ڪنهن گول جي قطر جي چيڙن تي ڪڍيل ڇهٽي ليڪون پوروچوت هونديون.



مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O آهي. $\overleftrightarrow{AB}$ ۽ $\overleftrightarrow{CD}$ ترتيبوار قطر جي چيڙن P ۽ Q تي ڇهٽي ليڪون آهن

گهربل: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

جوڙجڪ: $\overline{CP}$، $\overline{DP}$، $\overline{AQ}$ ۽ $\overline{BQ}$ ڪڍيو

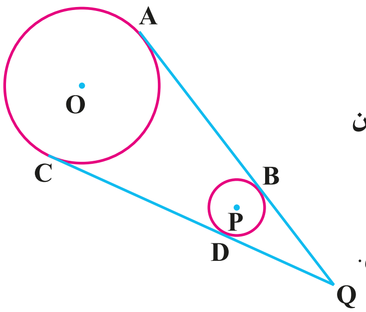
ثابتي:

بيان	دليل
$m\angle APO = 90° = m\angle BPO$	$\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OP}$
$m\angle CQO = 90° = m\angle DQO$	$\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{OQ}$
(i) $m\angle CPQ = m\angle BQP$	متبادل ڪندون
۽ (ii) $m\angle AQP = m\angle QPD$	متبادل ڪندون
$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	ساڳيون اندريون متبادل ڪندون ، (i)، (ii)

Q.E.D

مثال 2:

ثابت ڪريو ته ٻن گولن جون ٻه سڌي طرح مشترڪ ڇهٽي ليڪون،
ڊيگهه ۾ برابر آهن.



مليل: $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ ٻه سڌي طرح مشترڪ ڇهٽي ليڪون آهن ٻن گولن
تي جن جا مرڪز O ۽ P آهن.

گهربل: $m\overline{AB} = m\overline{CD}$

جوڙجڪ: $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ کي وڌايو ته جيئن اهي هڪ ٽبڪي Q تي ڪپين.

ثابتي:

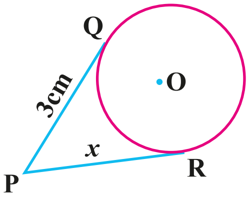
بيان	دليل
$m\overline{AQ} = m\overline{CQ}$ (i)	$\odot O$ جي ٻاهرين ٽبڪي Q مان ڪڍيل ڇهٽي ليڪون
$m\overline{BQ} = m\overline{DQ}$ (ii)	$\odot P$ جي ٻاهرين ٽبڪي Q مان ڪڍيل ڇهٽي ليڪون
$m\overline{AQ} - m\overline{BQ} = m\overline{CQ} - m\overline{DQ}$	(i) مان (ii) کي ڪٽ ڪندي
$\therefore$ $m\overline{AB} = m\overline{CD}$	شڪل جو استعمال ڪندي.

Q.E.D.

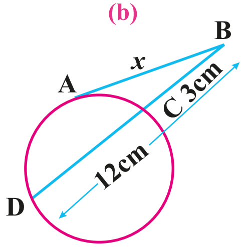
مثال 3:

هينين شڪلين ۾ نامعلوم ڊيگهه x لهو.

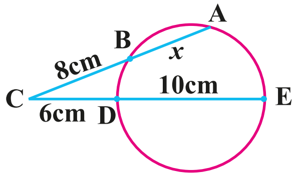
(a)



(b)



(c)



حل:

(a). جهٽي ليڪون $\overline{PQ}$ ۽ $\overline{PR}$ گول جي ٻاهر ٽٻڪي P تي ملن ٿيون. تنهنڪري اهي ڊيگهه ۾ لازمي برابر هوندا. يعني $m\overline{PQ}=m\overline{PR}$ انهي ڪري $x=3\text{cm}$

(b). جهٽي ليڪ $\overline{AB}$ ڪپيندڙ ليڪ $\overrightarrow{DC}$ سان گول جي ٻاهر ٽٻڪي B تي ملي ٿي. انهي ڪري اسان وٽ آهي.

$$\left(m\overline{AB}\right)^2=\left(m\overline{DB}\right)\cdot\left(m\overline{BC}\right) \quad \text{يا} \quad x^2=12\times3\Rightarrow x^2=36\Rightarrow x=6cm.$$

(c). ٻه ڪپيندڙ ليڪون $\overrightarrow{AB}$ ۽ $\overrightarrow{ED}$ گول کان ٻاهر ٽٻڪي C تي هڪٻئي کي ڪپين ٿيون. انهي ڪري اسان وٽ آهي.

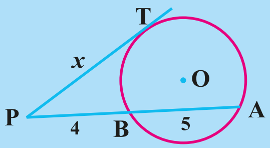
$$\left(m\overline{AC}\right)\times\left(m\overline{BC}\right)=\left(m\overline{EC}\right)\times\left(m\overline{CD}\right) \quad \text{يا} \quad (x+8)\times8=(10+6)\times6\Rightarrow8x+64=96$$

آخر ۾ $8x=96-64\Rightarrow8x=32\Rightarrow x=4\text{cm}$

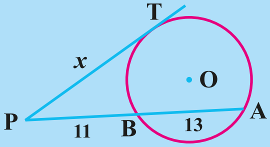
مشق 26.2

1. ثابت ڪري ڏيکاريو ته ڪنهن گول جي ٻه جي چيڙن تي ڪڍيل جهٽي ليڪون ان ٻه سان برابر ڪندون ناهيندڙيون.
2. ثابت ڪريو ته جيڪڏهن گول جون ٻه جهٽي ليڪون پورروچوت آهن ته پوءِ ڇهڻ ٽٻڪا گول جي هڪ قطر جا چيڙا آهن.
3. ثابت ڪري ڏيکاريو ته جيڪڏهن گول جون ٻه جهٽي ليڪون پورروچوت نه آهن ته پوءِ ڇهڻ ٽٻڪا گول جي هڪ ٻه جا چيڙا آهن.
4. هينين ۾ نامعلوم x جو ملهه لهو.

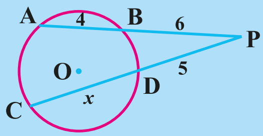
(a)



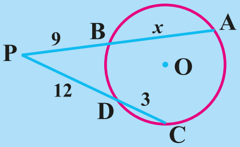
(b)



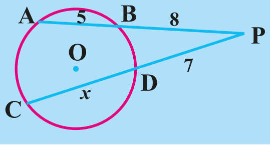
(c)



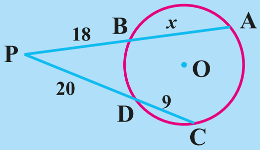
(d)



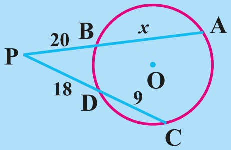
(e)



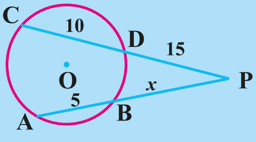
(f)



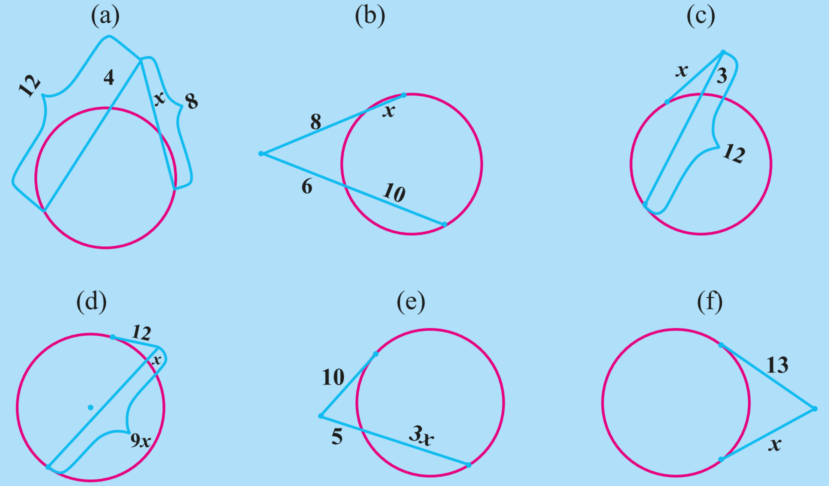
(g)



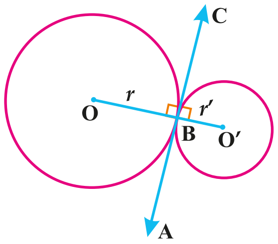
(h)



5. هينين ۾ نامعلوم x جو ملهه لهو.



سڏيان 26.4 : صورت (A):



جيڪڏهن ٻه گول ٻاهريان ڇُهن ٿا ته انهن جي مرڪزن جي وچ وارو فاصلو انهن جي ريڊاسن جي جوڙ اُپت جي برابر آهي.

مليل: ٻه گول جن جا مرڪز O ۽ O′ آهن ۽ انهن جا ريڊاس ترتيبوار r ۽ r' آهن. اهي گول هڪبئي کي ٽٻڪي B تي ڇُهن ٿا.

گهربل: $m\overline{OO'} = r + r'$

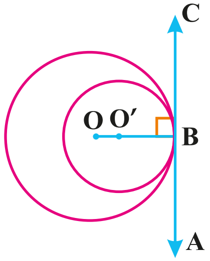
جوڙجڪ: ٻنهي گولن جي هڪ مشترڪ ڇهٽي ليڪ $\overleftrightarrow{AC}$ ڪڍو جيڪا ٽٻڪي B مان گذري ٿي.

ثابتي:

بيان	دليل
$\overline{OB} \perp \overleftrightarrow{AC}$ تنهنڪري $m\angle OBC = 90^\circ$ ⋯ (i)	ڇهٽي ليڪ ريڊاسي تڪر تي عمود آهي.
$\overline{O'B} \perp \overleftrightarrow{AC}$ تنهنڪري $m\angle O'BC = 90^\circ$ ⋯ (ii)	ڇهٽي ليڪ ريڊاسي تڪر تي عمود آهي.
$m\angle OBC + m\angle O'BC = 180^\circ$ ⋯ (iii)	(i) ۽ (ii) کي جوڙ ڪندي
O، B ۽ O′ هم ليڪ ٽٻڪا آهن ۽ B موجود آهي O ۽ O′ جي وچ ۾	(i)، (ii) ۽ (ii) مان
$\therefore \quad m\overline{OB} + m\overline{O'B} = m\overline{OO'}$	وصف مطابق
يا $\quad m\overline{OO'} = r + r'$	$m\overline{OB} = r$ ۽ $m\overline{O'B} = r'$

Q.E.D.

سڌيان 26.4: صورت(B): جيڪڏهن ٻه گول اندريان ڇُهن ٿا ته انهن جي مرڪزن جي وچ وارو فاصلو انهن جي رداسن جي فرق جي برابر آهي.



مليل: ٻه گول جن جا مرڪز O ۽ O′ آهن ۽ انهن جا رداس ترتيبوار r ۽ r' آهن.
اهي گول هڪ ٻيئي کي ٽٻڪي B تي اندريان ڇُهن ٿا.

گهربل: $m\overline{OO'} = r - r'$

جوڙجڪ: ٻنهي گولن جي هڪ مشترڪ ڇهڻي ليڪ $\overleftrightarrow{AC}$ ڪڍو جيڪا ٽٻڪي B مان گذري ٿي.

ثابتي:

بيان	دليل
(i) $m\angle OBC = 90^\circ$ تنهنڪري $\overline{OB} \perp \overleftrightarrow{AC}$	ڇهڻي ليڪ رداسي ٽڪر تي عمود آهي.
(ii) $m\angle O'BC = 90^\circ$ تنهنڪري $\overline{O'B} \perp \overleftrightarrow{AC}$	ڇهڻي ليڪ رداسي ٽڪر تي عمود آهي.
(iii) $m\angle OBC = m\angle O'BC = 90^\circ$	(i) ۽ (ii) مان
O، O′ ۽ B هم ليڪ ٽٻڪا آهن ۽ O′ موجود آهي O ۽ B جي وچ ۾	(i)، (ii) ۽ (iii) مان
(iv) $\therefore\ m\overline{OO'} = m\overline{O'B} + m\overline{OB}$	وصف مطابق
يا $m\overline{OO'} = m\overline{OB} - m\overline{O'B} = r - r'$	(iv) مان ۽ $m\overline{OB} = r$ ، $m\overline{O'B} = r'$.

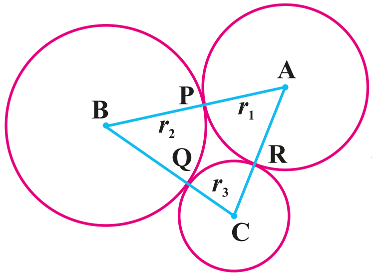
Q.E.D.

شامل نتيجو 1:
جيڪڏهن ٻن گولن جي مرڪزن جي وچ وارو فاصلو انهن جي رداسن جي جوڙ اُپت (يا فرق) جي برابر آهي ته پوءِ اهي ٻاهريان (يا اندران) ڇُهن ٿا

شامل نتيجو 2:
جيڪڏهن ٻن گولن جي مرڪزن جي وچ وارو فاصلو انهن جي رداسن جي جوڙ اُپت يا فرق جي برابر نه آهي ته پوءِ گول هڪ ٻيئي کي نٿا ڇُهن.

مثال 1: جيڪڏهن ٽي گول جوڙن ۾ ٻاهريان ڇهن ٿا ته پوءِ انهن جي مرڪزن کي ملائڻ سان ٺهندڙ ٽڪنڊي جو پيريميٽر، انهن جي رداسن جي جوڙ اُپت جي ٻيڻ جي برابر آهي.

مليل: ٽي گول جن جا مرڪز A، B، C ۽ انهن جا رداس ترتيبوار r_1، r_2، r_3 آهن.
اهي گول ٽٻڪن P ، Q ۽ R تي جوڙن ۾ ٻاهريان ڇهن ٿا.



گهربل: ΔABC جو پيريميٽر $= 2(r_1 + r_2 + r_3)$

جوڙجڪ: ΔABC ٺاهڻ لاءِ P ، Q ۽ R مان ترتيبوار $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ ۽ $\overline{AC}$ ٺاهيو.

ثابتي:

بيان	دليل
$m\overline{AB}=m\overline{AP}+m\overline{BP}$ (i)	A ۽ B جي وچ ۾ P موجود آهي.
$m\overline{BC}=m\overline{BQ}+m\overline{CQ}$ (ii)	B ۽ C جي وچ ۾ Q موجود آهي.
$m\overline{AC}=m\overline{AR}+m\overline{CR}$ (iii)	A ۽ C جي وچ ۾ R موجود آهي.
$m\overline{AB}+m\overline{BC}+m\overline{AC}$ $=m\overline{AP}+m\overline{BP}+m\overline{BQ}+m\overline{CQ}+m\overline{AR}+m\overline{CR}$	(i)، (ii) ۽ (iii) کي جوڙ ڪندي
$m\overline{AB}+m\overline{BC}+m\overline{AC}$ $=\left(m\overline{AP}+m\overline{AR}\right)+\left(m\overline{BP}+m\overline{BQ}\right)+\left(m\overline{CQ}+m\overline{CR}\right)$	پيهر ترتيب ڏيڻ سان
$m\overline{AB}+m\overline{BC}+m\overline{AC}=\left(r_1+r_1\right)+\left(r_2+r_2\right)+\left(r_3+r_3\right)$	$m\overline{AP}=m\overline{AR}=r_1$ $m\overline{BP}=m\overline{BQ}=r_2$ $m\overline{CQ}=m\overline{CR}=r_3$
$=2r_1+2r_2+2r_3=2\left(r_1+r_2+r_3\right)$	
انهي ڪري ΔABC جو پيريميٽر $=2\left(r_1+r_2+r_3\right)$	

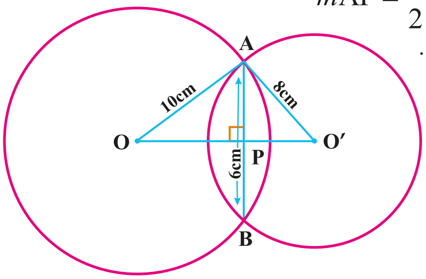
Q.E.D.

مثال 2: ٻن ڪپيندڙ گولن جا رداس 10cm ۽ 8cm آهن جيڪڏهن انهن جي هڪ مشترڪ زهه جي ڊيگهه 6cm آهي. انهن جي مرڪزن جي وچ وارو فاصلو ڇا آهي.

حل: ٻه گول ڪٺو جن جا مرڪز O ۽ O′ آهن ۽ انهن جا رداس ترتيبوار 10cm ۽ 8cm آهن جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي. شڪل مان اسان وٽ آهي.

$$m\overline{OA}=10cm,\ m\overline{O'A}=8cm,\ m\overline{AB}=6cm,\ m\overline{OO'}=?$$

جيئن ته P اڌو اڌ ڪري ٿو $\overline{AB}$ کي، تنهنڪري $m\overline{AP}=\frac{1}{2}m\overline{AB}=\frac{6}{2}=3cm$



ΔAPO ۾، فيثاغورث ٿيري جو استعمال ڪندي اسان وٽ آهي.

$$10^2=3^2+\left(m\overline{OP}\right)^2$$

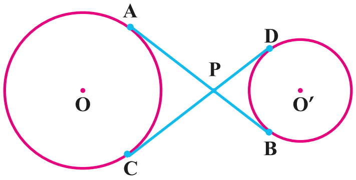
$$\Rightarrow\ m\overline{OP}=\sqrt{100-9}=\sqrt{91}cm.$$

$\Delta APO'$ ۾ فيثاغورث ٿيري استعمال ڪندي اسان وٽ آهي.

$$8^2=3^2+\left(m\overline{O'P}\right)^2$$

$$\Rightarrow\ m\overline{O'P}=\sqrt{64-9}=\sqrt{55}cm$$

آخر ۾ $m\overline{OO'}=m\overline{OP}+m\overline{O'P}=\sqrt{91}+\sqrt{55}=16.955cm$ (تقريباً)



مثال 3: ٻن گولن جون ٻه مشترڪ آڏيون ڇهڻ ليڪون ڊيگهه ۾ برابر هونديون آهن. ثابت ڪريو.

مليل: ٻه گول جن جا مرڪز O ۽ O′ آهن، انهن جون ترتيبوارمشترڪ آڏيون ڇهڻ ليڪون $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ آهن.

گهربل: $m\overline{AB}=m\overline{CD}$

جوڙجڪ : ڇهٽي ليڪون $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ ٽٻڪي P تي ڪپين ٿيون.
ثابتي:

بيان	دليل
(i) $m\overline{AP}=m\overline{CP}$	گول جي هڪ ٻاهرين ٽٻڪي کان ڇهٽي ليڪون
(ii) $m\overline{BP}=m\overline{DP}$	گول جي هڪ ٻاهرين ٽٻڪي کان ڇهٽي ليڪون
(iii) $m\overline{AP}+m\overline{BP}=m\overline{CP}+m\overline{DP}$	(i) ۽ (ii) کي جوڙ ڪندي
$\Rightarrow m\overline{AB}=m\overline{CD}$	شڪل ۽ مساوات (iii) مان

Q.E.D

مثال 4: ٻہ گول هڪٻئي کي ٻاهريان ڇهن ٿا ۽ انهن جي مرڪزن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر جي ڊيگهہ 7cm آهي. جيڪڏهن هڪڙي جو رداس 3cm آهي تہ ٻيئي گول جي ايراضي ڇا ٿيندي؟

حل: جيئن تہ ٻہ گول ٻاهريان ڇُهن ٿا انهي ڪري

مرڪزن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر جي ڊيگهہ $= r_1 + r_2$

$$7 = 3 + r_2$$

$$\Rightarrow \quad r_2 = 7 - 3 = 4cm.$$

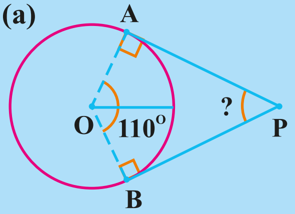
هاڻي ٻئي گول جي ايراضي $= \pi r_2^2 = \pi \cdot (4)^2 = 16\pi \text{cm}^2$

$$= 16\left(\frac{22}{7}\right)\text{cm}^2 = 50.286\text{cm}^2$$ (تقريباً)

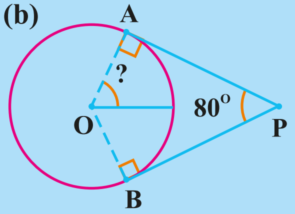
مشق 26.3

1. جيڪڏهن ٻن گولن جي مرڪزن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر جي ڊيگهہ، انهن جي رداسن جي جوڙ اُپت جي برابر آهي تہ پوءِ ثابت ڪريو تہ گول ٻاهريان ڇهن ٿا.
2. هڪ ٽڪنڊو جنهن جون چوٽيون ٽن گولن جا مرڪز آهن. جيڪڏهن ان ٽڪنڊي جو پيريميٽر گولن جي قطرن جي جوڙ اُپت جي برابر آهي تہ پوءِ ثابت ڪريو تہ ٽي گول، جوڙن ۾ ٻاهريان ڇُهن ٿا.
3. ٻہ يڪسان گول جيڪي ٻاهريان ڇهن ٿا جيڪڏهن انهن جي مرڪزن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر جي ڊيگهہ 12cm آهي تہ پوءِ انهن جا رداس ۽ گولن جا گهيرا معلوم ڪريو.
4. جيڪڏهن ڏنل گول جي هڪ ٻاهرين ٽٻڪي P کان گول تي ٻہ ڇهٽي ليڪون PA ۽ PB آهن جيئن شڪلين ۾ ڏيکاريل آهي تہ پوءِ نامعلوم ڪنڊ معلوم ڪريو.

(a)



(b)



5. ثابت ڪري ڏيکاريو تہ جيڪڏهن ٻہ گول ٻاهريان ڇهن ٿا تہ پوءِ ڇهہ ٽٻڪو ان ليڪ ٽڪر تي موجود هوندو جيڪو ٻنهي مرڪزن کي ملائي ٿو.

6. جيڪڏهن 2.5cm رداس واري گول جا ٻه زه هڪٻئي کان 3.9cm پري آهن ۽ هڪ زه جي ڊيگهه 1.4cm آهي. ته پوءِ ٻئي زه جي ڊيگهه لهو.

7. جيڪڏهن ٽي گول جوڙن ۾ ٻاهريان ڇهن ٿا ۽ ٻن گولن جا رداس 4cm ۽ 5cm آهن ته پوءِ ٽيئن گول جو رداس معلوم ڪريو جيڪڏهن انهن جي مرڪزن مان نهندڙ ٽڪنڊي تي جو پيريميٽر 35cm آهي.

جائزي واري مشق 26

1. درست جواب تي نشان هڻو.

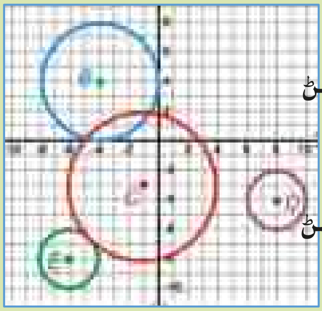
i. جيڪڏهن ڪو ٽبڪو گول کان ٻاهر آهي ته پوءِ ان ٽبڪي مان اسين_____ ڇهڻي ليڪ يا ليڪون ڪڍي سگهون ٿا.

(a) هڪ (b) ٻه (c) ٽي (d) ڪوبه نه

ii. ڇهڻي ليڪ ۽ رداسي ٽڪر جي وچ واري ڪنڊ جيڪا ان جي ٻاهرين چيڙي تي نهي ٿي اها ___ آهي.

(a) 45^0 (b) 60^0 (c) 90^0 (d) 120^0

iii. ڀر واري شڪل ۾، E ۽ C مرڪز وارا گول _________



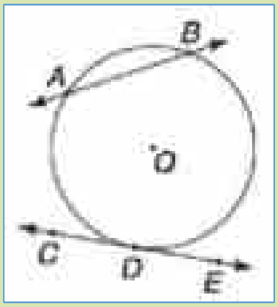
(a) اندريان ڇهن ٿا (b) ٻاهريان ڇهن ٿا
(c) نٽا ڇهن ٿا (d) يڪسان آهن

iv. ڀر واري شڪل ۾ ، B ۽ C مرڪزن وارن گولن جو / جا______ ڇهڻ ٽبڪو/ ٽبڪا آهن

(a) هڪڙو به نه (b) هڪ
(c) ٻه (d) هنن مان ڪوبه نه

v. ڀر واري شڪل ۾، E ۽ C مرڪزن وارن گولن جو/ جا ______ ڇهڻ ٽبڪو/ ٽبڪا آهن.

(a) هڪڙو به نه (b) هڪ
(c) ٻه (d) هنن مان ڪوبه نه



vi. ڀر واري شڪل ۾ $\overleftrightarrow{AB}$ _________ آهي.

(a) ڇهڻي ليڪ (b) ڪپيندڙ ليڪ
(c) زه (d) ڪوبه نه

vii. ڀر واري شڪل ۾، $\overleftrightarrow{CDE}$__________ آهي.

(a) ڇهڻي ليڪ (b) ڪپيندڙ ليڪ
(c) زه (d) ڪوبه نه

viii. ڀر واري شڪل ۾__________ ڇهڻ ٽبڪو آهي

(a) A (b) B (c) C (d) D

ix. گول جي ڪنهن قطر جي چيڙن تي ڪڍيل ڇهڻي ليڪون هڪٻئي جي__________ آهن.

(a) پورووچوٽ (b) عمود (c) ڪپيندڙ (d) (b)۽ (c)ٻئي

x. ٻن گولن جي مشترڪ ڇهڻي ليڪن جو وڌ ۾ وڌ تعداد_____ آهي جيڪڏهن اُهي اندران ڇهن ٿيون.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

xi. ٻن گولن جي مشترڪ ڇُهڻي ليڪن جو وڌ ۾ وڌ تعداد_____ آهي جيڪڏهن اُهي ٻاهريان ڇُهن ٿيون.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

خلاصو

- هڪ سڌي ليڪ جيڪا گول کي رڳو هڪ ئي ٽٻڪي تي ڇهي ان کي ڇهڻي ليڪ چئبو آهي ۽ مشترڪ ٽٻڪي کي ڇهڻ ٽٻڪو يا ميلاپ وارو ٽٻڪو چئبو آهي.
- هڪ سڌي ليڪ جيڪا گول کي ٻن ٽٻڪن تي ڪپي ان کي ڪپيندڙ ليڪ چئبو آهي هڪ گول ۽ ڪپيندڙ ليڪ جي وچ ۾ ميلاپ جا ٻه ٽٻڪا هوندا آهن.
- ڇهڻي ليڪ ٽڪر هڪ اهڙو ليڪ ٽڪر آهي. جيڪو ڇهڻ ٽٻڪي کان ڇهڻي ليڪ جي ڪنهن ٻيئي ٽٻڪي تائين هوندو آهي.
- اهو ٽڪنڊو جيڪو گول جي مرڪز، ڇهڻ ٽٻڪي ۽ ڇهڻي ليڪ جي ڪي ٻيئي ٽٻڪي کي ملائڻ سان ٺهي ته اهو هميشه ڳوني ڪنڊ ٽڪنڊو هوندو آهي.
- جڏهن ٻه گول اندريان يا ٻاهريان ڇهن ته انهن جي وچ ۾ هڪ مشترڪ ڇهڻي ليڪ ۽هڪ مشترڪ ميلاپ وارو ٽٻڪو هوندو آهي.
- ٻه گول جيڪي هڪ ٻيئي کي نٿا ڇهن انهن کي ٻه مشترڪ ڇهڻي ليڪون هونديون آهن: ٻاهريون (سڌي طرح) ۽ اندريون (آڏيون) مشترڪ ڇهڻي ليڪون.
- ٻن گولن جي سڌي طرح لاڳاپيل ڇهڻي ليڪن جون ڊيگهون برابر هونديون آهن.
- ٻن گولن جي آڏيون لاڳاپيل ڇهڻي ليڪن جون ڊيگهون برابر هونديون آهن.
- گول جي ڪنهن ٽٻڪي تي صرف هڪ ئي ڇهڻي ليڪ ڪڍي سگهجي ٿي.
- جيڪڏهن ڪا ليڪ گول جي رداسي ٽڪر جي ٻاهرين ڇيڙي تي عمود آهي ته پوءِ اها ان ٽٻڪي تي ڇهڻي ليڪ هوندي.
- گول جي ڇهڻي ليڪ ۽ مرڪز کي ڇهڻ ٽٻڪي سان ملائيندڙ ليڪ ٽڪر هڪٻئي تي عمود هوندا آهن.
- گول جي ڪنهن ٻاهرين ٽٻڪي کان گول تي ڪڍيل ٻه ڇهڻي ليڪون ڊيگهه ۾ برابر هونديون آهن.
- جيڪڏهن ٻه گول ، ٻاهريان ڇهن ٿا. ته پوءِ انهن جي مرڪزن جي وچ وارو فاصلو انهن جي رداسن جي جوڙ اُپت جي برابر آهي.
- جيڪڏهن ٻه گول اندريان ڇهن ٿا ته پوءِ انهن جي مرڪزن جي وچ وارو فاصلو انهن جي رداسن جي فرق جي برابر آهي.

یونٽ 27

زه ۽ قوس
CHORDS AND ARCS

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هي يونٽ پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- هيٺين ٿيئرمن کي انهن جي شامل نتيجن سان گڏ سمجهن ۽ گڏيل مسئلن کي حل ڪرڻ لاءِ انهن جو استعمال ڪن.
- جيڪڏهن هڪ گول (يا يڪسان گولن) جا ٻہ قوس يڪسان آهن تہ پوءِ مطابقت رکندڙ زه برابر هوندا.
- جيڪڏهن هڪ گول (يا يڪسان گولن) جا ٻہ زه برابر آهن تہ پوءِ انهن جا مطابقت رکندڙ قوس (وڏا قوس، ننڍا قوس، اڌ گول) يڪسان هوندا.
- هڪ گول (يا يڪسان گولن) جا برابر زه مرڪز (يا مطابقت رکندڙ مرڪزن) تي برابر ڪنڊون ناهين ٿا.
- جيڪڏهن هڪ گول (يا ٻن يڪسان گولن) جا زه مرڪز (يا مطابقت رکندڙ مرڪزن) تي برابر ڪنڊون ٺاهي / ٺاهين ٿا تہ پوءِ زه برابر هوندا.

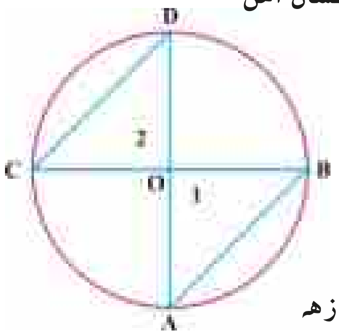
تعارف: هن يونٽ ۾ اسين گول جي زهه ۽ قوسن سان لاڳاپيل سڌيان پڙهنداسين.

سڌيان 27. 1 : جيڪڏهن هڪ گول (يا يڪسان گولن) جا ٻه قوس يڪسان آهن ته پوءِ مطابقت رکندڙ زهه برابر هوندا.

اسين سڌيان کي

i. هڪ گول لاءِ ثابت ڪنداسين.

ii. ٻن يڪسان گولن لاءِ ثابت ڪنداسين.



i. هڪ گول لاءِ

مليل: مرڪز O وارو گول جنهن ۾ $\overset{\frown}{AB}$ ۽ $\overset{\frown}{CD}$ يڪسان قوس آهن يعني ته $\overset{\frown}{CD} \cong \overset{\frown}{AB}$. مليل يڪسان قوسن جا مطابقت رکندڙ زهه $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ آهن.

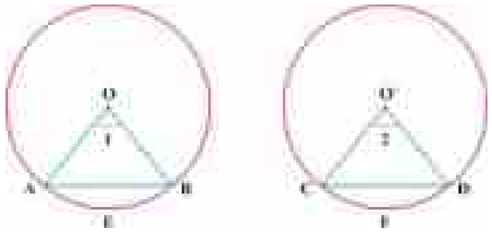
گهربل: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

جوڙجڪ: A،B،C ۽ D سان ٽپڪي O کي ملايو.

ثابتي:

دليل	بيان
	$\Delta OAB \leftrightarrow OCD$ ۾
ساڳي گول جا رداسي ٽڪر	$\overline{OA} \cong \overline{OC}$
ساڳي گول جا رداسي ٽڪر	$\overline{OB} \cong \overline{OD}$
ٻن يڪسان قوسن جون مرڪزي ڪندون	$m\angle 1 = m\angle 2$
پ- ڪ- پ موضوع	$\therefore \quad \Delta OAB \cong \Delta OCD$
يڪسان ٽڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Q.E.D



ii. ٻن يڪسان گولن لاءِ

مليل: ٻه يڪسان گول جن جا مرڪز ترتيبوار O ۽ O′ آهن.
انهن گولن جا يڪسان قوس $\overset{\frown}{AB}$ ۽ $\overset{\frown}{CD}$ آهن جڏهن ته $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ مطابقت رکندڙ زهه آهن.

گهربل: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

جوڙجڪ: O کي A ۽ B سان ملايو. جڏهن ته O′ کي C ۽ D سان ملايو.

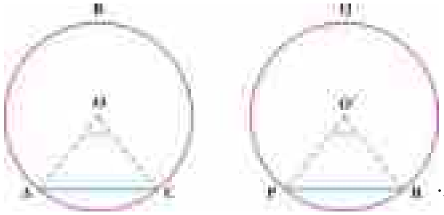
ثابتي:

دليل	بيان
	$\Delta OAB \leftrightarrow \Delta O'CD$ ۾
يڪسان گولن جا رداسي ٽڪر	$\overline{OA} \cong \overline{O'C}$
يڪسان گولن جا رداسي ٽڪر	$\overline{OB} \cong \overline{O'D}$
ٻن يڪسان قوسن جون مرڪزي ڪندون	$m\angle 1 = m\angle 2$
پ. ڪ. پ موضوع	$\Delta OAB \cong \Delta O'CD$
يڪسان ٽڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Q.E.D

سڏيان 27.2 (سڏيان 27.1 جو عڪس)

جيڪڏهن هڪ گول (يا يڪسان گولن) جا ٻه زهه برابر آهن ته پوءِ انهن جا مطابقت رکندڙ قوس (وڏا قوس، ننڍا قوس، اڌ گول) يڪسان هوندا.



مليل: ٻه يڪسان گول جن جا مرڪز ترتيبوار O ۽ O' آهن ۽ انهن جا ٻه زهه $\overline{PR}$ ۽ $\overline{AC}$ يڪسان آهن يعني ته $\overline{AC} \cong \overline{PR}$

گهربل: $\widehat{AC} \cong \widehat{PR}$

جوڙجڪ: O کي A ۽ C سان ملايو. O' کي P ۽ R سان ملايو.

ثابتي:

بيان	دليل
$\Delta AOC \leftrightarrow \Delta PO'R$ ۾	
$\overline{OA} \cong \overline{O'P}$	يڪسان گولن جا رداسي ٽڪر
$\overline{OC} \cong \overline{O'R}$	يڪسان گولن جا رداسي ٽڪر
$\overline{AC} \cong \overline{PR}$	مليل
$\Delta OAC \cong \Delta PO'R$	پ. پ. پ. ≅ پ. پ. پ.
$m\angle AOC = m\angle PO'R$ (i)	يڪسان ٽڪنڊن جون مطابقت رکندڙ ڪندون
انهي ڪري	
$\widehat{AC} \cong \widehat{PR}$	مساوات (i) مان

Q.E.D

مثال1: هڪ گول جي گهيري تي هڪ ٽپڪو P رداسي ٽڪرن $\overline{OA}$ ۽ $\overline{OB}$ کان هڪجيتري فاصلي تي آهي. ثابت ڪريو ته $m\widehat{AP} = m\widehat{BP}$

حل:

مليل: $\overline{AB}$ زهه آهي ان گول جو جنهن جو مرڪز O آهي، گول جي گهيري جو هڪ ٽپڪو P رداسي ٽڪرن $\overline{OA}$ ۽ $\overline{OB}$ کان هڪجيتري فاصلي تي آهي.

يعني ته $m\overline{PR} = m\overline{PS}$

گهربل: $m\widehat{AP} = m\widehat{BP}$

جوڙجڪ: O کي P سان ملايو شڪل ۾ $m\angle 1$ ۽ $m\angle 2$ کي ظاهر ڪريو.

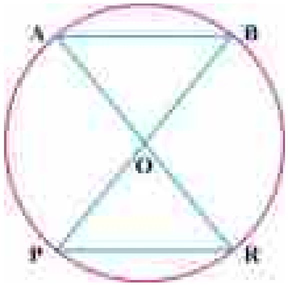
ثابتي:

بيان	دليل
گوني ڪنڊ ٽڪنڊن	
$\Delta OPR \leftrightarrow \Delta OPS$ ۾ $m\overline{OP} = m\overline{OP}$	مشترڪ پاسو
$m\overline{PR} = m\overline{PS}$	مليل
$\therefore \quad \Delta OPR \cong \Delta OPS$	هه. پ ≅ هه. پ
انهي ڪري $m\angle 1 = m\angle 2$ (i)	يڪسان ٽڪنڊن جون مطابقت رکندڙ ڪندون
$\Rightarrow \quad \widehat{AP} \cong \widehat{BP}$	(i)مان
اهڙي طرح $m\widehat{AP} = m\widehat{BP}$	يڪسان قوسن جي وصف مطابق

Q.E.D

سڏيان 27.3: هڪ گول (يا يڪسان گولن) جا برابر زهه مرڪز (يا مطابقت رکندڙ مرڪزن) تي برابر ڪندون ناهين ٿا. اسين اهو سڏيان ثابت ڪنداسين:

i) هڪ گول لاءِ   ii) ٻن يڪسان گولن لاءِ



i) هڪ گول لاءِ

مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O آهي ان جا ٻه زهه $\overline{AB}$ ۽ $\overline{PR}$ يڪسان آهن.

يعني ته $\overline{AB} \cong \overline{PR}$

گهربل: $m\angle AOB = m\angle POR$

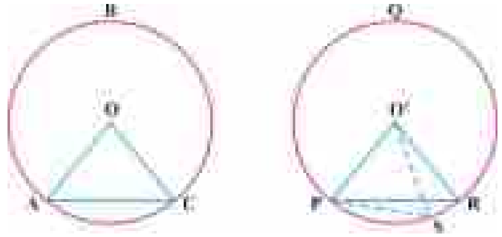
جوڙجڪ: O کي A ۽ B سان ملايو ۽ O کي P ۽ R سان پڻ ملايو.

ثابتي:

بيان	دليل
$\Delta AOB \longleftrightarrow \Delta POR$ ۾	مليل
$\overline{AB} \cong \overline{PR}$ ... (i)	ساڳي گول جا رداسي ٽڪر
$\overline{OB} \cong \overline{OR}$ ... (ii)	ساڳي گول جا رداسي ٽڪر
$\overline{OA} \cong \overline{OP}$ ... (iii) ۽	پ. پ. پ ≅ پ. پ. پ.
$\Delta AOB \cong \Delta POR$	يڪسان ٽڪنڊن جون مطابق رکندڙ ڪندون
$m\angle AOB = m\angle POB$	

Q.E.D

ii) ٻن يڪسان گولن لاءِ



مليل: ٻه يڪسان گول جن جا مرڪز ترتيبوار O ۽ O′ آهن.
۽ $m\overline{AC} = m\overline{PR}$ جڏهن ته $\overline{AC}$ ۽ $\overline{PR}$ گولن جا زهه آهن.

گهربل: $m\angle AOC = m\angle PO'R$

جوڙجڪ: قوس PR تي هڪ ٽپڪو S کڻو ۽ S کي P ۽ O′ سان ملايو اهڙي طرح جو $\angle AOC \cong \angle PO'S$

ثابتي:

بيان	دليل
فرض ڪريو ته $m\angle AOC \neq m\angle PO'R$	
پر $m\angle AOC = m\angle PO'S$	جوڙجڪ
$\therefore$ $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{PS}$ (i)	برابر مرڪزي ڪندن جا قوس
$\therefore$ $m\overline{AC} = m\overline{PS}$ (ii)	سڏيان (i) مان
پر $m\overline{AC} = m\overline{PR}$ (iii)	مليل
$\therefore$ $m\overline{PR} = m\overline{PS}$	(ii) ۽ (iii) جو استعمال ڪندي
اهو تڏهن ئي ممڪن ٿيندو جڏهن R نهڪندڙ هجي S تي	چاڪاڻ ته P مشترڪ ٽپڪو آهي
$\Rightarrow$ $m\angle AOC = m\angle POR$	اسانجو مفروضو غلط آهي.

Q.E.D

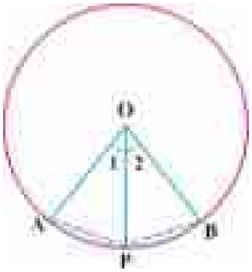
شامل نتيجو 1:

يڪسان گولن ۾ يا ساڳيئي گول ۾ جيڪڏهن مرڪزي ڪندون برابر آهن ته پوءِ مطابقت رکندڙ سيڪٽر برابر هوندا

شامل نتيجو 2:

يڪسان گولن يا ساڳيئي گول ۾، جيڪڏهن ٻه زهه برابر نه آهن ته پوءِ ان سان مطابقت رکندڙ قوس غير مساوي مرڪزي ڪندون ناهيندا.

مثال 1:



ثابت ڪريو ته گول جي مرڪزي ڪند جو اندريون اڌ ڪندڙ مطابقت رکندڙ قوس کي اڌو اڌ ڪندو.

مليل:

هڪ گول جنهن جو مرڪز O آهي. مرڪزي ڪند AOB جو اندريون اڌ ڪندڙ $\overline{OP}$ آهي.

يعني ته $\angle 2 \cong \angle 1$

گهربل:

$\overset{\frown}{AP} \cong \overset{\frown}{PB}$

جوڙجڪ:

$\overline{AP}$ ۽ $\overline{BP}$ ڪڍيو.

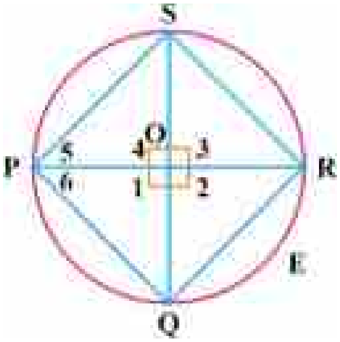
ثابتي:

بيان	دليل
$\Delta OAP \leftrightarrow \Delta OBP$ ۾	ساڳي گول جا رداس
$m\overline{OA} = m\overline{OB}$	مليل
$m\angle 1 = m\angle 2$	مشترڪ پاسو
$m\overline{OP} = m\overline{OP}$ ۽	پ. ڪ. پ. مفروضو
$\therefore \quad \Delta OAP \cong \Delta OBP$	يڪسان ٽڪنڊن جا
$\overline{AP} \cong \overline{BP}$ انهي ڪري	مطابقت رکندڙ پاسا
$\Rightarrow \quad \overset{\frown}{AP} \cong \overset{\frown}{BP}$	برابر زهه جا مطابقت رکندڙ قوس

Q.E.D

مثال 2:

ثابت ڪريو تہ ڪنھن گول ۾، جيڪڏھن ٻہ قطر هڪٻئي تي عمود هجن تہ پوءِ انھن جي ڇيڙن کي ملائيندڙ ليڪون چورس ٺاهينديون.



مليل: $\overline{PR}$ ۽ $\overline{QS}$ ان گول جا عمودي قطر آهن جنھن جو مرڪز O آهي.

انھي ڪري PQRS هڪ چوڪندو آهي.

گھربل: PQRS هڪ چورس آهي.

جوڙجڪ: ڪندن کي نالا ڏيو جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي: $\angle1$، $\angle2$، $\angle3$، $\angle4$، $\angle5$ ۽ $\angle6$.

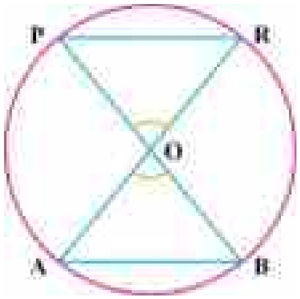
ثابتي:

بيان	دليل
$\overline{PR}$ ۽ $\overline{QS}$،مرڪز O واري گول جاٻه عمودي قطرآهن.	مليل
$m\angle1=m\angle2=m\angle3=m\angle4=90^\circ$	قطر هڪٻئي تي عمود آهن
$m\widehat{PQ}=m\widehat{QR}=m\widehat{RS}=m\widehat{SP}$ ... (i)	برابر مرڪزي ڪندن جا قوس
$m\overline{PQ}=m\overline{QR}=m\overline{RS}=m\overline{SP}$ ... (ii)	يڪسان قوسن جا مطابقت رکندڙ زھ
گوني ڪند ٽڪنڊي ΔPOS ۾ $m\overline{PO}=m\overline{OS}$ ... (iii)	ساڳي گول جا رداسي ٽڪر
ΔPOS ٻيور پاسو گوني ڪند ٽڪنڊو آهي $m\angle5=45^\circ$ ... (iv)	(iii) مان ΔPOS ٻيور پاسو گوني ڪند ٽڪنڊو آهي.
ساڳي ريت ΔPOQ ٻيور پاسو گوني ڪند ٽڪنڊو آهي. $m\angle6=45^\circ$ ... (v)	متين طريقي سان
هاڻي $m\angle P=m\angle5+m\angle6$ $m\angle P=45^\circ+45^\circ$ يا $m\angle P=90^\circ$ ... (vi)	ڪندن جي جوڙ وارو موضوع (iv) ۽ (v) مان
ساڳي ريت $m\angle Q=m\angle R=m\angle S=90^\circ$ ... (vii)	متين طريقي سان
PQRS هڪ چورس آهي	(ii)، (vi) ۽ (vii) جو استعمال ڪندي

Q.E.D

سڌيان 27.4

جيڪڏهن هڪ گول (يا ٻن يڪسان گولن) جا ٻہ مرڪز (يا مطابقت رکندڙ مرڪزن) تي برابر ڪندون ٺاهي/ ناهين ٿا تہ پو ٻہ برابر هوندا.



(a) هڪ گول لاءِ

مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O آهي. $\overline{PR}$ ۽ $\overline{AB}$ ان جا ٻہ زهہ آهن.
بئي زهہ برابر مرڪزي ڪندون POR ۽ AOB ناهين ٿا
يعني تہ $\angle POR \cong \angle AOB$

گهربل: $\overline{AB} \cong \overline{PR}$

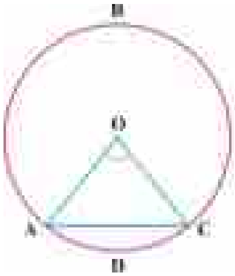
جوڙجڪ: O کي P ۽ R سان ملايو ۽ O کي A ۽ B سان پڻ ملايو.

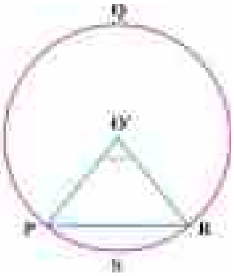
ثابتي:

بيان	دليل
$\Delta PQR \leftrightarrow \Delta AOB$	
$\overline{OR} \cong \overline{OB}$ (i)	ساڳي گول جا رداسي ٽڪر
$\overline{OP} \cong \overline{OA}$ (ii)	ساڳي گول جا رداسي ٽڪر
۽ $\angle POR \cong \angle AOB$ (iii)	مليل
$\Delta PQR \cong \Delta AOB$	پ. ڪ. پ. مفروضو
$\overline{AB} \cong \overline{PR}$	يڪسان ٽڪنڊن جا بہ مطابقت رکندڙ پاسا

Q.E.D

(b) ٻن يڪسان گولن لاءِ





مليل: ٻہ يڪسان گول جن جا مرڪز O ۽ O′ آهن.
$\overline{AC}$ ۽ $\overline{PR}$ ٻہ زهہ آهن جيڪي مرڪزن تي برابر ڪندون ناهين ٿا. يعني تہ $\angle AOC \cong \angle PO'R$

گهربل: $m\overline{AC} = m\overline{PR}$

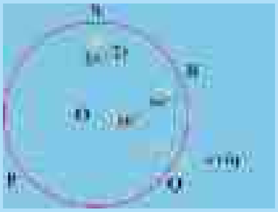
ثابتي:

بيان	دليل
۾ $\Delta OAC \leftrightarrow \Delta O'PR$	
$\overline{OA} \cong \overline{O'P}$	يڪسان گولن جا رداسي ٽڪر
$\angle AOC \cong \angle PO'R$	مليل
$\overline{OC} \cong \overline{O'R}$	يڪسان گولن جا رداسي ٽڪر
$\therefore \Delta OAC \cong \Delta O'PR$	پ. ڪ. پ. مفروضو
انهي ڪري $m\overline{AC} = m\overline{PR}$	يڪسان ٽڪنڊن جا بہ مطابقت رکندڙ پاسا

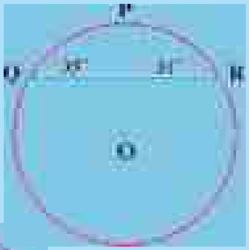
Q.E.D

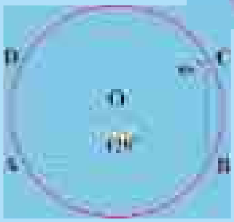
مشق 27.1

1. ثابت ڪريو تہ، هڪ گول ۾ ٻن پورچوت ۽ برابر زهن جا قوس برابر هوندا.
2. ثابت ڪريو تہ ٻن يڪسان گولن ۾ ٻن برابر مرڪزي ڪندن جا قوس برابر هوندا.
3. پر واري شڪل ۾، O گول جو مرڪز آهي. x ۽ y جو ملھ لھو.

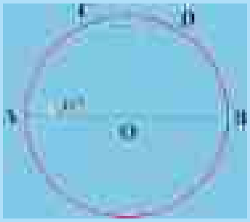


4. پر واري شڪل ۾ $m\angle PQR = 35^\circ$ ۽ $m\angle PRQ = 31^\circ$
$m\angle QPR$ ۽ $m\angle OQR$ جو ملھ لھو.





5. پر واري شڪل ۾ O گول جو مرڪز آهي. $m\angle AOB = 120^\circ$
۽ $m\angle BCD = 85^\circ$. $m\angle OAD$ جو ملھ لھو.



6. پر واري شڪل ۾، $\overline{AB}$ گول جو قطر آهي ۽ $m\angle DAB = 30^\circ$
$m\angle ACD$ لھو.

جائزي واري مشق 27

1. دُرست جواب تي نشان هڻو.

i. جيڪڏهن هڪ زهہ 60° جي مرڪزي ڪند ناهي تہ پوءِ زهہ ۽ رداسي تڪر_______آهن.

(a) پورو چوٽ (b) عمود (c) يڪسان (d) غير يڪسان

ii. جيڪڏهن هڪ قوس 45° جي مرڪزي ڪند ناهي تہ پوءِ مطابقت رکندڙ زهہ_______ جي ڪند مرڪز تي ناهيندو.

(a) 15° (b) 30° (c) 45° (d) 60°

iii. جيڪڏهن گول جا ٻہ زهہ، ٻہ يڪسان مرڪزي ڪندون ناهين تہ اهي _________ آهن.

(a) غير يڪسان (b) عمود (c) يڪسان (d) ڪوبہ نہ

iv. گول جي يڪسان مرڪزي ڪندن جي سامهون وارا قوس________ آهن.

(a) پورچوٽ (b) يڪسان (c) عمود (d) ڪوبہ نہ

v. هڪ 6cm ڊگهو زھ 60° جي مرڪزي ڪنڊ ناهي ٿو. ان گول جو رداسي ٽڪر_________ڊگهو آهي.

(a) 4cm (b) 6cm (c) 5cm (d) 8cm

vi. ڪنهن گول جو هڪ زھ جيڪو180°جي مرڪزي ڪنڊ ناهي ٿو.ان زھ جي ڊيگهہ هميشہ____ هوندي.

(a) رداسي ٽڪر جي برابر
(b) رداسي ٽڪر کان ننڍي
(c) رداسي ٽڪر کان ٻيڻي
(d) رداسي ٽڪر جو اڌ

viii. جيڪڏهن ڪنهن گول جي زھ ۽ رداسي ٽڪر جون ڊيگهون برابر آهن تہ پوءِ زھ جي ناهيل مرڪزي ڪنڊ ______ ٿيندي.

(a) 60° (b) 75° (c) 90° (d) 45°

ix. گول جي ٻن قوسن مان جيڪڏهن هڪ قوس 30° جي مرڪزي ڪنڊ ناهي ٿو تہ پوءِ ٻيو قوس______ مرڪزي ڪنڊ ناهيندو.

(a) 60° (b) 90° (c) 75° (d) 30°

x. قطر گول کي______ حصن ۾ ورهائي ٿو.

(a) ٻہ (b) ٽي (c) چار (d) اهي سڀ ئي

خلاصو

- گول يڪسان هوندا جيڪڏهن انهن جا رداس برابر هجن.
- گول جا برابر زھ مرڪز تي برابر مرڪزي ڪندون ناهيندا.
- گول جي ڪن ٻن ٽٻڪن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر کي گول جو زھ چئبو آهي.
- گول ايراضي جو اهو حصو جيڪو هڪ زھ ۽ هڪ قوس سان گهيريل هجي ان کي گول جو سيگمينٽ چئبو آهي.
- هڪ گول رستي تي حرڪت ڪندڙ ٽٻڪي سان ڪڍيل ڏنگي ليڪ کي گول جي گهيرو چئبو آهي.
- گول جي گهيري جي ڪنهن حصي کي گول جو قوس چئبو آهي.
- گول جي مرڪز مان ڪڍيل ليڪ جيڪا ڪنهن زھ کي اڌو اڌ ڪري تہ اها ليڪ ان زھ تي عمود هوندي آهي.
- ڪنهن گول جي مرڪز مان ڪڍيل ليڪ جيڪا هڪ زھ تي عمود آهي تہ اها ان زھ کي اڌو اڌ ڪندي آهي.
- جيڪڏهن هڪ گول (يا يڪسان گولن) جا ٻہ قوس برابر هجن تہ پوءِ انهن سان مطابقت رکندڙ زھ برابر هوندا.
- جيڪڏهن هڪ گول (يا يڪسان گولن) جا ٻہ زھ برابر آهن تہ پوءِ انهن سان مطابقت رکندڙ قوس وڏا قوس، ننڍا قوس، اڌ گول) يڪسان هوندا.
- هڪ گول (يا يڪسان گولن) جا برابر زھ مرڪز (يا واسطيدار مرڪزن) تي برابر ڪندون ناهيندا.
- جيڪڏهن هڪ گول (يا ٻن گولن) جا ٻہ زھ مرڪز (يا واسطيدار مرڪزن) تي برابر ڪندون ناهين ٿا تہ پوءِ اهي زھ برابر هوندا.

یونٽ 28

گول جي سيگمينٽ ۾ ڪندون

ANGLES IN A SEGMENT A CIRCLE

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هي يونٽ پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

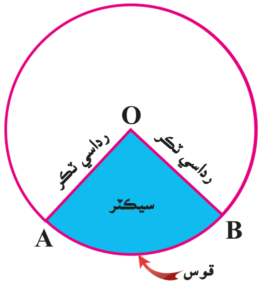
- هيٺيان سڌيان انهن جي شامل نتيجن سان گڏ سمجهڻ ۽ گڏيل مسئلن ڪي حل ڪرڻ لاءِ انهن جو استعمال ڪندا.
- هڪ گول جي ننڍي قوس جي مرڪزي ڪنڊ جي ماپ مطابقت رکندڙ وڏي قوس جي ان تي ٺهيل ڪنڊ کان ٻيڻي آهي.
- گول جي سيگمينٽ ۾ ڪي بہ ٻہ ڪندون برابر هونديون آهن.
  - اڌ گول ۾ ڪنڊ هميشہ گوني ڪنڊ هوندي آهي.
  - اڌ گول کان وڏي سيگمينٽ ۾ ڪنڊ هميشہ گوني ڪنڊ کان ننڍي هوندي آهي.
  - اڌ گول کان ننڍي سيگمينٽ ۾ ڪنڊ هميشہ گوني ڪنڊ کان وڏي هوندي آهي.
  - ڪنهن بہ گهيريل چوڪندي جون سامهون واريون ڪندون سپليمينٽري آهن.

28.1 گول جي سيگمينٽ ۾ ڪنڊ (Angle in a segment of a circle):

اسين اڳيئي گول سان لاڳاپيل ڪيترين ئي اصطلاحن پڙهي چڪا آهيون جهڙوڪ زهه، ننڍو قوس ۽ وڏو قوس وغيره
هاڻي، گول جي سيگمينٽ وارين ڪندن سان لاڳاپيل سڌيان سمجهڻ لاءِ اسان ڪي ڪجهه وڌيڪ اصطلاحن کي بيان ڪرڻو پوندو.

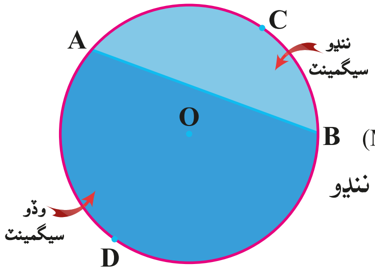
وصفون :

i. گول جو سيڪٽر (Sector of a circle):



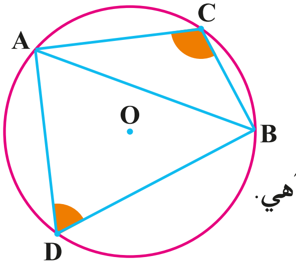
گول جو سيڪٽر، گول ايراضي جو اهو حصو آهي جيڪو ٻن رداسي ٽڪرن ۽ ان قوس سان گهيريل هوندو آهي. جيڪو اهي ڪپين ٿا. ڏنل شڪل ۾ مرڪز O واري گول جو سيڪٽر AOB آهي.

ii. گول جو سيگمينٽ (Segment of a circle):



گول جو سيگمينٽ گول ايراضي جو اهو حصو آهي. جيڪو هڪ قوس ۽ ان جي زهه سان گهيريل هوندو آهي. هڪ سيگمينٽ کي وڏو سيگمينٽ (Major segment) ڪونبو جيڪڏهن ان جو قوس وڏو قوس هجي ساڳي ريت هڪ سيگمينٽ کي ننڍو سيگمينٽ (Minor Segment) ڪونبو جيڪڏهن ان جو قوس ننڍو قوس هجي. پر واري شڪل ۾ ACB ننڍو سيگمينٽ ۽ ADB وڏو سيگمينٽ آهي.

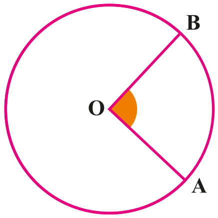
iii. گول جي سيگمينٽ ۾ ڪنڊ (Angle in a segment of circle):



گول جي سيگمينٽ ۾ ڪنڊ اها ڪنڊ هوندي آهي جيڪا گول جي سيگمينٽ جو زهه، سيگمينٽ جي قوس جي چيڙن ڪانسواءِ ان جي ڪنهن بيئي ٽپڪي تي ناهيندو آهي. پر واري شڪل ۾ ننڍي سيگمينٽ ۾ ڪنڊ $\angle ACB$ آهي. جڏهن ته $\angle ADB$ هڪ اها ڪنڊ آهي جيڪا وڏي سيگمينٽ ADB ۾ آهي.

نوٽ: گول جي سيگمينٽ ۾ ڪنڊ کي سيگمينٽ جي قوس جي گهيريل ڪنڊ يا سولائي خاطرقوس سان ٺهيل ڪنڊ به چئبو آهي.

iv. هڪ قوس جي مرڪزي ڪنڊ (Central angle of an arc):



ڪنهن گول جي هڪ قوس جي مرڪزي ڪنڊ اها ڪنڊ هوندي آهي جيڪا گول جي مرڪز تي اهو قوس ناهيندو آهي.شڪل ۾، قوس AB جي مرڪزي ڪنڊ $\angle AOB$ آهي.

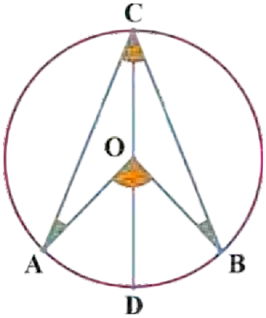
➢ شامل نتيجن سان گڏ هيٺين سڌيانن کي سمجهڻ ۽ گڏيل مسئلن کي حل ڪرڻ لاءِ انهن کي استعمال ڪرڻ:

سڌيان 28.1:

هڪ گول جي ننڍي قوس جي مرڪزي ڪنڊ جي ماپ مطابقت رکندڙ وڏي قوس جي ان تي ٺهيل ڪنڊ کان ٻيڻي آهي.

يا

ننڍي قوس جي مرڪزي ڪنڊ مطابقت رکندڙ وڏي قوس جي گهيريل ڪنڊ کان ماپ ۾ ٻيڻي آهي.



مليل: مرڪز O واري گول ۾ ننڍي قوس AB جي مرڪزي ڪنڊ آهي. مطابقت رکندڙ وڏي قوس ACB جي گهيريل ڪنڊ $\angle ACB$ آهي.

گهربل: $m\angle AOB = 2m\angle ACB$

جوڙجڪ: $\overline{CO}$ کي ۽ ان کي گول جي ٽپڪي D تائين وڌايو.

ثابتي:

بيان	دليل
۾ $\Delta AOC, \overline{OA} \cong \overline{OC}$	ساڳي گول جا رداسي ٽڪر
$m\angle OAC = m\angle OCA$ ...(i)	يڪسان پاسن جون سامهون واريون ڪندون.
هاڻي $m\angle AOD = m\angle OAC + m\angle OCA$	ٽڪنڊي جي ٻاهرين ڪنڊ: اندرين ڪندن جي جوڙ اُپت آهي.
$= 2m\angle OCA$ ...(ii)	مساوات (i) جو استعمال ڪندي
ساڳي ريت $m\angle BOD = 2m\angle OCB$ ...(iii)	ساڳي طريقي سان
هاڻي $m\angle AOB = m\angle AOD + m\angle BOD$	ڪندن جي جوڙ وارو موضوع
$= 2m\angle OCA + 2m\angle OCB$	(ii) ۽ (iii) جو استعمال ڪندي
$= 2(m\angle OCA + m\angle OCB)$	عام جزو 2 ٻاهر ڪڍيندي.
$m\angle AOB = 2m\angle ACB$	ڪندن جي جوڙ وارو موضوع

Q.E.D

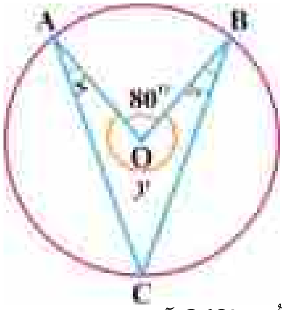
شامل نتيجو 1:

وڏي قوس جي مرڪزي ڪنڊ جي ماپ مطابقت رکندڙ ننڍي قوس جي گهيريل ڪنڊ کان ٻيڻي آهي.

شامل نتيجو 2:

اڌ گول جي مرڪزي ڪنڊ جي ماپ مطابقت رکندڙ اڌ گول جي گهيريندڙ ڪنڊ کان ٻيڻي آهي.

مثال 1: ہر واري شڪل ۾، ٽپڪو O گول جو مرڪز آهي. x جي قيمت لهو جيڪڏهن $m\angle AOB = 80^\circ$ ۽ $m\angle OBC = 25^\circ$



حل: شڪل ۾ $\overset{\frown}{AB}$ جي مرڪزي ڪند $\angle AOB$ آهي ۽ مطابقت رکندڙ $\overset{\frown}{ACB}$ جي گهيريل ڪند $\angle ACB$ آهي.

∵ $\overset{\frown}{AB}$ جي مرڪزي ڪند مطابقت رکندڙ $\overset{\frown}{ACB}$ جي گهيريل ڪند کان ٻيڻي آهي.

∴ $m\angle AOB = 2m\angle ACB$

يعني تہ $80^\circ = 2m\angle ACB$

$m\angle ACB = 40^\circ$

جيئن تہ اسان کي خبر آهي تہ هڪ ٽپڪي جي چوڌاري سيني ڪندن جي جوڙ 360° آهي. تنهنڪري

$80^\circ + y = 360^\circ$

$\Rightarrow \quad y = 280^\circ$

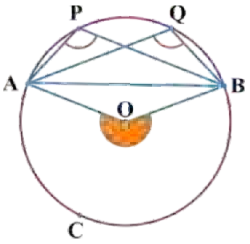
چوڪندي AOBC ۾

$x + y + 25^\circ + m\angle ACB = 360^\circ$

$\Rightarrow \quad x + 280^\circ + 25^\circ + 40^\circ = 360^\circ$

$\Rightarrow \quad x + 345^\circ = 360^\circ$

$x = 15^\circ$



سڌيان 28.2: گول جي سيگمينٽ ۾ ڪي بہ بہ ڪندون برابر هونديون آهن.

مليل: مرڪز O واري گول جي ساڳيئي سيگمينٽ APQB ۾ $\angle APB$ ۽ $\angle AQB$ بہ ڪندون آهن.

گهربل: $m\angle APB = m\angle AQB$

جوڙجڪ: O کي A ۽ B سان ملايو تہ جيئن $\overset{\frown}{ACB}$ جي مرڪزي ڪند $\angle AOB$ هجي.

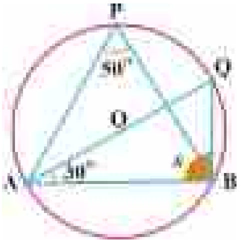
ثابتي:

بيان	دليل
$\overset{\frown}{ACB}$ جي مرڪزي ڪند $\angle AOB$ آهي.	جوڙجڪ
$\angle APB$ ۽ $\angle AQB$ هڪ ئي سيگمينٽ جون ڪندون آهن هاڻي	مليل
$m\angle AOB = 2m\angle APB$	وڏي قوس جي مرڪزي ڪند مطابقت رکندڙ ننڍي قوس جي گهيريل ڪند کان ٻيڻي هوندي آهي.
$m\angle AOB = 2m\angle AQB$	ساڳي طريقي سان
$2m\angle APB = 2m\angle AQB$	متعدي خاصيت سان
$m\angle APB = m\angle AQB$	ٻنهي پاسن کي 2 سان ونڊيندي

Q.E.D

شامل نتيجو 1: گول جي وڏي قوس ۾ ڪي بہ بہ ڪندون برابر هونديون آهن.

مثال : پر واري شڪل ۾ مرڪز O واري گول جي ساڳئي سيگمينٽ APQB ۾ $\angle P$ ۽ $\angle Q$ ٻہ ڪندون آهن x يا $m\angle ABQ$ جي قيمت لهو جڏهن تہ ڪندن جون ماپون شڪل ۾ ڏيکاريل آهن.



حل:

$\angle P$ ۽ $\angle Q$ ساڳيئي سيگمينٽ تي ڪندون آهن

$\therefore \quad m\angle Q = m\angle P$

يعني تہ $\quad m\angle Q = 50^\circ \qquad (\because m\angle P = 50^\circ)$

ΔABQ ۾

$m\angle A + m\angle Q + x = 180^\circ$

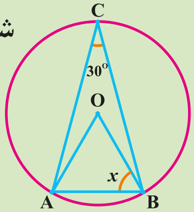
يعني تہ $\quad 30^\circ + 50^\circ + x = 180^\circ$

$\Rightarrow \quad x = 100^\circ$

مشق 28.1

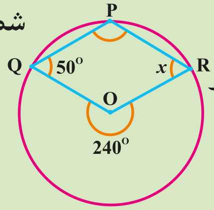
1. شڪل 1 ۾. ٽيڪو O گول جو مرڪز آهي x جي قيمت لهو جڏهن تہ $m\angle C = 30^\circ$

شڪل 1



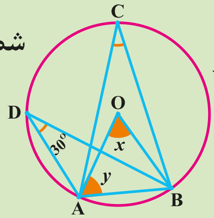
2. شڪل 2 ۾، ٽيڪو O گول جو مرڪز آهي. x جي قيمت لهو جڏهن تہ $m\angle Q = 50^\circ$

شڪل 2



3. شڪل 3 ۾ ٽيڪو O گول جو مرڪز آهي. $x + y$ جوملھ لهو جڏهن تہ $m\angle D = 30^\circ$

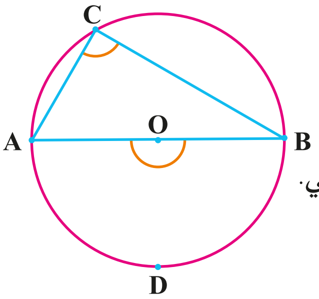
شڪل 3



4. ٻن يڪسان گولن جي ٻن يڪسان وڏي قوسن جون گهيريل ڪندون يڪسان هونديون آهن اهو ثابت ڪريو.

5. ثابت ڪريو تہ ڪنهن گول ۾ وڏي قوس ۽ ان سان مطابقت رکندڙ ننڍي قوس جون گهيريل ڪندون برابر هونديون آهن.

سڌيان (a) 28.3:



اڌ گول ۾ ڪنڊ هميشه گوني ڪنڊ هوندي آهي.

يا

اڌ گول جي گهيريل ڪنڊ هميشه گوني ڪنڊ هوندي آهي.

مليل: مرڪز O واري گول ۾ اڌ گول ADB جي مرڪزي ڪنڊ $\angle AOB$ آهي.

ان سان مطابقت رکندڙ اڌ گول جي گهيريل ڪنڊ $\angle ACB$ آهي.

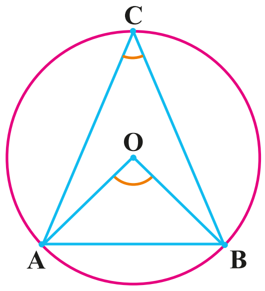
گهربل: $\angle ACB$ هڪ گوني ڪنڊ آهي.

ثابتي:

بيان	دليل
$m\angle AOB = 180°$ ...(i)	اڌ گول جي مرڪزي ڪنڊ
هاڻي $m\angle AOB = 2m\angle ACB$	اڌ گول جي مرڪزي ڪنڊ مطابقت رکندڙ اڌ گول جي گهيريندڙ ڪنڊ کان ٻيڻي آهي
$\Rightarrow \quad 2m\angle ACB = 180°$	مساوات (i) جو استعمال ڪندي
يا $m\angle ACB = 90°$	ٻنهي پاسن کي 2 سان ونڊيندي
يعني ته $\angle ACB$ گوني ڪنڊ آهي.	گوني ڪنڊ جي وصف مطابق

Q.E.D

سڌيان (b) 28.3



اڌ گول کان وڏي سيگمينٽ ۾ ڪنڊ هميشه گوني ڪنڊ کان ننڍي هوندي آهي.

يا

وڏي قوس ۾ گهيريل ڪنڊ سوڙهي هوندي آهي.

مليل: مرڪز O واري گول ۾، اڌ گول کان وڏي سيگمينٽ ACB ۾ ڪنڊ $\angle ACB$ آهي.

مطابقت رکندڙ ننڍي قوس AB جي مرڪزي ڪنڊ $\angle AOB$ آهي.

گهربل: $\angle ACB$ هڪ سوڙهي ڪنڊ آهي.

ثابتي:

بيان	دليل
$m\angle AOB < 180°$ ...(i)	ننڍي قوس جي مرڪزي ڪنڊ
هاڻي $m\angle AOB = 2m\angle ACB$	ننڍي قوس جي مرڪزي ڪنڊ مطابقت رکندڙ وڏي قوس جي گهيريل ڪنڊ کان ٻيڻي آهي.
$\Rightarrow \quad 2m\angle ACB < 180°$	مساوات (i) کي استعمال ڪندي
$m\angle ACB < 90°$	ٻنهي پاسن کي 2 سان ونڊيندي
يعني $\angle ACB$ هڪ سوڙهي ڪنڊ آهي.	سوڙهي ڪنڊ جي وصف مطابق

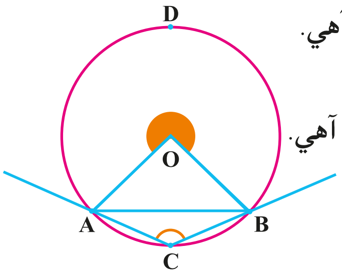
Q.E.D

سڏيان (c) 28.3:

اڌ گول کان ننڍي سيگمينٽ ۾ ڪنڊ هميشه گوني ڪنڊ کان وڏي هوندي آهي.

يا

ننڍي قوس ۾ گهيريل ڪنڊ هميشه ويڪري ڪنڊ هوندي آهي.



مليل: مرڪز O واري گول ۾، ننڍي قوس AB جي گهيريل ڪنڊ $\angle ACB$ آهي.

مطابقت رکندڙ وڏي قوس ADB جي مرڪزي ڪنڊ $\angle AOB$ آهي.

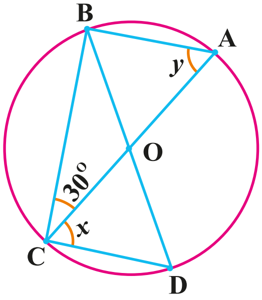
گهربل: $\angle ACB$ هڪ ويڪري ڪنڊ آهي

ثابتي:

بيان	دليل
$m\angle AOB > 180°$ ...(i) هاڻي	وڏي قوس جي مرڪزي ڪنڊ
$m\angle AOB = 2m\angle ACB$	وڏي قوس جي مرڪزي ڪنڊ مطابقت رکندڙ ننڍي قوس جي گهيريل ڪنڊ کان ٻيڻي آهي.
$\Rightarrow 2m\angle ACB > 180°$ يا $m\angle ACB > 90°$ يعني $\angle ACB$ ويڪري ڪنڊ آهي.	مساوات(i) جو استعمال ڪندي ٻنهي پاسن کي 2 سان ونڊيندي ويڪري ڪنڊ جي وصف مطابق

Q.E.D

مثال: شڪل 1 ۾، ٽپڪو O گول جو مرڪز آهي. x ۽ y جون قيمتون لهو جيڪڏهن $m\angle BCO = 30°$، $\overline{AC}$ ۽ $\overline{BD}$ قطر آهن.



شڪل 1

حل:

$\because$ $\overline{BD}$ قطر آهي

$\therefore$ $\angle BCD$ اڌ گول جي گهيريل ڪنڊ آهي.

انهي ڪري $m\angle BCD = 90°$

$\Rightarrow x + 30° = 90°$

$\Rightarrow x = 60°$

$\overline{AC}$ قطر آهي ۽ اڌ گول جي گهيريل ڪنڊ $\angle CBA$ آهي.

انهي ڪري $m\angle CBA = 90°$

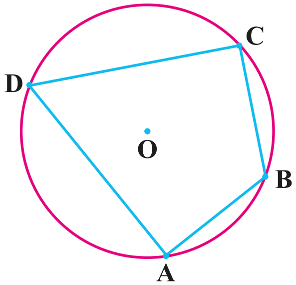
ΔABC، ۾

$30° + m\angle CBA + y = 180°$

$\Rightarrow 30° + 90° + y = 180°$

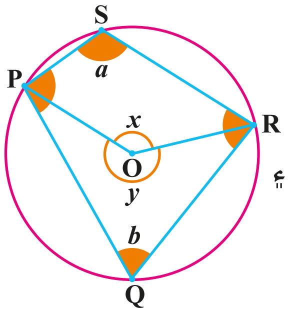
$\Rightarrow y = 60°$

گهيريل چوڪنڊو يا مدار چوڪنڊو:



هڪ چوڪنڊي کي گهيريل چوڪنڊو يا مدار چوڪنڊو چئبو جيڪڏهن ان جون سڀ چوٽيون ساڳي گول تي موجود هجن. شڪل ۾ ABCD هڪ مدار چوڪنڊو آهي.

سڌيان 28.4: گول ۾ ڪنهن بہ گهيريل چوڪنڊي جون سامهون واريون ڪنڊون سپليمينٽري آهن.



مليل: مرڪز O واري گول ۾ PQRS گهيريل چوڪنڊو آهي.

گهربل:

$$m\angle Q + m\angle S = 180^\circ$$

$$m\angle P + m\angle R = 180^\circ$$

جوڙجڪ: $\overline{OP}$ ۽ $\overline{OR}$ ڪيو تہ جيئن $\angle POR$ يا $\angle x$، $\widehat{PR}$ جي مرڪزي ڪند آهي ۽ $\angle y$ مطابقت رڪندڙ $\widehat{PQR}$ جي مرڪزي ڪند آهي.

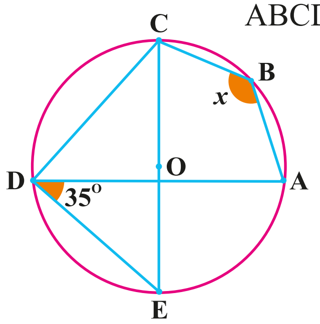
ثابتي:

بيان	دليل
$\widehat{PR}$ جي گهيريل ڪند $\angle a$ يا $\angle S$ آهي	وصف مطابق
مطابقت رڪندڙ $\widehat{PQR}$ جي مرڪزي ڪند $\angle y$ آهي	جوڙجڪ
$m\angle y = 2m\angle a$	وڏي قوس جي مرڪزي ڪند مطابقت رڪندڙ ننڍي قوس جي گهيريل ڪند کان ٻيڻي هوندي آهي.
$\Rightarrow \quad m\angle a = \frac{1}{2}m\angle y ...(i)$	ٻنهي پاسن کي 2 سان ونڊيندي
هاڻي	
$\angle Q$ يا $\angle b$ وڏي قوس $\widehat{PQR}$ جي گهيريل ڪند آهي.	وصف مطابق
۽ مطابقت رڪندڙ $\widehat{PR}$ جي مرڪزي ڪند $\angle x$ آهي.	جوڙجڪ
انهيءَ ڪري $m\angle x = 2m\angle b$	ننڍي قوس جي مرڪزي ڪند مطابقت رڪندڙ وڏي قوس جي گهيريل ڪند کان ٻيڻي هوندي آهي.
يعني $m\angle b = \frac{1}{2}m\angle x ...(ii)$	
هاڻي	
$m\angle a + m\angle b = \frac{1}{2}m\angle x + \frac{1}{2}m\angle y$	مساوات (i) ۽ (ii) کي جوڙ ڪرڻ سان
$= \frac{1}{2}(m\angle x + m\angle y)$	عام جزو $\frac{1}{2}$ ٻاهر ڪيندي
$= \frac{1}{2}(360^\circ)$	هڪ ٽٻڪي جي چوڌاري سيني ڪندن جي جوڙ اُپت 360° آهي.
يعني $m\angle a + m\angle b = 180^\circ$	
يا $m\angle Q + m\angle S = 180^\circ$	$\because \angle a \cong \angle S$ ۽ $\angle b \cong \angle Q$
ساڳي ريت $m\angle P + m\angle R = 180^\circ$	ساڳي طريقي سان

Q.E.D

شامل نتيجو: گول ۾ گهيريل هڪ پوروچوٽ چوڪنڊو مستطيل هوندو آهي.

مثال: ڏنل شڪل ۾، ٽپڪو O گول جو مرڪز آهي. $\overline{CE}$ ان جو قطر ۽ ABCD مدار چوڪنڊو آهي. x جي قيمت لهو. جيڪڏهن $m\angle ODE = 35^{\circ}$



حل:

اڌ گول جي گهيريل ڪنڊ $\angle CDE$ آهي.

$$\therefore \quad m\angle CDE = 90^{\circ}$$

يعني ته $35^{\circ} + m\angle ADC = 90^{\circ}$

$$\Rightarrow \quad m\angle ADC = 55^{\circ}$$

هاڻي

مدار چوڪندي ABCD ۾

$$x + m\angle ADC = 180^{\circ}$$

$$\Rightarrow \quad x + 55^{\circ} = 180^{\circ}$$

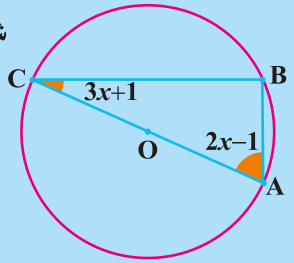
$$\Rightarrow \quad x = 180^{\circ} - 55^{\circ}$$

$$\Rightarrow \quad x = 125^{\circ}$$

مشق 28.2

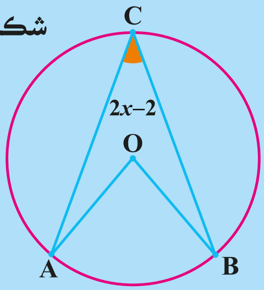
1. شڪل 1 ۾، گول جو مرڪز O آهي. جڏهن ته $\overline{AC}$ ان جو قطر آهي x جو ملهه لهو.

شڪل 1



2. شڪل 2 ۾ ACB وڏو قوس آهي ان گول جوجنهن جو مرڪز O آهي ۽ BAC جي گهيريل ڪنڊ $\angle C$ آهي x جو ملهه لهو جڏهن ته $x \in \mathbb{R}$.

شڪل 2



3. هڪ گول ۾، ننڍي قوس جي گهيريل ڪند جي ماپ $7x-1$ آهي. x جي قيمت لهو جڏهن ته $x \in \mathbb{R}$
4. ثابت ڪريو ته گول جي اندر گهيريل رامبس هڪ چورس هوندو.
5. ثابت ڪريو ته مدار چوڪندي جي ٻاهرين ڪنڊ، سامهون واري اندرين ڪند جي برابر آهي.

جائزي واري مشق 28

1. درست جواب تي نشان هڻو.

i. ________ جي گهيريل ڪند ويڪري ڪند آهي.

(a) ننڍي قوس (b) وڏي قوس (c) اڌ گول (d) اهي سڀ ئي

ii. ________ قوس ۽ زهہ سان گهيريل گول ايراضي آهي.

(a) سيڪٽر (b) سيگمينٽ (c) وڏو قوس (d) گول جو گهيرو

iii. جيڪڏهن $2x$ ننڍي قوس جي گهيريل ڪند جي ماپ آهي تہ پوءِ مطابقت رکندڙ وڏي قوس جي مرڪزي ڪند________ آهي.

(a) x (b) $2x$ (c) $3x$ (d) $4x$

iv. جيڪڏهن $2x$ ۽ 60° ساڳيئي سيگمينٽ جون گهيريل ڪندون آهن تہ پوءِ $x =$ ________

(a) 120° (b) 60° (c) 20° (d) 30°

v. گول جي ننڍي قوس جي گهيريل ڪند ________ آهي.

(a) سوڙهي ڪند (b) ويڪري ڪند (c) گوني ڪند (d) عڪسي ڪند

vi. گول جي وڏي قوس جي گهيريل ڪند ________ آهي.

(a) سوڙهي ڪند (b) ويڪري ڪند (c) گوني ڪند (d) عڪسي ڪند

vii. مدار چوڪندي جي سامهون وارين ڪندن جي جوڙ اُپت________ آهي.

(a) 90° (b) 180° (c) 270° (d) 360°

viii. گول جي اندر گهيريل پوروچوٽ چوڪندو ____________ هوندو آهي.

(a) پتنگ (b) ٽرئپزيم (c) مستطيل (d) رامبس

ix. هڪ قوس جي مرڪزي ڪند مطابقت رکندڙ ٻيئي قوس جي گهيريندڙ ڪند کان_____ هوندي آهي.

(a) ننڍي (b) وڏي (c) ننڍي يا برابر (d) وڏي يا برابر

x. هڪ گول جي سڀني قوسن جي مرڪزي ڪندن جي جوڙ اُپت ________ آهي.

(a) 90° (b) 180° (c) 360° (d) 1000°

خلاصو

- هڪ قوس ۽ ٻن رداسي ٽڪرن سان گهيريل گول جي ايراضي کي سيڪٽر چئبو آهي.
- هڪ قوس ۽ ان جي زهہ سان گهيريل گول جي ايراضي کي سيگمينٽ چئبو آهي.
- گول جي سيگمينٽ ۾ ڪند کي سيگمينٽ جي گهيريل ڪند پڻ چئبو آهي.
- ڪنهن قوس سان گول جي مرڪز تي ٺهيل ڪند کي مرڪزي ڪند چئبو آهي.
- وڏي (يا ننڍي) قوس جي مرڪزي ڪند مطابقت رکندڙ ترتيبوار ننڍي (يا وڏي) قوس جي گهيريندڙ ڪند کان ٻيڻي هوندي آهي.
- ڪنهن گول جي ساڳيئي سيگمينٽ ۾ ڪي بہ ٻہ ڪندون برابر هونديون آهن.
- اڌ گول جي گهيريندڙ ڪند گوني ڪند هوندي آهي.
- وڏي قوس جي گهيريندڙ ڪند سوڙهي ڪند هوندي آهي.
- ننڍي قوس جي گهيريندڙ ڪند ويڪري ڪند هوندي آهي.
- مدار چوڪندي جون سڀ چوٽيون ساڳيئي گول تي هونديون آهن.
- مدار چوڪندي جون سامهون واريون ڪندون سپليمينٽري ڪندون هونديون آهن.

يونٽ 29

عملي جاميٽري-گول

PRACTICAL GEOMETRY - CIRCLES

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هي يونٽ پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته:

- ڏنل گول جي مرڪز جو هنڌ ڳولن.
- مليل ٽن غير هم ليڪي ٽٻڪن مان گذرندڙ گول ڪڍن.
- گول کي پورو يا مڪمل ڪن.
  - ❖ مرڪز معلوم ڪندي.
  - ❖ مرڪز معلوم ڪرڻ ڪانسواءِ جڏهن گول جي گهيري جو ڪو حصو مليل هجي.
- مليل ٽڪنڊي کي گول ۾ گهيرن.
- ڏنل ٽڪنڊي ۾ گول کي گهيرن.
- هڪ ٽڪنڊي جو ٻاهريون گول ڪڍن.
- ڏنل گول کي ٽيور پاسي ٽڪنڊي سان گهيرن.
- مليل ٽڪنڊي ۾ هڪ ٽيور پاسي ٽڪنڊي کي گهيري ۾ آڻين.
- مليل گول ۾ هڪ ٽيور پاسي ٽڪنڊي کي گهيري ۾ آڻين.
- ڏنل گول جو گهيريندڙ چورس ناهين.
- هڪ ڏنل گول جو گهيريندڙ پور پاسو ڇهه ڪندو ناهين.
- ڏنل گول ۾ هڪ گهيريل پور پاسو ڇهه ڪندو ناهين.
- مرڪز جو استعمال ڪرڻ بنا، ڏنل ٽٻڪي P مان مليل قوس جي ڇهڻي ليڪ ڪڍن، جڏهن
  - ❖ P قوس جو وچيون ٽٻڪو آهي.
  - ❖ P قوس جي چيڙي تي آهي.
  - ❖ P قوس کان ٻاهر آهي.
- هڪ ٽٻڪي P مان، ڏنل گول جي ڇهڻي ليڪ ڪڍن، جڏهن
  - ❖ P گول جي گهيري تي موجود آهي.
  - ❖ P گول کان ٻاهر موجود آهي.
- هڪ گول جون ٻه ڇهڻي ليڪون ڪڍن جيڪي هڪبيئي سان ڏنل ڪند تي ملن ٿيون.
- ٻن برابر گولن جون
  - ❖ سڌي طرح گڏيل ڇهڻيون ليڪون يا ٻاهريون ڇهڻيون ليڪون ڪڍن.
  - ❖ آڏيون گڏيل ڇهڻيون ليڪون يا اندريون ڇهڻيون ليڪون ڪڍن.
- ٻه غير مساوي گولن جون
  - ❖ سڌي طرح گڏيل ڇهڻيون ليڪون يا ٻاهريون ڇهڻيون ليڪون ڪڍن.
  - ❖ آڏيون گڏيل ڇهڻيون ليڪون يا اندريون ڇهڻيون ليڪون ڪڍن.
- ٻن غير مساوي ڇهندڙ گولن جي ڇهڻي ليڪ ڪڍن.
- ٻن غير مساوي ڪپيندڙ گولن جي ڇهڻي ليڪ ڪڍن.
- هڪ گول ڪڍن جيڪو
  - ❖ ڏنل ڪند جي ٻنهي ٻانهن کي ڇُهي.
  - ❖ ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ٻن ليڪن کي ڇُهي ۽ انهن ليڪن جي وچ ۾ ڪنهن ٽٻڪي مان گذري.
  - ❖ ميلاپ ڏانهن مائل ٽن ليڪن کي ڇُهي.

تعارف:

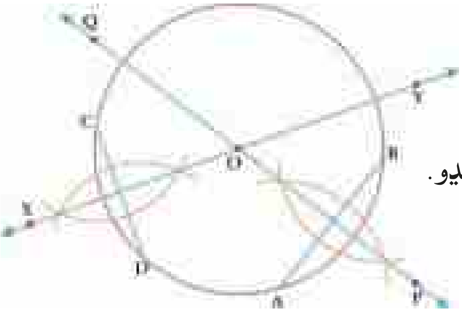
اسان کي خبر آهي تہ جاميٽري جي هڪ اهم شاخ عملي جاميٽري آهي جيڪا فن تعمير، ڪمپيوٽر گرافڪس، مصوري وغيره ۾ استعمال ٿئي ٿي. اسان گذريل ڪلاس ۾ اڳيئي ڪنڊن، ٽڪنڊن، مستطيل، پنج ڪنڊو وغيره کي ٺاهڻ سکي چڪا آهيون. اچو تہ گولن ۽ ان سان لاڳاپيل شڪلين جي جوڙجڪ سکون.

29.1 گولن جي جوڙجڪ (Construction of circles):

اسان کي خبر آهي تہ پلڪار جو استعمال ڪندي، سولائي سان گول ڪڍي سگهجي ٿو جڏهن ان جو مرڪز ۽ رداس مليل هجن. ان سيڪشن ۾، اسين ان صورت ۾ پڻ گول ڪڍڻ سکندا سين جڏهن مرڪز ۽ رداس مليل نہ هجن.

29.1 (i) ڏنل گول جي مرڪز جو هنڌ ڳولڻ:

ڪنهن گول جي مرڪز جو هنڌ ڳولڻ لاءِ اسين ان حقيقت جو استعمال ڪنداسين تہ گول جي غير پورروچوٽ زهہ جا عمودي اڌ ڪندر هميشہ هڪ ٻيئي کي گول جي مرڪز تي ڪپين ٿا. ڏنل گول جي مرڪز جي هنڌ ڳولڻ جو طريقو هيٺين مثال سان واضح ڪجي ٿو.



مثال: شڪل ۾ ڏيکاريل گول جي مرڪز جو هنڌ ڳوليو.

مليل: هڪ گول

گهربل: ڏنل گول جي مرڪز جو هنڌ ڳولڻ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) ڏنل گول جا ٻہ غير پورروچوٽ زهہ $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ ڪڍو.

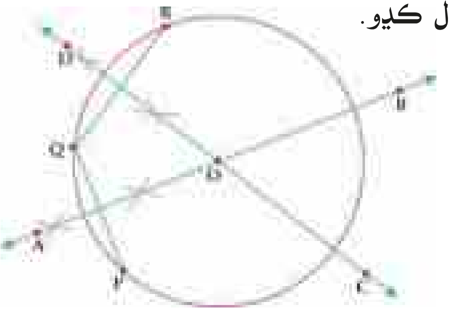
(ii) زهہ $\overline{AB}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{PQ}$ ڪڍو.

(iii) زهہ $\overline{CD}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{XY}$ ڪڍو.

(iv) ٻئي عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{PQ}$ ۽ $\overleftrightarrow{XY}$ هڪٻئي کي ٽپڪي O تي ڪپين ٿا. ٽپڪو O ڏنل گول جو مرڪز آهي.

29.1 (ii) مليل ٽن غير هم ليڪي ٽپڪن مان گذرندڙ گول ڪڍڻ:

مليل ٽن غير هم‌ليڪي ٽپڪن مان گذرندڙ گول ڪڍڻ لاءِ، اسين سڀ کان اڳ ۾ مرڪز جو هنڌ ڳوليندا سين ۽ ان ڪانپوءِ گول ڪڍينداسين جيئن هيٺين مثال ۾ واضح ڪيو ويو آهي.



مثال: ٽي غير هم ليڪي ٽپڪن P, Q ۽ R مان گذرندڙ گول ڪڍو.

مليل: ٽي غير هم ليڪي ٽپڪا P, Q ۽ R.

گهربل: هڪ گول ڪڍڻ جيڪو ٽپڪن P, Q ۽ R مان گذري.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) ڪي ٻہ ٽي غير هم ليڪي ٽپڪا P, Q ۽ R ڪٽو

(ii) $\overline{PQ}$ ۽ $\overline{QR}$ ڪڍو.

(iii) $\overline{PQ}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{AB}$ ڪڍو.

(iv) $\overline{QR}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{CD}$ ڪڍو.

(v) ٻئي عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{AB}$ ۽ $\overleftrightarrow{CD}$ هڪٻئي کي ٽپڪي O تي ڪپين ٿا جيڪو گهربل گول جو مرڪز آهي.

(vi) مرڪز O ۽ رداس $m\overline{OP}$ يا $m\overline{OQ}$ يا $m\overline{OR}$ جي برابر ڪٽي، هڪ گول ڪڍو.
اهو گول گهربل گول آهي.

29.1 (iii) گول کي پورو يا مڪمل ڪرڻ

- مرڪز معلوم ڪندي
- مرڪز معلوم ڪرڻ ڪانسواءِ

جڏهن گول جي گهيري جو ڪو حصو مليل هجي.

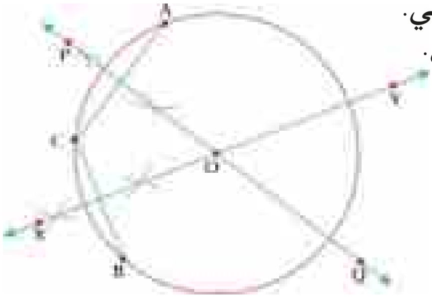
(a) **مرڪز معلوم ڪندي گول کي پورو ڪرڻ جڏهن گول جي گهيري جو ڪو حصو مليل هجي.**

اسين گول جي ڪن ٻه ٽن غير هم ليڪي ٽٻڪن جي مدد سان مرڪز ڳوليندي گول ڪڍي سگهون ٿا. جڏهن ان جي گهيري جو ڪو حصو يا قوس مليل هجي. اهو طريقو هيٺين مثال ۾ واضح ڪيل آهي.

مثال: مرڪز ڳوليندي هڪ گول کي پورو ڪريو جڏهن ان جو قوس AB مليل آهي.

مليل: گول جي گهيري جو هڪ حصو يا قوس AB مليل آهي.

گهربل: هڪ گول کي پورو ڪرڻ جنهن جو قوس مليل آهي.



جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) قوس AB ڪڍو.
(ii) $\widehat{AB}$ تي A ۽ B ڪانسواءِ ڪو ٻيو ٽٻڪو C ڪٽو.
(iii) $\overline{AC}$ ۽ $\overline{BC}$ ڪڍو.
(iv) $\overline{AC}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{PQ}$ ڪڍو.
(v) $\overline{BC}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{XY}$ ڪڍو
(vi) ٻئي عمودي اڌ ڪندڙ هڪٻئي کي ٽٻڪي O تي ڪپين ٿا جيڪو گول جو مرڪز آهي.
(vii) مرڪز O ۽ رداس $m\overline{AO}$ يا $m\overline{OB}$ يا $m\overline{OC}$ جي برابر ڪٽي، گول جو باقي رهيل حصو ڪڍو
اهڙي طرح اسان وٽ قوس AB جو مڪمل گول آهي.

(b) **مرڪز معلوم ڪرڻ ڪانسواءِ گول کي پورو ڪرڻ جڏهن ان جي گهيري جو ڪو حصو مليل هجي:**

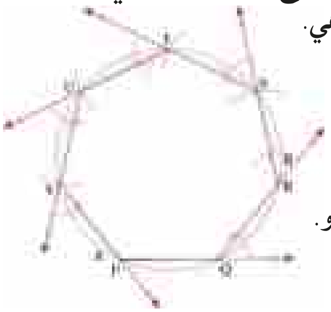
اسين پور پاسو گهڻ ڪندي جي مدد سان مرڪز ڳولڻ بنا گول ڪڍي سگهون ٿا جڏهن ڪو قوس مليل هجي.

اسين ٻاهرين ڪندن يا اندرين ڪندن جي مدد سان پور پاسو گهڻ ڪندو ٺاهينداسين اهي ڪندون يڪسان هونديون. هيٺين مثال جي مدد سان ان طريقي کي واضح ڪيو ويو آهي.

مثال: مرڪز ڳولڻ بنا هڪ گول کي پورو ڪريو جنهن جو قوس AB مليل آهي.

مليل: هڪ گول جو قوس AB

گهربل: $\widehat{AB}$ جو گول پورو ڪرڻ.



جوڙجڪ جا ڏاڪا:

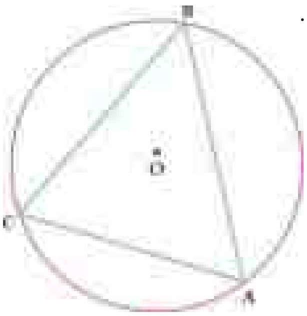
(i) مليل $\widehat{AB}$ جا ٻه يڪسان زه $\overline{PQ}$ ۽ $\overline{QR}$ ڪڍو.
(ii) $\angle Q$ جي يڪسان ٻاهرين ڪند $\angle R$ ڪڍو ۽ $\overline{PQ}$ جي يڪسان $\overline{RS}$ ڪڍو.
(iii) $\angle R$ جي يڪسان ٻاهرين ڪند $\angle S$ ڪڍو ۽ $\overline{PQ}$ جي يڪسان $\overline{ST}$ ڪڍو.
(iv) ساڳئي طريقي سان، اسان ٽٻڪا S، T، U ۽ V ∠ حاصل ڪريون ٿا.
(v) اهڙي طرح اسان هڪ پور پاسو ڇهه ڪندون PQRSTUV حاصل ڪيو.

(vi) $\overline{RS}$، $\overline{ST}$، $\overline{TU}$، $\overline{UV}$ ۽ $\overline{VP}$ جا ٽڪرا ملائي وارا قوس ٺاهيو.
اهي ٽڪرا قوس گول کي پورو ڪن ٿا.

مشق 29.1

.1 گول شيءِ جي مدد سان هڪ گول ڪڍو. ان جي مرڪز جو هنڌ ڳوليو.
.2 ٽي غير هم ليڪ ٽڪرا X, Y, Z ڪڍو ۽ هڪ گول ڪڍو جيڪو انهن ٽڪرن مان گذري.
.3 ڪنهن گول شيءِ سان هڪ ننڍو قوس AB ڪڍو. مرڪز معلوم ڪندي ان گول کي پورو ڪريو.
.4 ڪنهن گول شيءِ سان هڪ وڏو قوس ABC ڪڍو. مرڪز معلوم ڪندي ان گول کي پورو ڪريو.
.5 ڪنهن گول شيءِ سان هڪ ننڍو قوس AB ڪڍو. مرڪز معلوم ڪرڻ بنا ان گول کي پورو ڪريو.

29.2 گهڻ ڪنڊن سان ڳنڍيل گول:



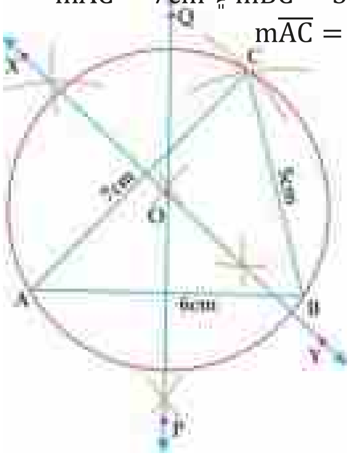
ياد ڪريو تہ گهڻ ڪنڊو ٽي يا وڌيڪ پاسن واري بند شڪل آهي.
مثال طور: ٽڪنڊو، چوڪندو، پنج ڪندو، ڇهہ ڪندو وغيره.
گهڻ ڪندي سان ڳنڍيل گول اهي گول هوندا آهن جيڪي يا تہ گهڻ ڪندي جي سڀني چوٽين مان گذرن يا ان جي پاسن کي ڇُهن.

29.2 (i) مليل ٽڪنڊي کي گول ۾ گهيرڻ:

ٽڪنڊي جو گهيريندڙ گول (Circum Circle of Triangle)

اهو گول جيڪو ڪنهن ٽڪنڊي جي ٽنهي چوٽين مان گذري، ان کي ٽڪنڊي جو گهيريندڙ گول چئبو آهي. ڏنل شڪل ۾ ΔABC جو گهيريندڙ گول آهي جنهن جو مرڪز O آهي جيڪو گهيريندڙ مرڪز (Circum-centre) ڪوٺبو آهي.

مثال: ΔABC جو گهيريندڙ گول ڪڍو جنهن ۾ $m\overline{AB} = 6cm$، $m\overline{BC} = 5cm$ ۽ $m\overline{AC} = 7cm$



مليل: هڪ ٽڪنڊو ABC جنهن ۾ $m\overline{AB} = 6\ cm$، $m\overline{BC} = 5cm$ ۽ $m\overline{AC} = 7cm$

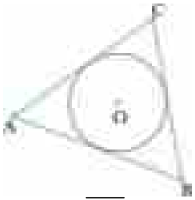
گهربل: ΔABC جو گهيريندڙ گول ڪڍڻ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) مليل مواد جي مدد سان ΔABC ٺاهيو.
(ii) $\overline{AB}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{PQ}$ ڪڍو
(iii) $\overline{AC}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{XY}$ ڪڍو.
(iv) ٻئي عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{PQ}$ ۽ $\overleftrightarrow{XY}$ هڪٻئي کي ٽڪري O تي ڪپين ٿا.
(v) مرڪز O ۽ ريڊاس $m\overline{OA}$ يا $m\overline{OB}$ يا $m\overline{OC}$ جي برابر کڻي هڪ گول ڪڍو جيڪو ٽڪرن A, B ۽ C مان گذري ٿو. اهو ΔABC جو گهربل گهيريندڙ گول آهي.

29.2 (ii) ڏنل ٽڪنڊي ۾ گول کي گهيرڻ يا سموئڻ: ٽڪنڊي جو گهيريل گول يا اندريون گول:

(Inscribed circle or in-circle of Triangle)

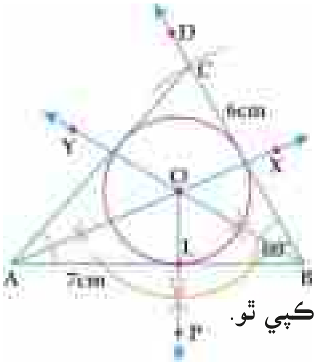


اهو گول جيڪو ٽڪنڊي جي سيني پاسن کي ڇُهي، ان کي اندريون گول يا گهيريل گول چئبو آهي. پر واري شڪل ۾ ΔABC جوگهيريل گول آهي جنهن جو مرڪز ٽپڪو O آهي. ان مرڪز کي اندريون مرڪز (In-centre) چئبو آهي.

مثال: ΔABC جو گهيريل گول ڪيو جنهن۾ $m\overline{AB} = 7cm$، $m\angle B = 60°$ ۽ $m\overline{BC} = 6\ cm$

مليل: هڪ ٽڪنڊو ABC ۾ جنهن $m\overline{AB} = 7cm$، $m\angle B = 60°$ ۽ $m\overline{BC} = 6cm$

گهربل: ΔABC جو گهيريل گول ڪيڻ



جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) ڏنل مواد جي مدد سان ΔABC ناهيو.

(ii) $\angle A$ جو اندريون اڌ ڪندڙ $\overrightarrow{AX}$ ڪيو

(iii) $\angle B$ جو اندريون اڌ ڪندڙ $\overrightarrow{BY}$ ڪيو.

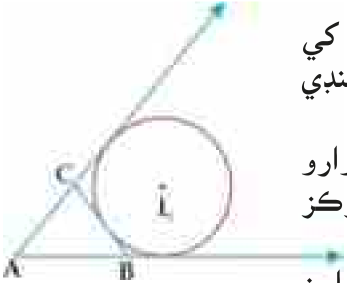
(iv) ٻئي اندريان اڌ ڪندڙ $\overrightarrow{AX}$ ۽ $\overrightarrow{BY}$ هڪٻئي کي ٽپڪي O تي ڪپين ٿا.

(v) ٽپڪي O کان $\overline{AB}$ تي هڪ عمود $\overrightarrow{OP}$ ڪيو. $\overline{AB}$ کي $\overrightarrow{OP}$ ٽپڪي L تي ڪپي ٿو.

(vi) مرڪز O ۽ رداس $m\overline{OL}$ جي برابر ڪٽي هڪ گول ڪيو جيڪوΔABC جي سيني پاسن کي ڇُهي ٿو. اهو گهربل گهيريل گول آهي.

29.2 (iii) هڪ ٽڪنڊي جو ٻاهريون گول ڪيڻ:

ٻاهريون گول (Escribed Circle or Ex-circle)



هڪ گول جيڪو ڪنهن ٽڪنڊي جي هڪ پاسي کي ٻاهريان ڇُهي ۽ ٻن وڌيل پاسن کي اندريان ڇُهي ته ان کي ٽڪنڊي جو ٻاهريون گول چئبو آهي.

مليل شڪل ۾، ΔABC جو چوٽي A جي سامهون وارو ٻاهريون گول آهي ۽ ان جو مرڪزI_1 آهي جنهن کي ٻاهريون مرڪز (ex-circle) چئبو آهي.

ساڳي ريت ΔABC جي چوٽين B ۽ C جي سامهون وارن ٻاهرين گولن جا مرڪز ترتيبوار I_2 ۽ I_3 آهن.

مثال: ΔABC جو چوٽي A جي سامهون وارو ٻاهريون گول ڪيو جڏهن ته $m\overline{AB} = 5cm$، $m\angle A = 30°$، $m\angle B = 60°$

مليل: هڪ ٽڪنڊو ABC جنهن ۾ $m\overline{AB} = 5cm$، $m\angle A = 30°$ ۽ $m\angle B = 60°$

گهربل: ΔABC جو چوٽي A جي سامهون وارو ٻاهريون گول ڪيڻ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) ڏنل مواد جي مدد سان ΔABC ناهيو.

(ii) C کان پري $\overline{AC}$ کي وڌايو ۽ B کان پري $\overline{AB}$ کي وڌايو ته جيئن ٻه ٻاهريون ڪندون ترتيبوار BCE ۽ CBF ٺهن.

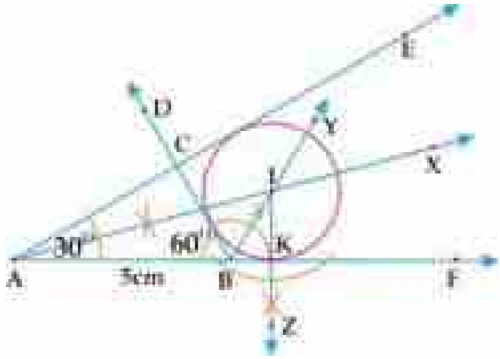
(iii) $\angle A$ جو اندريون اڌ ڪندڙ $\overrightarrow{AX}$ ڪيو.

(iv) $\angle CBF$ جو اندريون اڌ ڪندڙ $\overrightarrow{BY}$ ڪيو.

(v) بئي اڌ ڪندڙ $\overrightarrow{AX}$ ۽ $\overrightarrow{BY}$ هڪٻئي کي ٽپڪي I تي ڪپين ٿا.

(vi) ٽپڪي I کان $\overrightarrow{AF}$ تي عمود $\overrightarrow{IZ}$ ڪيو جيڪو $\overrightarrow{AF}$ کي ٽپڪي K تي ڪپي ٿو.

(vii) مرڪز I ۽ رداس $m\overline{IK}$ جي برابر ڪٽي هڪ گول ڪيو جيڪو $\overline{BC}$ کي ٻاهريان ۽ $\overrightarrow{AE}$ ۽ $\overrightarrow{AF}$ کي اندريان ڇهي ٿو.

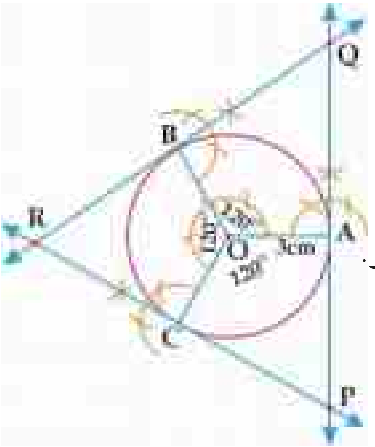


اهو ΔABC جو چوٽي A جي سامهون وارو گهربل ٻاهريون گول آهي.

29.2 ڏنل گول کي ٽپور پاسي ٽڪنڊي سان گهيرڻ:

اسين هڪ ٽپور پاسو ٽڪنڊو ٺاهينداسين جيڪو ڏنل گول کي گهيري. ان لاءِ اسين ان حقيقت جو استعمال ڪنداسين ته جيڪڏهن ڪو گول ٽن يڪسان قوسن ۾ ورهايو وڃي ۽ ورهاست وارن ٽپڪن تي ڇهڻ ليڪون ڪڍيون وڃن ته اهي ليڪون ان گول جي گهيريندڙ ٽپور پاسي ٽڪنڊي جا پاسا ٺاهينديون. اهو طريقو هينين مثال سان واضح ڪجي ٿو.

مثال: 3cm رداس جو گول ڪيو جنهن جو مرڪز O آهي. ان گول جو گهيريندڙ ٽپور پاسو ٽڪنڊو ٺاهيو.



مليل: 3cm رداس وارو گول جنهن جو مرڪز O آهي.

گهربل: مليل گول جو گهيريندڙ ٽپور پاسو ٽڪنڊو ٺاهڻ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) 3cm رداس جو گول ڪيو جنهن جو مرڪز O آهي.

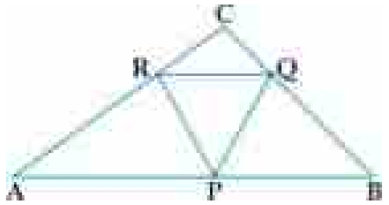
(ii) مرڪزي ڪنڊ کي ٽن يڪسان قوسن ۾ ورهائيندي، مليل گول کي ٽن يڪسان قوسن $\widehat{AB}$، $\widehat{BC}$ ۽ $\widehat{AC}$ ۾ ورهايو.

(iii) ٽپڪن A,B ۽ C تي گوني ڪندون ٺاهيندي انهن ٽپڪن تي ڇهڻ ليڪون ڪيو.

(iv) اهي ڇهڻ ليڪون هڪٻئي کي ٽپڪن P,Q ۽ R تي ڪپين ٿيون.

هاڻي PQR گهربل ٽپور پاسو ٽڪنڊو آهي.

29.2 (v) مليل ٽڪنڊي ۾ هڪ ٽپور پاسي ٽڪنڊي کي سموئڻ يا گهيري ۾ آڻڻ.

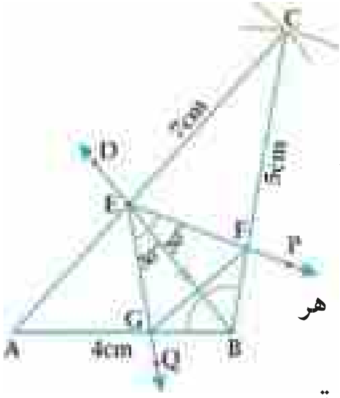


اسانکي خبر آهي ته مليل ٽڪنڊي ۾ هڪ ٽپور پاسو ٽڪنڊو گهيريل چورائبو جيڪڏهن ٽپور پاسي ٽڪنڊي جون سڀ چوٽيون مليل ٽڪنڊي جي مختلف پاسن تي موجود هجن. پر واري شڪل ۾، ΔABC جو گهيريل ٽپور پاسو ٽڪنڊو PQR آهي.

مثال: ΔABC جو گهيريل ٽپور پاسو ٽڪنڊو ناهيو جڏهن $m\overline{AB} = 4cm$ ، $m\overline{BC} = 5cm$ ۽ $m\overline{AC} = 7cm$

مليل: هڪ ٽڪنڊو ABC جنهن ۾ $m\overline{AB} = 4cm$, $m\overline{BC} = 5cm$ ۽ $m\overline{AC} = 7cm$

گهربل: ΔABC جو گهيريل ٽپور پاسو ٽڪنڊو ناهڻ



جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) مليل مواد سان ΔABC ناهيو.

(ii) $\angle B$ جو اندريون اڌ ڪندڙ $\overrightarrow{BD}$ ڪيو جڏهن ته $\angle B$ هڪ مناسب ڪند آهي (عام طرح سان وڏي ڪند)

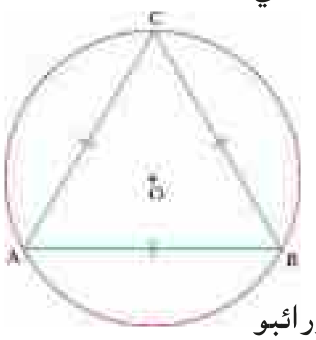
(iii) اندريون اڌ ڪندڙ $\overrightarrow{BD}$ ڪپي ٿو $\overline{AC}$ کي ٽپڪي E تي.

(iv) ٽپڪي E تي، ٻه ڪندون BEP ۽ BEQ ناهيو جنهن مان هر هڪ جي ماپ 30^o آهي

(v) $\overrightarrow{EP}$ ۽ $\overrightarrow{EQ}$ ترتيبوار $\overline{BC}$ ۽ $\overline{AB}$ کي ٽپڪن F ۽ G تي ڪپين ٿا.

(vi) $\overline{FG}$ ڪيو.

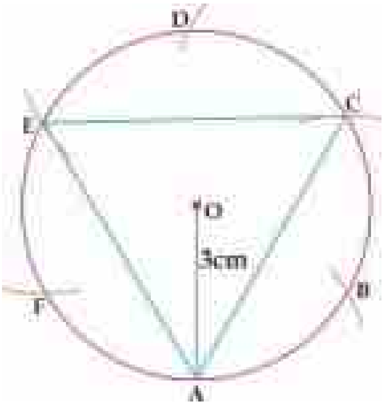
هاڻي ΔABC جو گهربل گهيريل ٽپور پاسو ٽڪنڊو EFG آهي.



29.2 (vi) مليل گول ۾ هڪ ٽپور پاسي ٽڪنڊي کي سموئڻ يا گهيري ۾ آڻڻ:

هڪ گول جو گهيريل ٽپور پاسو ٽڪنڊو.

هڪ ٽپور پاسو ٽڪنڊو گول جوگهيريل ٽپور پاسو ٽڪنڊو چورائبو جيڪڏهن گول ان جي سيني چوٽين مان گذري پر واري شڪل ۾، مرڪز O واري گول جو گهيريل ٽپور پاسو ٽڪنڊو ABC آهي.



مثال: هڪ گول جو گهيريل ٽپور پاسو ٽڪنڊو ناهيو جڏهن ته گول جو رداس 3cm ۽ ان جو مرڪز O آهي.

گهربل: مليل گول جو گهيريل ٽپور پاسو ٽڪنڊو ناهڻ.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) مرڪز O ۽ رداس 3cm سان هڪ گول ڪيو.

(ii) گول تي هڪ ٽپڪو A ڪٽو. مرڪز A ۽ رداس 3cm سان شروعات ڪندي گول کي ٽپڪن B, C, D, E ۽ F تي يڪسان حصن ۾ ورهايو.

(iii) $\overline{AC}$، $\overline{AE}$ ۽ $\overline{CE}$ ڪيو.

هاڻي مليل گول جو گهربل گهيريل ٽپور پاسو ٽڪنڊو AEC آهي.

مشق 29.2

.1 ΔABC ناهيو ۽ هر هڪ صورت ۾ ان جو گهيريندڙ گول ڪيو.

(i) $m\angle A = 50^\circ$ ۽ $m\overline{AC} = 6cm,\ m\overline{AB} = 5.5cm$

(ii) $m\overline{AC} = 5cm$ ۽ $m\overline{BC} = 4.5cm,\ m\overline{AB} = 6cm$

.2 ΔPQR ناهيو ۽ هر هڪ صورت ۾ ان جو گهيريل گول ڪيو.

(i) $m\overline{RP} = 5.5cm$ ۽ $m\overline{QR} = 6.5cm,\ m\overline{PQ} = 5cm$

(ii) $m\angle Q = 50^\circ$ ۽ $m\angle P = 60,\ m\overline{PQ} = 6cm$

.3 ΔXYZ ناهيو ۽ هر هڪ صورت ۾ $\angle Y$ جي سامهون وارو پاهريون گول ڪيو

(i) $m\angle Y = 30^\circ$ ۽ $m\overline{YZ} = 5cm,\ m\overline{XY} = 4.5cm$

(ii) $m\overline{XZ} = 7.5cm$ ۽ $m\overline{YZ} = 6cm,\ m\overline{XY} = 5.5cm$

.4 مرڪز O ۽ رداس 3.5cm سان هڪ گول ڪيو ۽ ان گول جو گهيريندڙ ٽپور پاسو. ٽڪندو ناهيو.

.5 ΔPQR جو گهيريل ٽپور پاسو ٽڪندو ناهيو جڏهن ته

$m\overline{PR} = 8cm$ ۽ $m\overline{QR} = 5.5cm,\ m\overline{PQ} = 4.5cm$

.6 هڪ گول جو گهيريل ٽپور پاسو ٽڪندو ناهيو جڏهن ته گول جو مرڪز O ۽ رداس 3.8cm آهي.

29.2 (vii) ڏنل گول جو گهيريندڙ چورس:

چورس يا ڇهه ڪندي يا ڪنهن ٻئي گهڻ ڪندي جا گهيريندڙ گول ڪڍڻ يا گول ۾ انهن گهڻ ڪندن کي گهيرڻ کان اڳ ۾ اسان کي گولن سان لاڳاپيل، پور پاسو گهڻ ڪندن جي حوالي سان هينين سڌيان جي ڄاڻ هئڻ لازمي آهي.

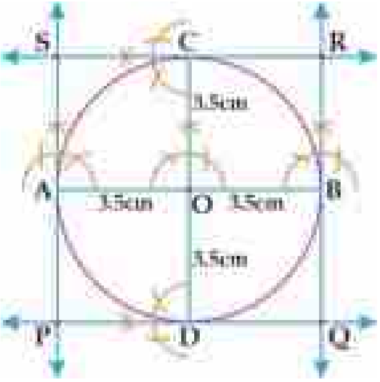
جيڪڏهن ڪنهن گول جو گهيرو n برابر قوسن ۾ ورهايو وڃي ته پوءِ

(i) ونديندڙ ٽبڪا، گول ۾ گهيريل پورپاسو n - ڪندي جون چوٽيون هونديون آهن.

(ii) انهن ٽبڪن تي گول جون ڇهڪي ليڪون، گول کي گهيريندڙ پور پاسوn- ڪندي جا پاسا هونديون آهن.

ان جو مطلب آهي ته جيڪڏهن اسان کي هڪ چورس، پور پاسو پنج ڪندي، پور پاسو ڇهه ڪندي وغيره جا گهيريندڙ گول ڪڍڻا هجن يا انهن ۾ گهيريل گول ڪڍڻا هجن ته پوءِ اسين مليل گول کي ترتيبوار چار، پنج، ڇهه وغيره برابر حصن ۾ ورهائينداسين

اچو ته هينين مثال جي مدد سان اهو سکون ته ڪيئن هڪ مليل گول جو گهيريندڙ چورس ڪيجي.



مثال: هڪ گول جو گهيريندڙ چورس ناهيو جڏهن ته گول جو مرڪز O ۽ رداس 3.5cm آهي.

مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O ۽ رداس 3.5cm آهي.

گهربل: مليل گول جو گهيريندڙ چورس ناهڻ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) مرڪز O ۽ رداس 3.5cm کڻي هڪ گول ڪيو.

(ii) هڪ قطر $\overline{AB}$ ڪيو

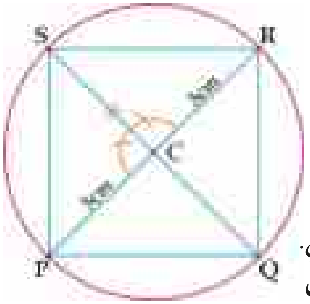
(iii) هڪ ٻيو قطر $\overline{CD}$ ڪيو جيڪو $\overline{AB}$ تي عمود هجي.

(iv) ٽٻڪن A, B, C ۽ D تي ڇهٽي ليڪون ڪڍو.
(v) اهي ڇهٽي ليڪون هڪٻئي کي ٽٻڪن P، Q، R ۽ S تي ڪپين ٿيون.
هاڻي PQRS گهربل چورس آهي جيڪو مليل گول جو گهيريندڙ آهي.
اچو ته هيٺين مثال جي مدد سان مليل گول جو گهيريل چورس ٺاهيون.

مثال: هڪ گول ۾ گهيريل چورس ٺاهيو جڏهن ته گول جو مرڪز C ۽ رداس 3cm آهي.

مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز C ۽ رداس 3cm آهي.

گهربل: مليل گول ۾ گهيريل چورس ٺاهڻ.



جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) مرڪز C ۽ رداس 3cm سان هڪ گول ڪڍو.
(ii) هڪ قطر $\overline{PR}$ ڪڍو
(iii) هڪ قطر $\overline{QS}$ ٺاهيو جيڪو $\overline{PR}$ تي عمود هجي.
(iv) مليل گول ٽٻڪن P, Q, R ۽ S تي چار برابر حصن ۾ ورهائجي ويو آهي.
(v) $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ ۽ $\overline{SP}$ ڪڍو. هاڻي مليل گول جو گهربل گهيريل چورس PQRS آهي.

29.2 (viii) هڪ ڏنل گول جو گهيريندڙ پور پاسو ڇهه ڪنڊو ٺاهڻ:

هڪ ڏنل گول جي گهيريندڙ پور پاسو ڇهه ڪنڊي کي ٺاهڻ جو طريقو هيٺين مثال جي مدد سان واضح ڪيو ويو آهي.

مثال: مرڪز O ۽ رداس 4cm واري گول جو گهيريندڙ پور پاسو ڇهه ڪنڊو ٺاهيو.

مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O ۽ رداس 4cm آهي.

گهربل: مليل گول جو گهيريندڙ پور پاسو ڇهه ڪنڊو ٺاهڻ.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) مرڪز O ۽ رداس 4cm کڻي هڪ گول ڪڍو.
(ii) گول تي ڪو ٽٻڪو A ڪڻو.
(iii) مرڪز A ۽ $m\overline{OA}$ جي برابر رداس سان شروعات ڪندي گول کي ڇهه برابر حصن ۾ ورهائڻ لاءِ قوس ڪيو ۽ ونڊيندڙ ٽٻڪا A, B,C,D,E ۽ F آهن.
(iv) انهن ونڊيندڙ ٽٻڪن تي گول جون ڇُهٽي ليڪون ڪيو.
(v) اهي ڇهٽي ليڪون هڪ ٻيئي کي ٽٻڪن P,Q,R,S,T ۽ U تي ڪپين ٿيون.
هاڻي مليل گول جو گهربل پور پاسو ڇهه ڪنڊو PQRSTU آهي.

29.2 (ix) ڏنل گول ۾ هڪ گهيريل پور پاسو ڇهه ڪندو ٺاهڻ.

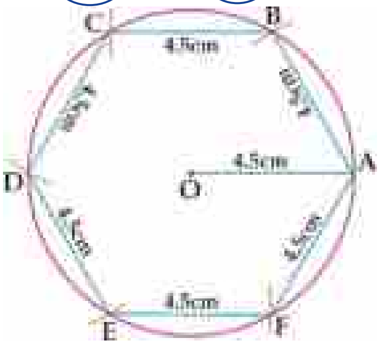
هيٺين مثال جي مدد سان،ڏنل گول ۾ هڪ گهيريل پور پاسو ڇهه ڪندو ٺاهڻ جو طريقو واضح ڪجي ٿو.

مثال: مرڪز O ۽ رداس 4.5 cm واري گول ۾ هڪ گهيريندڙ پور پاسو ڇهه ڪندو ٺاهيو.

مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O ۽ رداس 4.5 cm آهي.

گهربل: مليل گول ۾ گهيريل پور پاسو ڇهه ڪندو ٺاهڻ.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:



(i) مرڪز O ۽ رداس 4.5cm کڻي هڪ گول ڪڍو.

(ii) گول تي ڪو ٽٻڪو A کڻو.

(iii) مرڪز A ۽ $m\overline{AO}$ يا 4.5cm جي رداس سان شروعات ڪندي ڏنل گول کي ٽٻڪن A، B، C، D، E ۽ F تي برابر حصن ۾ ورهائڻ لاءِ قوس ڪڍو

(iv) $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$، $\overline{DE}$، $\overline{EF}$ ۽ $\overline{AF}$ ڪڍو

هاڻي ABCDEF گهربل پور پاسو ڇهه ڪندو آهي جيڪو مليل گول ۾ گهيريل آهي.

مشق 29.3

1. مرڪز C ۽ 4.2cm رداس واري گول جو گهيريندڙ چورس ناهيو.
2. مرڪز O ۽ 3.6cm رداس واري گول ۾ هڪ گهيريل چورس ناهيو.
3. مرڪز O ۽ 4.8cm رداس واري گول جو گهيريندڙ پور پاسو ڇهه ڪندو ناهيو.
4. مرڪز C ۽ 4.4cm رداس واري گول ۾ گهيريل پورپاسو ڇهه ڪندو ناهيو.
5. مرڪز O ۽ 4.3cm واري گول ۾ گهيريل پور پاسو پنج ڪندو ناهيو.

(اشارو، مرڪز تي پنج يڪسان ڪندون ناهيو.)

29.3 گول جون ڇهڻ ليڪون (Tangents to a circle) :

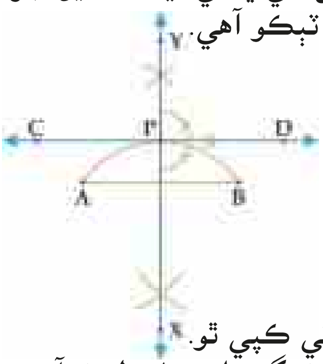
ياد ڪريو ته گول جي ڇهڻي ليڪ هڪ اهڙي ليڪ آهي جيڪا گول کي صرف هڪ ئي ٽٻڪي تي ڇُهي ٿي.ميلاپ واري ٽٻڪي تي گول جي ڇهڻي ليڪ ۽ رداسي ٽڪر هميشه هڪٻئي تي عمود هوندا آهن.

29.3 (i) مرڪز جو استعمال ڪرڻ بنا، ڏنل ٽٻڪي P مان مليل قوس جي ڇهڻي ليڪ ڪڍڻ جڏهن.

* P قوس جو وچيون ٽٻڪو آهي.
* P قوس جي ڇيڙي تي آهي
* P قوس کان ٻاهر آهي.

صورت 1: جڏهن P قوس جو وچيون ٽٻڪو آهي.

مرڪز جو استعمال ڪرڻ بنا، ڏنل ٽٻڪي P مان مليل قوس جي ڇُهڻي ليڪ ڪڍڻ جو طريقو هيٺين مثال سان واضح ڪجي ٿو، جڏهن ته P قوس جو وچيون ٽٻڪو آهي.



مثال: هڪ قوس AB کڻو. مرڪز جو استعمال ڪرڻ بنا، $\overset{\frown}{AB}$ جي وچين ٽٻڪي P مان $\overset{\frown}{AB}$ جي ڇهڻي ليڪ ڪڍو.

مليل: ٽٻڪو P، $\overset{\frown}{AB}$ جو وچيون ٽٻڪو آهي

گهربل: مرڪز جو استعمال ڪرڻ بنا، P مان $\overset{\frown}{AB}$ تي ڇهڻي ليڪ ڪڍڻ:

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) هڪ قوس AB کڻو

(ii) ڙهر AB ڪڍو.

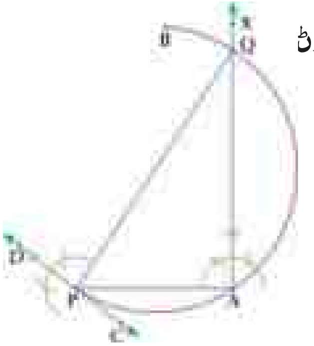
(iii) $\overline{AB}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{XY}$ ڪڍو جيڪو قوس کي ٽٻڪي P تي ڪپي ٿو.

(iv) ٽٻڪي P مان، $\overleftrightarrow{XY}$ تي هڪ عمود $\overleftrightarrow{CD}$ ڪڍو اهڙي طرح $\overleftrightarrow{CD}$ هڪ گهربل ڇهڻي ليڪ آهي.

صورت 2: جڏهن P قوس جي چيڙي تي آهي.

مرڪز جو استعمال ڪرڻ بنا، قوس جي چيڙي P مان قوس جي ڇهڻي ليڪ ڪڍڻ جو طريقو هيٺين مثال سان واضح ڪجي ٿو.

مثال: هڪ قوس PAB ڪڍو. مرڪز جو استعمال ڪرڻ بنا، $\widehat{PAB}$ جي ڇهڻي ليڪ قوس جي چيڙي P مان ڪڍيو.



مليل: ٽبڪو P، $\widehat{PAB}$ جو چيڙو آهي گهربل مرڪز جو استعمال ڪرڻ بنا $\widehat{PAB}$ جي ڇهڻي ليڪ قوس جي چيڙي P مان ڪڍڻ.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) مرڪز ۽ رداس پنهنجي مرضي مطابق ڪٽنڊي هڪ $\widehat{PAB}$ ڪڍيو.

(ii) زهه $\overline{AP}$ ڪڍيو.

(iii) ٽبڪي A تي $\overline{PA}$ جي مٿان هڪ عمود $\overrightarrow{AX}$ ڪڍيو جيڪو ڏنل قوس کي ٽبڪي Q تي ڪپي ٿو.

(iv) $\overline{PQ}$ ڪڍيو جيڪو قوس جو قطر آهي.

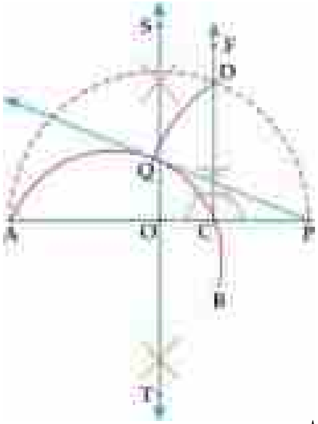
(v) ٽبڪي P تي، $\overline{PQ}$ جي مٿان هڪ عمود $\overrightarrow{CD}$ ڪڍيو.

هاڻي $\overleftrightarrow{CD}$ گهربل ڇهڻي ليڪ آهي.

صورت 3: جڏهن P قوس کان ٻاهر آهي.

مرڪز جو استعمال ڪرڻ بنا، هڪ ٽبڪي P مان قوس جي ڇهڻي ليڪ ڪڍڻ جو طريقو هيٺين مثال سان واضح ڪجي ٿو جڏهن ته ٽبڪو P قوس کان ٻاهر آهي.

مثال: هڪ قوس AB ڪڍو. مرڪز جو استعمال ڪرڻ بنا هڪ ٽبڪي P مان قوس AB جي ڇهڻي ليڪ ڪڍيو جڏهن ته P قوس کان ٻاهر آهي.



مليل: هڪ ٽبڪو P جيڪو قوس AB کان ٻاهر آهي.

گهربل: مرڪز جو استعمال ڪرڻ بنا ٽبڪي P مان قوس AB جي ڇهڻي ليڪ ڪڍڻ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) پنهنجي مرضي تي هڪ قوس AB ڪڍيو.

(ii) $\widehat{AB}$ کان ٻاهر هڪ ٽبڪو P ڪڍو.

(iii) $\overline{AP}$ ڪڍيو جيڪو ڏنل قوس کي ٽبڪي C تي ڪپي ٿو.

(iv) $\overline{AP}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{ST}$ ڪڍيو جيڪو $\overline{AP}$ کي ٽبڪي O تي ڪپي ٿو.

(v) مرڪز O ۽ رداس $m\overline{AO}$ يا $m\overline{OP}$ جي برابر ڪٽي، هڪ اڌ گول ڪڍيو.

(vi) ٽبڪي C تي $\overleftrightarrow{AP}$ جي مٿان هڪ عمود $\overleftrightarrow{CF}$ ڪڍيو جيڪو اڌگول کي ٽبڪي D تي ڪپي ٿو.

(vii) مرڪز P ۽ رداس $m\overline{PD}$ جي برابر ڪٽي هڪ قوس ڪڍيو جيڪو $\widehat{AB}$ کي ٽبڪي Q تي ڪپي ٿو.

(viii) $\overrightarrow{PQ}$ ڪڍيو

هاڻي $\overleftrightarrow{PQ}$ گهربل ڇهڻي ليڪ آهي.

29.3 (ii) هڪ ٽٻڪي P مان، ڏنل گول جي ڇهڪ ليڪ ڪڍڻ، جڏهن:

- P گول جي گهيري تي موجود آهي.
- P گول کان ٻاهر موجود آهي.

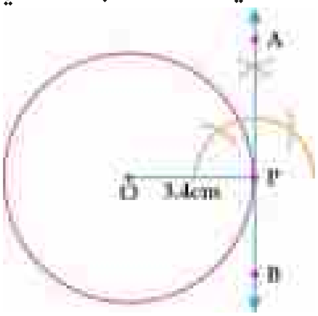
صورت 1: جڏهن ٽٻڪو P، گول جي گهيري تي موجود آهي.

هڪ ٽٻڪيP مان ڏنل گول جي ڇهڪ ليڪ ڪڍڻ جو طريقو هيٺين مثال جي مدد سان واضح ڪجي ٿو جڏهن ته P گول جي گهيري تي موجود آهي.

مثال: 3.4cm رداس جو هڪ گول ڪيو جنهن جو مرڪز ٽٻڪي O تي آهي.گول جي گهيري جي ٽٻڪي P مان گول جي ڇهڪ ليڪ ڪيو.

مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O ۽ رداس 3.4cm آهي ۽ P ان جي گهيري جو هڪ ٽٻڪو آهي.

گهربل: ٽٻڪي P تي گول جي ڇهڪ ليڪ ڪيو:



جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) ٽٻڪي O کي مرڪز ڪٽي، 3.4cm رداس جو هڪ گول ڪيو.

(ii) گول جي گهيري تي هڪ ٽٻڪو P ڪٽو

(ii) $\overline{OP}$ ڪيو.

(iii) ٽٻڪيP تي، $\overline{OP}$ جي مٿان هڪ عمود $\overleftrightarrow{AB}$ ڪيو

هاڻي $\overleftrightarrow{AB}$ گهربل ڇهڪ ليڪ آهي.

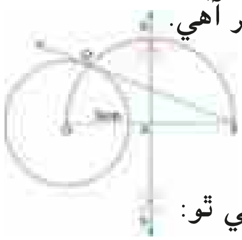
صورت 2: جڏهن ٽٻڪو P گول کان ٻاهر آهي.

هڪ ٽٻڪي P مان گول جي ڇهڪ ليڪ ڪڍڻ جي طريقي کي هيٺين مثال جي مدد سان واضح ڪيو ويو آهي جڏهن ته P گول کان ٻاهر موجود اهي.

مثال: مرڪز O سان، 3cm رداس وارو هڪ گول ڪيو. هڪ ٽٻڪي P مان گول جي ڇهڪ ليڪ ڪيو جڏهن ته P گول کان ٻاهر موجود آهي.

مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O ۽ رداس 3cm آهي ۽ هڪ ٽٻڪو P جيڪو گول کان ٻاهر آهي.

گهربل: هڪ ٽٻڪي P مان گول جي ڇهڪ ليڪ ڪڍڻ جڏهن ته P گول کان ٻاهر آهي.



جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) مرڪز O سان، 3cm جو هڪ گول ڪيو.

(ii) گول کان ٻاهر هڪ ٽٻڪو P ڪٽو.

(iii) $\overline{OP}$ کي ڪيو

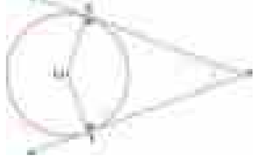
(iv) $\overline{OP}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{XY}$ ڪيو جيڪو ان کي ٽٻڪي A تي ڪپي ٿو:

(v) مرڪز A ۽ رداس $m\overline{AO}$ جي برابر ڪٽي، هڪ اڌ گول ڪيو جيڪو مليل گول کي ٽٻڪي Q تي ڪپي ٿو.

(vi) $\overrightarrow{PQ}$ ڪيو.

هاڻي $\overrightarrow{PQ}$ گهربل ڇهڪ ليڪ آهي.

9.3 (iii) هڪ گول جون ٻه ڇهڪ ليڪون ڪڍڻ جيڪي هڪ ٻئي سان ڏنل ڪند تي ملن ٿيون:



هڪ گول ڪٽو جنهن جو مرڪز O آهي ۽ $\overrightarrow{PS}$ ۽ $\overrightarrow{PT}$ گول جون ٻه ڇهڪ ليڪون آهن جڏهن ته ∠P ٻنهي ڇهڪ ليڪن جي وچ ۾ ڪند آهي.

هتي $m\angle PSO = 90^\circ$ $(\because \overline{OS} \perp \overrightarrow{PS})$

۽ $m\angle PTO = 90^\circ$ $(\because \overline{OT} \perp \overrightarrow{PT})$

هاڻي چوڪندي PSOT ۾

يعني تہ

$$m\angle P + m\angle PSO + m\angle O + m\angle PTO = 360^\circ$$
$$m\angle P + 90^\circ + m\angle O + 90^\circ = 360^\circ$$
$$\Rightarrow m\angle P + m\angle O = 180^\circ$$
$$\Rightarrow m\angle O = 180^\circ - m\angle P$$

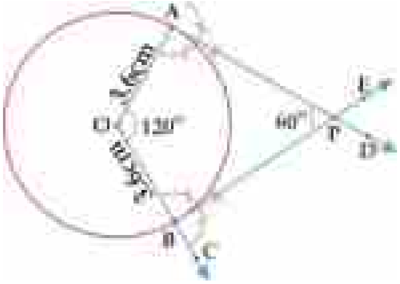
يعني تہ ميلاپ واري ٽبڪن کي ملائيندڙ مرڪزي ڪنڊ، ڇھڻي ليڪن جي وچ واري ڪنڊ جي سپليمينٽ ھوندي آھي.
ان حقيقت کي استعمال ڪندي اسين گول جون ٻہ ڇھڻي ليڪون ڪيڏانھين جيڪي ھڪ ڏنل ڪنڊ تي ملن ٿيون. اھو طريقو ھيٺين مثال جي مدد سان واضح ڪيو ويو آھي.

مثال: ھڪ گول جون ٻہ ڇھڻي ليڪون ڪيو جڏھن تہ گول جو رداس 3.6cm ۽ مرڪز ٽبڪي O تي آھي ۽ ڇھڻي ليڪون ھڪٻئي سان 60° ماپ واري ڪنڊ ٺاھن ٿيون.

مليل: ھڪ گول جنھن جو مرڪز O ۽ رداس 3.6cm آھي جڏھن تہ ڇھڻي ليڪن جي وچ واري ڪنڊ 60° آھي.

گھربل: مليل گول جون ٻہ ڇھڻي ليڪون ڪيو جيڪي ھڪٻئي سان 60° جي ڪنڊ تي ملن ٿيون.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:



(i) مرڪز O سان، 3.6cm رداس جو گول ڪيو

(ii) گول تي ھڪ ٽبڪو A ڪٽو ۽ ان کي O سان ملايو.

(iii) 120° جي $\angle AOC$ ڪيو (يعني تہ $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$)
اھڙي طرح جو OC مليل گول کي ٽبڪي B تي ڪپي تو.

(iv) ٽبڪي A تي $\overline{OA}$ جي مٿان ھڪ عمود $\overrightarrow{AD}$ ڪيو.

(v) ٽبڪي B تي، $\overline{OB}$ جي مٿان ھڪ عمود $\overrightarrow{BE}$ ڪيو.

(vi) ٻئي $\overrightarrow{AD}$ ۽ $\overrightarrow{BE}$ ھڪٻئي کي ٽبڪي P تي ڪپين ٿا.

اھڙي طرح $\overline{AP}$ ۽ $\overline{BP}$ گھربل ڇھڻي ليڪون آھن. اھڙي طرح جو $m\angle P = 60^\circ$.

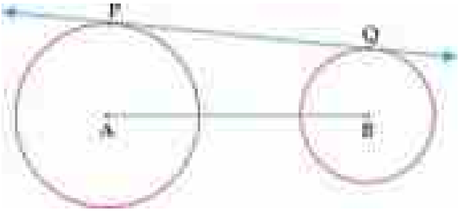
مشق 29.4

1. ھڪ ننڍو قوس $\widehat{PQ}$ ڪٽو، مرڪز جو استعمال ڪرڻ بنا $\widehat{PQ}$ جي ڇھڻي ليڪ ڪيو جيڪا ان جي وچين ٽبڪي مان گذري.
2. ھڪ وڏو قوس $\widehat{PQR}$ ڪيو. مرڪز جو استعمال ڪرڻ بنا، $\widehat{PQR}$ جي ڇھڻي ليڪ ڪيو جيڪا ان جي چيڙي Q مان گذري.
3. ھڪ ننڍو قوس $\widehat{XY}$ ڪٽو. مرڪز جو استعمال ڪرڻ بنا، $\widehat{XY}$ جي ڇھڻي ليڪ ڪيو جيڪا ٽبڪي Z مان گذري جيڪو قوس کان ٻاھر آھي.
4. مرڪز C سان، 2.9cm رداس جو گول ڪيو. گول جي ٽبڪي P مان گول جي ھڪ ڇھڻي ليڪ ڪيو.
5. مرڪز P سان 3.2cm رداس جو ھڪ گول ڪيو گول جي ڇُھڻي ليڪ ڪيو ٽبڪي Q مان جيڪو P کان 8cm جي فاصلي تي آھي.
6. مرڪز C ۽ 3.3 رداس جي گول جون ٻہ ڇھڻي ليڪون ڪيو جيڪي ھڪٻئي سان ھيٺين ڪندن تي ملن ٿيون. (i) 50° (ii) 63°

29.3 (iv) ٻن برابر گولن جون:

* سڌيءَ طرح گڏيل ڇھيون ليڪون يا ٻاھريون ڇھيون ليڪون ڪيڏڻ
* آڏيون گڏيل ڇھيون ليڪون يا اندريون ڇھيون ليڪون ڪيڏڻ

(a) ٻن برابر گولن جون سڌيءَ طرح گڏيل ڇھيون ليڪون يا ٻاھريون ڇھيون ليڪون ڪيڏڻ
سڌي طرح گڏيل ڇھڻي ليڪ: (Direct Common Tangent):



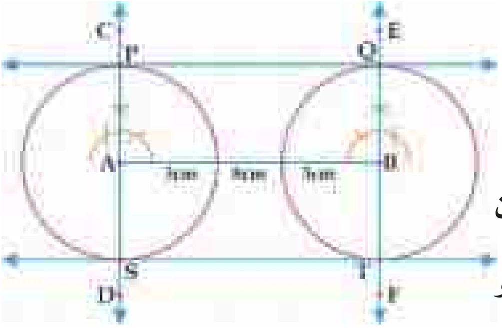
هڪ مشترڪ ڇهڻي ليڪ کي ٻن گولن جي سڌي طرح گڏيل ڇهڻي ليڪ يا ٻاهرين ڇهڻي ليڪ چئبو جيڪڏهن اها ڏنل ٻن گولن جي مرڪزن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر ڪي نه ڪپي.

شڪل ۾، $\overleftrightarrow{PQ}$ سڌي طرح گڏيل ڇهڻي ليڪ آهي انهن ٻن گولن جي، جن جا مرڪز A ۽ B آهن. نوٽ ڪريو ته $\overleftrightarrow{PQ}$ نٿو ڪپي $\overline{AB}$ کي. ٻن برابر گولن جون سڌي طرح گڏيل ڇهڻيون ليڪون ڪڍڻ جو طريقو هيٺين مثال سان واضح ڪجي ٿو.

مثال: ٻن برابر گولن جون سڌي طرح گڏيل ڇهڻيون ليڪون ڪڍو جڏهن ته انهن گولن جا مرڪز ٽٻڪن A ۽ B تي آهن ۽ انهن مان هرهڪ جو رداس 3cm آهي اهڙي طرح جو $m\overline{AB} = 8cm$.

مليل: ٻہ گول جن جا مرڪز ٽٻڪن A ۽ B تي آهن ۽ هر هڪ جو رداس 3cm آهي اهڙي طرح جو $m\overline{AB} = 8cm$.

گھربل: ڏنل گولن تي ٻہ سڌي طرح گڏيل ڇهڻيون ليڪون ڪڍڻ



جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) 8cm ڊيگهہ جو $\overline{AB}$ ڪڍو.

(ii) ٻہ برابر گول ٽٻڪن A ۽ B تي ڪڍو جن مان هر هڪ جو رداس 3cm آهي

(iii) ٽٻڪي A تي $\overline{AB}$ جي مٿان عمود $\overleftrightarrow{CD}$ ڪڍو جيڪو ان گول کي ٻن ٽٻڪن P ۽ S تي ڪپي ٿو.

(iv) ٽٻڪي B تي $\overline{AB}$ جي مٿان عمود $\overleftrightarrow{EF}$ ڪڍو جيڪو ان گول کي ٻن ٽٻڪن Q ۽ T تي ڪپي ٿو.

(v) $\overleftrightarrow{PQ}$ ۽ $\overleftrightarrow{ST}$ ڪڍو

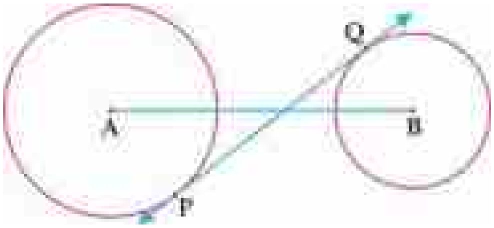
(vi) هاڻي $\overleftrightarrow{PQ}$ ۽ $\overleftrightarrow{ST}$ ڏنل گولن تي گهربل سڌي طرح گڏيل ڇهڻيون ليڪون آهن.

(b) ٻن برابر گولن جون گڏيل آڏيون ڇهڻيون ليڪون ڪڍڻ:

آڏي گڏيل ڇهڻي ليڪ (Transverse Common Tangent):

هڪ مشترڪ ڇهڻي ليڪ کي ٻن گولن جي آڏي گڏيل ڇهڻي ليڪ يا اندرين ڇهڻي ليڪ چئبو جيڪڏهن اها ڏنل گولن جي مرڪزن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر کي ڪپي.

شڪل ۾ $\overleftrightarrow{PQ}$ آڏي گڏيل ڇهڻي ليڪ آهي ٻن گولن جي، جن جا مرڪز A ۽ B آهن. نوٽ ڪريو تہ $\overleftrightarrow{PQ}$ ڪپي ٿو $\overline{AB}$ کي. ٻن برابر گولن جون آڏيون گڏيل ڇهڻيون ليڪون ڪڍڻ جو طريقو هيٺين مثال جي مدد سان واضح ڪيو ويو آهي.



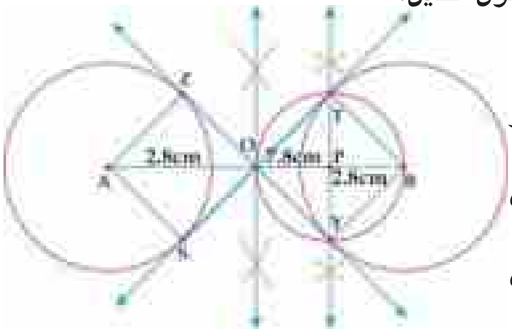
مثال: ٻن برابر گولن جون ٻہ آڏيون گڏيل ڇھٽيون ليڪون ڪيو جڏھن تہ انھن گولن مان ھر ھڪ جو رداس 2.8cm آھي ۽ انھن جا مرڪز ٽبڪن A ۽ B تي آھن. اھڙي طرح جو $m\overline{AB} = 7.8cm$.

طريقو- I

مليل: ٻہ گول جن مان ھر ھڪ جو رداس 2.8cm آھي ۽ انھن جا مرڪز A ۽ B تي آھن اھڙي طرح جو $m\overline{AB}=7.8cm$

گھربل: مليل گولن جون ٻہ آڏيون گڏيل ڇھٽيون ليڪون ڪيڙ.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:



(i) 7.8cm ڊيگھ جو $\overline{AB}$ ڪيو

(ii) ٽبڪن A ۽ B تي ٻہ گول ڪيو جن مان ھر ھڪ جو رداس 2.8cm آھي.

(iii) $\overline{AB}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ ڪيو جيڪو ان کي ٽبڪي O تي ڪپي ٿو.

(iv) $\overline{OB}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ ڪيو جيڪو ان کي ٽبڪي P تي ڪپي ٿو.

(v) مرڪزP ۽ رداس $m\overline{OP}$ جي برابر ڪٽي ھڪ گول ڪيو جيڪو مرڪز B واري گول کي ٽبڪن T ۽ Y تي ڪپي ٿو.

(vi) $\overline{BT}$ ۽ $\overline{BY}$ ڪيو .

(vii) گونين (Set squares) جو استعمال ڪندي $\overline{AZ}||\overline{BY}$ ۽ $\overline{AS}||\overline{BT}$ ڪيو.

(viii) $\overleftrightarrow{ST}$ ۽ $\overleftrightarrow{YZ}$ ڪيو.

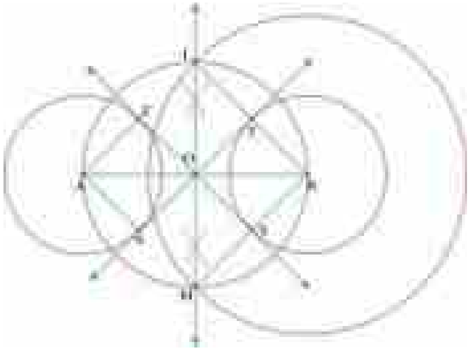
$\overline{ST}$ ۽ $\overline{YZ}$ گھربل آڏيون گڏيل ڇھٽيون ليڪون آھن.

طريقو- 2

مليل: ٻہ گول جن مان ھر ھڪ جو رداس 2.8cm آھي ۽ انھن جا مرڪز A ۽ B آھن اھڙي طرح جو $m\overline{AB} = 7.8cm$

گھربل: مليل گولن جون ٻہ آڏيون گڏيل ڇھٽيون ليڪون ڪيڙ.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:



(i) 7.8cm ڊيگھ جو $\overline{AB}$ ڪيو.

(ii) ٽبڪنA ۽ B تي ٻہ گول ڪيو جن مان ھر ھڪ جو رداس 2.8cm آھي.

(iii) $\overline{AB}$ کي ٽبڪي O تي اڌ ڪيو ۽ مرڪز O سان ۽ رداس $m\overline{AO}$ جي برابر ڪٽي ھڪ گول ڪيو.

(iv) مرڪزB ۽ (2.8cm جي ٻيڻ) 5.6cm جي برابر رداس ڪٽي ھڪ گول ڪيو جيڪو مرڪز O واري پھرين گول کي ٽبڪنL ۽ M تي ڪپي ٿو.

(v) $\overline{BL}$ ۽ $\overline{BM}$ ڪيو جيڪي مرڪز B واري ننڍي گول کي ترتيبوار ٽبڪن T ۽ y تي ڪپين ٿا.

(vi) گونين (Set squares) جو استعمال ڪندي $\overline{AS}||\overline{BT}$، $\overline{AZ}||\overline{BY}$ ڪيو.

$\overleftrightarrow{ST}$ ۽ $\overleftrightarrow{YZ}$ گهربل آڏيون گڏيل ڇهيون ليڪون آهن.

29.3 (v) ٻہ غير مساوي گولن جون:

* سڌي طرح گڏيل ڇهيون ليڪون يا ٻاهريون ڇهيون ليڪون ڪڍڻ.
* آڏيون گڏيل ڇهيون ليڪون يا اندريون ڇهيون ليڪون ڪڍڻ.

(a) ٻن غير مساوي گولن جون سڌي طرح گڏيل ڇهيون ليڪون يا ٻاهريون ڇهيون ليڪون ڪيئن ڪڍجن:

ٻن غِير مساوي گولن جون سڌي طرح ڇهيون ليڪون ڪڍڻ جي طريقي کي سکڻ لاءِ هيٺيون مثال مناسب آهي.

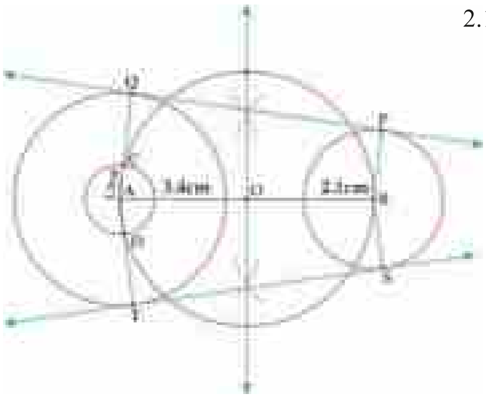
مثال: ٻن ڏنل گولن جون سڌي طرح گڏيل ڇهيون ليڪون ڪڍو جن جا رداس 3.4cm ۽ 2.1cm آهن جڏهن تہ انهن جي مرڪزن جي وچ وارو فاصلو 7.5cm آهي.

طريقو - 1

مليل: ٻہ گول جن جا مرڪز A ۽ B آهن ۽ انهن جا رداس ترتيبوار 3.4cm ۽ 2.1cm آهن اهڙي طرح جو $m\overline{AB} = 7.5cm$

گهربل: ڏنل گولن جون سڌي طرح گڏيل ڇهيون ليڪون ڪڍڻ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:



(i) 7.5cm ڊيگهہ جو $\overline{AB}$ ڪڍو.

(ii) مرڪز A ۽ B سان، ترتيبوار رداس 3.4cm ۽ 2.1cm ڪٽي ٻہ گول ڪڍو.

(iii) $\overline{AB}$ کي ٽُبڪي O تي اڌ ڪيو ۽ مرڪز O سان هڪ گول ڪڍو جنهن جو رداس $m\overline{AO}$ جي برابر آهي.

(iv) وڏي گول جي مرڪز A سان، رداس 1.3cm (يعني (3.4 − 2.1 = 1.3) ڪٽي هڪ گول ڪڍو جيڪو پهرين گول کي ٽبڪن C ۽ D تي ڪپي ٿو.

(v) $\overline{AC}$ ڪڍو ۽ ان کي وڌايو تہ جيئن هي ڏنل هم مرڪز گول کي ٽبڪي Q تي ڪپي.

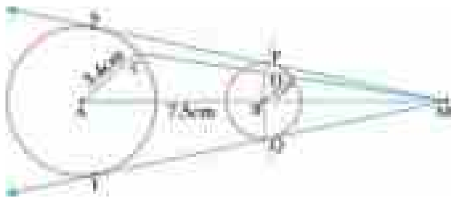
(vi) $\overline{AD}$ ڪڍو ۽ ان کي وڌايو تہ جيئن هي ڏنل هم مرڪز گول کي ٽبڪي T تي

(vii) گونين (Set squares) جو استعمال ڪندي $\overline{BP}||\overline{AQ}$ ۽ $\overline{BS}||\overline{AT}$ ڪڍو.

(viii) $\overleftrightarrow{PQ}$ ۽ $\overleftrightarrow{ST}$ ڪڍو.

هاڻي $\overleftrightarrow{PQ}$ ۽ $\overleftrightarrow{ST}$ گهربل سڌي طرح گڏيل ڇهيون ليڪون آهن.

طريقو - 2



مليل: ٻہ گول جن جا مرڪز A ۽ B ۽ انهن جا ترتيبوار رداس 3.4cm ۽ 2.1cm آهن اهڙي طرح جو $m\overline{AB} = 7.5cm$

گهربل: ڏنل گولن تي سڌي طرح گڏيل ڇهيون ليڪون ڪڍڻ.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) 7.5cm ڊيگھ جو $\overline{AB}$ ڪڍو

(ii) ٽپڪن A۽B تي ترتيبوار رداس3.4cm ۽ 2.1cm جا گول ڪڍو.

(iii) مرڪز Aواري گول تي ڪو ٽپڪو C کڻو ۽ $\overline{AC}$ ڪڍو.

(iv) گونين (Set squares) جو استعمال ڪندي $\overline{BD}||\overline{AC}$ ڪڍو.

(v) $\overline{CD}$ ڪڍو ۽ ان کي D کان پري وڌايو.

(vi) $\overline{AB}$ کي وڌايو ته جيئن هو $\overleftrightarrow{CD}$ کي ٽپڪيM تي ڪپي.

(vii) مرڪز M ۽ رداس $m\overline{MB}$ جي برابر کڻي هڪ قوس ڪڍو جيڪو مرڪز B واري گول کي ٽپڪن P ۽ Q تي ڪپي ٿو.

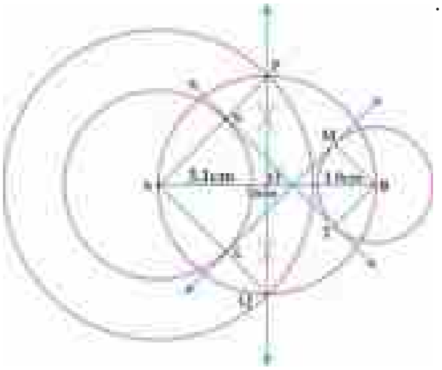
(viii) $\overline{MP}$ ڪڍو ۽ ان کي وڌايو ته جيئن اهوبيئي گول سان S تي ملي.

(ix) $\overline{MQ}$ ڪڍو ۽ ان کي وڌايو ته جيئن اهو بيئي گول سان ٽپڪي T تي ملي.

هاڻي $\overleftrightarrow{SP}$ ۽ $\overleftrightarrow{TQ}$ ڏنل گولن جون سڌي طرح گڏيل ڇھٽيون ليڪون آهن.

(b) ٻن غير مساوي گولن جون آڏيون گڏيل ڇهٽيون ليڪون يا اندريون ڇهٽيون ليڪون ڪڍڻ:

اسين ٻن غير مساوي گولن جون آڏيون گڏيل ڇهٽيون ليڪون يا اندريون ڇهٽيون ليڪون ڪڍڻ جو طريقو هيٺين مثال سان واضح ڪريون ٿا.



مثال: ٻن گولن جون آڏيون گڏيل ڇهٽيون ليڪون ڪڍو جڏهن ته گولن جا مرڪز A ۽ B ۽ انهن جا رداس 3.1cm ۽ 1.9cm آهن اهڙي طرح جو انهن جي مرڪزن جي وچ ۾ فاصلو 7.6cm آهي.

مليل: ٻه گول جن جا مرڪز A ۽ B ۽ انهن جا ترتيبوار رداس 3.1cm ۽ 1.9cm آهن جڏهن $m\overline{AB}$ =7.6cm

گهربل: ٻن ڏنل گولن جون آڏيون گڏيل ڇهٽيون ليڪون ڪڍڻ.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) 7.6cm ڊيگھ جو $\overline{AB}$ ڪڍو.

(ii) ٽپڪن A ۽ B تي ترتيبوار 3.1cm ۽ 1.9cm رداس جا گول ڪڍو

(iii) ٽپڪي O تي $\overline{AB}$ کي اڌ ڪريو ۽ مرڪز O ۽ رداس $m\overline{OA}$ جي برابر کڻي هڪ گول ڪڍو.

(iv) مرڪزA (وڏي گول جو مرڪز) ۽ رداس 5cm (يعني 3.1cm+1.9cm=5cm) سان هڪ گول ڪڍو جيڪو پهرين گول کي ٽپڪن P ۽ Q تي ڪپي ٿو.

(v) $\overline{AP}$ڪڍو جيڪو ڏنل وڏي گول کي ٽپڪي S تي ڪپي ٿو.

(vi) $\overline{AQ}$ ڪڍو جيڪو ڏنل وڏي گول کي ٽپڪي L تي ڪپي ٿو.

(vii) $\overline{AQ}\|\overline{BM}$ ۽ $\overline{AP}\|\overline{BT}$ ڪڍو.

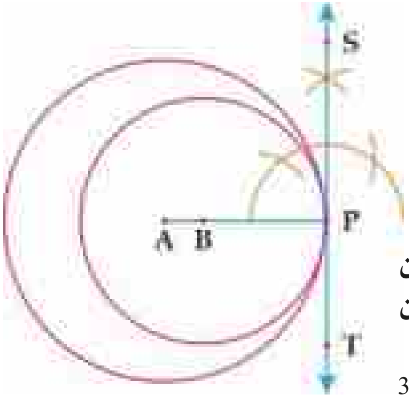
(viii) $\overleftrightarrow{ST}$ ۽ $\overleftrightarrow{LM}$ ڪڍو

هاڻي $\overleftrightarrow{ST}$ ۽ $\overleftrightarrow{LM}$ گهربل آڏيون گڏيل ڇهٽيون ليڪون آهن.

(vi) 29.3

* ٻن غير مساوي ڇُهندڙ گولن جي ڇهٽي ليک ڪڍڻ.
* ٻن غير مساوي ڪپيندڙ گولن جي ڇهٽي ليک ڪڍڻ.

(a) **ٻن غير مساوي ڇُهندڙ گولن جي ڇهٽي ليک ڪڍڻ.**



هتي ٻه صورتون آهن

صورت 1: جڏهن گول اندريان ڇهن ٿا.

اهو طريقو هيٺين مثال سان واضح ڪجي ٿو.

مثال: ٻن غير مساوي گولن جي ڇهٽي ليک ڪڍو، ان گولن جا رداس 3cm ۽ 2cm ۽ مرڪز ترتيبوار A ۽ B آهن جڏهن ته ٻئي گول اندريان ڇُهن ٿا.

مليل: ٻه گول جن جا مرڪز A ۽ B ۽ ترتيبوار رداس 3cm ۽ 2cm آهن. اهي گول اندريان ڇُهن ٿا.

گهربل: انهن گولن تي هڪ ڇهٽي ليک ڪڍڻ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) ٽٻڪي A کي مرڪز ڪٽي، 3cm رداس جو وڏو گول ڪڍيو.

(ii) ان گول تي ڪو ٽٻڪو P ڪڍو ۽ $\overline{AP}$ ڪڍيو

(iii) ٽٻڪي P کان 2cm جي فاصلي تي $\overline{AP}$ تي هڪ ٽٻڪو B ڪڍو.

(iv) مرڪز B ۽ رداس 2cm ڪٽي هڪ گول ڪڍو جيڪو وڏي گول کي ٽٻڪي P تي ڇُهي ٿو.

(v) ميلاپ واري ٽٻڪي P تي $\overline{AP}$ جي مٿان هڪ عمود $\overleftrightarrow{ST}$ ڪڍيو.

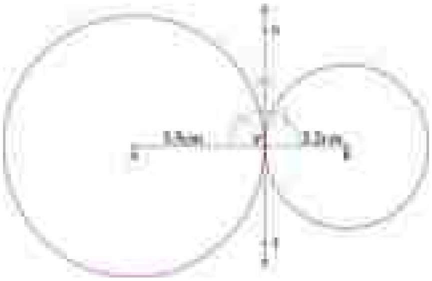
هاڻي $\overleftrightarrow{ST}$ گهربل ڇُهٽي ليک آهي.

صورت 2: جڏهن گول ٻاهريان ڇُهن ٿا.

اهو طريقو هيٺين مثال ۾ واضح ڪيو ويو آهي.

مثال: هڪ ڇهٽي ليک ڪڍو ٻن غير مساوي گولن تي جن جا مرڪز A ۽ B ۽ انهن جا رداس ترتيبوار 3.5cm ۽ 2.2cm آهن جڏهن ته ٻئي گول هڪٻئي کي ٻاهريان ڇُهن ٿا.

مليل: ٻه گول جن جا مرڪز A ۽ B ۽ انهن جا رداس ترتيبوار ۽ آهن 3.5cm ۽ 2.2cm جڏهن ته گول هڪٻئي کي ٻاهريان ڇُهن ٿا.



گهربل: انهن گولن جي هڪ ڇهٽي ليک ڪڍڻ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) مرڪزA سان 3.5cm رداس جو هڪ گول ڪڍيو

(ii) گول تي هڪ ٽٻڪو P ڪڍو.

(iii) $\overline{AP}$ ڪڍيو ۽ ان کي ٽٻڪي B تائين وڌايو اهڙي طرح جو $m\overline{PB}=2.2cm$

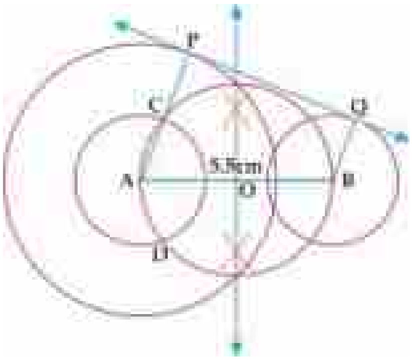
(iv) مرڪزP ۽ رداس 2.2cm سان هڪ گول ڪڍيو جيڪو پهرين گول کي ٽٻڪي P تي ڇُهي ٿو.

(v) ميلاپ واري ٽٻڪي P تي $\overline{AP}$ جي مٿان هڪ عمود$\overleftrightarrow{ST}$ ڪڍيو:

هاڻي $\overleftrightarrow{ST}$ گهربل ڇُهٽي ليک آهي.

(b) ٻن غير مساوي ڪپينڊڙ گولن جي هڪ ڇهٽي ليڪ ڪڍڻ:

ان جو طريقو هيٺين مثال سان واضح ڪيل آهي.



مثال: ٻن غير مساوي ڪپينڊڙ گولن جي هڪ ڇُهٽي ليڪ ڪيو جڏهن ته انهن گولن جا مرڪز A ۽ B ۽ انهن جا ترتيبوار رداس 4cm ۽ 2cm آهن اهڙي طرح جو $m\overline{AB}=5.5cm$

مليل: ٻه غير مساوي ڪپينڊڙ گول جن جا مرڪز A ۽ B ۽ انهن جا ترتيبوار رداس 4cm ۽ 2cm آهن جڏهن ته $m\overline{AB}=5.5cm$

گهربل: ٻنهي گولن جي هڪ ڇهٽي ليڪ ڪيڻ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) 5.5cm ڊيگهه جو $\overline{AB}$ ڪيو.

(ii) مرڪز A ۽ B سان، ترتيبوار رداس 4cm ۽ 2cm جا گول ڪيو.

(iii) مرڪز A (وڏي گول جو مرڪز) ۽ 2cm (يعني 2cm = 2cm - 4cm) رداس جو هڪ گول ڪيو.

(iv) $\overline{AB}$ کي ٽڪي O تي اڌ ڪريو. مرڪز O ۽ رداس $m\overline{AO}$ جي برابر ڪٽي هڪ گول ڪيو جيڪو مرڪز A واري ننڍي گول کي ٽڪن C ۽ D تي ڪپي ٿو.

(v) $\overline{AC}$ ڪيو ۽ ان کي وڌايو ته جيئن اهو مرڪز A واري وڏي هم مرڪز گول سان ٽڪي P تي ملي.

(vi) گونين (Set squares) جو استعمال ڪندي $\overline{BQ}||\overline{AP}$ ڪيو.

(vii) $\overline{PQ}$ ڪيو. هاڻي $\overleftrightarrow{PQ}$ گهربل ڇهٽي ليڪ آهي.

29.3 (vii) هڪ گول ڪيڻ جيڪو.

* ڏنل ڪند جي ٻنهي ٻانهن کي ڇهي.
* ميلاپ ڏانهن مائل ٽيڊڙ ٻن ليڪن کي ڇُهي ۽ انهن ليڪن جي وچ ۾ ڪنهن ٽڪي مان گذري.
* ميلاپ ڏانهن مائل ٽن ليڪن کي ڇُهي

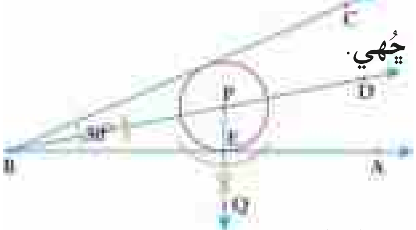
(a) هڪ گول ڪيڻ جيڪو ڏنل ڪند جي ٻنهي ٻانهن کي ڇُهي ٿو.

اسين، هڪ گول جيڪو ڏنل ڪند جي ٻنهي ٻانهن کي ڇُهي ڪيڻ، جو طريقو هيٺين مثال سان واضح ڪريون ٿا.

مثال: هڪ گول ڪيو جيڪو 30^o ماپ واري ڪند ABC جي ٻنهي ٻانهن کي ڇُهي ٿو.

مليل: 30^o ماپ واري هڪ ڪند ABC.

گهربل: هڪ گول ڪيڻ جيڪو ڏنل ڪند جي ٻنهي ٻانهن کي ڇُهي.



جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) 30^o جي هڪ $\angle ABC$ ڪيو.

(ii) $\angle ABC$ جو اندريون اڌ ڪندڙ $\overrightarrow{BD}$ ڪيو.

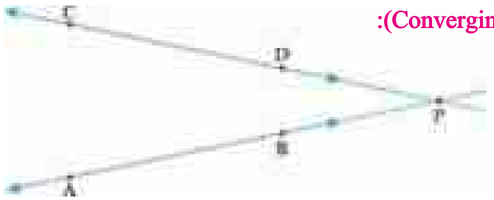
(iii) $\overrightarrow{BD}$ تي ڪو ٽڪو P ڪٽو.

(iv) ٽڪيP مان، $\overrightarrow{BA}$ جي مٿان هڪ عمود $\overline{PQ}$ ڪيو جيڪو ان کي ٽڪي E تي ڪپي ٿو.

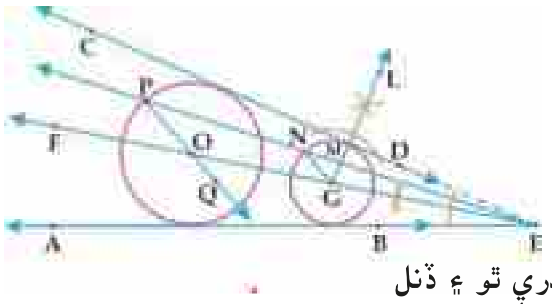
(v) مرڪز P۽ رداس $m\overline{PE}$ جي برابر ڪٽي هڪ گول ڪيو جيڪو $\overrightarrow{BA}$ ۽ $\overrightarrow{BC}$ کي ڇُهي ٿو. اهو گهربل گول آهي.

(b) **هڪ گول ڪيڏ جيڪو ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ٻن ليڪن کي ڇُهي ۽ انهن ليڪن جي وچ ۾ ڪنهن ٽٻڪي مان گذري.**

ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ليڪون (Converging Lines):



ٻه يا وڌيڪ ليڪون جيڪي هڪٻئي جي ويجهو ٿينديون وڃن ۽ آخر ڪار ڪنهن ٽٻڪي تي وڃي ملن. انهن ليڪن کي ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ليڪون چئبو آهي پر واري شڪل ۾ ٻه ليڪون AB ۽ CD ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ليڪون آهن ۽ اهي آخرڪار هڪ ٽٻڪي P تي ملن ٿيون.



مثال: هڪ گول ڪيو جيڪو ٻن ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ٻن ليڪن $\overleftrightarrow{AB}$ ۽ $\overleftrightarrow{CD}$ جي وچ واري ٽٻڪي P مان گذري ۽ انهن ٻنهي ليڪن کي ڇُهي ٿو.

مليل: ٻه ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ليڪون AB ۽ CD ۽ انهن جي وچ وارو هڪ ٽٻڪو P

گهربل: هڪ گول ڪيڏ جيڪو ٽٻڪي P مان گذري ٿو ۽ ڏنل ٻنهي ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ليڪن کي ڇُهي ٿو.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ٻه ليڪون AB ۽ CD ڪيو جيڪي ٽٻڪي E تي ملن ٿيون.

(ii) انهن ٻنهي ليڪن جي وچ ۾ هڪ ٽٻڪو P ڪڍو.

(iii) $\angle E$ جو اندريون اڌ ڪندڙ $\overrightarrow{EF}$ ڪيو.

(iv) $\overrightarrow{EF}$ تي ڪو ٽٻڪو G ڪڍو.

(v) ٽٻڪي G مان، مرڪز $\overleftrightarrow{EC}$ جي مٿان هڪ عمود $\overline{GL}$ ڪيو جيڪو ان سان ٽٻڪي M تي ملي ٿو.

(vi) مرڪز G ۽ رداس $m\overline{GM}$ جي برابر ڪٽي، هڪ گول ڪيو جيڪو ٻنهي ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ليڪن کي ڇُهي ٿو.

(vii) $\overrightarrow{EP}$ ڪيو جيڪو ان گول کي ٽٻڪي N تي ڪپي ٿو.

(viii) $\overline{NG}$ ڪيو. $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overline{NG}$ پڻ ڪيو.

(ix) $\overrightarrow{PQ}$ ڪپي ٿو $\overrightarrow{EF}$ کي ٽٻڪي O تي.

(x) مرڪز O ۽ رداس $m\overline{OP}$ جي برابر ڪٽي، هڪ گول ڪيو جيڪو ٽٻڪي P مان گذري ٿو ۽ ٻنهي ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ليڪن کي ڇهي ٿو. اهو گهربل گول آهي.

(c) **هڪ گول ڪيڏ جيڪو ٽن ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ليڪن کي ڇهي.**

ڪنهن متاچري (Plane) ۾ هڪ اهڙو گول ڪيڏ جيڪو ٽن ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ليڪن کي ڇهي اهو ممڪن نه آهي. پر اهو خلا (Space) ۾ ممڪن آ هي جيڪو هن ڪتاب جي دائري کان ٻاهر آهي.

مشق 29.5

.1 ٻه برابر گول ڪيو جنهن مان هر هڪ جو رداس 3.3cm ۽ مرڪز ٽبڪن A ۽ B تي آهن اهڙي طرح جو $m\overline{AB} = 7.8cm.$
(a) انهن گولن جون سڌيءَ طرح گڏيل ڇهيون ليڪون ڪيو.
(b) انهن گولن جون آڏيون گڏيل ڇهيون ليڪون ڪيو.

.2 ٻه غير مساوي گول ڪيو جن جا رداس 3.3cm ۽ 2.1 cm آهن ۽ مرڪز ترتيبوار ٽبڪن A ۽ B تي آهن. اهڙي طرح جو $m\overline{AB}=8cm.$
(a) انهن گولن جون سڌي طرح گڏيل ڇهيون ليڪون ڪيو.
(b) انهن گولن جون آڏيون گڏيل ڇهيون ليڪون ڪيو.

.3 ٻن غير مساوي گولن جي هڪ ڇهڻي ليڪ ڪيو. انهن گولن جا مرڪز A ۽ B ۽ ترتيبوار رداس3.8cm ۽ 2.2 cm آهن. جڏهن ته
(i) گول اندريان ڇهن ٿا.
(ii) گول ٻاهريان ڇهن ٿا.
(iii) گول هڪٻئي کي ڪپين ٿا ۽ $m\overline{AB}=5.6cm.$

.4 هڪ گول ڪيو جيڪو ڏنل ڪندن جي ٻنهي پاسن کي ڇهي تو. (i) 35° (ii) 40°

.5 هڪ گول ڪيو جيڪو هڪ ٽبڪي M مان گذري جيڪو ٻن ميلاپ ڏانهن مائل ليڪن PQ ۽ ST جي وچ ۾ موجود آهي اهڙي طرح جو گول انهن ٻنهي ليڪن کي پٽ ڇُهي تو.

جائزي واري مشق 29

درست جواب تي نشان لڳايو.

(i) غير پور وچوت ________ جا عمودي اڌ ڪندڙ گول جي مرڪز تي ڪپين ٿا.
(a) رداسي ٽڪر (b) زهه (c) ڇهڻيون ليڪون (d) ڪوبه نه

(ii) هڪڙي ٽبڪي مان ________ گول گذري سگهن ٿا.
(a) هڪ (b) ٻه (c) ٽي (d) لا محدود

(iii) ٽن غير هم ليڪي ٽبڪن مان ________ گول گذري سگهن ٿا.
(a) هڪ (b) ٻه (c) ٽي (d) لا محدود

(iv) پور پاسو گهڻ ڪندي جون ________ ڪندون ماپ ۾ برابر هونديون آهن.
(a) اندريون (b) ٻاهريون (c) ٻئي a ۽ b (d) ڪوبه نه

(v) پور پاسو ڇهه ڪندي جي هر هڪ اندرين ڪند ________ جي برابر هوندي آهي.
(a) 90° (b) 108° (c) 120° (d) 135°

(vi) هڪ گول جيڪو ٽڪندي جي سيني پاسن کي ڇُهي، ان کي ________ چئبو آهي.
(a) گهيريندڙ گول (b) گهيريل گول (c) ٻاهريون گول (d) ٽگولو (Tricircle)

(vii) هڪ گول جيڪو ٽڪندي جي هڪ پاسي کي ٻاهريان ۽ ٻن وڌيل پاسن کي اندريان ڇُهي ته ان کي ________ چئبو آهي.
(a) ٻاهريون گول (b) گهيريندڙ گول (c) گهيريل گول (d) ٽگولو

(viii) گهيريل گول جي مرڪز کي ________ چئبو آهي.
(a) ٻاهريون مرڪز (b) اندريون مرڪز (c) مذياني مرڪز (d) عمودي مرڪز

(ix) ٽڪنڊي جي پاسن جا عمودي اڌ ڪنڊڙ هڪٻئي کي ______ تي ڪپين ٿا.
(a) گهيرينڊڙ مرڪز (b) مِذياني مرڪز (c) اندريون مرڪز (d) ٻاهريون مرڪز

(x) ٽڪنڊي جي ڪنڊن جي اندرين اڌ ڪنڊڙن جي ميلاپ واري ٽٻڪي کي ______ چئبو آهي.
(a) عمودي مرڪز (b) مِذياني مرڪز (c) اندريون مرڪز (d) ٻاهريون مرڪز

(xi) جيڪڏهن هڪ پور پاسو ڇهه ڪندو گول ۾ گهيريل آهي ته پوءِ ڇهه ڪنڊي جي هر هڪ پاسي جي ڊيگهه گول جي ريڊاس کان:
(a) $<$ (b) $>$ (c) $=$ (d) $\leq$

(xii) ميلاپ واري ٽٻڪي تي ڇهٽي ليڪ ۽ ريڊاسي ٽڪر جي وچ ۾ ______ ڪنڊ هوندي آهي.
(a) عڪسي (b) سوڙهي (c) ويڪري (d) ڳوني

(xiii) ميلاپ واري ٽٻڪن کي ملائيندڙ گول جي مرڪزي ڪنڊ، ڇهٽي ليڪن جي ڪنڊ جو ______ هوندي آهي.
(a) ڪعب (b) چورس (c) سپليمينٽ (d) ڪامپليمينٽ

(xiv) ____ ڇهٽيون ليڪون، گولن جي مرڪزن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر کي نه ڪپينديون آهن.
(a) عمودي (b) ٻاهريون (c) آڏيون (d) اندريون

(xv) ٻن برابر گولن جون سڌي طرح گڏيل ڇهٽيون ليڪون ______ هونديون آهن.
(a) ڪپيندڙ (b) ٿهڪندڙ (c) برابر (d) پورو چوٽ

(xvi) ٻن برابر گولن جون ______ گڏيل ڇهٽيون ليڪون گولن جي مرڪزن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر کي وچين ٽٻڪي تي ڪپين ٿيون.
(a) سڌي طرح (b) آڏيون (c) ٻاهريون (d) پورو چوٽ

(xvii) جيڪڏهن 5cm ۽ 2cm ريڊاس وارا ٻه گول هڪٻئي کي ٻاهريان ڇهن ٿا ته پوءِ انهن جي مرڪزن جي وچ ۾ فاصلو __________ آهي.
(a) 5 cm (b) 10 cm (c) 3 cm (d) 7 cm

(xviii) جيڪڏهن 5cm ۽ 2cm ريڊاس وارا ٻه گول هڪٻئي کي اندريان ڇهن ٿا ته پوءِ انهن جي مرڪزن جي وچ ۾ فاصلو __________ آهي.
(a) 5 cm (b) 10 cm (c) 3 cm (d) 7 cm

(xix) ٻه يا وڌيڪ ميلاپ واري ٽٻڪي ڏانهن مائل ٿيندڙ ليڪون هميشه هڪٻئي کي __________ تي ڪپين ٿيون.
(a) هڪ کان وڌيڪ ٽٻڪن (b) هڪڙي ٽٻڪي (c) ٻن ٽٻڪن (d) هڪ کان وڌيڪ ٽٻڪن

(xx) ٽي يا وڌيڪ پاسن واري بند شڪل کي __________ چئبو آهي.
(a) پنج ڪندو (b) ڇهه ڪندو (c) ست ڪندو (d) گهڻ ڪندو

خلاصو

- ٻن غير پوروچوٽ زهه عمودي اڌ ڪندڙ ڪيڻ سان گول جي مرڪز جو هنڌ معلوم ڪري سگهجي ٿو. اهي اڌ ڪندڙ هڪٻئي کي گول جي مرڪز تي ڪپين ٿا.
- ٽن غير هم ليڪي ٽٻڪن مان رڳو هڪ ئي گول ڪڍي سگهجي ٿو.
- مرڪز معلوم ڪرڻ بنا، هڪ گول کي پورو ڪري سگهجي ٿو جڏهن هڪ قوس مليل هجي ۽ اهو پور پاسو گهڻ ڪندي جي مدد سان ٿيندو.
- گهيريندڙ گول هميشہ گهڻ ڪندي جي سيني چوٽين مان گذرندو آهي.
- ڪنهن ٽڪندي جو گهيريل گول هميشہ ٽڪندي جي سيني پاسن کي ڇُهي ٿو.
- ٽڪندي جو ٻاهريون گول ٽڪندي جي هڪ پاسي کي ٻاهريان ۽ ٻن وڌيل پاسن کي اندران ڇُهي ٿو.
- ٽڪندي جا ٽي ٻاهريان گول ٺهي سگهجن ٿا.
- ڇهڻي ليڪ اها ليڪ آهي جيڪا گول کي رڳو هڪ ئي ٽٻڪي تي ڇهي ٿي.
- ڪپيندڙ ليڪ هميشہ گول کي ٻن ٽٻڪن تي ڪپيندي آهي.
- ميلاپ واري ٽٻڪي تي گول جي ڇهڻي ليڪ هميشہ رداسي ٽڪر تي عمود هوندي آهي.
- گول جي گهيري جي هڪ ٽٻڪي مان رڳو هڪ ئي ڇهڻي ليڪ ڪڍي سگهجي ٿي.
- گول جي ڪنهن ٻاهرين ٽٻڪي کان گول جون رڳو ٻہ ڇهڻيون ليڪون ڪڍي سگهجن ٿيون.
- ميلاپ واري ٽٻڪن کي ملائيندڙ گول جي مرڪزي ڪنڊ، گول جي ڇهڻي ليڪن جي وچ واري ڪنڊ جو سپليمينٽ هوندي آهي.
- جيڪڏهن ڪا ليڪ هڪ کان وڌيڪ گولن جي ڇهڻي ليڪ آهي تہ پوءِ ان کي مشترڪ ڇهڻي ليڪ چئبو آهي.
- ٻن مليل گولن جي مرڪزن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر کي گول جون سڌي طرح گڏيل ڇهڻيون ليڪون نہ ڪپينديون آهن.
- مليل گولن جون آڏيون گڏيل ڇهڻيون ليڪون هميشہ انهن جي مرڪزن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر کي ڪپينديون آهن.
- جيڪڏهن ٻہ گول هڪٻئي کي ٻاهريان ڇُهن ٿا تہ پوءِ انهن جي مرڪزن جي وچ وارو فاصلو انهن جي رداسن جي جوڙ اُپت جي برابر هوندو آهي.
- جيڪڏهن ٻہ گول هڪ ٻئي کي اندريان ڇهن ٿا تہ پوءِ انهن جي مرڪزن جي وچ وارو فاصلو انهن جي رداسن جي فرق جي برابر هوندو آهي.
- ميلاپ واري ٽٻڪي ڏانهن مائل ٿيندڙ ليڪون هڪٻئي جي ويجهو ٿينديون رهنديون آهن ۽ آخرڪار هڪ ٽٻڪي تي ملن ٿيون.

یونٽ 30

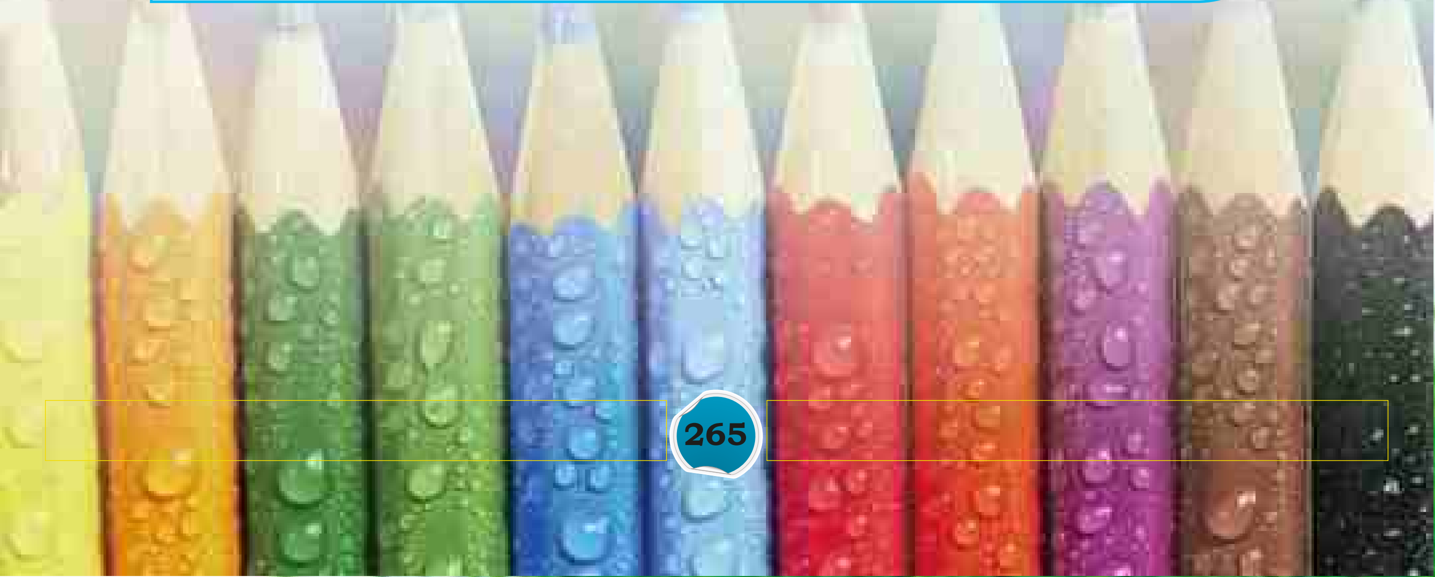
ٽرگناميٽري جو تعارف

INTRODUCTION TO TRIGONOMETRY

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هي يونٽ پڙهڻ کانپوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته:

- بنياد 60 واري عددي نظام ۾ کنڊ جي ماپ ڪري سگهن. (ڊگريون، منٽ ۽ سيڪنڊ).
- ڊگري، منٽ ۽ سيڪنڊ (D° M' S") ۾ ڏنل کنڊ کي ڏهائي صورت (ڏهائي جي ٻن درجن تائين) ۾ مٽائي سگهن ۽ ان جو ابتڙ ڪن.
- ريڊيان (Radian) کي بيان ڪن (گولائي واري نظام ۾ کنڊ جي ماپ) ۽ ريڊيان ۽ ڊگري ماپن جي وچ ۾ تعلق کي ثابت ڪن.
- l=rθ وارو اصول قائم ڪن جڏهن ته گول جو رداس r، قوس جي ڊيگھه l ۽ ريڊيانن ۾ ماپيل مرڪزي کنڊ θ آهي.
- ثابت ڪريو ته گول جي سيڪٽر جي ايراضي $\frac{1}{2}r^2\theta$ يا $\frac{1}{2}lr$ آهي.
- بيان ۽ سڃاڻپ ڪن.
  - a. عام کنڊون(هم انتهائي کنڊون) (conterminal angles)
  - b. معياري بيهڪ ۾ کنڊ
- چوٿاين ۽ چوٿاني کنڊن جي سڃاڻپ ڪن
- ٽرگناميٽري نسبتن ۽ انهن جي اُبتڙن کي ايڪي واري گول جي مدد سان بيان ڪن
- 30°، 45° ۽ 60° جي ٽرگناميٽري نسبتن جي قيمتن جو دُور ڪن
- مختلف چوٿن ۾ ٽرگناميٽري نسبتن جي نشانين جي سڃاڻپ ڪن.
- باقي رهيل ٽرگناميٽري نسبتن جون قيمتون لهن جيڪڏهن ڪا هڪ ٽرگناميٽري نسبت مليل هجي.
- 0°، 90°، 180°، 270° ۽ 360° جي ٽرگناميٽري نسبتن جون قيمتون لهن.
- ٽرگناميٽري واريون آئيڊنٽيٽين يا بنيادي فارمولن کي ثابت ڪن ۽ مختلف ٽرگناميٽري وارا تعلق ظاهر ڪن.
- اُوچائي ۽ هيناهين واريون کنڊون لهن
- اُوچائي ۽ هيناهين وارن کنڊن تي مشتمل عام زندگي جا مسئلا حل ڪن.



تعارف:

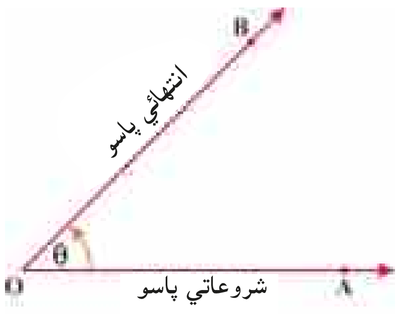
لفظ ٽرگناميٽري يوناني لفظن "tri" (ٽي) "gono" (ڪنڊون) ۽ "Metron" (ماپ) مان نهيل آهي. ٽرگناميٽري جي لغوي معنيٰ آهي: ٽڪنڊي جي ماپ. رياضي جي اها شاخ يونانين 330 ق . م ۾ متعارف ڪرائي ان جو واسطو ٽڪنڊي جي حل سان آهي. ان جو گهڻو استعمال طبيعات، جهاز راني ، فلڪيات، نقشي سازي وغيره ۾ ٿيندو آهي.

30.1 هڪ ڪنڊ جي ماپ (Measurement of an Angle):

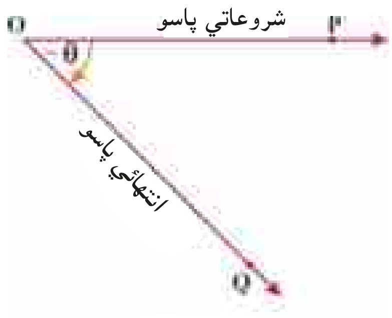
ڪنڊ اهڙن ٻن شعاعن جو ميلاپ آهي جن جو منڊ (چوٽي) ساڳيو هجي. شعاعن مان هڪ کي شروعاتي پاسو (initial side) چئبو آهي. ۽ ٻيئي کي "انتهائي پاسو" (terminal side) چئبو آهي.

ڪنڊ جي ماپ شروعاتي پاسي کان انتهائي پاسي ڏانهن ڦيري جي رخ تي منحصر ڪندي آهي. گهڙي جي اُبتي ڦيڙي واري رخ ۾ ماپيل ڪنڊ کي "مثبت ڪنڊ" ڪٺبو آهي جيئن شڪل (a) ۾ ڏيکاريل آهي ۽ گهڙي جي سبتي ڦيڙي واري رخ ۾ ماپيل ڪنڊ کي منفي ڪنڊ ڪٺبو آهي جيئن شڪل (b) ۾ ڏيکاريل آهي.

نوٽ: شعاعن کي ڪنڊ جون ٻانهون پڻ چئبو آهي ۽ انهن جي مشترڪ منڊ کي ڪنڊ جي چوٽي چئبو آهي



شڪل (a)



شڪل (b)

هڪ ڪنڊ معياري بيهڪ (Standard position) ۾ چورائبي جيڪڏهن ان جو شروعاتي حصو واڌو *x-axis* ۽ ان جي چوٽي اصل ٽبڪي (origin) تي هجي.

30.1 (i) بنياد 60 واري عددي نظام ۾ ڪنڊ جي ماپ ڪرڻ (ڊگريون، منٽ ۽ سيڪنڊ) :

جيڪڏهن شروعاتي پاسو (ٻانهن) $\overrightarrow{OA}$ گهڙي جي اُبتي رستي واري رخ ۾ هڪ ڦيرو مڪمل ڪري ته ته پوءِ نهيل ڪنڊ 360 ڊگرين يا 360^o واري ڪنڊ ڪونبي يعني ته گول جو گهيرو 360 برابر قوسن ۾ ورهائجي تو. گول جي مرڪز تي اهڙي قوس سان نهيل ڪنڊ هڪ ڊگري ڪونبي آهي ان کي 1^o سان ظاهر ڪبو آهي. هر هڪ ڊگري 60 برابر حصن ۾ ورهائجي تي ۽ هر هڪ حصي کي هڪ منٽ چئبو آهي ۽ ان کي $1'$ سان ظاهر ڪبو آهي. ساڳي ريت هڪ منٽ به 60 برابر حصن ۾ ورهائجي تو ۽ هر هڪ حصي کي 1 سيڪنڊ چئبو آهي ۽ ان کي $1''$ سان ظاهر ڪبو آهي اهڙي طرح 1 منٽ، هڪ ڊگري جو سٺ هون (60^{th}) حصو آهي ۽ هڪ سيڪنڊ، هڪ ڊگري جو 3600 هون (3600^{th}) حصو آهي. اهو نظام جنهن ۾ ڪنڊ کي ڊگرين، منٽن ۽ سيڪنڊن ۾ ماپيو وڃي، ان کي بنياد 60 وارو عددي نظام چئبو آهي. اهڙي طرح هڪ ڊگري مڪمل ڦيري جو 360 هون حصو آهي. (يعني $\frac{1}{360}$ هون حصو) ۽ ان کي 1^o سان ظاهر ڪبو آهي. ان جي وڌيڪ ورهاست هيٺين ريت آهي.

$$1^\circ = 60 \text{ منٽ} = 60'$$

$$1' = 60 \text{ سيڪنڊ} = 60''$$

مثال طور 30 ڊگري، 20 منٽ ۽ 10 سيڪنڊ نشانين ۾ هن ريت لکبا:"10 '20 °30

30.1 (ii) ڊگري، منٽ ۽ سيڪنڊ (D° M' S") ۾ ڏنل ڪنڊ کي ڏهائي صورت (ڏهائي جي ٻن درجن تائين) ۾ مٽائڻ ۽ ان جو ابتڙ ڪرڻ:

ان سيڪشن ۾، اسين منٽن ۽ سيڪنڊن کي ڊگرين ۾ مٽائينداسين. اهو ڪرڻ لاءِ منٽن کي 60 ۽ سيڪنڊن کي 3600 سان ونڊ ڪبو آهي. سادو ڪرڻ کانپوءِ اسين گهربل ڏهائي صورت حاصل ڪنداسين

مثال 1:

"10 '30 °30 کي ڊگرين ۾ مٽايو ۽ ڏهائي صورت ۾ لکو.

حل:

جيئن ته $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$

تنهنڪري $\therefore \quad 30' = \left(\frac{30}{60}\right)^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ$

۽ $1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$

$$10'' = \left(\frac{10}{3600}\right)^\circ = \left(\frac{1}{360}\right)^\circ$$

$$\therefore \quad 30^\circ 30' 10'' = \left(30 + \frac{1}{2} + \frac{1}{360}\right)^\circ$$

$$= [30 + 0.5 + 0.003]^\circ$$

$$= 30.503^\circ$$

$= 30.50^\circ$ (ڏهائي جي ٻن درجن تائين)

مثال 2:

12.51° کي D° M' S" واري صورت ۾ مٽايو

حل:

$$12.51^\circ = 12^\circ + (0.51)^\circ$$

$$= 12^\circ + (0.51 \times 60)' \qquad (\because 1^\circ = 60')$$

$$= 12^\circ + (30.6)'$$

$$= 12^\circ + 30' + (0.6)'$$

$$= 12^\circ 30' + (0.6 \times 60)'' \qquad (\because 1' = 60'')$$

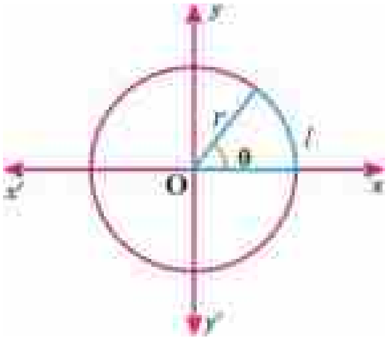
$$= 12^\circ 30' 36''$$

30.1 (iii) ريڊيان (Radian) کي بيان ڪرڻ (گولائي واري نظام ۾ ڪنڊ جي ماپ) ۽ ريڊيان ۽ ڊگري ماپن جي وچ ۾ تعلق کي ثابت ڪرڻ:

ريڊيان ڪنڊ کي ماپڻ جو هڪ ٻيو ايڪو آهي جيڪو قوس جي ڊيگهه ۽ گول جي رداس جي نسبت جي برابر آهي.

يعني ته $\theta = \frac{l}{r}$ جڏهن ته θ مرڪزي ڪنڊ جي ريڊيان ۾ ماپ، l قوس جي ڊيگهه آهي ۽ r

گول جي رداس آهي. اهو نظام جنهن ۾ ڪنڊ کي ريڊيان ۾ ماپيو وڃي. ان کي گولائي وارو نظام چئبو آهي. اهڙي طرح گولائي نظام ۾ ڪا ڪنڊ 1 ريڊيان جي ڪونبي جيڪڏهن اها ڪنڊ رداس جي برابر قوس سان مرڪز تي ٺهيل ڪنڊ آهي. (جيئن ته شڪل 30.1 ۾ڏيکاريو ويو آهي.)



شڪل 30.1

اسان وٽ $\theta = \frac{l}{r}$,

جڏهن ته $l = r$

ته پوءِ $\theta = \frac{l}{l}$

$\boxed{\theta = 1 \text{ ريڊيان}}$

هڪ مڪمل ڦيري لاءِ قوس جي ڊيگهه گول جي گهيري جي برابر هوندي آهي يعني ته. $l = 2\pi r$

هاڻي،

$$\theta = \frac{l}{r}$$

$$\theta = \frac{2\pi r}{r}$$

$\boxed{\theta = 2\pi \text{ ريڊيان}}$

انهيءَ ڪري هڪ مڪمل ڦيري لاءِ ريڊيان ۾ ماپيل ڪنڊ 2π هوندي آهي.

ڊگري ۽ ريڊيان جي وچ ۾ تعلق:

اسان کي خبر آهي ته هڪ مڪمل ڦيري لاءِ ڊگرين ۾ ماپيل ڪنڊ 360° هوندي آهي ۽ ريڊيان ۾ ماپيل ڪنڊ 2π هوندي آهي.

انهي ڪري

$$360^\circ = 2\pi \text{ ريڊيان}$$

$$\Rightarrow \quad 180^\circ = 2\pi \text{ ريڊيان}$$

$$\Rightarrow \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ ريڊيان} \approx 0.01745 \text{ ريڊيان}$$

يا،

$$1 \text{ ريڊيان} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.3^\circ$$

ڊگرين ۽ ريڊيانن ۾ ڪجهه معياري ڪندون هيٺين ريت آهن.

ڊگري	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
ريڊيان	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

مثال1: هيٺين کي ريڊيان واري ماپ ۾ مٽايو:

(a) 120° (b) $10^\circ\ 30'$ (c) $24^\circ\ 32'\ 30''$

حل (a)

اسان کي خبر آهي ته

$\because \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180}$ ريڊيان

$\therefore \quad 120^\circ = 120 \times \frac{\pi}{180}$ ريڊيان

$\Rightarrow \quad 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ ريڊيان

حل (b) اسان کي خبر آهي تہ

$\because \quad 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$

$\therefore \quad \Rightarrow 30' = \left(\frac{30}{60}\right)^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ$

هاڻي $10^\circ 30' = \left(10 + \frac{30}{60}\right)^\circ = \left(10 + \frac{1}{2}\right)^\circ = \left(\frac{21}{2}\right)^\circ$

$\therefore \quad = \frac{21}{2} \times \frac{\pi}{180}$ ريڊيان $\quad (\because 1^\circ = \frac{\pi}{180}$ ريڊيان$)$

$\Rightarrow \quad = \frac{7\pi}{120}$ ريڊيان

حل (c): $24^\circ 32' 30''$

$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ ۽ $1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$

$= 24^\circ + \left(\frac{32}{60}\right)^\circ + \left(\frac{30}{3600}\right)^\circ$

$= \left(24 + \frac{8}{15} = \frac{1}{120}\right)^\circ$

$= \left(24 + \frac{32}{60} = \frac{30}{3600}\right)^\circ$

$= \left(\frac{24 \times 120 + 64 + 1}{120}\right)^\circ$

$= \left(\frac{2945}{120}\right)^\circ \quad \left(\because 1^\circ \cong \frac{\pi}{180}\right.$ ريڊيان$\left.\right)$

هاڻي $\left(\frac{2945}{120}\right)^\circ = \frac{2945}{120} \times \frac{\pi}{180}$ ريڊيان

$\therefore \quad = \frac{589}{4320}\,\pi$ ريڊيان

انهي ڪري $24^\circ 32' 30'' = \frac{589}{4320}\,\pi$ ريڊيان

مشق 30.1

.1 هينين کي ڊگرين ۾ مٽايو ۽ ڏهائي واري صورت ۾ لکو.

(i) $32^\circ\ 15'$ (ii) $10^\circ\ 30'$ (iii) $8^\circ\ 15'\ 30''$

(iv) $45^\circ\ 21'\ 36''$ (v) $25^\circ\ 30'$ (vi) $18^\circ\ 6'\ 21''$

.2 هينين ڪندن کي $D^\circ\ M'\ S''$ واري صورت ۾ مٽايو.

(i) 32.25° (ii) 47.36° (iii) 57.325°

(iv) 67.58° (v) 22.5° (vi) 225.60°

.3 هينين ڪندن کي ڊگري ماپن ۾ ظاهر ڪريو.

(i) $\frac{\pi}{4}$ ريڊيان (ii) $\frac{\pi}{3}$ ريڊيان (iii) $-\frac{3\pi}{4}$ ريڊيان

(iv) 3 ريڊيان (v) $\frac{3}{\pi}$ ريڊيان (iv) 4.5 ريڊيان

.4 هينين ڪندن کي ريڊيان ماپن ۾ بدلايو.

(i) 30° (ii) 45° (iii) 60°

(iv) $\left(22\frac{1}{2}\right)^\circ$ (v) -225° (vi) $60^\circ\ 35'\ 48''$

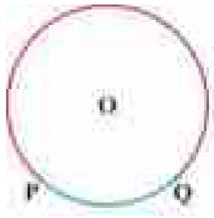
30.2 گول جو سيڪٽر:

وصفون:

(i) گول جي گهيري جي ڪنهن حصي کي قوس چئبو آهي.

(ii) گول ايراضي جو اهو حصو جيڪو ٻن رداسي ٽڪرن ۽ هڪ قوس سان گهيريل هجي، ان کي گول جو سيڪٽر چئبو آهي.

متي بيان ڪيل وصفن کي سمجهڻ لاءِ هينيون شڪليون مدد ڪنديون.



شڪل 30.2 (i)

شڪل 30.2 (ii)

شڪل 30.2 (i) ۾ PQ هڪ قوس آهي ۽ شڪل 30.2 (ii) ۾ POQ هڪ سيڪٽر آهي.

30.2 (i) $l = r\theta$، وارو اصول قائم ڪرڻ جڏهن ته گول جو رداس r، قوس جي ڊيگهه l ۽ ريڊيانن ۾ ماپيل مرڪزي ڪند θ آهي:

رداس r واري گول ۾ قوس جي ڊيگهه l سڌو تناسب رکي ٿي ريڊيانن ۾ ماپيل مرڪزي ڪند θ سان.

يعني $l \propto \theta$

$\Rightarrow l = c\theta$ ... (i)

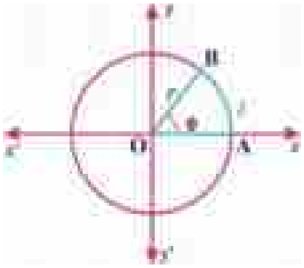


Fig: 30.3

هڪ مڪمل ڦيري لاءِ

$$l = 2\pi r$$ ۽
$$\theta = 2\pi$$

مساوات (i) جو استعمال ڪندي، اسان وٽ آهي،

$$2\pi r = c(2\pi)$$
$$\Rightarrow \quad c = r$$

انهي ڪري، مساوات (i) ٿيندي: $l = r\theta$

نوٽ: (i) l ۽ r ساڳئي ايڪن ۾ ماپيا وڃن ٿا

(ii) θ کي ريڊيان ۾ ماپبو آهي.

مثال 1: 5cm رداس واري گول جي ان قوس جي ڊيگهه لهو جيڪو مرڪز تي $\frac{2\pi}{5}$ ريڊيان جي ڪنڊ ناهي ٿو.

حل: مليل آهي ته

$r = 5\text{cm}$ ريڊيان $\theta = \frac{2\pi}{5}$ ۽ $l = ?$

جيئن ته $l = r\theta$

$$\therefore \quad l = 5\times\frac{2\pi}{5}$$
$$\Rightarrow \quad l = 2\pi \cong 2\left(\frac{22}{7}\right) \approx 6.28\text{cm}.$$

مثال 2: هڪ چوڪرو سائيڪل ۾ 10 ڦيرن ۾ ڪيترو پري تائين ويندو جيڪڏهن جي سائيڪل جي هر هڪ ڦيٿي جو قطر 56cm جي برابر آهي.

حل:

اسان کي خبر آهي ته

ريڊيان 2π = هڪ ڦيرو

∴ ريڊيان $20\pi = 10$ ڦيرا.

يعني ته ريڊيان. $\theta = 20\pi$

۽ ڦيٿي جو قطر: $d = 56\text{cm}$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{56}{2}\text{cm} = \frac{56}{2\times 100}\text{m} \qquad (\because \ 1\text{m}=100\text{cm})$$
$$\therefore \quad l = r\theta$$
$$\therefore \quad l = \frac{56}{2\times 100}\times 20\pi$$
$$\Rightarrow \quad l \approx \frac{56}{2\times 100}\times 20\times\frac{22}{7} \qquad \left(\because \ \pi \approx \frac{22}{7}\right)$$
$$\Rightarrow \quad l \approx 17.6\text{m}.$$

اهڙي طرح چوڪرو 10 ڦيرن ۾ 17.6m جو فاصلو طئي ڪندو.

مثال 3:

r لهو، جيڪڏهن $l = 4cm$ ۽ ريڊيان $\theta = \frac{1}{4}$

حل: مليل آهي تہ

$$l = 4cm$$

$$\theta = \frac{1}{4} \text{ ريڊيان}$$

$$r = ? \text{ ۽}$$

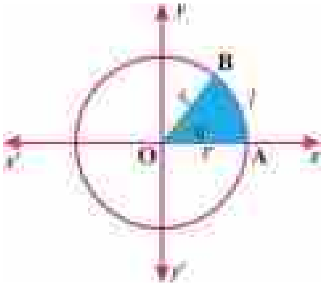
$$\because \quad l = r\theta$$

$$\therefore \quad r = \frac{l}{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad r = \left(4 \div \frac{1}{4}\right) = 4 \times \frac{4}{1} = 16cm.$$

30.2 (ii) ثابت ڪريو تہ گول جي سيڪٽر جي ايراضي $\frac{1}{2}r^2\theta$ يا $\frac{1}{2}lr$ آهي.

ثابتي:



شڪل 30.4

هڪ گول ڪٽو جنهن جو رادس r ۽ مرڪز O آهي، AB هڪ قوس آهي جيڪو مرڪز تي θ ريڊيان جي ڪند ناهي تو جيئن شڪل 30.4 ۾ ڏيکاريل آهي.

اسانکي خبر آهي تہ

گول جي ايراضي $= \pi r^2$

هڪ ڦيري جي ڪند $= 2\pi$ ريڊيان

سيڪٽر جي ڪند $= \theta$ ريڊيان

بنيادي جاميٽري مان، تناسب جي قانون جو استعمال ڪندي

$$\frac{\text{سيڪٽر AOB جي ايراضي}}{\text{گول جي ايراضي}} = \frac{\text{سيڪٽر جي ڪند}}{\text{گول جي ڪند}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{سيڪٽر AOB جي ايراضي}}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \text{سيڪٽر AOB جي ايراضي} = \frac{\pi r^2 \times \theta}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \text{سيڪٽر AOB جي ايراضي} = \frac{1}{2}r^2\theta$$

يا $\text{سيڪٽر AOB جي ايراضي} = \frac{1}{2}r\theta \times r$

$$\text{سيڪٽر AOB جي ايراضي} = \frac{1}{2}rl \quad \Rightarrow \quad (\because r\theta = l)$$

اهڙي طرح ثابت ٿيو.

مثال 1: هڪ گول جي سيڪٽر جي ايراضي لهو جنهن جو رداس 5cm ۽ مرڪزي ڪنڊ 60° آهي.

حل: مليل آهي ته

$r = 5cm$

$\theta = 60^\circ = 60 \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ ريڊيان

۽ سيڪٽر جي ايراضي =؟

$\because$ سيڪٽر جي ايراضي $= \frac{1}{2}r^2\theta$

$\because$ سيڪٽر جي ايراضي $= \frac{1}{2}(5)^2 \times \frac{\pi}{3}$

يا سيڪٽر جي ايراضي $\approx \frac{1}{2}\times 25 \times \frac{22}{7\times 3}$ $\quad \because \left(\pi \approx \frac{22}{7}\right)$

يا سيڪٽر جي ايراضي $= 13.09cm^2$

مثال2: هڪ گول جي سيڪٽر جي ايراضي لهو جنهن جو رداس 4cm آهي ۽ مرڪزي ڪنڊ 12 ريڊيان جي آهي.

حل: مليل آهي ته

$r = 4cm$

$\theta = 12$ ريڊيان

۽ سيڪٽر جي ايراضي =؟

$\because$ سيڪٽر جي ايراضي $= \frac{1}{2}r^2\theta$

$\therefore$ سيڪٽر جي ايراضي $= \frac{1}{2}(4)^2\times 12$

يا سيڪٽر جي ايراضي $= 16\times 6 = 96cm^2$

مشق 30.2

1. θ جي قيمت لهو جيڪڏهن

(i) $r = 5cm$ ۽ $l = 20cm$ (ii) $r = 2cm$ ۽ $l = 30.2cm$

(iii) $r = 2.87cm$ ۽ $l = 6cm$ (iv) $r = 2.5cm$ ۽ $l = 4.5cm$

2. l جي قيمت لهو جيڪڏهن

(i) $r = 1.01cm$ ۽ $\theta = 2.1$ ريڊيان

(ii) $r = 5.1cm$ ۽ $\theta = 2$ ريڊيان

(iii) $r = 6cm$ ۽ $\theta = 30^\circ$

(iv) $r = 15cm$ ۽ $\theta = 60^\circ\ 30'$

3. r جي قيمت لهو جيڪڏهن

(i) $\theta = 60^\circ$ ۽ $l = 2m$ (ii) $\theta = 3.5$ ريڊيان ۽ $l = \frac{7}{4}m$

(iii) $\theta = \frac{1}{4}$ ريڊيان ۽ $l = 4cm$ (iv) $\theta = 180^\circ$ ۽ $l = 15.4cm$

4. ايڪي واري گول (unit circle) جي قوس جي ڊيگھ لھو جنھن جي مطابقت رڪندڙ مرڪزي ڪنڊ ھيٺ ڏنل آھي.

(i) 30° (ii) 45° (iii) 60° (iv) 90°

5. ھڪ گول جو قوس مرڪز تي $\frac{\pi}{6}$ جي ڪنڊ ناھي ٿو. گول جو رداس 5cm آھي تہ معلوم ڪريو.

(i) قوس جي ڊيگھ (ii) گول جي سيڪٽر جي ايراضي

6. 10cm ردس واري گول تي ھڪ ٽِبڪو حرڪت ڪري رھيو آھي جيڪڏھن اھو 3.5 ڦيرا ھٽي ٿو تہ ٽِبڪي جو طئي ڪيل فاصلو لھو.

7. ھڪ سيڪٽر جي ايراضي لھو جڏھن تہ مرڪزي ڪنڊ $\frac{\pi}{4}$ ريڊيان ۽ گول جو رداس 4cm آھي.

8. جيڪڏھن 21cm جي قطر واري اُڏام جي ڦيٿي جي ڪناري تي ھڪ ٽِبڪو 5040 ميٽر فاصلو في منٽ طئي ڪري ٿو ھڪ سيڪنڊ ۾ اھو ڦيٿو ڪيترن ريڊيانن تائين ڦرندو؟

9. ھڪ گاڏي گولائي واري رستي تي ھلي رھي آھي. ان گول جو رداس قوس ڪان ٻيڻو آھي جيڪو گاڏي ناھي ٿي گولائي واري رستي تي قوس جي نھيل مرڪزي ڪنڊ معلوم ڪريو.

10. 12 cm رداس جي ھڪ گول ۾ ھڪ قوس 84° جي مرڪزي ڪنڊ ناھي ٿو. ان جي قوس جي ڊيگھ ۽ سيڪٽر جي ايراضي لھو

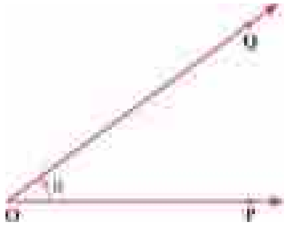
30.3 ٽرگناميٽري نسبتون (Trigonometric ratios)

30.3 (i) بيان ڪرڻ ۽ سڃاڻپ ڪرڻ

(a) عام ڪنڊون (ھم انتھائي ڪنڊون) (Co-terminal Angles)

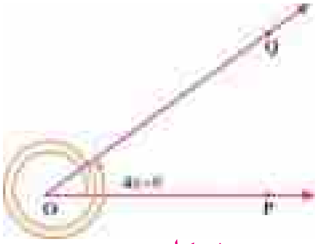
(b) معياري بيھڪ ۾ ڪنڊ

30.3.1 (a) اھي ڪنڊون جن جا شروعاتي ۽ انتھائي پاسا ساڳيا ھجن تہ انھن کي ھم انتھائي ڪنڊون چئبو آھي ۽ انھن جو فرق 2π ريڊيان جي ضرب اُپت ھوندي آھي انھن کي عام ڪنڊون (General angles) پڻ چئبو آھي



شڪل 30.5 (i)

شڪل 30.5 (ii)



شڪل 30.5 (iii)

ريڊيان $m\angle POQ = \theta$ جڏھن تہ $0 \le \theta < 2\pi$

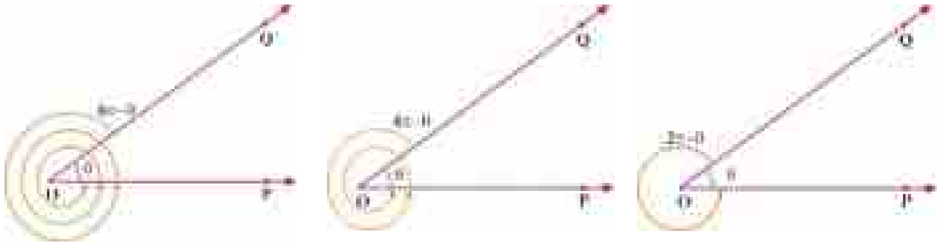
(i) θ ريڊيان (ٻڙي ڦيرو)

(ii) $(2\pi+\theta)$ ريڊيان (ھڪ ڦيري ڪانپوءِ)

(iii) $(4\pi+\theta)$ ريڊيان (ٻن ڦيرن ڪانپوءِ)

انھي ڪري θ، $2\pi+\theta$ ۽ $4\pi+\theta$ ھم انتھائي ڪنڊون آھن. (جيئن شڪل 30.5 ۾ ڏيکاريل آھي.

جيڪڏھن ڦيرا گھڙي جي سڌي رستي جي رخ ۾ نھن جيئن ھيٺ ڏنل شڪل ۾ ڏيکاريل آھي.



شڪل 30.5 (i) شڪل 30.5 (ii) شڪل 30.5 (iii)

(i) $2\pi-\theta$ ريڊيان (ڪوبہ ڦيرو نہ آهي)

(ii) $4\pi-\theta$ ريڊيان (گهڙي جي سڌي رستي وارو هڪ ڦيري ڪان پوءِ)

(iii) $6\pi-\theta$ ريڊيان (گهڙي جي اُبتي رستي واري ٻن ڦيرن ڪانپوءِ)

هتي θ، گهڙي جي اُبتي رستي واري ڪنڊ آهي انهي ڪري $\theta-2\pi$، $\theta-4\pi$ ۽ $\theta-4\pi$ هم انتهائي ڪنڊون آهن.

مثال: هيٺين مان ڪهڙيون ڪنڊون 120° سان هم انتهائي ڪنڊون آهن.

-240°، 480°، $\frac{14}{3}$ ۽ $-\frac{14}{3}$.

حل: $360^\circ=120^\circ+240^\circ=120^\circ-(-240^\circ)$،

ها -240° هم انتهائي ڪنڊ آهي 120° جي

$360^\circ=480^\circ-120^\circ$، ها 480° هم انتهائي ڪنڊ آهي 120°

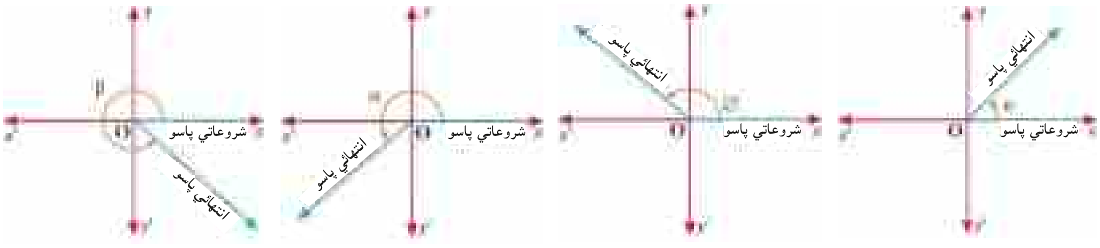
$4\pi=\frac{12\pi}{3}=\frac{14\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}=\frac{14\pi}{3}-120^\circ$،

ها $\frac{14\pi}{3}$ هم انتهائي ڪنڊ آهي 120° جي

$\frac{16\pi}{3}=\frac{14\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\left(\frac{14\pi}{3}\right)-120^\circ$، 2π جي ضرب اُٽ نہ آهي

انهي ڪري $-\frac{14\pi}{3}$ هم انتهائي ڪنڊ 120° جي نہ آهي.

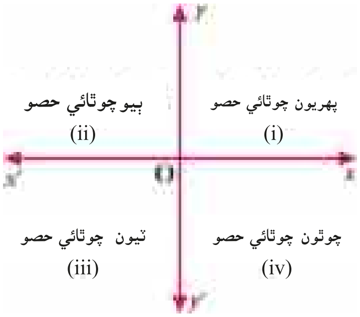
30.3 (i) (b) هڪ ڪنڊ کي معياري بيهڪ ۾ ڪونبو جيڪڏهن ان جي چوٽي اصل ٽٻڪي تي ۽ شروعاتي پاسو واڌو x-axis تي هجي



شڪل 30.7 (i) شڪل 30.7 (ii) شڪل 30.7 (iii) شڪل 30.7 (iv)

30.3

30.3 (ii) (a) چوٿاين ۾ چوٿائي ڪندن جي سڃاڻپ: هڪ مستطيلي ڪوآرڊينيٽ نظام ۾ ٻه محور هڪٻئي کي ڪاٽيندا آهن. هي محور سڄي سطح کي چار برابر حصن ۾ ورهائيندا آهن ۽ هر هڪ حصي کي چوٿون يا چوٿائي حصو چئبو آهي. مشترڪ ٽڪو (يا ميلاپ وارو ٽڪو) اصل ٽڪو (origin) ڪوٺبو آهي ۽ ان کي O سان ظاهر ڪبو آهي.



شڪل 30.8

0° ۽ 90° جي وچ وارين ڪندن پهريون چوٿائي حصو آهن.

يعني پهرين چوٿائي حصي ۾ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ آهن.

90° ۽ 180° جي وچ وارين ڪندن ٻيون چوٿائي حصو آهن.

يعني ٻئي چوٿائي حصي ۾ $90^\circ < \theta < 180^\circ$ آهن.

180° ۽ 270° جي وچ وارين ڪندن ٽيون چوٿائي حصو آهن.

يعني ٽيئن چوٿائي حصي ۾ $180^\circ < \theta < 270^\circ$ آهن.

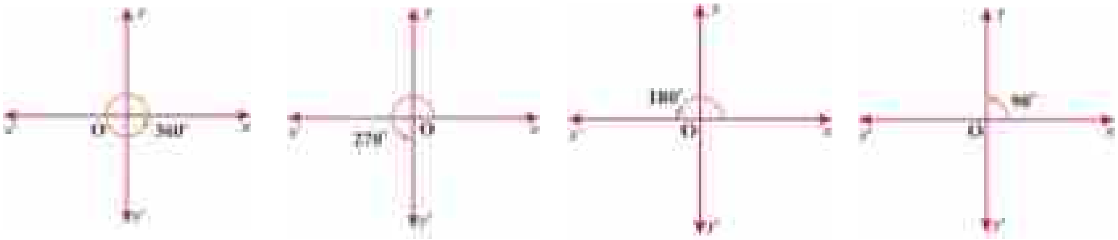
270° ۽ 360° جي وچ وارين ڪندون چوٿون، چوٿائي حصو آهن.

يعني ته چوٿين يا چوٿائي حصي ۾ $270^\circ < \theta < 360^\circ$ آهن.

هڪ معياري ٻيهڪ واري ڪند ڪنهن چوٿائي حصي ۾ تڏهن هوندي جڏهن ان جو انتهائي پاسو ان چوٿائي حصي ۾ هجي.

30.3 (ii) (b) چوٿائي ڪند (Quadrantal Angle)

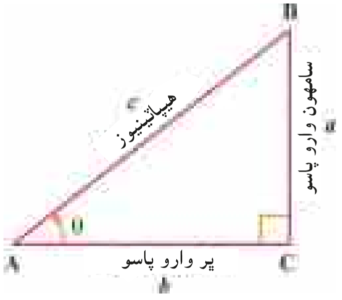
جيڪڏهن ڪنهن معياري ڪند جو انتهائي پاسو x-axis يا y-axis سان نهڪندڙ هجي ته پوءِ ان ڪند کي چوٿائي ڪند چئبو آهي. مثال طور: 90°، 180°، 270° ۽ 360° چوٿائي ڪندون آهن جيڪي هينين شڪل ۾ ڏيکاريل آهن.



شڪل 30.9 (i) شڪل 30.9 (ii) شڪل 30.9 (iii) شڪل 30.9 (iv)

30.3 (iii) ٽرگناميٽري نسبتن ۽ انهن جي اُبتڙن کي ايڪي واري گول جي مدد سان بيان ڪرڻ:

اسين گذريل ڪلاس ۾، هڪ ڪوني ڪند ٽڪنڊي ABC ۾ سوڙهي ڪند θ لاءِ ٽرگناميٽري نسبتون اڳيئي سکي چڪا آهيون جيڪي هينين ريت آهن.



شڪل 30.10

1. $\sin\theta = \frac{c}{a} = \frac{\text{سامهون واري پاسي جي ماپ}}{\text{هيپاٽينيوز جي ماپ}}$

2. $\cos\theta = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرواري پاسي جي ماپ}}{\text{هيپاٽينيوز جي ماپ}}$

3. $\tan\theta = \frac{a}{b} = \frac{\text{سامهون واري پاسي جي ماپ}}{\text{پر واري پاسي جي ماپ}}$

۽ انهن جا ترتيبوار اُبتڙ هينين ريت آهن

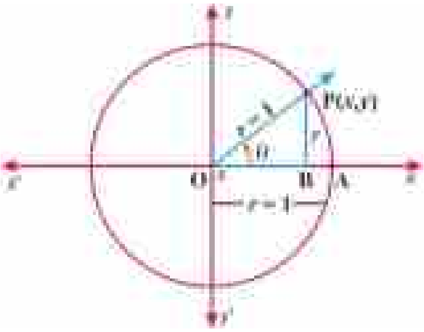
.4 $\dfrac{\text{هيپاٽينيوز جي ماپ}}{\text{سامهون واري پاسي جي ماپ}} = \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{a}{c} = \operatorname{cosec}\theta$

.5 $\dfrac{\text{هيپاٽينيوز جي ماپ}}{\text{پرواري پاسي جي ماپ}} = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{c}{b} = \sec\theta$

.6 $\dfrac{\text{پرواري پاسي جي ماپ}}{\text{سامهون واري پاسي جي ماپ}} = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{b}{a} = \cot\theta$

گول جي هر هڪ ٽبڪي لاءِ هميشه هڪ مطابقت رکندڙ ڪند وجود رکندي آهي.

فرض ڪريو ته $P(x,y)$ ايڪي واري گول جو ڪو هڪ ٽبڪو آهي جيڪو پهرين چوٿائي حصي ۾ آهي ۽ مطابقت رکندڙ ڪند θ آهي جڏهن ته θ ريڊيان ۾ ماپ ڪيل آهي جيئن شڪل 30.11 ۾ ڏيکاريل آهي اسين ٽرگناميٽري نسبتن کي هينين ريت بيان ڪريون ٿا



شڪل: 30.11

$\sin\theta = \dfrac{|\overline{BP}|}{|\overline{OP}|} = \dfrac{y}{1} = y$ ،

۽ $\cos\theta = \dfrac{|\overline{OB}|}{|\overline{OP}|} = \dfrac{x}{1} = x$ ،

هاڻي، $\tan\theta = \dfrac{|\overline{BP}|}{|\overline{OB}|} = \dfrac{y}{x}$ ، (بشرطيڪ $x \neq 0$)

ساڳي ريت

$\cot\theta = \dfrac{x}{y}$ (بشرطيڪ $y \neq 0$)

$\sec\theta = \dfrac{1}{x}$ (بشرطيڪ $\pi \neq 0$)

$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{y}$ (بشرطيڪ $y \neq 0$)

اُبتڙ نسبتون هيٺيون آهن

$\sin\theta = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$ يا $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

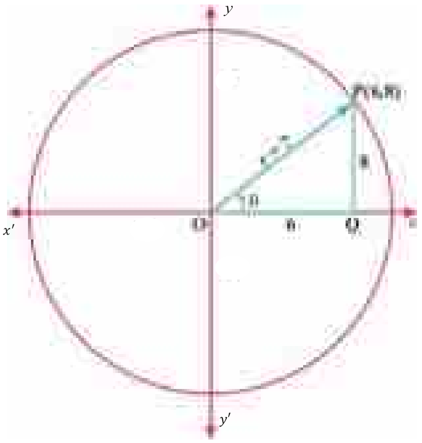
$\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ يا $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$ يا $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

نوٽ:

- x ۽ y جي صورت ۾ انهن سڀني ٽرگناميٽري نسبتن کي ٽرگناميٽري عمل (Trigonometric functions) چئبو آهي.
- sin θ ۽ cos θ کي گولائي وارا عمل (Circular functions) پڻ چئبو آهي.

مثال: ڪنڊ θ تي، ٽرگناميٽري نسبتن جون قيمتون معلوم ڪريو جيڪڏهن θ جي انتهائي پاسي تي ٽڪو P (6,8) آهي.



شڪل: 30.12

حل:

هتي $P(x,y)=(6,8)$

$\Rightarrow x=6$ ۽ $y=8$

فيثاغورث سڌيان جو استعمال ڪندي

$$\because \quad r^2=x^2+y^2$$

$$\because \quad r^2=(6)^2+(8)^2$$

$$\Rightarrow r^2=36+64=100$$

$\Rightarrow r=\sqrt{100}=10,$ جڏهن ته $r=|\overline{OP}|$

سيني ٽرگناميٽري نسبتن جون قيمتون آهن:

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$ ، $\operatorname{cosec}\theta=\frac{5}{4}$

$\cos\theta=\frac{x}{r} \quad \frac{6}{10} \quad \frac{3}{5}$ ، $\sec\theta=\frac{5}{3}$

$\tan\theta=\frac{y}{x} \quad \frac{8}{6} \quad \frac{4}{3}$ ۽ $\cot\theta=\frac{3}{4}$

30.3 (iv). 30°، 45° ۽ 60° جي ٽرگناميٽري نسبتن جي قيمتن جو ڊور ڪرڻ

اسان اڳيئي سکي چڪا آهيون ته 30°، 45° ۽ 60° جي ٽرگناميٽري نسبتن جون قيمتون هيٺين ريت آهن.

60°	45°	30°	θ
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	sin
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	cos
$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	tan

هاڻي اسين مٿين جدول جو استعمال ڪندي ٽرگناميٽري جي نسبتن جي اُبتڙن جي قيمت لهنداسين

$$\operatorname{cosec}30^\circ=\frac{1}{\sin 30^\circ}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

$$\sec30^\circ=\frac{1}{\cos 30^\circ}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cosec}45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$\sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$\cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\operatorname{cosec}60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

۽ $$\cot 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

30.3 (v) مختلف چوٿن ۾ ٽرگناميٽري نسبتن جي نشانين جي سڃاڻپ ڪرڻ.

جيڪڏهن θ هڪ چوٿائي ڪنڊ نہ آهي تہ پوءِ ٽرگناميٽري نسبتن جون نشانيون انتهائي پاسي جي ٽِبڪي $P(x,y)$ جي مطابق معلوم ڪري سگهجن ٿيون.

1. جيڪڏهن θ، پهرين چوٿائي حصي ۾ آهي تہ پوءِ ان جي انتهائي پاسي جي ٽبڪي (x,y) ۾ x ۽ y واڌو هوندا. يعني تہ $x>0$ ۽ $y>0$.
پهرين چوٿائي حصي ۾ سڀ ٽرگناميٽري عمل/ نسبتون واڌو هونديون آهن.
2. ٻيئي چوٿائي حصي ۾ $x<0$ ۽ $y>0$. تنهنڪري ٻيئي چوٿائي حصي ۾ sin θ ۽ cosec θ واڌو هوندا آهن ۽ باقي رهيل ڪاٽو هوندا آهن.
3. ٽيئن چوٿائي حصي ۾ $x<0$ ۽ $y<0$. تنهنڪري ٽيئن چوٿائي حصي ۾ tan θ ۽ cot θ واڌو هوندا آهن ۽ باقي رهيل ڪاٽو هوندا آهن.
4. چوٿين چوٿائي حصي ۾ $x>0$ ۽ $y<0$. تنهنڪري چوٿين چوٿائي حصي ۾ cos θ ۽ sec θ واڌو هوندا آهن ۽ باقي رهيل ڪاٽو هوندا آهن.

مثال1: هيٺين ٽرگناميٽري عملن / نسبتن جون نشانيون معلوم ڪريو.

(i) $\cos 120^\circ$ (ii) $\sin 1030^\circ$ (iii) $\tan 229^\circ$ (iv) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (v) $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

حل:

(i) $\cos 120^\circ$

$\because$ 120° ٻيئي چوٿائي حصي ۾ موجود آهي

$\therefore$ $\cos 120^\circ$ ڪاٽو آهي.

(ii) $\sin 1030^\circ = \sin(720^0 + 310^0)$

$\because$ جيئن تہ 310° چوٿائي حصي iv ۾ موجود آهي ۽ چوٿائي حصي iv ۾ sin θ ڪاٽو هوندو آهي

$\therefore$ تنهنڪري $\sin 1030^\circ$ ڪاٽو آهي.

(iii) $\tan 229^\circ$

$\because$ جيئن تہ 229° چوٿائي حصي III ۾ موجود آهي ۽ چوٿائي حصي III ۾ $\tan\theta$ واڌو هوندو آهي

$\therefore$ تنهنڪري $\tan 229^\circ$ واڌو آهي.

(iv) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

جيئن تہ $\frac{-\pi}{4}$ چوٿائي حصي ۾ موجود آهي ۽ چوٿائي حصي iv ۾ $\tan\theta$ ڪاٽو هوندو آهي

ان ڪري $\tan\frac{-\pi}{4}$ ڪاٽو آهي.

(v) $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\because$ جيئن تہ $\frac{-\pi}{3}$ چوٿائي حصي ۾ موجود آهي ۽ چوٿائي حصي iv ۾ $\operatorname{cosec}\theta$ ڪاٽو هوندو آهي

$\therefore$ ان ڪري $\operatorname{cosec}\frac{-\pi}{3}$ ڪاٽو آهي

30.3 (vi) باقي رهيل ٽرگناميٽري نسبتن جون قيمتون لهڻ جيڪڏهن ڪا هڪ ٽرگناميٽري نسبت مليل هجي.

ان جو طريقو هيٺين مثالن سان واضح ڪجي ٿو.

مثال 1: جيڪڏهن $\sin\theta = \frac{3}{5}$ تہ پوءِ باقي رهيل ٽرگناميٽري عمل/نسبتن جون قيمتون لهو.

حل: مليل آهي تہ

جيئن تہ $\sin\theta = \frac{y}{r}$

ير واري شڪل 30.13 استعمال ڪندي

$$\frac{3}{5} = \frac{y}{r}$$

$$\Rightarrow \quad y = 3 \text{ ۽ } r = 5$$

جيئن تہ $x^2 + y^2 = r^2$

$$x^2 + (3)^2 = (5)^2$$

$$x^2 + 9 = 25$$

$$x^2 = 25 - 9$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 16$$

$$\Rightarrow \quad x = 4$$

هاڻي

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

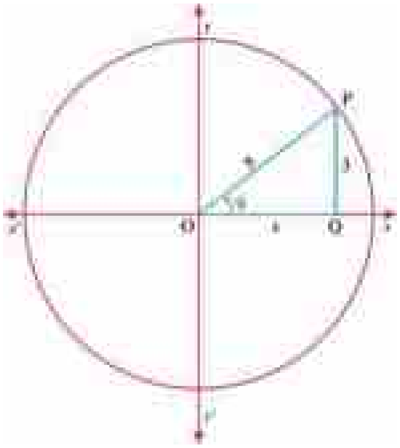
$$\cos\theta = \frac{4}{5}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{4}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{4}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$$

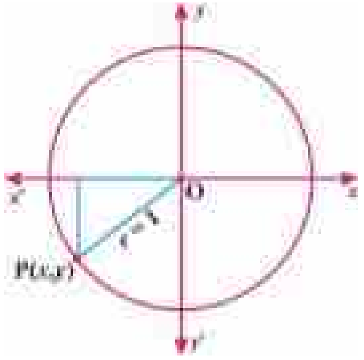


شڪل 30.13

مثال 2: جيڪڏهن $\tan\theta = 1$ ۽ θ ٽيئن چوٿائي حصي ۾ آهي. باقي رهيل ٽرگناميٽري عملن جون قيمتون لهو.

حل : مليل آهي ته

شڪل 30.14 استعمال ڪندي



شڪل 30.14

$$\because \quad \tan\theta = 1$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x} = 1,$$

$$\Rightarrow \quad y = x$$

$$\because \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$\therefore \quad x^2 + x^2 = 1 \qquad \because \; y = x$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

هتي اسين ڪاٽو قيمت ڪٽنداسين چو جو θ ٽيئن چوٿائي حصي ۾ آهي

$$x = \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad ۽ \quad y = \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

انهيءَ ڪري باقي رهيل ٽرگناميٽري عمل آهن:

$$\cot\theta = 1,$$

$$\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = -\sqrt{2},$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$۽ \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -\sqrt{2}$$

مثال 3: باقي رهيل ٽرگناميٽري عمل/ نسبتون لهو جيڪڏهن

(i) $\cos\theta = \frac{2}{3}$ ۽ θ پهرين چوٿائي حصي ۾ آهي

(ii) $\sin\theta = 0.6$ ۽ $\tan\theta$ ڪاٽو آهي.

حل 1: مليل آهي ته

$$\cos\theta = x = \frac{2}{3}, \qquad \therefore \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{3}{2},$$

جيئن ته θ پهرين چوٿائي حصي ۾ آهي $\therefore$ يعني ته $(x,y)\epsilon Q_1$

۽ $x^2 + y^2 = 1$ (مليل)

هتي $x = \cos\theta$ ۽ $y = \sin\theta$

$$\therefore \quad \left(\frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

هتي اسين +ve قيمت ڪٽنداسين ڇاڪاڻ جو θ پهرين چوٿائي حصي ۾ موجود آهي.

$$\therefore \quad y = \frac{\sqrt{5}}{3} = \sin\theta \quad ; \qquad \therefore \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{3}{\sqrt{5}} \, ,$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}; \qquad \therefore \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad ۽$$

انهي ڪري گهربل باقي رهيل ٽرگناميٽري نسبتون آهن

1. $\sec\theta = \dfrac{3}{2}$ 2. $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 3. $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

4. $\tan = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ۽ $= \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

حل 2 : مليل آهي ته

$$\sin y = 0.6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \qquad \therefore \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{3} = 1.6,$$

مليل آهي ته $\sin\theta > 0$ ۽ $\tan\theta < 0$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\therefore \quad x^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \pm\frac{4}{5}$$

هتي اسين ڪاتو ملھ ڪٽنداسين ڇاڪاڻ جو θ ٻيئي چوٿائي حصي ۾ آهي.

$$\therefore \quad x = \cos\theta = -\frac{4}{5} = -0.8 \quad ۽ \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{5}{4} = -1.25$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}} = -\frac{3}{4} = -0.75 \quad ۽ \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = -\frac{4}{3} = 1.3$$

هاڻي.

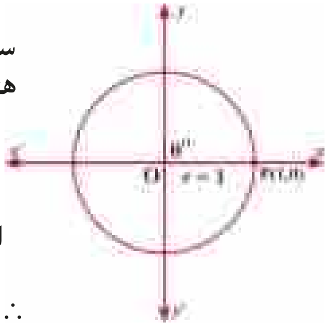
انهي ڪري گھربل باقي رهيل ٽرگناميٽري نسبتون آهن.

1. $\operatorname{cosec}\theta = 1.6$ 2. $\cos\theta = -0.8$ 3. $\sec\theta = -1.25$

4. $\tan\theta = -0.75$ 5. $\cot\theta = -1.3$

(vii)30.3 °0، °90، °180، °270 ۽ °360 جي ٽرگناميٽري نسبتن جون قيمتون لهڻ

سيڪشن(b)(ii).30.3 ۾ اسان اڳيئي چوٿائي ڪندن تي بحث ڪري چڪا آهيون هتي اسين چوٿائي ڪندن جون ٽرگناميٽري نسبتون لهنداسين



شڪل:30.15

جڏهن $\theta = 0°$

ايڪي واري گول ۾ ڪند °0 جي انتهائي پاسي تي ٽپڪو $P(1,0)$ موجود آهي

$\therefore$ هتي $x = 1, y = 0$ ۽ $r = 1$ جڏهن تہ ايڪي واري گول جو رداس r آهي

$\therefore \quad \sin 0° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0\,;$ $\quad\therefore \quad \operatorname{cosec}0° = \frac{r}{y} = \frac{1}{0}$ (اڻ بيان ڪيل)

$\therefore \quad \cos 0° = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1\,;$ $\quad\therefore \quad \sec 0° = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1$

$\therefore \quad \tan 0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0\,;$ $\quad\therefore \quad \cot 0° = \frac{x}{y} = \frac{1}{0}$ (اڻ بيان ڪيل)

جڏهن $\theta = 90°$

ايڪي واري گول ۾ °90 ڪند جي انتهائي پاسي تي ٽپڪو $P(0,1)$ ۽ انتهائي پاسو y-axis (+ve) سان ٺهڪندڙ آهي.

$\therefore$ هتي $x = 0, y = 1$ ۽ $r = 1$

$\therefore \quad \sin 90° = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1;$

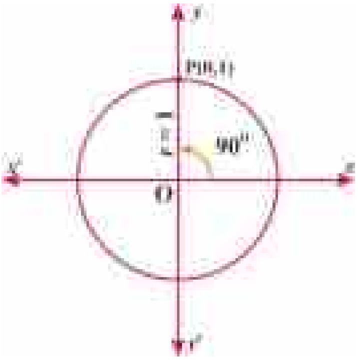
$\operatorname{cosec}90° = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1$

$\cos 90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0;$

$\sec 90° = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}$ (اڻ بيان ڪيل)

$\tan 90° = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}$ (اڻ بيان ڪيل)

۽ $\cot 90° = \frac{x}{y} = 0$

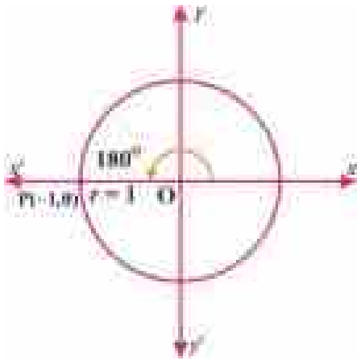


شڪل: 30.16

جڏهن $\theta = 180°$

ايڪي واري گول ۾، ڪنڊ 180° جي انتهائي پاسي تي ٽڪبو P(-1,0) موجود آهي ۽ انتهائي پاسو -ve x-axis سان ٺهڪندڙ اهي. ان صورت ۾

$$r=1 \text{ ۽ } P(-1,0) \Rightarrow x=-1,\ y=0$$



شڪل 30.17

$$\sin 180^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0;$$

$$\therefore \quad \csc 180^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{0} \quad \text{(اڻ بيان ڪيل)}$$

$$\cos 180^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1;$$

$$\sec 180^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

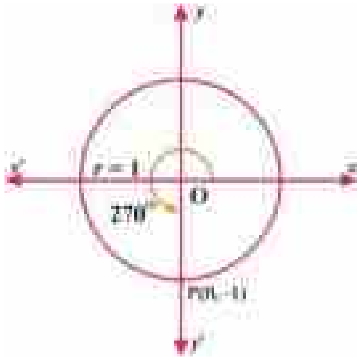
$$\tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0;$$

$$\cot 180^\circ = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} \quad \text{(اڻ بيان ڪيل)}$$

جڏهن $\theta = 270^\circ$

ايڪي واري گول ۾، ڪنڊ 270° جي انتهائي پاسي تي ٽڪبو P(0,-1) موجود اهي ۽ انتهائي پاسو -ve y-axis سان ٺهڪندڙ آهي. ان صورت ۾

$$\therefore \quad r=1 \text{ ۽ } P(0,-1) \Rightarrow x=0, y=-1$$



شڪل 30.18

$$\therefore \quad \sin 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1;$$

$$\csc 270^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\cos 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0;$$

$$\sec 270^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} \quad \text{(اڻ بيان ڪيل)}$$

$$\tan 270^\bullet = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} \quad \text{(اڻ بيان ڪيل)}$$

$$\text{۽} \quad \cot 270^\circ = \frac{0}{-1} = 0$$

جڏهن $\theta = 360^\circ$

يونٽ واري گول ۾، ڪنڊ 360° جي انتهائي پاسي تي ٽڪبو P(1,0) موجود آهي ۽ انتهائي پاسو +ve x-axis سان ٺهڪندڙ آهي. ان صورت ۾

$$r=1 \text{ ۽ } P(1,0) \Rightarrow x=1,\ y=0.$$

$\therefore$ $\sin 360^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$;

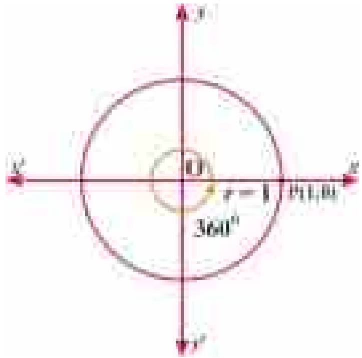
$\operatorname{cosec} 360^\circ = \frac{1}{\sin 360^\circ} = \frac{1}{0}$ (اڻ بيان ڪيل)

$\cos 360^\circ = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$;

$\sec 360^\circ = \frac{1}{\cos 360^\circ} = \frac{1}{1} = 1$

$\tan 360^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$;

$\cot 360^\circ = \frac{1}{\tan 360^\circ} = \frac{1}{0}$ (اڻ بيان ڪيل) ۽



شڪل 30.19

سيني نتيجن جو خلاصو ڪندي، اسان وٽ هڪ جدول آهي.

360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°	0°	θ
0	−1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	sin
1	0	−1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	cos
0	$-\infty$	0	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	tan
∞	−1	∞	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	cosec
1	∞	−1	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	sec
∞	0	∞	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	cot

مشق 30.3

.1 هيٺين ڪندن جون هم انتهائي پاسي واريون ڪندون معلوم ڪريو

(i) 55° (ii) $\frac{\pi}{6}$ (iii) -45° (iv) $\frac{-3\pi}{4}$

.2 هيٺين ڪندن جي چوٿائي حصن جي شناخت ڪريو.

(i) $\frac{8\pi}{5}$ (ii) 75° (iii) -818° (iv) 1090° (v) $\frac{7\pi}{6}$ (vi) $-\frac{5\pi}{4}$

3. هينين جون نشانيون معلوم ڪريو .

(i) $\cos 120^\circ$ (ii) $\sin 340^\circ$ (iii) $\sec 200^\circ$

(iv) $\operatorname{cosec} 198^\circ$ (v) $\tan\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ (vi) $\cot\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$

4. θ، کهڙي چوٿائي حصي ۾ آهي جيڪڏهن

(i) $\sin\theta > 0$ ۽ $\cos\theta < 0$ (ii) $\cos\theta < 0$ ۽ $\tan\theta > 0$

(iii) $\sec\theta < 0$ ۽ $\sin\theta < 0$ (iv) $\sec\theta < 0$ ۽ $\cot\theta > 0$

(v) $\tan\theta < 0$ ۽ $\cos\theta < 0$ (vi) $0 < \cot\theta < 1$

5. جيڪڏهن $\cos\theta = \frac{3}{5}$ ۽ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi,$ ته پوءِ هينين باقي رهيل ٽرگناميٽري نسبتن جون قيمتون لهو.

6. باقي رهيل ٽرگناميٽري عمل/ نسبتون لهو جيڪڏهن :

(i) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ۽ θ بيئي چوٿائي حصي آهي

(ii) $\cos\theta = \frac{2}{3}$ ۽ θ چوٿين چوٿائي حصي ۾ آهي

(iii) $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ ۽ θ بيئي چوٿائي حصي ۾ آهي

(iv) $\sec\theta = \operatorname{cosec}\theta = \sqrt{2}$ ۽ θ پهرين چوٿائي حصي ۾ آهي

(v) $\cos\theta = \frac{1}{2}$ ۽ $\tan\theta$ واڌو آهي.

7. هينين جا ملهه لهو.

(i) $\tan 30^\circ \tan 60^\circ + \tan 45^\circ \cot 45^\circ$ (ii) $\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ}$ (iii) $\frac{\sin 45^\circ}{\sin 45^\circ + \cot 45^\circ}$

(iv) $\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$ (v) $\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}$ (vi) $\frac{\tan 45^\circ + \cot 45^\circ}{\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ}$

30.4 ٽرگناميٽري جا بنيادي فارمولا (آئيڊ نٽيٽيون). (Trigonometric Identities):

آئيڊ نٽيٽي هڪ مساوات هوندي آهي جيڪا بدلجندڙ جي سيني قيمتن تي دُرست هوندي آهي (سواءِ ان تي جتي قيمت اڻ بيان ڪيل اچي).

30.4.1 ٽرگناميٽري وارين آئيڊ نٽيٽين يا بنيادي فارمولن کي ثابت ڪرڻ ۽ مختلف ٽرگناميٽري وارا تعلق ظاهر ڪرڻ لاءِ انهن جو استعمال ڪرڻ:

ايڪي واري گول جي گوني تڪنڊي سان واسطو رکندڙ ڪنهن به حقيقي عدد θ لاءِ، اسان وٽ هينيان بنيادي فارمولا آهن:

(i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (ii) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ (iii) $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

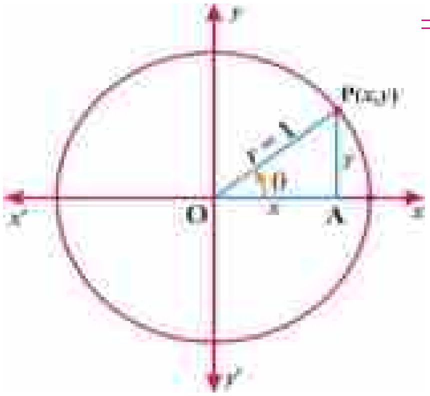
(i) ثابتي:

ايڪي واري گول ۾، هڪ گوني ڪنڊ تڪنڊي ΔOAP، تي غور ڪريو جنهن ۾ ريڊيان $m\angle AOP = \theta$ جيڪا معياري بيهڪ ۾ آهي. فرض ڪريو ته ڪنڊ جي انتهائي پاسي تي ٽڪو $P(x,y)$ آهي.

فيثاغورث سڌيان جي مطابق اسان وٽ آهي. $x^2 + y^2 = 1$

$\Rightarrow \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad [\because \; x = \cos\theta$ ۽ $y = \sin\theta]$

اهڙي طرح ثابت ٿيو.



شڪل: 30.20

(ii) ثابتي: فيثاغورث سڌيان جي مطابق.

$$1 = x^2 + y^2$$

ٻنهي پاسن کي x^2 سان ونڊ ڪندي، اسان کي مليو،

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{y^2}{x^2} \quad \text{يا} \quad \frac{1}{x^2} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta,$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta}$$ (بشرطيڪ $x = \cos\theta \neq 0$)

اهڙي طرح ثابت ٿيو

(iii) ثابتي: فيثاغورث سڌيان جي مطابق.

$$1 = x^2 + y^2$$

ٻنهي پاسن کي y^2 سان ونڊ ڪندي اسان کي مليو

$$\frac{1}{y^2} = \frac{x^2}{y^2} + 1, \quad \text{يا} \quad \left(\frac{1}{y}\right)^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^2 = (\cot\theta)^2 + 1,$$ (بشرطيڪ $\sin\theta \neq 0$)

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta}$$ $\left(\because \; \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta\right)$

اهڙي طرح ثابت ٿيو.

مثال 1: ثابت ڪريو ته: $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

ثابتي:

$$\begin{aligned} L.H.S &= (\sin\theta + \cos\theta)^2 \\ &= \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta \\ &= 1 + 2\sin\theta\cos\theta \qquad [\because \; \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1] \\ &= R.H.S \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin\theta + \tan\theta}{\sin\theta - \tan\theta}$$
$$= R.H.S$$
$\because$ $L.H.S = R.H.S$

$\therefore$ $$\frac{1+\sec\theta}{1-\sec\theta} = \frac{\sin\theta + \tan\theta}{\sin\theta - \tan\theta}$$

انهي كري ثابت تيو

مثال 4: ثابت كريو تہ $\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta$

ثابتي:

$$L.H.S = \sin\theta,$$
$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \cos\theta, \quad (\cos\theta \neq 0 \text{ بشرطيڪ})$$
$$= \tan\theta \cdot \cos\theta,$$
$$= R.H.S$$
$$L.H.S = R.H.S$$
$\therefore$ $$\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta$$

انهي كري ثابت تيو

مشق 30.4

1- هيٺين کي ثابت ڪريو

(i) $\sin^2\theta = (\sec^2\theta - 1)\cos^2\theta$ $\quad(\cos\theta \neq 0)$

(ii) $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta + \sec\theta$ $\quad(\cos\theta \neq 0)$

(iii) $\tan\theta = \sin\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}$ $\quad(\cos\theta \neq 0)$

(iv) $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

(v) $\sin^3\theta = \sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta$

(vi) $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ $\quad(\cos\theta \neq 1)$

(vii) $\sqrt{\frac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}} = \frac{\sec\theta+1}{\tan\theta}$ $\quad(\tan\theta \neq 0)$

(viii) $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta$ $\quad(\tan\theta \neq 0)$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\because$ $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

اهڙي طرح ثابت ٿيو

مثال 2: ثابت ڪريو تہ $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

ثابتي:

$$L.H.S = \sin\theta$$

$$= \sqrt{(\sin\theta)^2}$$

$$= \sqrt{\sin^2\theta},$$

$$= \sqrt{1-\cos^2\theta}, \quad \left[\therefore\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\right]$$

R.H.S =

$\therefore$ R.H.S = L.H.S

$\therefore$ $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

انهي ڪري ثابت ٿيو

مثال 3:

ثابت ڪريو تہ $\frac{\sin\theta+\tan\theta}{\sin\theta-\tan\theta} = \frac{1+\sec\theta}{1-\sec\theta}$ ، (بشرطيڪ $\cos\theta \neq 0$)

ثابتي:

$$L.H.S = \frac{1+\sec\theta}{1-\sec\theta},$$

$$= \frac{1+\frac{1}{\cos\theta}}{1-\frac{1}{\cos\theta}},$$

$$\frac{\cos\theta+1}{\cos\theta-1}$$

$$= \frac{\sin\theta(\cos\theta+1)}{\sin\theta(\cos\theta-1)}$$ (بشرطيڪ $\sin\theta \neq 0$)

$$= \frac{\sin\theta\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta-\sin\theta}$$

$$= \frac{\frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$ (انس ۽ ڇيد کي $\cos\theta$ سان ونڊينديء)

(ix) $\sec\theta-\cos\theta=(\cot\theta+\cos\theta)(\tan\theta-\sin\theta)$، $(\sin\theta\neq 0$ يا $\cos\theta\neq 0)$

(x) $\frac{\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta}{\sin\theta+\tan\theta}=\operatorname{cosec}\theta\cot\theta$، $(\sin\theta\neq 0)$

(xi) $\sin^2\theta=\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$, $(\cos\theta\neq 0)$

(xii) $\cos^2\theta=\frac{\cot^2\theta}{1+\cot^2\theta}$, $(\sin\theta\neq 0)$

(xiii) $\sin\theta\cos\theta\tan\theta+\sin\theta\cos\theta\cot\theta=1$، $(\sin\theta\neq 0$ يا $\cos\theta\neq 0)$

2. پهرين اظهار کي بيئي ۾ متايو

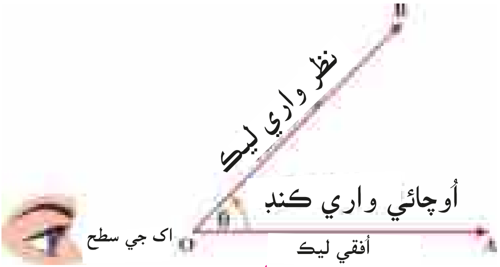
(i) $(\sec\theta+1)(\sec\theta-1)$ کي $\tan^2\theta$ ۾

(ii) $\frac{\operatorname{cosec}\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ کي $\tan\theta$ ۾

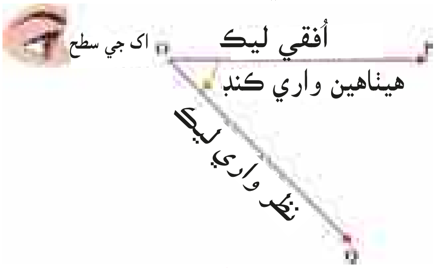
(iii) $\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta$ کي $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ ۾

30.5 اُوچائي ۽ هيناهين واريون ڪندون (Angles of Elevation and Depression)

30.5 (i). اُوچائي ۽ هيناهين واريون ڪندون لهڻ



شڪل:30.21 (i)



شڪل:30.21 (ii)

جيڪڏهن ڪا شي مشاهد جي اک جي سطح کان مٿي آهي ته پوءِ ان جي ڪند کي اُوچائي واري ڪند چئبو آهي. جيڪڏهن ڪا شي اک جي سطح کان هيٺ آهي ته پوءِ اُفقي ليڪ کان ان شي جي ڪند کي هيناهين واري ڪند چئبو آهي.

عام زندگي ۾، اهي ان شي جو فاصلو يا ڪند يا انهن جي تعلق کي معلوم ڪرڻ لاءِ استعمال ٿينديون آهن جيڪي شيون مشاهد جي هنڌ کان مٿي يا هيٺ هجن ۽ ان کان ڏکيي فاصلي تي هجن.

30.5(ii) اُوچائي ۽ هيناهين وارن ڪندن تي مشتمل عام زندگي جا مسئلا حل ڪرڻ

مثال 1: بجلي جي ٿنڀي جي چوٽي جي زمين تي هڪ ٽٻڪي کان اُوچائي واري ڪند 30° آهي جڏهن ته اهو ٽٻڪو ٿنڀي جي پايي کان 18 ميٽر جي فاصلي تي آهي. بجلي جي ٿنڀي جي اُوچائي لهو.

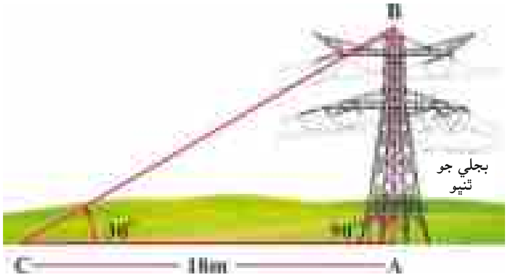
حل. ٿنڀي جي حصي جي ٽٻڪي P کان اُوچائي واري ڪند 30° آهي ۽ فرض ڪريو ته ٿنڀي جي اُوچائي h آهي. جڏهن ته اهو ٽٻڪي P کان 18 ميٽر پري آهي. ΔPAB ۾ اسان وٽ $\theta=30^\circ$ ۽ $|\overline{PA}|=18$ ميٽر آهي

$$\therefore \quad \tan 30^\circ = \frac{h}{|PA|} = \frac{h}{18}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{18}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{18}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3} \text{ ميٽر}$$



شڪل: 30.22

اهڙي طرح بجلي جي ٿنڀي جي اُوچائي $6\sqrt{3}$ ميٽر آهي.

مثال 2: هڪ شي جي اُوچائي لهو جيڪڏهن سج جي اُوچائي واري ڪنڊ 19° ۽ ان شي جي پاڇي جي ڊيگهه 1.7 ميٽر آهي.

حل: مليل آهي ته شي جي اُوچائي واري ڪنڊ 19° آهي يعني $\theta = 19^\circ$ ۽ پاڇي جي ڊيگهه $a = 1.7m$ آهي جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.

ان ڪانپوءِ

$$\tan 19^\circ = \frac{h}{a} = \frac{h}{1.7}$$

$$\Rightarrow \quad h = (1.7)\cdot \tan 19^\circ$$

$$\Rightarrow \quad h = (1.7)\cdot(0.3443) = 0.585m$$

شڪل: 30.23

انهي ڪري گهربل اُوچائي تقريبا 0.585 ميٽر آهي.

مثال 3: هڪ ٽاور جي چوٽي کان، ويجهي واري بندر گاهه جي هڪ جهاز جي هيٺاهين واري ڪنڊ 40° آهي ان جي آبي ليڪ سان جيڪڏهن ٽاور جي اُوچائي 35 ميٽر آهي ته جهاز ۽ ٽاور جي پايي جي وچ وارو فاصلو لهو.

حل: فرض ڪريو ته 'x' فاصلو آهي جهاز (ٽپڪي B تي) ۽ ٽاور جي پايي (ٽپڪي A تي) جي وچ ۾ جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي ۽ ٽاور جي اُوچائي "h" آهي.

هتي

$h = 35$ ميٽر (جهاز جي اوچائي)

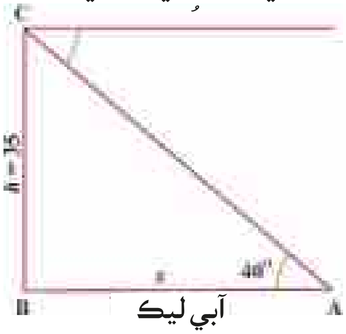
$\theta = 40^\circ$ (هيناهين واري ڪنڊ)

۽ $x = ?$

ΔABC ۾

$$\tan 40^\circ = \frac{h}{x} = \frac{35}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{35}{\tan 40^\circ} = \frac{35}{0.8391} = 41.71m \text{ (اندازاً)}$$



شڪل: 30.24

اهڙي طرح جهاز ۽ ٽاور جي پايي جي وچ وارو فاصلو 41.71 ميٽر (اندازاً) آهي.

مشق 30.5

.1 102 ميٽر اُوچائي واري روشني جي مينار جي چوٽي کان، هڪ جهاز جي هيٺاهين واري ڪنڊ $30'18^0$ آهي. جهاز روشني جي مينار کان ڪيترو پري آهي.

.2 هڪ ڏاڪڻ، زمين سان 60^0 جي ڪنڊ ناهي ٿي ۽ پٽ تي 6m جي اُوچائي تائين پهچي ٿي. ڏاڪڻ جي ڊيگهه لهو.

.3 اُوچائي واري ڪنڊ لهو جيڪڏهن 6m اُوچائي وارو بانس $2\sqrt{3}$m جي ڊيگهه وارو پاڇو ناهي ٿو.

.4 اُيي ٽڪر جي چوٽي جي اُوچائي واري ڪنڊ 30^0 آهي. هڪ ٽبڪي کان اُيي ٽڪر ڏانهن 210 ميٽر جو پنڌ ڪندي، اُوچائي واري ڪنڊ 45^0 آهي: اُيي ٽڪر جي اُوچائي لهو.

.5 هڪ مشاهدو ڪندڙ ڦوڪٽو زمين کان 4280m مٿي ۽ فارم گهر کان 9613m پري آهي. ڦوڪٽي کان فارم گهر جي هيٺاهين واري ڪنڊ لهو.

جائزي واري مشق 30

.1 درست جواب تي نشان ✓ لڳايو

.i اهو ماپ جو نظام جنهن ۾ ڪنڊ ڪي ريڊيان ۾ ماپجي، ان کي ________ چئبو آهي.

(a) CGS نظام (b) بنياد 60 وارو نظام

(c) MKS نظام (d) گولائي وارو نظام

.ii ٻن غير هم ليڪي شعاعن جو مشترڪ چوٽي تي، ميلاپ ________ ڪوٺبو آهي.

(a) هڪ ڪنڊ (b) هڪ/ ڊگري

(c) هڪ منٽ (d) ريڊيان

.iii $10^0 =$ ________.

(a) $600''$ (b) $3600''$ (c) $600'$ (d) 600

.iv $5\frac{\pi}{4}$ ريڊيان = ________.

(a) 115° (b) 225° (c) 135° (d) 45°

.v $\sec 45^\circ = \frac{1}{2}$ ________.

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

.vi $\operatorname{cosec}\theta \cdot \sin\theta =$ ________.

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) 0.5

.vii $\sec^2\theta - \tan^2\theta =$ ________.

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $\cos^2\theta$

viii. هڪ ايڪي واري گول ۾ ٽبڪي (x,y) لاءِ $\sin\theta =$ ________.

(a) x (b) $-x$ (c) y (d) $-y$

ix. جيڪڏهن $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۽ θ ٽيئن چوٿائي ۾ موجود آهي تہ $\tan\theta =$ ________.

(a) -1 (b) 1 (c) ± 1 (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

x. جيڪڏهن ڪا شيءِ، مشاهد جي سطح کان مٿي آهي تہ پوءِ اُفقي شعاع ۽ نظر جي اُفقي ليڪ جي وچ واري ڪنڊ کي ________ چئبو آهي.

(a) هيٺاهين واري ڪنڊ (b) اُوچائي واري ڪنڊ

(c) هڪ ويڪري ڪنڊ (d) ڪوبہ نہ

2. ڪنڊ ۽ معياري بيهڪ واري ڪنڊ کي بيان ڪريو

3. $70^\circ\ 30'\ 90''$ کي ريڊيانن ۾ بدلايو

4. $(7200)'$ ۾ ڪيترين ڊگرين موجود آهن

5. $\frac{2\pi}{3}$ ريڊيان واري ماپ کي ڊگري ۾ بدلايو

6. $\frac{3}{\pi}$ ريڊيان کي $D^\circ M' S''$ جي صورت ۾ لکو:

7. θ جي قيمت لهو. جڏهن تہ $l = 7cm$ ۽ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ريڊيان

8. θ جي قيمت لهو جيڪڏهن هڪ قوس جي ڊيگهہ ۽ گول جو رداس پاڻ ۾ برابر هجن.

9. ثابت ڪريو تہ $(1 - \cos^2\theta)(1+\cot^2\theta) = 1$

10. گول جي سيڪٽر جي ايراضي لهو جڏهن تہ $r = 2cm$ ۽ $\theta = 3$ ريڊيان

خلاصو

- جيڪڏهن ڪنهن گول جي گهيري کي 360 برابر حصن ۾ ورهائجي تہ پوءِ ان هر هڪ حصي جي مرڪز تي نهيل ڪنڊ 1 ڊگري ڪوٺبي آهي ۽ ان کي 1° سان ظاهر ڪبو آهي.
- گول جي مرڪز تي نهيل ڪنڊ اهڙي طرح جو گول جو رداس ۽ قوس جي ڊيگهہ برابر هجن تہ پوءِ اها ڪنڊ هڪ ريڊيان جي آهي.
- ريڊيان/ ڊگري جي ذيلي ورچ

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ ريڊيان} \approx 0.01745 \text{ ريڊيان}$$

$$1 \text{ ريڊيان} = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) \approx 57.3^\circ$$

- گول جي قوس جي ڊيگهہ لهڻ جو فارمولو $l = r\theta$
- گول جي سيڪٽر جي ايراضي لهڻ جو فارمولو $= \frac{1}{2}lr$ يا $\frac{1}{2}r^2\theta$.

- اُهي ڪندون جن جا شروعاتي ۽ انتهائي پاسا ساڳيا هجن. انهن کي هم انتهائي ڪندون چئبو آهي ۽ اهي 2π ريڊيائن جي ضرب اُپت جو فرق رکن ٿيون انهن کي عام ڪندون به چئبو آهي.
- هڪ ڪنڊ کي معياري بيهڪ واري ڪنڊ چئبو جيڪڏهن ان جي چوٽي اصل ٽپڪي (Origin) تي هجي ۽ ان جو شروعاتي پاسو واڌو x-axis تي هجي.
- هڪ مستطيلي ڪوآرڊينيٽ نظام ۾ ٻه محور متاچري کي چار برابر حصن ۾ ورهائن ٿا ۽ هر هڪ حصي کي چوٿون يا چوٿائي حصو چئبو آهي انهي ڪري چار چوٿائي حصا ٿين ٿا.

  0 ۽ 90° جي وچ واريون ڪندون پهرين چوٿائي حصي ۾ آهن

  90° ۽ 180° جي وچ واريون ڪندون ٻيئي چوٿائي حصي ۾ آهن

  180° ۽ 270° جي وچ واريون ڪندون ٽئين چوٿائي حصي ۾ آهن

  270° ۽ 360° جي وچ واريون ڪندون چوٿين چوٿائي حصي ۾ آهن
- جيڪڏهن ڪنهن معياري ڪنڊ جو انتهائي پاسو x-axis يا y-axis سان ٺهڪندڙ هجي ته پوءِ ان کي چوٿائي ڪنڊ چئبو آهي.
- ڪنڊ θ لاءِ ڇهه بنيادي ٽرگناميٽري نسبتون آهن. انهي آهن $\sin\theta$، $\cos\theta$، $\tan\theta$، $\text{cosec}\theta$، $\sec\theta$ ۽ $\cot\theta$
- ابتڙ ٽرگناميٽري نسبتون هيٺ ڏنل آهن.

$$\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\theta} \quad \text{يا} \quad \text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \quad \text{يا} \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \quad \text{يا} \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- آئيڊنٽيٽي (Identity) هڪ مساوات هوندي آهي جيڪا بدلجندڙ جي سيني قيمتن تي دُرست هوندي آهي سواءِ ان تي جتي قيمت اڻ بيان ڪيل اچي.
- ٽرگناميٽري جون بنيادي آئيڊنٽيٽيز (Identities) تي آهن

  (i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (ii) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

  (iii) $\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$
- جيڪڏهن ڪا شئي مشاهدي جي اک جي سطح کان مٿي آهي ته پوءِ اُفقي ليڪ کان نظر واري ليڪ ڏانهن گهڙي جي اُبتي رستي واري ڪنڊ کي اُوچائي واري ڪنڊ چئبو آهي.
- جيڪڏهن ڪا شئي مشاهد جي اک جي سطح کان هيٺ آهي ته پوءِ اُفقي ليڪ کان نظر واري ليڪ ڏانهن گهڙي جي سڌي رستي واري ڪنڊ کي هيٺاهين واري ڪنڊ چئبو آهي.

جواب

مشق 17.1

1. (i) $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ (ii) $B=\{4,6,8,9,10\}$
(iii) $C=\{7,11,13\}$ (iv) $D=\{9,11,13,15\}$
(v) $E=\{-11,11\}$ (vi) $F=\{\ \}$ يا $\varnothing$

2. (i) $A=\{x\mid x\in\mathbb{Q}\wedge 5<x<6\}$ (ii) $B=\{x\mid x$ واڌو ونڊينڙ آهي 12 جو$\}$
(iii) $C=\{x\mid x\in\mathbb{Z}\wedge -40\le x\le 40\}$ (iv) $D=\{x\mid x\in\mathbb{E}\wedge -4\le x\le 4\}$
(v) $E=\{x\mid x$ چورس آهي پهرين پنجن قدرتي انگن جو$\}$
(vi) $F=\{x\mid x$ هڪ ڪاٿو اڪي سجو عدد آهي$\}$

3. (i) $A=\{x\mid x\in\mathbb{W}\wedge x<0\}$ (ii) A = چوڪرين جي ڪاليج ۾ چوڪرن جو سيٽ
(iii) $A=\{x\mid x\in\mathbb{N}\wedge 2x+1=2\}$ (iv) $A=\{x\mid x\in\mathbb{R}\wedge x^2=-1\}$
(v) A = پاڪستان جي عورت صدرن جو سيٽ

4. i. محدود ii. محدود iii. لامحدود iv. محدود v. لامحدود

5. (i) تي واجب ما تحت سيٽ آهن: $\{a,i\},\{e,u\}$ ۽ $\{i,o\}$
غير واجب ما تحت سيٽ آهي: Improper subset is $\{-2,-1,0,1,2\}$
(ii) تي واجب ما تحت سيٽ آهن: $\{-1,0\},\{+1,+2\}$ ۽ $\{0,+2\}$
غير واجب ما تحت سيٽ آهي: $\{-2,-1,0,1,2\}$

6. $\{x\mid x\in\mathbb{N}\wedge x^2=16\}$ ۽ $\{x\mid x\in\mathbb{Z}\wedge -1<x<1\}$

7. (i) $P(A)=\{\varnothing,\{5\},\{10\},\{15\},\{5,10\},\{5,15\},\{10,15\},\{5,10,15\}\}$
(ii) $P(B)=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{0,1,2\},\{0,2,3\},\{0,1,3\},\{1,2,3\},\{0,1,2,3\}\}$

8. i. ممڪن نہ آهي ii. واحد سيٽ iii. خالي سيٽ

مشق 17.2

1. i. منفرد سيٽ ii. لاڳاپيل سيٽ iii. جزا
iv. مڪمل سيٽ v. جزا

2. i. $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8,10\}$ ii. $A\cap B=\{2,4,6\}$ iii. $A-B=\{1,3,5\}$
iv. $B-A=\{8,10\}$ v. $A\Delta B=\{1,3,5,8,10\}$

3.

i. $A' = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

ii. $B' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

iii. $A' \cup B' = \{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$

iv. $A' \cap B' = \{6, 8, 10\}$

v. $(A \cup B)' = \{6, 8, 10\}$

vi. $(A \cap B)' = \{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$

vii. $A' \Delta B' = \{2, 4, 7, 9\}$

viii. $(A \Delta B)' = \{1, 3, 5, 6, 8, 10\}$

ix. $A - B' = \{1, 3, 5\}$

x. $A' - B = \{6, 8, 10\}$

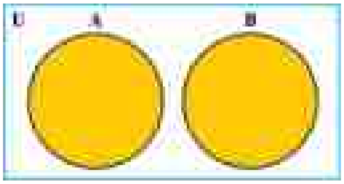
5.

i. $A \cap B = \{6n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ii. $A \cup C = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ iii. $B \cap C = \{12n \mid n \in \mathbb{N}\}$

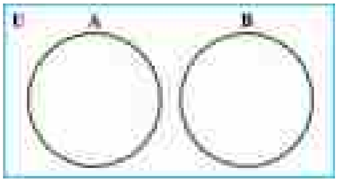
مشق 17.4

(i)

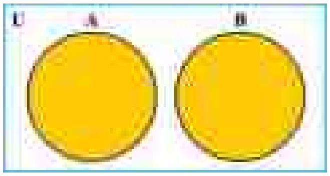
$A \cup B$



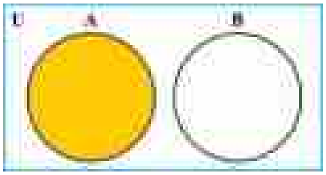
$A \cap B$



$A \Delta B$

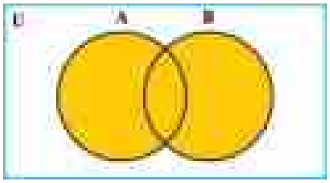


$A - B$

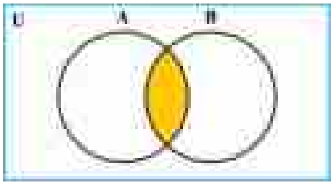


(ii)

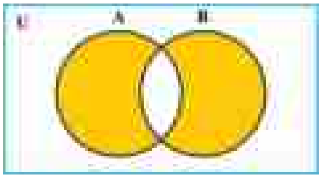
$A \cup B$



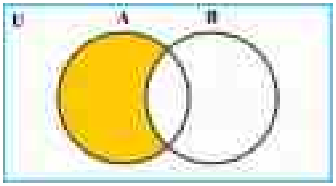
$A \cap B$



$A \Delta B$

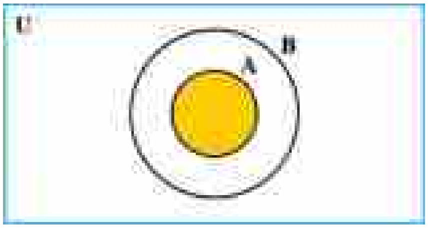


$A - B$



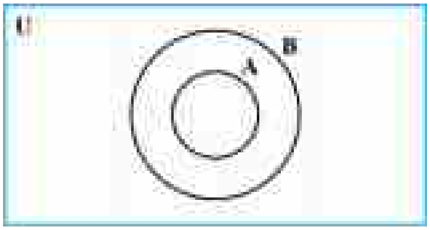
(iii) $A \cup B$

$A \cap B$



$A \Delta B$

$A - B$



مشق 17.5

1. i. $y = 17$ ؛ $x = 16$ ii. $y = 2$ ؛ $x = 1$ iii. $y = 1$ ؛ $x = 3$

2. $n(P \times Q) = 150,\ n(Q \times P) = 150,\ n(P \times P) = 100$

3. (i) $A \times B = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$

(ii) $B \times C = \{(2,1),(2,3),(2,5),(3,1),(3,3),(3,5)\}$

(iii) $A \times (B \cup C) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,5)(2,1),(2,2),(2,3),(2,5)\}$

(iv) $B \times (A \cup C) = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,5)(3,1),(3,2),(3,3),(3,5)\}$

(v) $(A \cap B) \times (B \cap C) = \{(2,3)\}$

4. (i) $R_1 = \{(5,2),(5,3)\}, R_2 = \{(5,1),(3,3)\}, R_3 = \{(6,2)\}$

(ii) $R_1 = \{(2,5)\}, R_2 = \{(3,5)\}, R_3 = \{(2,5),(8,5)\}, R_4 = \{(3,5),(1,5),(3,6)\}$

(iii) $R_1 = \varnothing, R_2 = \{(1,1),(1,2)\}, R_3 = \{(2,1),(2,3)\}, R_4 = \{(1,2),(2,2),(3,3)\},$
$R_5 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

(iv) $R_1 = \varnothing, R_2 = \{(5,5)\}, R_3 = \{(5,6)\}, R_4 = \{(6,5)\}, R_5 = \{(6,6)\},$
$R_6 = \{(5,5),(5,6)\}, R_7 = \{(5,5),(6,5)\}, R_8 = \{(5,5),(6,6)\},$
$R_9 = \{(5,6),(6,5)\}, R_{10} = \{(5,6),(6,6)\}, R_{11} = \{(6,5),(6,6)\},$
$R_{12} = \{(5,5),(5,6),(6,5)\}, R_{13} = \{(5,5),(6,5),(6,6)\},$
$R_{14} = \{(5,5),(5,6),(6,6)\}, R_{15} = \{(5,6),(6,5),(6,6)\},$
$R_{16} = \{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\},$

5. جوڙي واري تعلقن جو تعداد آهي: 2^{12}

6. (i) $R_1=\{(0,2),(0,4),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4)\}$

(ii) $R_2=\{(1,8),(3,6)\}$

(iii) $R_3=\{(3,2)\}$

7. i. رينج $=\{1,3,5,7,9\}$ ii. ڊومين $=\{3,4,5,6\}$

8. i. ڊومين $=\{0,1,2,3\}$
رينج $=\{2,5,8,11\}$
ii. ڊومين $=\{6,7,8,9,...\}$
رينج $=\{0,1,2,3,4,...\}$

9. ڊومين $f=\{1,2,3,4\}$
رينج $f=\{5,6,7,8\}$
قدرتي عددن جو سيٽ ڪوڊومين آهي
$f(2)=6, f(4)=8$

10. i. عمل نہ آهي ii. عمل نہ آهي
iii. اِنتو عمل iv. اِنتو عمل
v. ٻئي ون ـ ون ۽ آنتو

11. i. ون ـ ون عمل ii. ون ـ ون مطابقت
iii. نہ ون ـ ون عمل ۽ نہ ئي ون ـ ون مطابقت

12. i. $f_1=\{(a,x),(b,y),(c,y)\}$ ii. $f_2=\{(p,a),(q,b),(r,c),(s,a)\}$
iii. $f_3=\{(a,q),(b,r),(c,s)\}$ iv. $f_3=\{(x,a),(y,c),(z,b)\}$

جائزي واري مشق 17

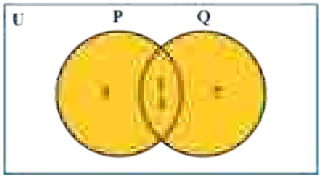
1. (MCQs) گھڻ چونڊائتا سوال

i.	d	ii.	b	iii.	c	iv.	c	v.	b
vi.	c	vii.	b	viii.	c	ix.	a	x.	b
xi.	a	xii.	a	xiii.	d	xiv.	c	xv.	c
xvi.	b	xvii.	c	xviii.	d	xix.	c	xx.	b

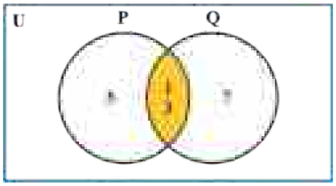
2. (a) $A\cup B=\{1,2,4,5,6\}$ (b) $A\cap B=\{2\}$ (c) $A\Delta B=\{1,4,5,6\}$
(d) $A-B=\{1,5\}$ (e) $A'=\{3,4,6\}$ (f) $B'=\{1,3,5\}$

5.

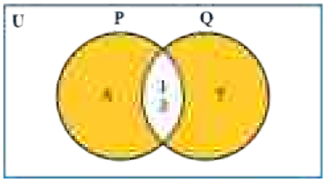
$P \cup Q$



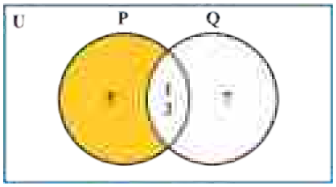
$P \cap Q$



$P \Delta Q$



$P - Q$



6. (a) $f_1 = \{(1,6),(2,8),(5,6)\}$ (b) $f_2 = \{(1,6),(2,6),(5,6)\}$

7. (a) $R_1 = \{(a,a),(a,c)\}, R_2 = \{(c,a),(c,c)\}$

(b) $R_1 = \{(b,b),(b,d)\}, R_2 = \{(d,b),(d,d)\}$

(c) $R_1 = \{(a,b)\}, R_2 = \{(a,d),(c,b)\}, R_3 = \{(c,b),(c,d)\}$

(d) $R_1 = \{(a,c),(b,d)\}, R_2 = \{(c,c),(d,c)\}$

مشق 18.1

1. i. 5:2 ii. 3:5 iii. 2:9 iv. 1:10 v. 3:8 vi. 35:52

2. i. 5:3 ii. 3:5 iii. 3:8 iv. 5:8

3. 6:17 4. $a = 8$ 5. گهربل عدد 6 آهي.

6. $\frac{47}{81}$

7. i. $x = 45$ ii. $x = \frac{21}{26}$ iii. $x = 38$ iv. $x = a^2 - b^2$ v. $x = 4$

مشق 18.2

1. (i) $y = \frac{10}{3}x$ (ii) $y = 20$ (iii) $x = \frac{9}{2}$

2. (i) $V = \frac{5}{8}T$ (ii) $V = \frac{75}{4}$ (iii) $T = 16$

3. $V = 216$ جڏهن $U = 6$
$U = 5$ جڏهن $V = 125$

4. $F=375$ 5. $x=10$ جڏهن $y=3$ 6. $V=4$ جڏهن $P=81$

7. i. $r=5$ جڏهن $F=\frac{32}{25}$ ii. $F=24$ جڏهن $r=\frac{2}{\sqrt{3}}$

8. $x=\frac{1}{8}$ 9. $d=\frac{1}{2}$ 10. $y=\frac{18}{5}$

مشق 18.3

1. (i) 18 (ii) $(a-b)^2$ (iii) $\frac{(x+y)^2}{x^2-xy+y^2}$ (iv) $a+b$

2. (i) 1 (ii) $(a-b)$ (iii) $2a^2$ (iv) a^2+ab+b^2

3. (i) 12 (ii) $10a^2b^2$ (iii) a^2-b^2 (iv) $a-b$

4. (i) 15 (ii) 12 (iii) 8 (iv) 31

مشق 18.4

3. (i) حل سيٽ $=\{3,9\}$ (ii) $x=\frac{5}{4}$ (iii) $\frac{101}{4}$ (iv) 3

مشق 18.5

1. $y=\frac{x^2z}{24}$, $y=32$ 2. $y=\frac{6xu^2}{5vt}$, $y=\frac{64}{5}$ 3. $w=360$

4. 3.21 سيڪنڊ 5. 177.8 ڪعبي يونٽ

مشق 18.7

1. 3.068 ايمپيئر 2. 0.01125 فوٽ ڪينڊلز 3. 900 پاؤنڊ 4. 360000 رُپيا

5. 5600 رُپيا

جائزي واري مشق 18

1. (MCQs) گهڻ چونڊائتا سوال

i.	d	ii.	b	iii.	a	iv.	b	v.	b
vi.	c	vii.	c	viii.	b	ix.	a	x.	c
xi.	a	xii.	c	xiii.	a	xiv.	a	xv.	c

2. (i) $20m : 1m$ (ii) $500g : 3g$

3. (i) $x=4$ (ii) $x=14$ 4. $y=48$ 5. $y=\frac{25}{2}$

7. $x=\frac{7\pm i\sqrt{15}}{2}$ 8. $x=10$ 9. 3.33 ايمپيئر

مشق 19.1

1. (i) چورس قالب (ii) ڪالمي قالب
(iii) قطاري قالب (iv) غير طرفي قالب
(v) اريبي قالب

2. i. 3×3 ii. 3×2 iii. 2×3 iv. 3×1 v. 1×1

3. (i) هم شڪلي قالب (ii) أبتو هم شڪلي قالب
(iii) هم شڪلي قالب (iv) هم شڪلي قالب

4. (i) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) ممڪن نہ آهي (iii) ممڪن نہ آهي (iv) $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (vii) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (viii) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

5. (i) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 2 & 11 & 2 \\ 15 & 10 & -1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 6 & 8 & 7 \\ 5 & 12 & 9 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 9 & 8 & 1 \\ 13 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 51 & -36 \end{bmatrix}$

9. $d = 1$ ۽ $c = -1$، $b = 1$، $a = -2$

10. $z = 2$ ۽ $y = 3$، $x = 3$، $d = 2$، $c = 3$، $b = 2$، $a = -1$

11. $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & -1 \end{bmatrix}, BC = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 11 & 8 & 0 \\ 11 & 11 & 2 \\ 8 & 13 & 6 \end{bmatrix}$

مشق 19.2

1. i. 29 ii. 9 iii. 7 iv. 8 v. −59 vi. −105
vii. −84 viii. 184 ix. −42 x. 0 xi. $2x$

2. i. 1 ii. 3 iii. 3 iv. −1 v. 3 vi. −3

3. (i) $x = 3$ **4.** (i) نادر قالب (ii) غيرنادر قالب

5. (i) $\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} -8 & 18 & -4 \\ -5 & 12 & -1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ -18 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix}$

7. (i) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (ii) وجود نٿو رکي (iii) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -5 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (v) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1.2 & 1.4 & 0.8 \\ -0.4 & 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$

8. (i) $y=8$ ۽ $x=5$ (ii) $y=\frac{9}{4}$ ۽ $x=-\frac{3}{2}$

جائزي واري مشق 19

1. (MCQs) گهڻ چونڊائتا سوال

i.	c	ii.	c	iii.	d	iv.	b	v.	d
vi.	a	vii.	c	viii.	b	ix.	a	x.	b

3. (i) 1×3 (ii) 2×3 (iii) 3×2

4. (i) $\begin{bmatrix} 3 & 13 & 17 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 11 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ -9 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 73 & 47 & 76 \\ 5 & 13 & 20 \\ 46 & 9 & 16 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} -4 & 29 & 74 \\ -1 & 15 & 37 \\ 3 & 62 & 91 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 5 & 40 & 45 \\ 10 & 5 & 0 \\ -10 & 5 & 35 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 14 & 35 & 56 \\ 7 & 21 & 28 \\ 49 & 14 & 28 \end{bmatrix}$

(vii) $\begin{bmatrix} -10 & 19 & 0 \\ 7 & -19 & -36 \\ -79 & -10 & 20 \end{bmatrix}$ **5.** 175 **7.** $\begin{bmatrix} \frac{-9}{47} & \frac{8}{47} & \frac{18}{47} \\ \frac{21}{94} & \frac{-3}{94} & \frac{5}{94} \\ \frac{7}{47} & \frac{-1}{47} & \frac{-14}{47} \end{bmatrix}$

8. $x = 41, y = 5$

مشق 20.1

1. (i) اصل، حقيقي، ناطق ۽ غير مساوي آهي
(ii) اصل، حقيقي، ناطق ۽ غير مساوي آهي
(iii) اصل، منجهيل/ خيالي آهن
(iv) اصل، حقيقي ۽ برابر آهن
(v) اصل، منجهيل/ خيالي آهن
(vi) اصل، منجهيل/ خيالي آهن
(vii) اصل، منجهيل/ خيالي آهن
(viii) اصل، منجهيل/ خيالي آهن

2. (i) (b) $k < \frac{9}{4}$ ۽ (a) $k = \frac{9}{4}$ (ii) (b) $k < 4$ ۽ (a) $k = 4$
(iii) (a) $k = \pm 2\sqrt{2}$ (b) $k < -2\sqrt{2}$ ۽ $k \geq 2\sqrt{2}$ (iv) (b) $k < 3$ ۽ (a) $k = 3$
(v) (a) $k = \pm 4$ (b) $k < -4$ ۽ $k > 4$
(vi) (a) $k = \pm 24$ (b) $k < -24$ ۽ $k > 24$
(vii) (a) $k = 0$ (b) $k < 0$ ۽ $k > 0$
(viii) (a) $k = \pm 2$ (b) $k < -2$ ۽ $k > 2$

3. (i) $m = 3, -2$ (ii) $m = \pm 24$

6. $q = \frac{-5}{3}$ ۽ $p = -2$

مشق 20.2

1. (i) $4\omega^2$ ۽ 4ω، 4 (ii) $-5\omega^2$ ۽ -5ω، -5 (iii) $6\omega^2$ ۽ 6ω، 6

2. (i) ω (ii) 4 (iii) 729 (iv) -16

مشق 20.3

1. (i) اصلن جي جوڙ أپت $= 1$ ۽ اصلن جي ضرب أپت $= -1$
(ii) اصلن جي جوڙ أپت $= \frac{3}{2}$ ۽ اصلن جي ضرب أپت $= -2$
(iii) اصلن جي جوڙ أپت $= a$ ۽ اصلن جي ضرب أپت $= \frac{-3a^2}{4}$
(iv) اصلن جي جوڙ أپت $= \frac{5k}{7}$ ۽ اصلن جي ضرب أپت $= k$

2. (i) $m = \frac{2}{3}$ (ii) $m = \frac{1}{8}$
3. (i) $p = \pm 5$ (ii) $p = 0, 1$
4. (i) $m = 3$ (ii) $m = 13$

5. (i) $k = -4$ (ii) $k = -\frac{10}{7}$

6. (i) $p = \frac{3}{2}$ (ii) $p = \frac{7}{12}$

مشق 20.4

1. (i) $(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$ (ii) $(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

(iii) $\frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$ (iv) $\alpha\beta\left[(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\right]$

(v) $\frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^3}$ (vi) $\frac{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$

2. (i) $\frac{9}{49}$ (ii) $-\frac{99}{98}$ (iii) $\frac{3a+4}{7a^2+3a+2}$ 3. $-\sqrt{\frac{q}{p}}$

4. $\alpha+\beta$ هڪ ليڪ کي ظاهر ڪري ٿو ۽ $\alpha\beta$ هڪ هائيپربولا کي ظاهر ڪري ٿو.

مشق 20.5

1. (i) $x^2 + 5x + 6 = 0$ (ii) $x^2 + x + 1 = 0$

(iii) $x^2 - 4x + 5 = 0$ (iv) $x^2 + 8 = 0$

2. (i) $3x^2 - 9x + 8 = 0$ (ii) $36x^2 - 33x + 1 = 0$

(iii) $x^2 - 3x + 6 = 0$ (iv) $2x^2 - x + 1 = 0$

(v) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

3. $rx^2 - qx + p = 0$ 4. $x^2 - 2px + 4q = 0$ 5. $px^2 - (4p-q)x + (4p-2q+r) = 0$

6. (i) $3b^2 = 16ac$ (ii) $b^3 + ac(a+c) = 3abc$

(iii) $b = 0$ (iv) $a = c$

مشق 20.6

1. (i) باقي رهيل بہ اصل -1 ۽ $\frac{1}{2}$ آهن. (ii) باقي رهيل بہ اصل -1 ۽ 2 آهن.

(iii) باقي رهيل بہ اصل 6 ۽ -4 آهن.

2. (i) باقي رهيل بہ اصل $\frac{1}{3}$ ۽ $\frac{1}{2}$ آهن. (ii) باقي رهيل بہ اصل $\sqrt{5}i$ ۽ $-\sqrt{5}i$ آهن.

(iii) باقي رهيل بہ اصل -1 ۽ 2 آهن.

3. $m=\frac{7}{3}$ ۽ باقي رهيل ٻه اصل $\frac{3}{2}$ ۽ -1 آهن.

4. $a=2$ ۽ باقي رهيل ٻه اصل 6 ۽ -1 آهن.

5. $a=49$ ۽ $b=36$ ۽ باقي رهيل ٻه اصل 7 ۽ -3 آهن.

مشق 20.7

1. $\left\{(1,-1),\left(\frac{7}{5},-\frac{1}{5}\right)\right\}$
2. $\left\{(2,0),\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)\right\}$
3. $\left\{(4,3),\left(\frac{25}{8},-\frac{25}{6}\right)\right\}$
4. $\{(-3,0),(1,2)\}$
5. $\{(\pm3,\pm4),(0,5),(-5,0)\}$
6. $\left\{\left(\pm2\sqrt{2},\pm2\sqrt{2}\right),\left(\frac{\pm4\sqrt{5}}{5},\frac{\pm8\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$
7. $\{(1,2),(2,1),(-1,-2),(-2,-1)\}$
8. $\left\{\left(2,\frac{1}{2}\right),\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\right\}$
9. $\left\{\left(\frac{4}{5},20\right),\left(\frac{1}{5},5\right)\right\}$
10. 7 ۽ 5 يا 5 ۽ 7
11. ڊيگهه = 9 ميٽر ۽ ويڪر = 4 ميٽر
12. 6 ۽ 8
13. 9cm ۽ 12cm جڏهن هيپاٽينيوز 15cm آهي.
14. 13cm، 13cm ۽ 10cm
15. 30 ۽ 25

جائزي واري مشق 20

1. گهڻ چوندائتا سوال (MCQs)

i.	d	ii.	c	iii.	b	iv.	c	v.	c
vi.	b	vii.	a	viii.	b	ix.	c	x.	c

2. (i) اصل ناطق (ii) حقيقي ۽ برابر (iii) اصل خيالي (iv) حقيقي ۽ غيرمساوي

3. $9, 9\omega, 9\omega^2$

4. (i) S.O.R = 7 and P.O.R = 29 (ii) S.O.R = p and P.O.R = q
 (iii) S.O.R = $\frac{7}{5}$ and P.O.R = $\frac{8}{5}$ (iv) S.O.R = $\frac{11}{9}$ and P.O.R = $-\frac{28}{9}$

6. $x^2-2x-1=0$
7. $16x^2-10x+1=0$
8. (i) $x=2, y=3$ (ii) $x=1$ and $y=6$

مشق 21.1

1. $\frac{2}{x-3}-\frac{2}{x+3}$
2. $\frac{5}{x+1}-\frac{1}{x-3}$
3. $\frac{3}{x}+\frac{2}{x-2}-\frac{4}{x-1}$
4. $\frac{7}{x+4}-\frac{3}{x+1}-\frac{2}{2x-1}$
5. $1+\frac{2}{x+3}+\frac{6}{x-2}$
6. $1-\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+1}$
7. $3x-2+\frac{1}{x-2}-\frac{5}{x+2}$

مشق 21.2

1. $\frac{4}{x+1}-\frac{7}{(x+1)^2}$

2. $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-\frac{1}{x+3}$

3. $\frac{5}{x-2}-\frac{10}{(x-2)^2}+\frac{4}{(x-2)^3}$

4. $\frac{2}{x-5}-\frac{3}{x+2}+\frac{4}{(x+2)^2}$

5. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^3}$

مشق 21.3

1. $\frac{2x+3}{x^2+7}-\frac{1}{x-2}$

2. $\frac{x+5}{x^2+10}-\frac{1}{x+1}$

3. $\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2-5x}{x^2+5}$

4. $\frac{1}{x+1}+\frac{2x-2}{x^2-x+3}$

5. $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2+3}$

مشق 21.4

1. $\frac{1}{4(1-x)}-\frac{(x+1)}{4(x^2+1)}+\frac{(x-1)}{2(x^2+1)^2}$

2. $\frac{1}{9x}+\frac{2}{9x^2}-\frac{(x+2)}{9(x^2+3)}-\frac{(x-1)}{3(x^2+3)^2}$

3. $\frac{1}{4(1+x)}+\frac{(1-x)}{4(x^2+1)}+\frac{x-1}{2(x^2+1)^2}$

4. $\frac{7}{9x+1}+\frac{7(1-x)}{9(x^2+2)}+\frac{7(1-x)}{(x^2+2)^2}$

5. $\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{3+x^2}-7\frac{(x+2)}{8(3+x^2)^2}$

جائزي واري مشق 21

1. (MCQs) گهڻ چونڊائتا سوال

i. d   ii. b   iii. d   iv. b   v. a

3. (i) $\frac{13}{3(x-1)}+\frac{2}{3(x+2)}$ (ii) $\frac{-7}{10x}+\frac{33}{14(x+2)}+\frac{257}{35(x-5)}$

(iii) $\frac{11}{5(x-2)}-\frac{6x+2}{x^2+1}$ (iv) $1+\frac{16}{x+1}-\frac{10x+8}{x^2+x+1}$

مشق 22.3

1. (a). A.M. = 11.889, H.M. = 11.194, مذياني سراسري = 12, ڪثرتي سراسري = 12.
   (b). A.M. = 0, G.M. = 0, مذياني سراسري = 0, غيرڪثرتي
   (c). A.M. = 13.044, G.M. = 12.837, H.M. = 11.727, مذياني سراسري = 12.3.
   (d). A.M. = 56.5, G.M. = 56.339, H.M. = 56.180, مذياني سراسري = 56, ڪثرتي سراسري = 52.
   (e). ڪثرتي سراسري = AB^+. (f). غيرڪثرتي
   (g). A.M. = B+, مذياني سراسري = B+, ڪثرتي سراسري = B+.
2. A.M.=172.1, G.M.= 169.551, H.M.= 166.615, مذياني سراسري =184.5, ڪثرتي سراسري =190.
3. A.M. = ڪتا پسند ڪن ٿا, مذياني سراسري = ڪتا پسند ڪن ٿا,
   ڪثرتي سراسري = ڪتن سان پيار ڪن ٿا
4. COVID.

5. A.M.=7.149, G.M.=7.106, H.M.=7.061, مذياني سراسري =7, Q_1= 6.5, Q_3 = 7.5,
كثرتي سراسري = 7.

6. A.M.=32.5, G.M.=32.303, H.M.=32.102, مذياني سراسري =32, Q_1=30, Q_3 = 34,
كثرتي سراسري = 32. 7. A.M. = 9640 رُپيا.

8. A.M. = 36.464, G.M. = 36.087, H.M. = 35.700, مذياني سراسري = 36.643,
كثرتي سراسري = 36.929.

9. A.M.=11.9179, G.M.=11.9039, H.M.=11.8897, مذياني سراسري =11.9708,
كثرتي سراسري = 12.117.

مشق 22.4

1. (c). –6, (d). 458.125. 2. X غير همشكلي آهي، Y همشكلي آهي.

3. $(A.M.)_W$ = 330, $(G.M.)_W$ = 310.902, $(H.M.)_W$ = 295.806.

4. $(A.M.)_W$ = 23.852 كلوگرام, $(G.M.)_W$ = 23.850 كلوگرام, $(H.M.)_W$ = 23.848 كلوگرام

مشق 22.5

1. وسعت = 7, Var. = 4.490, S.D. = 2.119, M.D. = 1.673.
2. رانديگر-A: نسبتي = 185, M.D. = 45.111, Var. = 3699.222, S.D. = 60.821.
رانديگر-B: نسبتي = 72, M.D. = 21.111, Var. = 601.555, S.D. = 24.527
رانديگر-A جي ڀيٽ ۾ رانديگر-B جي اسڪور ۾ وڌيڪ تسلسل آهي.
3. نسبتي S.D. (آمدني) = 0.488, نسبتي S.D. (خرچ) = 0.4945.
آمدني ۾ تغير خرچ کان گهٽ آهي.
4. ٽيم-A: نسبتي S.D. = 1.012, نسبتي M.D. = 0.528 (تقريباً).
ٽيم-B: نسبتي S.D. = 0.866, نسبتي M.D. = 0.5 (تقريباً).
ٽيم-A جي ڀيٽ ۾ ٽيم-B جي ڪارڪردگي ۾ وڌيڪ تسلسل آهي.
5. نسبتي = 2.1, Var. = 0.196, S.D. = 0.443, M.D. = 0.343 (تقريباً).

جائزي واري مشق 22

1. گهڻ چونڊائتا سوال (MCQs)
i. (c), ii. (c), iii. (b), iv. (a), v. (a), vi. (a), vii. (b), viii. (c), ix. (c), x. (d).

مشق 23.1

2. (i) $x = 25$ (ii) $x = 12$ (iii) $x = 2$ (iv) $x = 15$ 3. $\sqrt{34}$

4. 12 5. 10 6. 6 7. $a = 2\sqrt{5}, b = 2\sqrt{21}, h = \sqrt{35}$ 8. 58.31

9. $4\sqrt{3}$ 10. 12 11. 30 12. ڊيگهه = 12 ۽ ويڪر = 5

جائزي واري مشق 23

1. گهڻ چونڊائتا سوال (MCQs)
i. ii. (a) iii. (b) iv. (b) v. (a) vi. (d) vii. (c)

2. 24 3. $2\sqrt{119}m$ 4. (i) $\sqrt{13}$ (ii) $\sqrt{51}$ (iii) $\sqrt{63}$

مشق 24.1

1. $m\overline{CE} = 10cm$ 2. $x = 1$

مشق 24.2

1. $x = 1$; ٽپور پاسو ٽڪندو 2. $y = 4$ ۽ $x = 2$ 3. $A_2 = 7cm^2$ 4. $x = 11cm$

جائزي واري مشق 24

1. (MCQs) گهڻ چونڊائتا سوال

i.	d	ii.	d	iii.	c	iv.	b	v.	a	vi.	b
vii.	c	viii.	c	ix.	d	x.	b	xi.	a	xii.	b

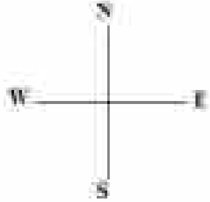
مشق 25.1

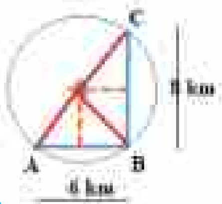
.1 نہ، چاڪاڻ جوهم ليڪي ٽيڪن جي سيني چوڙن جا عمودي اڌڪندڙ ڪڏهن بہ ساڳيئي ٽيڪي تي ڪپندا آهن.

.2 ها اهو رڳو تڏهن ممڪن آهي جڏهن چئني ٽيڪن کي ملائڻ سان ٺهندڙ چوڪندو، مدار چوڪندو هجي. يعني تہ چوڪندي جي سامهون وارن ڪنڊن جي جوڙ اُپٽ 180^o آهي. پر عام طرح سان، ڪن بہ چار غير هم ليڪي ٽيڪن لاءِ انهن مان گذرندڙ گول ڪيڏڻ ممڪن نہ آهي.

.3 اشارو: مثال 2−1 ڏسو. .4 اشارو: مثال 2−1 ڏسو.

.5 گهربل مسجد جي بيهڪ گوٺن A ، B ۽ C کي ملائيندڙ گول جي مرڪز تي آهي جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي. گوٺن کي مسجد تائين پهچڻ لاءِ برابر فاصلو 5 ڪلوميٽر آهي.





مشق 25.2

1. اشارو: مرڪز مان گذرندڙ زهہ قطر هوندا آهن. 25.2-25.3 سڌيان ڏسو.
2. سڌيان 25.2 ۽ 25.3 کي ڏسو.   3. $C = 10\pi\ cm$ and $A = 25\pi\ cm.$
4. (a). $6cm.$ (b). $6\sqrt{3}cm.$ شڪل ۽ تفصيل لاءِ مثال 1-2 ڏسو
5. $r = \sqrt{34}cm.$ شڪل ۽ تفصيل لاءِ مثال 1-2 ڏسو

مشق 25.3

1. سڌيان 25.4 ۽ 25.5 کي ڏسو.   2. سڌيان 25.4 ۽ 25.5 کي ڏسو.
3. (a). $\sqrt{95}cm$ (b). $\sqrt{39}cm$ (c). $2\sqrt{15}cm$ (d). $2\sqrt{77}cm$
4. (a). 7cm   (b). 27.594 cm   5. (a). $2\sqrt{5}$ (b). 6   (c). 5   (d). 10.8   (e). $2\sqrt{51}$ (f). 6

جائزي واري مشق 25

1. (MCQs) گهڻ چونڊائتا سوال

i. (b)   ii. (c)   iii. (c)   iv. (b)   v. (b)   vi. (a)   vii. (a)   viii. (b)   ix. (a)

مشق 26.1

1. مثال 1 ۾ ثابتي کي ڏسو.   2. مثال 1 ۾ ثابتي کي ڏسو.
3. $5\sqrt{3}cm$ ۽ $\frac{5\sqrt{3}}{2}\ cm.$ d = 6cm, A = 28.2743cm^2 ۽ C = 18.8495cm (تقريباً).
4. 24cm.   5. $\sqrt{109}cm.$

مشق 26.2

1. اشارو: سڌيان 26.3 ۾ شامل نتيجن کي ڏسو.
2. اشارو: ثابت ڪنڌڙ بيان سڌيان جو عڪس آهي ۾ مثال 1 جي ثابتي.
3. سڌيان 26.3 کي ڏسو.
4. (a). 6, (b). $2\sqrt{66}$, (c). 7, (d). 11, (e). $\frac{55}{7}$, (f). 14.22 (تقريباً), (g). 4.3, (h). 18.8714 (تقريباً).
5. (a). 6, (b). 4, (c). 6, (d). 1.1547 (تقريباً),(e). 5, (f). 13.

مشق 26.3

1. اشارو: ثابت ڪنڌڙ بيان سڌيان 26.4 صورت (A) جو عڪس آهي.
2. اشارو: ثابت ڪنڌڙ بيان سڌيان جو عڪس آهي مثال 1 ۾
3. 6cm ۽ 37.7cm (تقريباً).
4. (a). 70^0 (b). 50^0
5. اشارو: ثابت ڪنڌڙ بيان سڌيان 26.4 صورت (A) کي ڏسو.
6. 4cm
7. 8.5cm

جائزي واري مشق 26

1. گهڻ چونڊائتا سوال (MCQs)

i. (b) ii. (c) iii. (b) iv. (c) v. (b) vi. (b) vii. (a) viii. (d) ix. (a) x. (b) xi. (d)

مشق 27.1

3. $x = 20$ and $y = 10$ 4. 114° and 92° 5. 30° and 65° 6. 120°

جائزي واري مشق 27

1. گهڻ چونڊائتا سوال (MCQs)

i. b ii. c iii. c iv. b v. b vi. c vii. a viii. d ix. a

مشق 28.1

1. 18° 2. $x < 46°$ 3. $x > 13°$

مشق 28.2

1. 60° 2. 70° 3. 120°

جائزي واري مشق 28

1. گهڻ چونڊائتا سوال (MCQs)

i. (a) ii. (b) iii. (d) iv. (d) v. (b)
vi. (a) vii. (b) viii. (c) ix. (b) x. (c)

جائزي واري مشق 29

1. گهڻ چونڊائتا سوال (MCQs)

i. (b) ii. (d) iii. (a) iv. (c) v. (c) vi. (b) vii. (a)
viii. (b) ix. (d) x. (d) xi. (c) xii. (a) xiii. (b) xiv. (c)
xv. (d) xvi. (b) xvii. (d) xviii. (c) xix. (a) xx. (d)

مشق 30.1

1. (i) 32.25° (ii) 10.5° (iii) 8.25°
(iv) 45.36° (v) 25.5° (vi) 18.11°
2. (i) $32°15'$ (ii) $47°21'36''$ (iii) $57°19'38''$
(iv) $-(67°34'48'')$ (v) $22°30'$ (vi) $225°36'$

3. (i) 45° (ii) 60° (iii) −135°
(iv) 171.82° (v) 54.67° (vi) 257.73°

4. (i) $\frac{\pi}{6}$ ريڊيان (ii) $\frac{\pi}{4}$ ريڊيان (iii) $\frac{\pi}{3}$ ريڊيان
(iv) $\frac{\pi}{8}$ ريڊيان (v) $\frac{-5\pi}{4}$ ريڊيان (vi) 1.06 ريڊيان

مشق 30.2

1. (i) 4 ريڊيان (ii) 15.1 ريڊيان (iii) 2.09 ريڊيان (iv) 1.8 ريڊيان

2. (i) $l = 2.12$ cm (ii) $l = 10.2$ cm (iii) $l = 3.14$ cm (iv) $l = 15.84$ cm

3. (i) $r = 1.91$ m (ii) $r = 0.5$ m (iii) $r = 16$ cm (iv) $r = 4.9$ cm

4. (i) $l = 0.52$ يونٽ (ii) $l = 0.79$ يونٽ (iii) $l = 1.05$ يونٽ (iv) $l = 1.57$ يونٽ
5. (i) $l = 2.62$ cm (ii) گول جي سيڪٽر جي ايراضي = 6.55 cm^2
6. ٿبڪي جي طئي ڪيل فاصلو: $l = 2.2$ m
7. گول جي سيڪٽر جي ايراضي = 6.28 cm^2
8. $\theta = 800$ ريڊيان 9. $\theta = 0.5$ ريڊيان
10. 105.6 cm^2 = سيڪٽر جي ايراضي ۽ $l = 17.6$ cm

مشق 30.3

1. (i) −305° ۽ 415° (ii) $-\frac{11\pi}{6}$ ۽ $\frac{13\pi}{6}$
(iii) −405° ۽ 315° (iv) $\frac{5\pi}{4}$ ۽ $-\frac{11\pi}{4}$

2. (i) Q_4 (ii) Q_1 (iii) Q_3
(iv) Q_1 (v) Q_3 (vi) Q_2

3. (i), (ii), (iii), (iv), (v) ڪاٽو نشاني وارا آهن. (vi) واڌو نشاني وارا

4. (i) Q_2 ۾ موجود آهي. (ii) Q_3 ۾ موجود آهي. (iii) Q_3 ۾ موجود آهي.
(iv) Q_3 ۾ موجود آهي. (v) Q_2 ۾ موجود آهي. (vi) Q_1 ۾ موجود آهي.

5. (i) $\cot\theta = -\frac{3}{4}$ ۽ $\tan\theta = -\frac{4}{3}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{4}$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$, $\sec\theta = -\frac{5}{3}$

6. (i) $\cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۽ $\tan\theta = -\sqrt{3}$, $\sec\theta = -2$, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

(ii) $\cot\theta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ ۽ $\tan\theta = \frac{-\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{cosec}\theta = -\frac{3}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta = \frac{-\sqrt{5}}{3}$, $\sec\theta = \frac{3}{2}$

(iii) $\cot\theta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ ۽ $\tan\theta = \frac{-\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{5}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cot\theta = 2$

(iv) $\tan\theta = \cot\theta = 1$ ۽ $\sin\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(v) $\cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۽ $\tan\theta = \sqrt{3}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sec\theta = 2$

7. (i) 2 (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iii) $\sqrt{2}-1$

(iv) $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$ (v) $2-\sqrt{3}$ (vi) 4

مشق 30.5

1. $x = 304.5m$ 2. $L = 4\sqrt{3} \approx 6.93m$ 3. $\theta = 60°$

4. $x = 288.75\ m$ 5. $\theta = 24°$

جائزي واري مشق 30

1. (MCQs) گھڻ چونڊائتا سوال

i.	b	ii.	a	iii.	c	iv.	b	v.	b
vi.	b	vii.	b	viii.	c	ix.	b	x.	b

3. $\frac{2821\pi}{7200}$ 4. 120 درجو 5. 120 درجو

6. 1 منٽ 7. $\frac{28}{\pi}cm$ 8. 1 ريديان

10. $6\ cm^2$