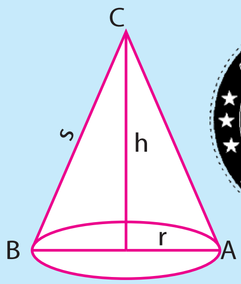
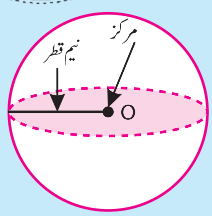
مفت تقسیم کے لیے

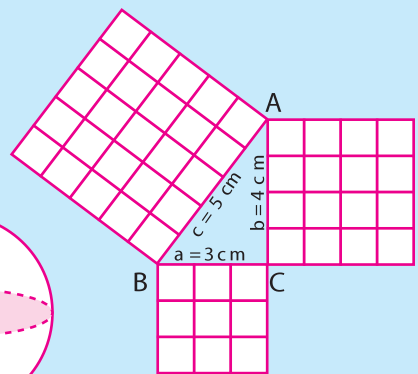
ریاضی

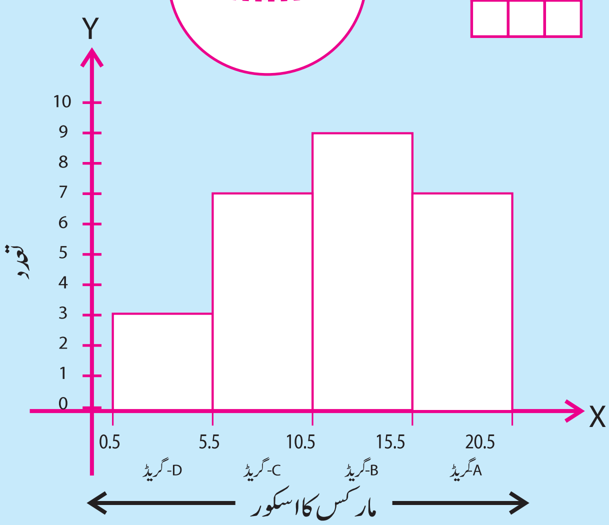
8

آٹھویں جماعت کے لیے









سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جامشورو

ناشر

پاکستان ٹریڈنگ ہاؤس کراچی

مفت تقسیم کے لیے

تیار کردہ: سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جامشورو

نظرثانی شدہ: پراونشل ریویو کمیٹی آف ٹیکسٹ بک، بیورو آف کریکیولم اینڈ ایکسٹینشن ونگ سندھ، جامشورو

منظور کردہ: ایجوکیشن اینڈ لٹریسی ڈپارٹمنٹ حکومت سندھ، کراچی

نوٹیفکیشن نمبر SO(G-I)E&L/CURRICULUM-2014 بتاریخ 08-12-2016

صوبہ سندھ کے اردو میڈیم اسکولوں کے لیے واحد درسی کتاب کے طور پر شائع کی گئی۔

نگرانِ اعلیٰ: عبدالعلیم لاشاری (چیئرمین سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جامشورو، سندھ)

مصنفین:
- پروفیسر ڈاکٹر نور محمد مصطفیٰ شیخ
- محب اللہ شیخ
- محمد صغیر شیخ
- اسماء بھٹی
- پروفیسر اعجاز علی صبحپوٹو
- سُمترا رانی

پراونشل ریویو کمیٹی (PRC):
- محمد صغیر شیخ
- سید آفاق احمد
- آفتاب علی
- عطیہ تبسم بھٹو
- محمد وسیم
- محمد شفیق میمن
- ارجن لعل۔ ایس۔ سدھریا

مدیر:
- پروفیسر ڈاکٹر محمد ذکاءُاللہ خان
- سُمترا رانی

ٹیکنکل مدیر:
- ارجن لعل۔ ایس۔ سدھریا

رضا کارانہ نظرثانی:
- علی ڈنو بھیو

مترجم:
- آفتاب علی
- محب اللہ شیخ

کنسلٹنٹ:
- کامران لطیف لغاری؛ ای ایس ایس
- میر سرفراز خلیل ساند؛ جی ایس ایس

لے آؤٹ ڈیزائننگ: فرحان علی بھٹی (حاشر پرنٹرز اینڈ پبلشرز، حیدر آباد)

اشاعت کا سال: 2024

مطبع: پاکستان ٹریڈنگ ہاؤس کراچی

مفت تقسیم کے لیے

پیش لفظ

سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ ایک ایسا تعلیمی ادارہ ہے جس کا فریضہ درسی کتب کی تیاری و اشاعت ہے۔
اس کا اولین مقصد ایسی درسی کتب کی تیاری و فراہمی ہے جو نسل نو کو شعور آگہی اور ایسی صلاحیت بخشیں جن کے ذریعے وہ اسلام کے آفاقی نظریات، بھائی چارے، اسلام کے کارناموں اور اپنے ثقافتی ورثہ و روایات کی پاسداری کرتے ہوئے دوَرِ جدید کے نت نئے سائنسی، تکنیکی اور معاشرتی تقاضوں کا مقابلہ کر کے کامیاب زندگی گزار سکیں۔

اس اعلیٰ مقصد کی تکمیل کی غرض سے اہلِ علم، ماہرین مضامین، مدرسین کرام اور مخلص احباب کی ایک ٹیم ہر چار سمت سے حاصل ہونے والی تجاویز کی روشنی میں کتب کے معیار، جائزے اور ان کی اصلاح کے لئے ہمارے ساتھ ہمہ مصروفِ عمل ہے۔

ہمارے ماہرین اور اشاعتی عملے کے لئے اپنے مطلوبہ مقاصد کا حصول اسی صورت میں ممکن ہے کہ ان کتب سے اساتذہ کرام اور طلبہ و طالبات کماحقہ استفادہ کریں۔ علاوہ ازیں ان کی تجاویز و آراءان کتب کے معیار کو مزید بہتر بنانے میں ہمارے ممد و مُعاون ثابت ہوں گی۔

چیئرمین

سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جامشورو، سندھ

مفت تقسیم کے لیے

فہرست

مفت تقسیم کے لیے

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

یونٹ 1

سیٹوں پر عوامل

1.1 سیٹ

سیٹ مختلف اشیاء کے واضح اجتماع کو کہتے ہیں۔ عموماً سیٹوں کو انگریزی حرف تہجی کے بڑے حروف سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

سیٹ کی چند مثالیں:

(1) پہلے چھ مفرد اعداد کا سیٹ = A (بیانیہ شکل) (2) $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (اندراجی شکل)

(3) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -5 < x < 5\}$ (ترقیم سیٹ ساز شکل)

اعادہ مشق I

1. درجہ ذیل سیٹوں کو اندراجی اور ترقیم سیٹ ساز شکل میں لکھیں۔

(i) پہلے پانچ قدرتی اعداد کا سیٹ = A (ii) 2 اور 3 کے درمیان صحیح اعداد کا سیٹ = B

(iii) 10 اور 30 کے درمیان مفرد اعداد کا سیٹ = C

2. نیچے دیئے گئے سیٹوں کو پہچانے اور (i) متناہی سیٹ (ii) لامتناہی سیٹ لکھیں:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، $B = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

10 اور 30 کے درمیان مرکب اعداد کا سیٹ = C

10 کے تمام عاد کا سیٹ = D اور $E = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x < 0\}$

3. مندرجہ ذیل سیٹوں کو مثال دے کر وضاحت کریں۔

(i) غیر مشترک (ii) متراکب سیٹ (iii) کمپلیمنٹ سیٹ

4. ثابت کریں جب کہ $A = \{1, 3, 5\}$، $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

(i) $A \cup A' = U$ (ii) $A \cap A' = \varnothing$ (iii) $(A')' = A$

1.1.1 کچھ اہم سیٹوں کو پہچاننا

کچھ اہم سیٹ اور ان کے علامات کے ساتھ نیچے دیئے گئے ہیں:

- قدرتی اعداد کا سیٹ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ • مکمل اعداد کا سیٹ $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- صحیح اعداد کا سیٹ $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ یا $\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- ناطق اعداد کا سیٹ $\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q}, p \wedge q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
- جفت اعداد کا سیٹ $\mathbb{E} = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$
- طاق اعداد کا سیٹ $\mathbb{O} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots\}$ یا $\mathbb{O} = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$
- مفرد اعداد کا سیٹ $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$

1.1.2 سیٹ کے تحتی سیٹ معلوم کرنا

تحتی سیٹ: اگر سیٹ X کے تمام ممبران سیٹ Y کے بھی ممبران ہوں تو سیٹ X ، سیٹ Y کا تحتی سیٹ کہلاتا ہے۔ علاقی طور پر ہم اِسے لکھتے ہیں: $X \subseteq Y$

مثال. فرض کریں $X = \{1, 2, 3\}$ اور $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ $X \subseteq Y$

نوٹ: (i) خالی سیٹ ہر سیٹ کا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔ (ii) ہر سیٹ خود اپنا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

1.1.3 واجب تحتی سیٹ اور غیر واجب تحتی سیٹ کی وضاحت

1. واجب تحتی سیٹ

سیٹ A کا کوئی بھی تحتی سیٹ، سیٹ A کا واجب تحتی سیٹ کہلاتا ہے اگر وہ سیٹ A کے برابر نہ ہو تو ہم اُسے لکھتے ہیں: $B \subset A$

مثال 1. فرض کریں $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{1, 2\}$ تو $B \subset A$

2. غیر واجب تحتی سیٹ

فرض کریں A تحتی سیٹ ہے B کا۔ اگر $A = B$ ہو تو سیٹ A ، سیٹ B کا غیر واجب تحتی سیٹ کہلاتا ہے۔ ہم اِسے لکھتے ہیں: یعنی $B \subseteq A$ یا $A \subseteq B$

نوٹ: اگر سیٹ B، سیٹ A کے واجب یا غیر واجب تحتی سیٹ نہ ہو تو ہم لکھتے ہیں: $B \not\subset A$ یا $B \not\subseteq A$۔

مثال 2. فرض کریں $A = \{1, 2, 3, 4\}$ اور $B = \{4, 3, 2, 1\}$ تو یہاں سیٹ B، سیٹ A کا غیر واجب تحتی سیٹ ہے۔ یعنی $B \subseteq A$ یا $A \subseteq B$

مثال 3. $\mathbf{A = \{x, y, z\}}$ کے تمام ممکنہ تحتی سیٹ معلوم کریں

سیٹ A کے تمام ممکنہ تحتی سیٹ ہیں: $\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}$

تو یہاں تحتی سیٹوں کی تعداد $= \mathbf{2^3 = 8}$

یک رکنی سیٹ کے تمام ممکنہ تحتی سیٹ ہوں گے دو یعنی $\mathbf{2}^1$ اور دو رکنی سیٹ کے تمام ممکنہ تحتی سیٹ ہوں گے $4 = 2^2$)

نوٹ: اگر کسی سیٹ A کے ممبران کی مکمل تعداد n ہو تو تمام ممکنہ تحتی سیٹوں کی کل تعداد 2^n ہو گی جیسے $A = \{w, x, y, z\}$ ہے تو تمام ممکنہ تحتی سیٹ $2^4 = 16$ ہوں گے۔

3. سیٹ A کے قوت سیٹ P (A) معلوم کرنا

قوت سیٹ: فرض کریں A ایک سیٹ ہے۔ A کے تمام ممکنہ تحتی سیٹوں کا سیٹ A کا قوت سیٹ کہلاتا ہے۔ اِسے P(A) سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 4. $\mathbf{A = \{a, b\}}$ کا قوت سیٹ معلوم کریں۔

حل: یہاں تحتی سیٹوں کی تعداد $= 2^2 = 4$ تو تمام ممکنہ تحتی سیٹ ہیں $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$

لہٰذا $P(A) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

اسی طرح خالی سیٹ کا صرف ایک تحتی سیٹ خود ہی ہوتا ہے۔ پس $P(\emptyset) = \{ \emptyset \}$

مشق 1.1

1. بتائیں کہ کون سا سیٹ کس سیٹ کا تحتی سیٹ ہے:

(i) $A = \{5,6,7\}$ اور $B = \{1,2,3,...,10\}$

(ii) $C = \{2\}$ اور $D = \{2,3,5\}$

(iii) $T = \{1,2,3,...,8\}$ اور $S = \{2,4,6\}$

2. ذیل کے کوئی بھی تین واجب تحتی سیٹ معلوم کریں:

(i) $A = \{a, e, i, o, u\}$ (ii) $B = \{x, y\}$

3. ذیل کے کوئی بھی دو واجب اور ایک غیر واجب تحتی سیٹ معلوم کریں۔

(i) $X = \{2, 4\}$ (ii) $Y =$ 4 سے چھوٹے مفرد اعداد کا سیٹ

4. تمام ممکنہ تحتی سیٹ معلوم کریں۔

(i) $F = \{1,2,3\}$ ، (ii) $A =$ مفرد جفت اعداد کا سیٹ

(iii) 7 سے چھوٹے اعداد کا سیٹ $= B$ (iv) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -2 < x < 2\}$

(v) $D = \{x \mid x \in \mathbb{E} \wedge x \leqslant 6\}$

5. ذیل کے قوت سیٹ معلوم کریں۔

(i) $A = \{1, 3, 5\}$ (ii) $B = \{a, b, c, d\}$ (iii) $C = \emptyset$

6. وہ سیٹ معلوم کریں جس کا صرف ایک واجب تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

7. وہ سیٹ معلوم کریں جس کا کوئی بھی واجب تحتی سیٹ نہیں ہوتا ہے۔

8. ذیل کے سیٹوں کے غیر واجب تحتی سیٹ معلوم کریں۔

(i) $\{x \mid x \in \mathbb{O} \wedge x \leqslant 7\}$ (ii) $\{x \mid x \in \mathbb{P} \wedge x \leqslant 11\}$

9. فرض کریں $X = \{20, 30, 40, 50, 60, 80, 100\}$، ذیل میں دیئے گئے X کے تحتی سیٹوں کے ممبران کی تعداد معلوم کریں۔

(i) 2 سے تقسیم ہونے والے اعداد کا سیٹ $= A$ (ii) 8 سے تقسیم ہونے والے اعداد کا سیٹ $= B$

(iii) 15 سے تقسیم ہونے والے اعداد کا سیٹ $= C$ (iv) 25 سے تقسیم ہونے والے اعداد کا سیٹ $= D$

10. بتائیں کہ کون سا سیٹ کس کے سیٹ کا تحتی سیٹ ہے۔

(i) $\mathbb{N}$ اور $\mathbb{W}$ (ii) $\mathbb{Z}$ اور $\mathbb{N}$ (iii) $\mathbb{P}$ اور $\mathbb{N}$

(iv) $\mathbb{E}$ اور $\mathbb{Z}$ (v) $\mathbb{Q}$ اور $\mathbb{O}$ (vi) $\mathbb{Q}$ اور $\mathbb{E}$

1.2 سیٹوں پر عوامل

1.2.1 قانون مبادلہ اور قانون تلازم بلحاظ اتصال (یونین) اور تقاطع ثابت کریں۔

(A) قانون مبادلہ بلحاظ اتصال اور تقاطع

فرض کریں A اور B کوئی دو سیٹ ہیں

تو قانون مبادلہ بلحاظ اتصال ہے $\boxed{A \cup B = B \cup A}$

اور قانون مبادلہ بلحاظ تقاطع ہے $\boxed{A \cap B = B \cap A}$

مثال 1. اگر A= {1,2,3} اور B= {1,3,5} تو قانون مبادلہ بلحاظ اتصال اور تقاطع ثابت کریں۔

حل: (i) قانون مبادلہ بلحاظ اتصال

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $\boxed{A \cup B = B \cup A}$

$$\text{L.H.S} = A \cup B = \{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$\text{R.H.S} = B \cup A = \{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 5\}$$

لہٰذا L.H.S = R.H.S

پس ثابت ہوا $\boxed{A \cup B = B \cup A}$

حل: (ii) قانون مبادلہ بلحاظ تقاطع

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $A \cap B = B \cap A$

$$\text{L.H.S} = A \cap B = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5\} = \{1, 3\}$$

$$\text{R.H.S} = B \cap A = \{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 3\}$$

لہٰذا L.H.S = R.H.S

پس ثابت ہوا $\boxed{A \cap B = B \cap A.}$

(B) قانون تلازم بلحاظ اتصال اور تقاطع

فرض کریں A،B اور C کوئی سے تین سیٹ ہیں

تو قانون تلازم بلحاظ اتصال ہے $\boxed{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C}$

اور قانون تلازم بلحاظ تقاطع ہے $\boxed{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C}$

مثال 2. اگر A = {1,2,3}، B= {2,3,4} اور C = {3,4,5} تو ثابت کریں

(i) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$

حل: (i) (قانون تلازم بلحاظ تقاطع) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$L.H.S = A \cap (B \cap C)$
$= \{1, 2, 3\} \cap (\{2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5\})$
$= \{1, 2, 3\} \cap \{3, 4\} = \{3\}$

$R.H.S = (A \cap B) \cap C$
$= (\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\}) \cap \{3, 4, 5\}$
$= \{2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$

لہٰذا $L.H.S = R.H.S$
پس ثابت ہوا $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

حل: (ii) (قانون تلازم بلحاظ اتصال) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$R.H.S = (A \cup B) \cup C$
$= (\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\}) \cup \{3, 4, 5\}$
$= \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$L.H.S = A \cup (B \cup C)$
$= \{1, 2, 3\} \cup (\{2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5\})$
$= \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4, 5\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

لہٰذا $L.H.S = R.H.S$
پس ثابت ہوا $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

1.2.2 قانون تقسیمی ثابت کرنا

اگر A، B اور C کوئی تین سیٹ ہیں تو تقاطع پر اتصال کا قانون تقسیمی ہے

$$\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$$

اور اتصال پر تقاطع کا قانون تقسیمی ہے

$$\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$$

مثال۔ اگر $A = \{1,2,3\}$، $B = \{2,4,6\}$ اور $C = \{2,3,6\}$ تو قانون تقسیمی ثابت کریں۔
(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

حل (i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$L.H.S = A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3\} \cup (\{2, 4, 6\} \cap \{2, 3, 6\})$
$= \{1, 2, 3\} \cup \{2, 6\} = \{1, 2, 3, 6\}.$
$R.H.S = (A \cup B) \cap (A \cup C) = (\{1,2,3\} \cup \{2, 4, 6\}) \cap (\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 6\})$
$= \{1, 2, 3, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 6\} = \{1, 2, 3, 6\}.$

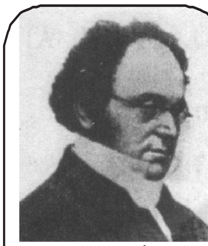
لہٰذا $L.H.S = R.H.S$
پس ثابت ہوا $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

حل (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$\text{L.H.S} = A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3\} \cap (\{2, 4, 6\} \cup \{2, 3, 6\})$$
$$= \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 6\} = \{2, 3\}.$$
$$\text{R.H.S} = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (\{1, 2, 3\} \cap \{2, 4, 6\}) \cup (\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 6\})$$
$$= \{2\} \cup \{2, 3\} = \{2, 3\}.$$

پس ثابت ہوا لہٰذا L.H.S = R.H.S $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1.2.3 ڈی مارگن کا قانون لکھیں اور ثابت کریں۔



آگست ڈی مارگن (1806-1871)
ایک برطانوی ریاضیدان جس نے ڈی مارگن کے قوانین بنائے۔

فرض کریں سیٹ A اور سیٹ B کائناتی سیٹ U کے تحتی سیٹ ہیں تو ڈی مورگن کے قوانین ہیں (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

مثال: اگر $U = \{1,2,3,\ldots,6\}$، $A = \{1,3,5\}$ اور $B = \{2,4,6\}$ تو کسی ایک ڈی مورگن کے قانون کی پڑتال کریں۔

حل: ڈی مورگن کا قانون ہے $(A \cap B)' = A' \cup B'$

اس لئے $A \cap B = \{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \{\ \}$

$$\text{L.H.S} = (A \cap B)' = U - (A \cap B) = \{1, 2, 3, \ldots, 6\} - \{\ \}$$
$$= \{1, 2, 3, \ldots, 6\}$$
$$A' = U - A = \{1, 2, 3, \ldots, 6\} - \{1, 3, 5\} = \{2, 4, 6\}$$
$$B' = U - B = \{1, 2, 3, \ldots, 6\} - \{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5\}$$
$$\text{R.H.S} = A' \cup B' = \{2, 4, 6\} \cup \{1, 3, 5\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

لہٰذا L.H.S = R.H.S

پس ثابت ہوا $(A \cap B)' = A' \cup B'$

فرض کریں $U = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$

ثابت کریں۔ **(i)** $(A \cup B)' = A' \cap B'$

یہاں

$A \cup B = \ldots\ldots$

$(A \cup B)' = \ldots\ldots$

$A' = \ldots\ldots$, $B' = \ldots\ldots$

$A' \cap B' \ldots\ldots$

$= \ldots\ldots$

$\therefore$ $= \ldots\ldots$

پس $= \ldots\ldots$

(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$A \cap B = \ldots\ldots$

$(A \cap B)' = \ldots$ $A' = \ldots\ldots$

$B' = \ldots\ldots$

$A' \cup B' = \ldots\ldots$

$= \ldots\ldots$

$= \ldots\ldots$

پس $= \ldots\ldots$

مشق 1.2

1. اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$، $B = \{1, 3, 5, 7\}$ اور $C = \{2, 4, 6, 8\}$ تو ثابت کریں

(i) قانون مبادلہ بلحاظ تقاطع اور اتصال (ii) قانون تلازم بلحاظ اتصال اور تقاطع
(iii) اتصال پر تقاطع کا قانون تقسیمی (iv) تقاطع پر اتصال کا قانون تقسیمی

2. اگر $P = \{a, b, c, d, e\}$، $Q = \{a, e, i, o, u\}$ اور $R = \{c, d, e, i\}$ تو ثابت کریں۔

(i) $P \cup Q = Q \cup P$ (ii) $P \cap Q = Q \cap P$
(iii) $P \cap (Q \cap R) = (P \cap Q) \cap R$ (iv) $P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$

3. اگر $U = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$، $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ اور $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
تو ثابت کریں۔ (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

4. اگر $P = \{x \mid x \in \mathbb{O} \wedge x \leqslant 11\}$, $Q = \{x \mid x \in \mathbb{P} \wedge 3 \leqslant x \leqslant 11\}$
$R = \{x \mid x \in \mathbb{E} \wedge x \leqslant 10\}$ تو قانون تقسیمی ثابت کریں۔

5. اگر $U = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 11\}$, $A = \{x \mid x \in \mathbb{E} \wedge 2 < x < 10\}$
$B = \{x \mid x \in \mathbb{P} \wedge 3 \leqslant x \leqslant 11\}$ تو ڈی مارگن کے قانون ثابت کریں۔

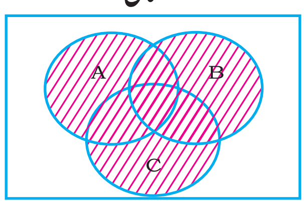

جان وین (1834-1923) ایک انگریز ریاضیدان جس نے وین اشکال کا انتخاب کیا۔

1.3 وین اشکال

1.3.1 تین متراکب سیٹوں کا اتصال اور تقاطع بذریعہ وین اشکال ظاہر کرنا

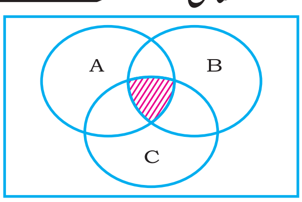
ہم جانتے ہیں کہ وین اشکال سیٹوں اور ان کے عوامل کو بذریعہ جیومیٹریکل اشکال سے ظاہر کرتے ہیں۔
یہاں ہم تین متراکب سیٹوں کا اتصال اور تقاطع بذریعہ وین اشکال سے ظاہر کیا ہے۔

اتصال



شکل (i)
سایہ دار حصہ تین سیٹوں اتصال کو ظاہر کرتا ہے

تقاطع



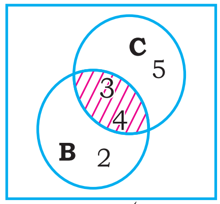
شکل (ii)
سایہ دار حصہ تقاطع کو ظاہر کرتا ہے

1.3.2 قانون تلازم اور قانون تقسیمی کو بذریعہ وین اشکال ثابت کرنا

قانون تلازم اور قانون تقسیمی کو وین اشکال کے ذریعے باآسانی ثابت کیا جاسکتا ہے جیسا کہ ذیل کی مثالوں میں واضح کیا گیا ہے۔

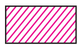
مثال. اگر $A = \{1, 2, 3\}$، $B = \{2, 3, 4\}$ اور $C = \{3, 4, 5\}$ تو بذریعہ وین اشکال ثابت کریں۔ (i) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

حل: **(i)** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$



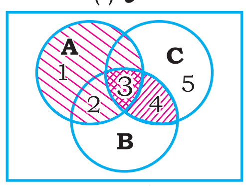
شکل (i)

شکل (i) کے مطابق $B \cap C = \{3, 4\}$

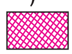
$B \cap C$ کو  سے ظاہر کیا ہے۔

L.H.S $= A \cap (B \cap C)$.

شکل (ii) کے مطابق $A \cap (B \cap C) = \{3\}$



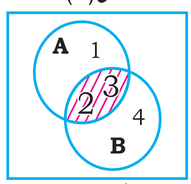
شکل (ii)

$A \cap (B \cap C)$ کو  سے ظاہر کیا ہے۔

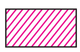
R.H.S $= (A \cap B) \cap C$

سيٽ A کي  ساں ظاھر کيو آھي.

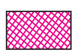
شکل (iii) کے مطابق $A \cap B = \{2, 3\}$

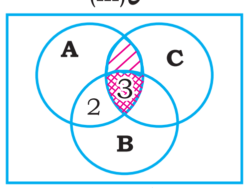


شکل (iii)

$(A \cap B)$ کو  سے ظاہر کیا ہے۔

شکل (iv) کے مطابق R.H.S $= (A \cap B) \cap C = \{3\}$

$(A \cap B) \cap C$ کو  سے ظاہر کیا ہے۔



شکل (iv)

$\therefore A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

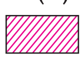
پس ثابت ہوا لہٰذا L.H.S = R.H.S

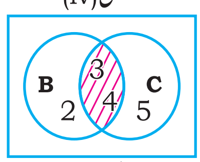
عملی کام: یہ قانون تلازم بلحاظ تقاطع ہے اسی طرح قانون تلازم بلحاظ اتصال ثابت کریں۔

حل: **(ii)** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

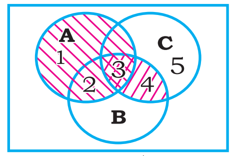
شکل (v) کے مطابق $B \cap C = \{3, 4\}$

L.H.S $= A \cup (B \cap C)$.

$B \cap C$ کو  سے ظاہر کیا ہے۔



شکل (v)

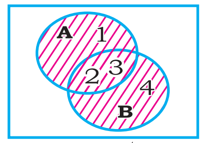


شکل (vi)

شکل (vi) کے مطابق $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\}$

$= (A \cup B) \cap (A \cup C)$

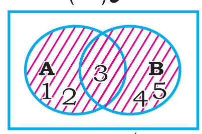
$A \cup (B \cap C)$ کو ، ، اور سے ظاہر کیا ہے۔



شکل (vii)

شکل (vii) کے مطابق $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

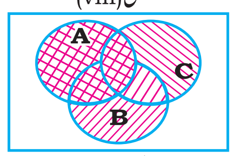
$A \cup B$ کو شیڈ سے ظاہر کیا ہے۔



شکل (viii)

شکل (viii) کے مطابق $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \cup C$ کو شیڈ سے ظاہر کیا ہے۔



شکل (ix)

شکل (ix) کے مطابق

$R.H.S = (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4\}.$

پس ثابت ہوا لہٰذا $L.HS = R.H.S$

$(A \cup B) \cap (A \cup C)$ کو شیڈ سے ظاہر کیا ہے۔

$\therefore A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

مشق 1.3

L.H.S

1. اگر $A = \{5,6,7\}$، $B = \{6,7,8\}$ اور $C = \{7,8,9\}$ تو

(i) $A \cup (B \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cap C)$ کو بذریعہ وین اشکال ظاہر کریں۔

2. اگر $P = 15$ سے چھوٹے قدرتی اعداد کا سیٹ $R = 15$ سے چھوٹے طاق قدرتی اعداد کا سیٹ

اور $Q = 15$ سے چھوٹے مفرد اعداد کا سیٹ تو ذیل میں دیئے گئے کو بذریعہ وین اشکال ظاہر کریں۔

(i) $P \cup (Q \cup R)$, (ii) $P \cap (Q \cap R)$, (iii) $P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$

3. اگر $A = \{a,b,c\}$, $B = \{b,c,d\}$, $C = \{c,d,e\}$ تو بذریعہ وین اشکال ثابت کریں۔

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4. اگر $D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 10\}$, $E = \{x \mid x \in \mathbb{W} \wedge x \leqslant 8\}$

$F = \{x \mid x \in \mathbb{P} \wedge x \leqslant 11\}$

تو بذریعہ وین اشکال ثابت کریں۔

(i) $D \cup (E \cap F) = (D \cup E) \cap (D \cup F)$ (ii) $D \cap (E \cup F) = (D \cap E) \cup (D \cap F)$

جائزہ مشق 1

1. درست جواب کا انتخاب کریں۔

(i) کون سا سیٹ $\mathbb{W}$ کا تحتی سیٹ ہے

(a) $\mathbb{Z}$ (b) $\mathbb{N}$ (c) $\mathbb{Q}$ (d) $\mathbb{E}$

(ii) $A = \{a,e,i,o,u\}$ کے تمام ممکنہ تحتی سیٹوں کی تعداد ________ ہے۔

(a) 8 (b) 16 (c) 32 (d) 64

(iii) کسی بھی تین سیٹ A، B اور C کے لئے، $(A \cup B) \cap (A \cup C) =$ ________

(a) $A \cap (B \cup C)$ (b) $A \cup (B \cup C)$ (c) $A \cup (B \cap C)$ (d) ان میں سے کوئی نہیں

(iv) وین اشکال میں، کائناتی سیٹ کو عام طور پر ________ سے ظاہر کرتے ہیں۔

(a) مثلث (b) مستطیل (c) دائرہ (d) ستارہ

2. اگر $A = \{x,y,z\}$ تو P (A) معلوم کریں

3. اگر $A = \{1,2,3\}$، $B = \{2,4,6\}$ اور $C = \{x \mid x \in \mathbb{W} \wedge x \leq 4\}$ تو ثابت کریں۔

(i) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(iv) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(v) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(vi) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4. اگر $U = \{1, 2, 3, \ldots 10\}$، $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ اور $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ تو ڈی مورگن کے قوانین ثابت کریں۔

5. درست جواب کا انتخاب کریں۔

(i) $A = \{2,4,6,8\}$، $B = \{1,3,5,7,9\}$ تو $A \cap B$ ہے۔

(a) $\{2, 4\}$ (b) $\{\ \}$ (c) $\{1, 3\}$ (d) $\{2, 9\}$

(ii) $A = \{0,2\}$، $B = \{1,3\}$ تو $A \cup B$ ہے

(a) $\{0, 2\}$ (b) $\{1, 3\}$ (c) $\{\ \}$ (d) $\{0, 1, 2, 3\}$

(iii) اگر $P = \{0,2,6\}$ تو P کا غیر واجب سیٹ ہے

(a) $\{0, 2\}$ (b) $\{0, 6\}$ (c) $\{0, 2, 6\}$ (d) $\{2, 6\}$

(iv) مندرجہ ذیل سیٹوں میں سے کون سے قوت سیٹ کو ظاہر کرتے ہیں اور ان کے اصل سیٹ لکھیں۔

(i) $\varnothing$ (ii) $\{\varnothing, x\}$ (iii) $\{\varnothing, \{x\}, \{y\}\}$

(iv) $\{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ (v) $\{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}\}$ (vi) $\{\varnothing\}$

خلاصہ

- سیٹ مختلف اشیاء کے واضح اجتماع کو کہتے ہیں۔
- اہم سیٹ: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q}, p \wedge q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
  $\mathbb{E} = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$, $\mathbb{O} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots\}$, $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$
- اگر سیٹ A کا ہر ممبر سیٹ B کا ممبر بھی ہو تو سیٹ A، سیٹ B کا تحتی سیٹ ہے۔
- سیٹ A کا کوئی بھی تحتی سیٹ واجب تحتی سیٹ کہلاتا ہے اگر وہ سیٹ کے برابر نہ ہو۔
- سیٹ A کا کوئی بھی تحتی سیٹ غیر واجب تحتی سیٹ کہلاتا ہے اگر وہ سیٹ کے برابر ہو۔
- A کے تمام ممکنہ تحتی سیٹوں کا سیٹ A کے 'قوت سیٹ' کہلاتا ہے۔ اُسے P(A) سے ظاہر کرتے ہیں۔
- خالی سیٹ ہر سیٹ کا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔
- قانون مبادلہ: (i) $A \cup B = B \cup A$ (ii) $A \cap B = B \cap A$
- قانون تلازم
  (i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  (ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- قانون تقسیمی
  (i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- قوانین ڈی مورگن
  (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- سیٹ اور ان کے عوامل کی بذریعہ جیومیٹریکل اشکال کے ذریعے ظاہر کرنے کو وین اشکال کہتے ہیں۔

مفت تقسیم کے لیے

یونٹ 2

حقیقی اعداد

2.1 غیر ناطق اعداد

2.1.1 غیر ناطق اعداد کی وضاحت

ہم اپنی روزمرہ زندگی میں باکثرت اعداد کا استعمال کرتے ہیں تقریباً ہر وہ عدد جو ہم سوچ سکتے ہیں وہ حقیقی عدد ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر: 0، $1-$، 12.59، $0.384-$، $\frac{3}{4}$، π وغیرہ، حقیقی اعداد ہیں۔ حقیقی اعداد کا سیٹ، ناطق اعداد اور غیر ناطق اعداد کے سیٹوں کا اتصال (یونین) ہوتے ہیں۔

اعداد $\frac{2}{3}$، $\frac{1}{2}$، $\frac{5}{1}$ اور $\frac{22}{7}$ ناطق اعداد ہیں اور یہ اعداد $\frac{p}{q}$ کی شکل میں بھی ظاہر کئے جاسکتے ہیں جب کہ p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$ ناطق اعداد کے سیٹوں کو $\mathbb{Q}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

غیر ناطق اعداد کو صحیح اعداد کی نسبت میں یعنی $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر نہیں کیا جاسکتا ہے۔

$\sqrt{8}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{2}$ اور π غیر ناطق اعداد کی مثالیں ہیں جسے $\mathbb{Q}'$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

غیر ناطق اعداد کی وضاحت اعشاری اعداد میں اس طرح کی جاسکتی ہے:

> غیر ناطق اعداد غیر مختتم اور غیر متوالی اعشاریہ ہوتے ہیں

2.1.2 ناطق اور غیر ناطق اعداد کو پہچاننا

آئیں مثالوں کی مدد سے ناطق اور غیر ناطق اعداد کو پہچانیں

اعداد $5\frac{2}{3}$، 4.75، 5، 0، $\sqrt{4}$، $2\sqrt{9}$، 1.9، 0.333، $\sqrt{49}-$، $3\frac{2}{3}$ ناطق اعداد ہیں۔

اعداد $\frac{\sqrt{2}}{5}$، $-3\sqrt{8}$، π، $\sqrt{7}$، $\sqrt{48}$، $\sqrt{122}$ وغیرہ غیر ناطق اعداد ہیں۔

$\sqrt{\frac{2}{5}}$ اور $\frac{1}{\sqrt{3}}$ غیر ناطق اعداد ہیں کیونکہ دونوں میں ان کے شمار کنندہ اور نسب نما صحیح اعداد نہیں ہیں۔

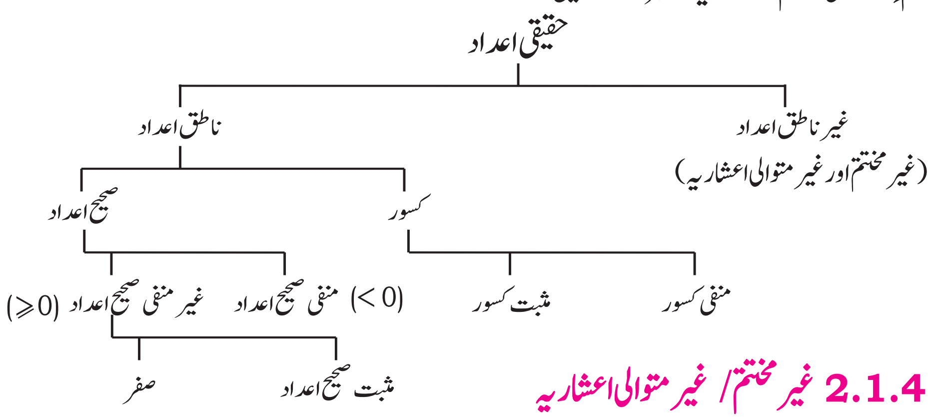
یعنی $\mathbb{Q}$ اور $\mathbb{Q}'$ غیر مشترک سیٹ ہیں۔اس لئے $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$

2.1.3 حقیقی اعداد کی وضاحت

حقیقی عدد ایک ایسی قیمت ہوتی ہے جسے عددی خط پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ ناطق اعداد $\mathbb{Q}$ اور غیر ناطق اعداد $(\mathbb{Q}')$ کا اتصال (یونین) حقیقی اعداد کہلاتا ہے اور اُسے $\mathbb{R}$ سے ظاہر کرتے ہیں جیسا کہ $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

یعنی $\mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \vee x \in \mathbb{Q}'\}$

ہم اِسے ڈائی گرام کے ذریعے ظاہر کر سکتے ہیں۔



2.1.4 غیر مختتم / غیر متوالی اعشاریہ

آئیں ذیل کی مثالوں پر غور کریں

مثال 1. $\frac{1}{3}$ کو اعشاریہ میں تبدیل کریں

حل:

$$\begin{array}{r|l} & 0.333\ldots \\ 3 & 10 \\ & -9 \\ & \quad 10 \\ & \quad -9 \\ & \qquad 10 \\ & \qquad -9 \\ & \qquad\ \ 1 \end{array}$$

لہٰذا $\frac{1}{3} = 0.333\ldots = 0.\overline{3}$

غیر مختتم اور متوالی ہے (جیسا کہ 3 بار بار لامتناہی دفعہ آ رہا ہے)

مثال 2. $-\frac{4}{7}$ کو اعشاریہ میں تبدیل کریں

حل:

$$\begin{array}{r|l} & -0.571428 \\ 7 & -40 \\ & +35 \\ & -50 \\ & \mp 49 \\ & -10 \\ & \mp 7 \\ & -30 \\ & \mp 28 \\ & -20 \\ & \mp 14 \\ & -60 \\ & \mp 56 \\ & 4 \end{array}$$

$$-\frac{4}{7} = -0.571428\ldots$$

نوٹ: تقسیم کے عمل میں اگر باقی صفر آئے تو عدد مختتم اعشاریہ کہلاتا ہے اور اگر باقی صفر نہ آئے تو عدد غیر مختتم اعشاریہ کہلاتا ہے۔

مثال 3. $\frac{1}{2}$ اور $-\frac{4}{5}$ کو اعشاریہ میں تبدیل کریں

حل: (i) $\frac{1}{2} = 0.5$، یہ مختتم اعشاریہ ہے۔ (ii) $-\frac{4}{5} = -0.8$ ، یہ بھی مختتم اعشاریہ ہے۔

پس ہر کسر خواہ وہ مختتم ہو یا غیر مختتم لیکن متوالی اعشاریہ ہے تو ایسی کسر ناطق عدد ہوتی ہے۔

ایسے اعداد جس کے نقطہ اعشاریہ میں ہندسے ایک جیسی ترتیب سے بار بار نہیں آرہے ہو جیسے $\sqrt{2} = 1.414213...$ ، $\sqrt{243} = 15.5884...$ اور $\pi = 3.1428$ وغیرہ غیر ناطق اعداد کہلاتے ہیں۔

مشق 2.1

A. ذیل میں سے ناطق اور غیر ناطق کو علیحدہ علیحدہ کریں۔

1. 35 **2.** $\sqrt{36}$ **3.** $-2\frac{1}{40}$ **4.** $2\sqrt{4}$ **5.** 6π **6.** $\frac{22}{7}$

7. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ **8.** $-\sqrt{1}$ **9.** $\frac{\pi}{5}$ **10.** $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ **11.** $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$ **12.** $\sqrt{11}$

B. ذیل کے ناطق اعداد میں سے مختتم اور غیر مختتم کی شناخت کریں۔

1. $\frac{1}{7}$ **2.** $\frac{2}{3}$ **3.** 0 **4.** $\frac{1}{11}$ **5.** $\frac{4}{3}$ **6.** $\frac{-1}{5}$

7. $\frac{-5}{6}$ **8.** 2256 **9.** $\frac{9}{10}$ **10.** $\frac{25}{26}$ **11.** $\frac{243}{100}$ **12.** $\frac{18750}{1000}$

2.2 مربع

کسی عدد کو خود اپنے آپ سے ضرب دینے سے جو عدد حاصل ہوتا ہے وہ مربع کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر: 2 کا مربع $2^2 = 2 \times 2 = 4$ ہے۔ بالکل اسی طرح a کا مربع $a^2 = a \times a$ ہے۔

2.2.1 ایک عدد کا مکمل مربع معلوم کرنا

ایک قدرتی عدد یا کثیر رقمی جو کسی دوسرے قدرتی عدد یا کثیر رقمی کا مربع ہو وہ مکمل مربع کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر $9 = 3^2$، لہٰذا 9 مکمل مربع ہے 3 کا۔ اور $16 = 4^2$، لہٰذا 16 مکمل مربع ہے 4 کا
اسی طرح $\frac{4}{25}$ مکمل مربع ہے $\frac{2}{5}$ کا اور 1.21 مکمل مربع ہے 1.1 کا۔ کیوں کہ $(1.1)^2 = 1.21$
لیکن 2 مکمل مربع نہیں $\sqrt{2}$ کا۔ کیوں کہ $\sqrt{2}$ ایک غیر ناطق عدد ہے اور 2 کے مفرد اجزائے ضربی نہیں حاصل ہو سکتے۔ اسی طرح صفر (0) بھی مکمل مربع نہیں (کیوں؟)

مثال 1. 11 اور 65 کے مکمل مربع معلوم کریں

حل: 11 کا مکمل مربع $= 11^2 = 11 \times 11 = 121$

65 کا مکمل مربع $= (65)^2 = 65 \times 65 = 4225$

نوٹ: ہم ناطق اعداد کا مکمل مربع تو معلوم کر سکتے ہیں لیکن غیر ناطق اعداد کا مکمل مربع نہیں معلوم کر سکتے۔
مثال کے طور پر $2 = (\sqrt{2})^2$ یہاں 2 مربع ہے لیکن مکمل مربع نہیں۔
$\pi^2 = (\pi)^2$ یہاں π^2 مکمل مربع نہیں ہیں۔

2.2.2 قدرتی اعداد کے مکمل مربع کے لئے نمونہ ترتیب دینا

آئیں قدرتی اعداد کو جمع کر کے قدرتی اعداد کا مکمل مربع حاصل کرنے کا نمونہ ترتیب دیں۔

پہلا قدرتی عدد 1 ہے اس لئے $1^2 = 1 \times 1 = 1$

اب دوسرا قدرتی عدد 2 ہے اس لئے $2^2 = 2 \times 2 = 4 = 1 + 1 + 2$ یا $1 + 2 + 1 = 2^2$

اسی طرح $3^2 = 3 \times 3 = 9 = 3 + 2 + 2 + 1 + 1$ یا $1 + 2 + 3 + 2 + 1$

پس مکمل مربع کے مطلوبہ نمونہ بذریعہ جمع نیچے دیا گیا ہے

$1^2 = \mathbf{1} = 1$

$2^2 = 1 + \mathbf{2} + 1 = 4$

$3^2 = 1 + 2 + \mathbf{3} + 2 + 1 = 9$

$4^2 = 1 + 2 + 3 + \mathbf{4} + 3 + 2 + 1 = 16$

$5^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + \mathbf{5} + 4 + 3 + 2 + 1 = 25$

$6^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \mathbf{6} + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$

$7^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \mathbf{7} + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 49$

اور یوں۔۔۔۔

ہم کسی قدرتی عدد کا مکمل مربع اُس عدد کی تعداد کے مطابق شروع کے مثبت طاق اعداد کو جمع کر کے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

$1^2 = 1$

$2^2 = 1 + 3 = 4$ (پہلے دو طاق اعداد کا مجموعہ)

$3^2 = 1 + 3 + 5 = 9$ (پہلے تین طاق اعداد کا مجموعہ)

$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$ (پہلے چار طاق اعداد کا مجموعہ)

$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ (پہلے پانچ طاق اعداد کا مجموعہ)

$6^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 26$ (پہلے چھ طاق اعداد کا مجموعہ)

$7^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$ (پہلے سات طاق اعداد کا مجموعہ)

مشق 2.2

A. ذیل کا مکمل مربع معلوم کریں۔

1. 5 **2.** 13 **3.** 19 **4.** 39 **5.** 45
6. 58 **7.** 63 **8.** 79 **9.** 97 **10.** 108

B. ذیل کے درمیان تمام مکمل مربع معلوم کریں۔

1. 10 اور 30 **2.** 20 اور 50 **3.** 40 اور 70 **4.** 70 اور 90

C. ذیل کے مکمل مربع کے لئے جمع کا نمونہ لکھیں۔

1. 7^2 **2.** 9^2 **3.** 15^2 **4.** 11^2 **5.** 13^2
6. 8^2 **7.** 12^2 **8.** 16^2 **9.** 20^2 **10.** 27^2

2.3 جذرالمربع

جذرالمربع، مکمل مربع معلوم کرنے کا اُلٹ عمل ہے۔ مثال کے طور پر 4 کا مکمل مربع 16 ہوتا ہے جسے $16 = 4^2$، اس لئے 16 کا جذرالمربع 4 ہے۔

ہم جذرالمربع کے لئے علامت $\sqrt{}$ استعمال کرتے ہیں جیسا کہ $\sqrt{16} = 4$۔

نوٹ: وہ عدد جس کو خود اس سے ہی ضرب دے کر مکمل مربع معلوم کرتے ہیں وہ عدد جذرالمربع ہوتا ہے۔

2.3.1 جذرالمربع معلوم کریں

(i) قدرتی عدد (ii) کسرِعام (iii) اعشاریہ کا بذریعہ مفرد تجزی اور تقسیم کے طریقے سے جذرالمربع معلوم کرنا

ہم پچھلی جماعت میں جذرالمربع بذریعہ مفرد تجزی اور تقسیم کے طریقے سے معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں۔ آئیں اس کی مشق کریں۔

(i) قدرتی اعداد کا جذر المربع

مثال 1. ذیل کا بذریعہ مفرد تجزی اور تقسیم کے طریقے سے جذر معلوم کریں (i) 625 (ii) 1,600

حل: (i) 625 کا جذر

مفرد تجزی کا طریقہ

5	625
5	125
5	25
5	5
	1

$$625 = \underline{5 \times 5} \times \underline{5 \times 5}$$

یا $625 = 25 \times 25$

یا $625 = (25)^2$

یا $\sqrt{625} = 25$

تقسیم کا طریقہ

	25
2	$\hat{6}\overline{25}$
+ 2	4
45	225
+ 5	225
50	0

$1 \times 1 = 1$

$2 \times 2 = 4$

$3 \times 3 = 9$

$44 \times 4 = 176$

$45 \times 5 = 225$

$46 \times 6 = 276$

لہٰذا $\sqrt{625} = 25$

حل: (ii) 1,600 کا جذر

مفرد تجزی کا طریقہ

2	1600
2	800
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
5	5
	1

$$1600 = \underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{5\times5}$$

یا $\sqrt{1600} = \sqrt{\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{5\times5}}$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40$

پس $\sqrt{1600} = 40$

تقسیم کا طریقہ

	40
4	1600
+ 4	16
80	0000
+ 0	0000
80	0

$2 \times 2 = 4$

$3 \times 3 = 9$

$4 \times 4 = 16$

صفر کے جوڑے میں سے ایک صفر جذر میں لگائیں۔

لہٰذا $\sqrt{1600} = 40$

(ii) کسرِ عام کا جذر

مثال 2. ذیل کا جذر بذریعہ مفرد تجزی اور تقسیم کے طریقے سے معلوم کریں۔ (i) $\frac{9}{16}$ (ii) $\frac{49}{64}$

حل: (i) $\frac{9}{16}$ کا جذر

مفرد تجزی کا طریقہ

شمار کنندہ: 9

3	9
3	3
	1

$9 = 3 \times 3$

$\sqrt{9} = \sqrt{3 \times 3} = 3$ یا

نسب نما: 16

2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$\therefore \sqrt{16} = \sqrt{\underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}}$

$\sqrt{16} = 2 \times 2 = 4$

تقسیم کا طریقہ

شمار کنندہ: 9

$1 \times 1 = 1$

$2 \times 2 = 4$

$3 \times 3 = 9$

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 3 \\ \hline 3 & \ \ \overline{9} \\ +3 & \ \ 9 \\ \hline 6 & \ \ 0 \end{array}$$

لہٰذا $\sqrt{9} = 3$

نسب نما: 16

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 4 \\ \hline 4 & \ \ \overline{16} \\ +4 & \ \ 16 \\ \hline 8 & \ \ 0 \end{array}$$

لہٰذا $\therefore \sqrt{16} = 4$

اس لئے $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$

حل: (ii) $\frac{49}{64}$ کا جذر

مفرد تجزی کا طریقہ

شمار کنندہ: 49

7	49
7	7
	1

$49 = 7 \times 7$

$\sqrt{49} = \sqrt{7 \times 7}$

$\sqrt{49} = 7$

نسب نما: 64

2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$64 = 2\times2\times2\times2\times2\times2$

$\therefore \sqrt{64} = \sqrt{\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}}$

$= 2 \times 2 \times 2 = 8$

تقسیم کا طریقہ

شمار کنندہ: 49

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 7 \\ \hline 7 & \ \ \overline{49} \\ +7 & \ \ 49 \\ \hline 14 & \end{array}$$

$\therefore \sqrt{49} = 7$

نسب نما: 64

$6 \times 6 = 36$

$7 \times 7 = 49$

$8 \times 8 = 64$

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 8 \\ \hline 8 & \ \ \overline{64} \\ +8 & \ \ 64 \\ \hline 16 & \ \ 0 \end{array}$$

$\therefore \sqrt{64} = 8$

اس لئے $\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \frac{7}{8}$

(iii) اعشاریہ کا جذر

مثال 3. ذیل کے جذر بذریعہ مفرد تجزی اور تقسیم کے طریقہ سے معلوم کریں۔

(i) 0.01 (ii) 1.21 (iii) 0.64

حل: (i) 0.01 کا جذر معلوم کرنا

تقسیم کا طریقہ

$$\begin{array}{r|l} & \;\;0.1 \\ \hline 1 & \hat{0}.\overline{01} \\ +1 & \;\;\;\;\;1 \\ \hline 2 & \;\;\;\;\;0 \end{array}$$

لہٰذا $\sqrt{0.01} = 0.1$

مفرد تجزی کا طریقہ

$$0.01 = \frac{0.01}{100} = \frac{1}{100}$$

شمار کنندہ: 1 $\quad \sqrt{1\times1} = 1$

نسب نما: 100

$$\begin{array}{r|l} 2 & 100 \\ \hline 2 & 50 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$100 = 2\times2\times5\times5$$
$$\sqrt{100} = \sqrt{\underline{2\times2}\times\underline{5\times5}}$$
$$= 2\times5 = 10$$

اس لئے
$$\sqrt{0.01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10} = 0.1$$

حل: (ii) 1.21 کا جذر معلوم کرنا

تقسیم کا طریقہ

$$\begin{array}{r|l} & \;\;1.1 \\ \hline 1 & \hat{1}.\overline{21} \\ +1 & 1 \\ \hline 21 & 021 \\ +1 & \;\;21 \\ \hline 22 & \;\;\;0 \end{array}$$

لہٰذا $\sqrt{1.21} = 1.1$

مفرد تجزی کا طریقہ

$$1.21 = \frac{1.21}{100} = \frac{121}{100}$$

شمار کنندہ: 121

$$\begin{array}{r|l} 11 & 121 \\ \hline 11 & 11 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$121 = 11\times11$$

یا $\sqrt{121} = \sqrt{\underline{11\times11}} = 11$

نسب نما: 100

$$\begin{array}{r|l} 2 & 100 \\ \hline 2 & 50 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$100 = 2\times2\times5\times5$$
$$\sqrt{100} = \sqrt{\underline{2\times2}\times\underline{5\times5}}$$
$$\therefore \sqrt{100} \quad 2\times5 = 10$$

اس لئے
$$\sqrt{1.21} = \sqrt{\frac{121}{100}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{11\times11}}{\sqrt{10\times10}} = \frac{11}{10} = 1.1$$

(iii) 0.64 کا جذر معلوم کرنا (طلبہ اسے خود حل کرینگے)

مشق 2.3

A. بذریعہ طریقہ مفرد تجزی جذر معلوم کریں۔

1. 961　**2.** 1296　**3.** 344569　**4.** 817216

5. $\frac{81}{121}$　**6.** $\frac{5929}{9604}$　**7.** $\frac{1764}{7744}$　**8.** $1\frac{984}{14641}$

9. 249.64　**10.** 0.4096　**11.** 2981.16　**12.** 131.1025

B. بذریعہ طریقہ تقسیم جذر معلوم کریں۔

1. 1024　**2.** 14161　**3.** 996004　**4.** 10329796

5. $\frac{169}{289}$　**6.** $\frac{1225}{2809}$　**7.** $\frac{29241}{55696}$　**8.** $1\frac{1089}{1936}$

9. 648.7209　**10.** 180.9025　**11.** 727.9204　**12.** 7613.609536

2.3.2 ایسے عدد کا جذر معلوم کرنا جو مکمل مربع نہ ہو

تمام قدرتی اعداد اور کثیر رقمی مکمل مربع نہیں ہوتے ہیں۔

مثال کے طور پر $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{6.4}$، $\sqrt{2.5135}$

ایک مکمل مربع عدد کا جذر المربع ناطق عدد ہوتا ہے اور کسر عام کا جذر المربع غیر ناطق عدد ہوتا ہے۔

ایسے اعداد کا جذر المربع نقطہ اعشاریہ تک معلوم کرنے کے لئے تقسیم کا طریقہ استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ غیر ناطق اعداد ہوتے ہیں۔

مثال 1. 3 کا جذر دو نقطہ اعشاریہ تک معلوم کریں۔

حل: جیسا کہ 3 میں نقطہ اعشاریہ نہیں ہیں لہٰذا ہم مطلوبہ نقطہ اعشاریہ حاصل کرنے کے لئے صفر کے دو جوڑے لگائیں گے۔

	1.73
1	$\hat{3}.\overline{00}\,\overline{00}$
+ 1	1
27	200
+ 7	189
343	1100
+ 3	1029
346	71

$26 \times 6 = 156$

$27 \times 7 = 189$

$28 \times 8 = 224$

$342 \times 2 = 684$

$343 \times 3 = 1029$

$344 \times 4 = 1376$

اس لئے　$\sqrt{3} = 1.73$　(دو نقطہ اعشاریہ تک)

مثال 2. 40.13 کا جذر تین نقطہ اعشاریہ تک معلوم کریں۔

حل:

	6.334
6	$\overline{40}.\overline{13}\,\overline{00}\,\overline{00}$
+ 6	36
123	413
+ 3	369
1263	4400
+ 3	3789
12664	61100
+ 4	50656
12668	10444

$122 \times 2 = 244$

$123 \times 3 = 369$

$124 \times 4 = 496$

$1262 \times 2 = 2524$

$1263 \times 3 = 3789$

$1264 \times 4 = 5056$

$12663 \times 3 = 37989$

$12664 \times 4 = 50656$

$12665 \times 5 = 63325$

اس لئے

$\sqrt{40.13} = 6.334$　(تین نقطہ اعشاریہ تک)

مشق 2.4

A. ذیل کا جذر دو نقطہ اعشاریہ تک معلوم کریں۔

1. 2 **2.** 5 **3.** 13 **4.** 141 **5.** 180
6. 2.5 **7.** 152.7696 **8.** 0.0143 **9.** 23.085 **10.** 125.08

B. ذیل کا جذر تین نقطہ اعشاریہ تک معلوم کریں

1. 6 **2.** 8 **3.** 11 **4.** 155 **5.** 205
6. 7.3 **7.** 125.79 **8.** 1468.9 **9.** 129048.27 **10.** 3355.30

2.3.3 مکمل مربع کے جذر میں ہندسوں کی تعداد معلوم کرنے کے لئے اصول کا استعمال

مکمل مربع کے جذر میں ہندسوں کی تعداد بغیر جذر معلوم کئے ذیل کے اصول کے ذریعے معلوم کی جاسکتی ہے۔
فرض کریں کہ مکمل مربع میں ہندسوں کی تعداد n ہے تو اس کا جذر $\frac{n}{2}$ ہندسوں پر مشتمل ہوتا ہے جب n جفت ہو، اور $\frac{n+1}{2}$ ہندسوں پر مشتمل ہوتا ہے جب n طاق ہو۔

آئیں اِسے ذیل کی مثالوں کی مدد سے سمجھتے ہیں۔

مثال 1. 240100 کے جذر میں ہندسوں کی تعداد معلوم کریں اور جواب کی تصدیق بھی کریں۔

حل: 240100 میں ہندسوں کی تعداد 6 ہے جو کہ جفت عدد ہے
لہٰذا 240100 کے جذر میں ہندسوں کی تعداد ہوگی

$$\frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

تصدیق

$$\begin{array}{r|l} & 490 \\ \hline 4 & \overline{24}\,\overline{01}\,\overline{00} \\ +4 & 16 \\ \hline 89 & 801 \\ +9 & 801 \\ \hline 980 & 00000 \\ 980 & 0 \end{array}$$

پس

$\sqrt{240100} = 490$ جس میں 3 ہندسے ہیں۔

مثال 2. 34,596 کے جذر میں ہندسوں کی تعداد معلوم کریں اور جواب کی تصدیق بھی کریں۔

حل: جیسا کہ 34,596 میں ہندسوں کی تعداد 5 ہے

جو کہ طاق ہے لہٰذا 34,596 کے جذر میں

ہندسوں کی تعداد ہوگی $\frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

لہٰذا $\sqrt{34596} = 186$ جس میں 3 ہندسے ہیں۔

تصدیق

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 186 \\ \hline 1 & \hat{3}\overline{45}\,\overline{96} \\ +1 & 1 \\ \hline 28 & 245 \\ +8 & 224 \\ \hline 366 & \ \ 2196 \\ +6 & \ \ 2196 \\ \hline 372 & \ \ \ \ 0 \end{array}$$

مشق 2.5

ذیل میں دیئے گئے مکمل مربعوں کے جذر میں ہندسوں کی تعداد معلوم کریں۔

1. 8649	**2.** 250000	**3.** 322624	**4.** 614656
5. 432964	**6.** 81018001	**7.** 43388569	**8.** 3474748809
9. 73547776	**10.** 33942276	**11.** 7913169936	**12.** 935566751

2.3.4 جذرالمربع پر مشتمل روزمرہ زندگی کے مسائل حل کرنا

مثال 1. ایک کمرے کے فرش میں 1,089 ماربل اس طرح لگائے گئے ہیں کہ ہر قطار میں اتنے ہی ماربل ہیں جتنی کہ کل قطاریں ہیں۔ تو ماربل کی قطاریں معلوم کریں۔

حل: کیوں کہ ہر قطار میں اتنے ہی ماربل ہیں جتنی کہ قطاریں ہیں

لہٰذا ہمیں 1,089 جذر معلوم کرنا ہے

کیوں کہ $\sqrt{1089} = 33$

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 33 \\ \hline 3 & \overline{10}\,\overline{89} \\ +3 & 9 \\ \hline 63 & 189 \\ +3 & 189 \\ \hline 66 & \ \ 0 \end{array}$$

لہٰذا ماربل کی 33 قطاریں ہیں اور ہر قطار میں 33 ماربل ہیں۔

مثال 2. ایک مربعے علاقے کا رقبہ 4,225 مربع میٹر ہے تو اس کے ضلعے کی لمبائی معلوم کریں۔

حل: جیسا کہ مربع کا رقبہ = $(\text{ضلعے کی لمبائی})^2$

لہٰذا ضلعے کی لمبائی = $\sqrt{\text{مربعے علاقے کا رقبہ}} = \sqrt{4225} = 65$

پس ضلعے کی لمبائی = 65 میٹر ہے

	65
6	$\overline{42}\,\overline{25}$
+ 6	36
125	625
+ 5	625
130	0

مثال 3. 124 کو مکمل مربع بنانے کے لئے وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کریں

(i) جس کو 124 سے تفریق کریں (ii) جس کو 124 میں جمع کریں

(iii) جس کو 124 سے ضرب دیں۔

حل: آئیں نامکمل مربعے عدد 124 کا جذر معلوم کریں۔

باقی مطلوبہ چھوٹے سے چھوٹا عدد ہو گا، جسے تفریق کرینگے

	11
1	$\hat{1}\,\overline{24}$
+ 1	1
21	24
+ 1	21
22	3

(i) پس 3 مطلوبہ چھوٹے سے چھوٹا عدد جسے 124 میں سے تفریق کیا جائے تو مکمل مربع حاصل ہوتا ہے

جیسے $124 - 3 = 121$

(ii) جیسا کہ $124 = 11^2 + 3$ لہٰذا چھوٹے سے چھوٹا عدد 11 میں 1 جمع کرنے سے جواب 12 ہو گا جس

کا مکمل مربع 144 ہے جو کہ 124 سے 20 زیادہ ہے

پس $20 + 124 = 12 \times 12 = 144$ جو کہ مکمل مربع ہے۔

(iii) 124 کے اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں۔

$$124 = 2 \times 2 \times 31$$

اس میں 31 جوڑے کی صورت میں نہیں ہے

لہٰذا 124 کو 31 سے ضرب دیا جائے تو وہ

مکمل مربع بن جائے گا۔

2	124
2	62
31	31
	1

لہٰذا

مشق 2.6

1. طلبہ کی پارٹی کے لئے چندہ جمع کیا گیا ہر طلبہ نے اتنا ہی چندہ دیا جتنی کہ طلبہ کی کل تعداد تھی اگر چندے کی کل رقم 8,464 روپے جمع ہوئی تو ہر ایک طلبہ نے کتنا چندہ دیا۔

2. مربعے علاقے کا رقبہ 1,081 مربع میٹر ہے۔ تو اس کے ضلع کی لمبائی معلوم کریں۔

3. ایک اسکول کی اسمبلی میں 1,129 طلبہ اس طرح کھڑے ہوئے ہیں کہ ہر قطار میں اتنے ہی طلبہ ہیں جتنی کہ کل قطاریں ہیں تو قطاروں کا مکمل مربع بنانے کے لئے کتنے طلبہ کو نکالنا پڑے گا۔

4. مستطیلی علاقے کا رقبہ 1,832 مربع میٹر ہے اگر اُس کی چوڑائی اُس کی لمبائی کا نصف ہے تو مستطیلی علاقے کی لمبائی معلوم کریں۔

5. مربعی علاقے کا رقبہ 390,625 مربع میٹر ہے۔ اس کے تمام اطراف باڑ لگانے کے لئے درکار تار کی لمبائی معلوم کریں۔

2.4 مکعب اور جذر المکعب

2.4.1 مکعب اور مکمل مکعب کی پہچان

(i) مکعب: مکعب وہ عدد ہوتا ہے جسے قوت 3 میں ظاہر کرتے ہیں اور اس کا مطلب ہے کہ عدد کو خود اپنے آپ سے 3 دفعہ ضرب دینا:

مثالیں: $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ ، $1 \times 1 \times 1 = 1^3 = 1,$

$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ ، $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27,$

$6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$ ، $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125,$

اس کا مطلب ہے 1 کا مکعب 1 ہے، 2 کا مکعب 8 ہے، 3 کا مکعب 27، 4 کا مکعب 64، 5 کا مکعب 125 اور 6 کا مکعب 216 ہے۔

(ii) مکمل مکعب: یہ وہ عدد ہوتا ہے جو کسی صحیح عدد کو خود اپنے آپ سے تین دفعہ ضرب دینے سے آتا ہے یا یہ وہ صحیح عدد کی جو کسی صحیح عدد کی قوت تین ہے۔

مثالیں: $7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$ ، $8^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$ ، $9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729,$

لہٰذا 1، 8، 27، 64، 125، 216، 343، 512، 729 اور 1000 بالترتیب 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9 اور 10 کے مکمل مکعب ہیں۔

اسی طرح ہم ناطق اعداد کے بھی مکمل مکعب معلوم کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر $\frac{8}{27} = \frac{2\times2\times2}{3\times3\times3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

$$(0.5)^3 = 0.5\times0.5\times0.5 = 0.125$$

اس ہی طرح سے ہم اعشاریہ کے بھی مکمل مکعب معلوم کر سکتے ہیں جیسے 1.1، 2.5 وغیرہ۔

(i) 1.1 کا مکمل مکعب $\quad 1.331 = (1.1)\times(1.1)\times(1.1) = (1.1)^3$

(ii) 2.5 کا مکمل مکعب $\quad 15.625 = (2.5)\times(2.5)\times(2.5) = (2.5)^3$

ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\frac{8}{27}$، 0.125، 1.331 اور 15.625 وغیرہ مکمل مکعب ہیں۔

نوٹ: غیر ناطق اعداد کے مکمل مکعب معلوم نہیں کر سکتے۔

مثال 1. بغور مشاہدہ کریں کہ یہ مکمل مکعب ہیں یا نہیں

(i) 1,728 $\qquad$ (ii) $5\frac{23}{64}$ $\qquad$ (iii) 13.824

حل: ہم ان کا مشاہدہ مفرد تجزی کر کے کر سکتے ہیں۔

سب سے پہلے ہم ذیل کی مفرد تجزی معلوم کرتے ہیں جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے۔

2	1728
2	864
2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

(i)

$$1728 = \underline{2\times2\times2}\times\underline{2\times2\times2}\times\underline{3\times3\times3}$$

$$= 1728 = 2^3\times2^3\times3^3 = (2\times2\times3)^3 = 12^3$$

لہٰذا 1,728 مکمل مکعب ہے 12 کا

(ii)

$$5\frac{23}{64} = \frac{5\times64+23}{64} = \frac{320+23}{64} = \frac{343}{64}$$

$$\frac{343}{64} = \frac{7\times7\times7}{4\times4\times4} = \left(\frac{7}{4}\right)^3 = \left(1\frac{3}{4}\right)^3$$

لہٰذا $5\frac{23}{64}$ مکمل مکعب ہے $1\frac{3}{4}$ کا۔

(iii)

شمار کنندہ

2	13824
2	6912
2	3456
2	1728
2	864
2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

نسب نما

2	1000
2	500
2	250
5	125
5	25
5	5
	1

$$13.824 = \frac{13824}{1000} = \frac{13824}{1000} = \frac{13.824}{1000}$$

$$= \frac{(2\times2\times2)\times(2\times2\times2)\times(2\times2\times2)\times(3\times3\times3)}{(2\times2\times2)\times(5\times5\times5)}$$

$$= \frac{2^3\times2^3\times2^3\times3^3}{2^3\times5^3}$$

$$= \frac{(2\times2\times2\times3)}{(2\times5)^3} = \left(\frac{24}{10}\right)^3 = (2.4)^3$$

پس 13.824 مکمل مکعب ہے 2.4 کا

مشق 2.7

A. ذیل کے مکعب معلوم کریں۔

1. 10 **2.** 20 **3.** 30 **4.** 40 **5.** 50 **6.** 60
7. 8 **8.** 12 **9.** 15 **10.** 18 **11.** 24 **12.** 25

B. ذیل کی کسور کی مکمل مکعب معلوم کریں۔

1. $\frac{1}{2}$ **2.** $\frac{2}{3}$ **3.** $\frac{3}{4}$ **4.** $\frac{4}{5}$ **5.** $1\frac{1}{3}$ **6.** $2\frac{1}{2}$
7. $1\frac{1}{4}$ **8.** $2\frac{1}{6}$ **9.** $1\frac{1}{10}$ **10.** $2\frac{3}{20}$ **11.** $1\frac{1}{9}$ **12.** $3\frac{1}{3}$

C. ذیل کے اعشاریہ کے مکمل مکعب معلوم کریں۔

1. 0.4 **2.** 0.9 **3.** 1.2 **4.** 1.6 **5.** 2.1 **6.** 2.5
7. 0.01 **8.** 0.02 **9.** 0.05 **10.** 1.12 **11.** 1.05 **12.** 1.01

D. بغور مشاہدہ کریں کہ ذیل میں دیئے گئے مکمل مکعب ہیں یا نہیں

1. 512 **2.** 729 **3.** 3375 **4.** 1728 **5.** $\frac{27}{64}$ **6.** $\frac{64}{125}$ **7.** 4096
8. 5832 **9.** 9261 **10.** 27000 **11.** 32768 **12.** 39304 **13.** 1.728

2.4.2 عدد کا جذر المکعب معلوم کرنا جو مکمل مکعب ہو

ہم جانتے ہیں کہ $8 = 2 \times 2 \times 2 = (2)^3$ اس کا مطلب ہے 2 کا مکمل مکعب 8 ہے یا ہم کہہ سکتے ہیں کہ 8 کا جذر المکعب 2 ہے۔

اس کو یوں لکھا جا سکتا ہے $\sqrt[3]{8} = 2$ یا $(8)^{1/3} = 2$

اس ہی طرح ہم کسی بھی مکمل مکعب کا جذر المکعب بذریعہ مفرد تجزی معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال: (1) 1,000 (2) 216 (3) 729 کے جذر المکعب معلوم کریں۔

حل: **(1)** $1,000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$

اس لئے $\sqrt[3]{1000} = 10$ یا $(1,000)^{1/3} = 10$

حل: (2)

$216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

$216 = 2^3 \times 2^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3$

اس لئے

$\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6$ یا $(216)^{\frac{1}{3}} = (6^3)^{\frac{1}{3}} = 6$

حل: (3)

$729 = (3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3)$

$= 3^3 \times 3^3 = (3 \times 3)^3 = 9^3$

لہٰذا

$\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{9^3} = 9$ یا $(729)^{\frac{1}{3}} = (9^3)^{\frac{1}{3}} = 9$

2.4.3 اعداد کے مکعب کی خصوصیات کو پہچاننا

ذیل میں کچھ اعداد کے مکعب کی خصوصیات مثالوں کے ساتھ دی گئی ہیں۔

(i) مثبت عدد کا مکعب ہمیشہ مثبت ہوتا ہے مثلاً $2^3 = 8, \quad 5^3 = 125$

(ii) منفی عدد کا مکعب ہمیشہ منفی ہوتا ہے مثلاً $(-3)^3 = -27, \quad (-6)^3 = -216$

(iii) جفت عدد کا مکعب ہمیشہ جفت ہوتا ہے مثلاً $2^3 = 8, \quad 4^3 = 64$

(iv) طاق عدد کا مکعب ہمیشہ طاق ہوتا ہے مثلاً $3^3 = 27, \quad 5^3 = 125$

(v) مکعب تقسیمی خاصیت بلحاظ (a) ضرب اور (b) تقسیم کی تشفی کرتا ہے

مثلاً **(a)** $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3}, \left(\frac{6}{7}\right)^3 = \frac{6^3}{7^3}$ **(b)** $(2\times3)^3 = 2^3\times3^3, \ (8\times9)^3 = 8^3\times9^3$

(vi) مکعب عدد مکمل مکعب ہوتا ہے۔ ناطق اعداد کا مکعب ہمیشہ ناطق اعداد ہوتا ہے اور غیر ناطق اعداد کا مکعب غیر ناطق اعداد ہوتا ہے۔ مثلاً $7^3 = 343$، $9^3 = 729$

یوں 343، 729 اور 1728 مکمل مکعب ہیں۔

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\ \sqrt[3]{b}, \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

مشق 2.8

A. ذیل کے جذر المکعب معلوم کریں۔

1. 64 **2.** 343 **3.** 1331 **4.** 512 **5.** 729

6. 74088 **7.** 3375 **8.** 13824 **9.** 15625 **10.** 35937

11. $\frac{1}{8}$ **12.** $2\frac{10}{27}$ **13.** $1\frac{61}{64}$ **14.** $1\frac{91}{125}$ **15.** $\frac{343}{729}$

B. مثالوں کی مدد سے ثابت کریں کہ

(i) مثبت عدد کا مکعب ہمیشہ مثبت ہوتا ہے
(ii) منفی عدد کا مکعب ہمیشہ منفی ہوتا ہے
(iii) جفت عدد کا مکعب ہمیشہ جفت ہوتا ہے
(iv) طاق عدد کا مکعب ہمیشہ طاق ہوتا ہے

C. ثابت کریں۔

1. $(3 \times 4)^3 = 3^3 \times 4^3$ **2.** $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3}$ **3.** $(2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$

4. $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3}$ **5.** $(4\times5)^3=4^3\times5^3=4^3\times5^3$ **6.** $(10\times20)^3=10^3\times20^3$

7. $\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5^3}{7^3}$ **8.** $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3}$ **9.** $(5\times8)^3=5^3\times 8^3$

جائزہ مشق 2

1. ہر عبارت کے لئے تین جوابات دیئے گئے، درست جواب پر دائرہ لگائیں۔

(i) حقیقی اعداد ہوتے ہیں

(a) ناطق اور غیر ناطق کا فرق
(b) ناطق اور غیر ناطق کا تقاطع
(c) ناطق اور غیر ناطق کا اتصال (یونین)

(ii) 100 کے مطلق کونسی بات درست نہیں ہے

(a) مکمل عدد (b) ناطق عدد (c) غیر ناطق عدد

(iii) ذیل میں سے کونسا مکمل مربع ہے

(a) 121 (b) 1.21 (c) 12.1

(iv) 4.9 کا مربع ہے

(a) 4.90 (b) 24.01 (c) 240.0

(v) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = ?$

(a) $\frac{9}{5}$ (b) $\frac{3}{25}$ (c) $\frac{9}{25}$

(vi) $1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1 = ?$

(a) 8^2 (b) 9^2 (c) 7^2

(vii) اگر مربع کی طرف 0.6 میٹر ہے تو اُس کا رقبہ ہوتا ہے

(a) $0.36m^2$ (b) $3.6m^2$ (c) $36m^2$

(viii) $\sqrt{.04} = ?$

(a) .02 (b) 2.0 (c) 0.2

(ix) $\sqrt{1^2 \times 4^2} = ?$

(a) 4 (b) 14 (c) 41

(x) $\sqrt[3]{125} = ?$

(a) 3 (b) 4 (c) 5

(xi) $\sqrt{\frac{4}{9}} = ?$

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{2}{9}$ (c) $\frac{4}{3}$

(xii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = ?$

(a) $\frac{a}{b}$ (b) $\sqrt{\frac{b}{a}}$ (c) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

2. ذیل کے اعداد کے جذرالمربع میں ہندسوں کی تعداد معلوم کریں اور جذرالمربع بھی معلوم کریں۔

(i) 12544 **(ii)** 418609 **(iii)** 30349081

3. ذیل کے جذرالمربع معلوم کریں۔

(i) $10\frac{26}{189}$ **(ii)** $28\frac{4}{9}$ **(iii)** $101\frac{92}{169}$

(iv) 0.053361 **(v)** 0.204304 **(vi)** 65.61

4. ایک مربعے علاقے کا رقبہ 161,604 مربع میٹر ہے تو اس کی ایک طرف کی لمبائی معلوم کریں۔

5. ذیل میں دیئے گئے اعداد کے جذر المکعب معلوم کریں۔

(i) 3375 **(ii)** 1728 **(iii)** $\frac{343}{512}$ **(iv)** $1\frac{602}{729}$

خلاصہ

- ایسا عدد جو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں نہ لکھا جا سکے وہ غیر ناطق عدد کہلاتا ہے یہاں $p, q \in Z$ اور $q \neq 0$ ہے
- حقیقی اعداد کا سیٹ ناطق اور غیر ناطق کا اتصال (یونین) ہوتا ہے جیسے $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$
- ایسا عدد جس کی کسر اعشاریہ مختتم اور غیر متوالی ہو وہ ناطق عدد کہلاتا ہے۔
- کسر اعشاریہ جس میں نقطہ اعشاریہ کی تعداد محدود ہو وہ مختتم کسر اعشاریہ کہلاتی ہے۔
- کسر اعشاریہ جس میں نقطہ اعشاریہ کی تعداد غیر محدود ہو وہ غیر مختتم کسر اعشاریہ کہلاتی ہے۔
- عدد کی خود اپنے آپ سے ضرب مربع کہلاتی ہے۔
- کسی مثبت عدد کا جذر المربع ایسا مثبت عدد ہوتا ہے جس کا مربع دیا ہو عدد ہی ہوتا ہے۔
- صحیح اعداد یا ناطق اعداد کا مربع مکمل مربع ہوتا ہے۔
- غیر ناطق اعداد کا مربع مکمل نہیں ہوتا۔
- اگر کسی مکمل مربعے میں ہندسوں کی تعداد n ہو تو اُس کی جذر المربع میں ہندسوں کی تعداد ہو گی
  (i) $\frac{n}{2}$ اگر n جفت ہے (ii) $\frac{n+1}{2}$ اگر n طاق ہے۔
- منفی صحیح اعداد کا جذر المربع نہیں معلوم کر سکتے۔
- کسی ایک عدد کے مکعب کا مطلب ہے کہ اُس عدد کو خود اپنے آپ سے تین دفعہ ضرب دینا
- کسی بھی ناطق عدد کے لئے (i) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ (ii) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$
- ناطق اعداد کا جذر المربع غیر ناطق اعداد بھی ہو سکتا ہے۔

یونٹ 3

عددی نظام

3.1 عددی نظام

عددی نظام کو پڑھنے، لکھنے، گننے اور حساب کتاب کرنے میں استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ کچھ حروف پر مشتمل ہوتا ہے جو ہندسے کہلاتے ہیں ہر عدد ان ہندسوں سے مل کر بنا ہوتا ہے۔

3.1.1 عددی نظام کے اساس کو پہچاننا

ایک نظام میں ہندسوں کی جتنی تعداد استعمال کی جاتی ہے وہ اساس کہلاتی ہے۔ آج کل گننے اور حساب کتاب کرنے کے لئے اساس دس کا نظام رائج ہے اُسے اعشاری نظام کہتے ہیں۔ اساس دس کے نظام میں بنیادی ہندسوں کی تعداد دس ہوتی ہے جو نیچے دیئے گئے ہیں۔

0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8 اور 9

0 سے 9 تک اعداد یک ہندسی اعداد ہیں جب کہ 9 سے بڑے اور 100 سے چھوٹے اعداد دو ہندسی اعداد ہوتے ہیں۔

اس ہی طرح 99 سے بڑے اور 1000 سے چھوٹے تین ہندسی اعداد ہوتا ہے وغیرہ وغیرہ۔

3.1.2 اساس 2، 5، 8 اور 10 کے عددی نظام کی وضاحت کرنا

(i) اساس 2 کا عددی نظام

دو ہندسوں 0 اور 1 پر مشتمل نظام کو اساس 2 کا نظام ہوتا ہے اور یہ ثنائی نظام بھی کہلاتا ہے۔ ثنائی نظام عملی طور پر ہماری روزمرہ زندگی میں استعمال نہیں ہوتا ہے لیکن یہ بہت اہم عددی نظام ہے کیونکہ یہ ہر طرح کے کمپیوٹر میں استعمال ہوتا ہے۔ لہٰذا ثنائی نظام ہماری روزمرہ زندگی میں بنیادی اہمیت کا حامل ہے، کمپیوٹر معلومات کو ثنائی اعداد میں جمع کرتا ہے۔ لہٰذا ثنائی نظام کی ہماری زندگی میں بنیادی اہمیت حاصل ہے جو کہ کمپیوٹر کی جدید طرز تعلیم ہے۔

ثنائی نظام چھوٹی سے چھوٹی علامت 0 اور بڑی سے بڑی علامت 1 ہے۔ ثنائی نظام میں صفر کو بطور 0_2 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ایک کو 1_2 سے ظاہر کرتے ہیں اور دو کو 10_2 سے ظاہر کرتے ہیں اور ایک-صفر کی اساس 2 پڑھتے ہیں اور تین کو 11_2 سے ظاہر کیا جاتا ہے اور ایک ایک کی اساس 2 پڑھتے ہیں۔

(ii) اساس 5 کا عددی نظام

اس نظام میں ہندسے 0، 1، 2، 3 اور 4 شامل ہیں یہاں چھوٹے سے چھوٹا ہندسہ 0 اور بڑے سے بڑا ہندسہ 4 ہے اِسے خمسی نظام بھی کہتے ہیں۔ صفر کو 0_5 سے ظاہر کرتے ہیں، ایک کو 1_5 سے ظاہر کرتے ہیں، دو کو 2_5 سے ظاہر کرتے ہیں، تین کو 3_5 سے ظاہر کرتے ہیں، چار کو 4_5 سے ظاہر کرتے ہیں، پانچ کو 10_5 سے ظاہر کرتے ہیں، چھ کو 11_5 سے ظاہر کرتے ہیں اِسے ایک ایک کی اساس 5 پڑھتے ہیں۔

(iii) اساس 8 کا عددی نظام

اس نظام میں ہندسے 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6 اور 7 شامل ہیں اساس 8 کے نظام کو آکٹل نظام (Octal system) بھی کہتے ہیں۔ اس نظام میں چھوٹے سے چھوٹا ہندسہ صفر ہے جسے 0_8 سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس نظام میں بڑے سے بڑا ہندسہ سات ہے جسے 7_8 سے ظاہر کرتے ہیں۔ ہندسہ آٹھ کو 10_8 سے ظاہر کیا جاتا ہے اور نو کو 11_8 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(iv) اساس 10 کا عددی نظام

اس نظام میں ہندسے 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8 اور 9 شامل ہیں اساس 10 کا نظام بطور اعشاری نظام بھی جانا جاتا ہے۔ اعشاری نظام دنیا کا مشہور ترین عددی نظام ہے کیونکہ اس میں 10 سے ضرب اور تقسیم بہت آسانی سے ہو جاتی ہے۔

3.1.3 اساس 2، 5، 8 اور 10 کے عددی نظاموں کی وضاحت کرنا

(i) ثنائی نظام یا اساس 2 کا نظام (Binary System)

اساس 2 کے نظام میں چھوٹے سے چھوٹا ہندسہ 0 اور بڑے سے بڑا ہندسہ 1 ہوتا ہے۔ اعشاری نظام میں بڑے سے بڑا ہندسہ 9 ہوتا ہے جب اس میں 1 جمع کرتے ہیں تو وہ 10 بن جاتا ہے (دس پڑھتے ہیں) بلکل اس ہی طرح جب اساس دو کے نظام میں 1 میں 1 جمع کرتے ہیں تو ہمیں دو حاصل ہوتا ہے جیسے 10_2 لکھتے ہیں اور ایک-صفر ثنائی نظام میں پڑھتے ہیں نا کہ دس۔

لہٰذا ثنائی نظام میں ایک کو 1_2 لکھا جاتا ہے

اب $1_2 + 1_2 =$ ایک جمع ایک دو ہوتا ہے جیسے 10_2 لکھا جاتا ہے۔

پھر $1_2 + 10_2 =$ دو جمع ایک تین ہوتا ہے جیسے 11_2 لکھا جاتا ہے۔

$1_2 + 11_2 =$ تین جمع ایک چار ہوتا ہے جیسے 100_2 لکھا جاتا ہے۔

اعشاری نظام میں کسی بھی عدد کو 2 کی قوت کے مجموعہ کے طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر

$$13 = 8 + 4 + 1 = \mathbf{1} \times 2^3 + \mathbf{1} \times 2^2 + \mathbf{0} \times 2^1 + \mathbf{1} \times 2^0 = 1101_2$$

$$27 = 16 + 8 + 2 + 1 = \mathbf{1} \times 2^4 + \mathbf{1} \times 2^3 + \mathbf{0} \times 2^2 + \mathbf{1} \times 2^1 + \mathbf{1} \times 2^0 = 11011_2$$

(ii) اساس 5 کے عددی نظام

اساس 5 کے عددی نظام کی بنیاد پانچ بنیادی ہندسوں 0، 1، 2، 3 اور 4 پر ہے۔ اساس 5 کے نظام میں سب سے چھوٹا ہندسہ 0 اور سب سے بڑا ہندسہ 4 ہے۔ اعشاریہ نظام میں $1 + 9 = 10$ لیکن اساس پانچ کے نظام میں $1_5 + 4_5 =$ پانچ جس کو 10_5 لکھا جاتا ہے۔ اس ہی طرح

$10_5 + 1_5 = 11_5$ (چھ) اب $11_5 + 1_5 = 12_5$ (سات)

پھر $12_5 + 1_5 = 13_5$ (آٹھ) اور $13_5 + 1_5 = 14_5$ (نو)

$14_5 + 1_5 = 20_5$ (دس) اور $20_5 + 1_5 = 21_5$ (گیارہ)

نوٹ: اعشاری نظام میں کسی بھی عدد کو 5 کی قوت کے مجموعہ کے طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر

(i) $87 = 75 + 10 + 2 = 3\times25+2\times5+2\times1$ یا

$= 3 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 2 \times 5^0 = 322_5$

(ii) $138=125+10+3=1\times5^3+0\times5^2+2\times5^1+3\times5^0= 1023_5$

(iii) اساس 8 کا عددی نظام

اساس 8 کا عددی نظام بنیادی طور پر 8 بنیادی ہندسوں پر 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6 اور 7 پر مشتمل ہوتا ہے۔ اساس 8 کے عددی نظام میں 0 سب سے چھوٹا اور 7 سب سے بڑا ہندسہ ہوتا ہے۔ جیسا کہ اعشاری نظام میں $10=9+1$ (دس) ہے لیکن اساس آٹھ کے نظام میں $1_8 + 7_8 = 10_8$ (آٹھ) ہوتا ہے۔ اس ہی طرح

$11_8 + 1_8 = 12_8$ (دس) ، $10_8 + 1_8 = 11_8$ (نو)

$13_8 + 1_8 = 14_8$ (بارہ) ، $12_8 + 1_8 = 13_8$ (گیارہ)

$15_8 + 1_8 = 16_8$ (چودہ) ، $14_8 + 1_8 = 15_8$ (تیرہ)

$17_8 + 1_8 = 20_8$ (سولہ) ، $16_8 + 1_8 = 17_8$ (پندرہ)

نوٹ: اعشاری نظام میں کسی بھی عدد کو 8 کی قوت کے مجموعہ کے طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ جیسے

$135 = 128 +7=2\times64+0\times8+7=2\times8^2+0\times8^1+7\times8^0 +207_8$

(iv) اعشاری نظام (اساس دس کا نظام)

اساس 10 کے نظام کو اعشاری نظام بھی کہا جاتا ہے۔ اعشاری نظام ہمارے لئے سب سے زیادہ جانا پہچانا نظام ہے۔ ہم اِسے اپنی روز مرہ زندگی مثلاً کاروبار میں گننے اور حساب کتاب کرنے میں استعمال کرتے ہیں۔ اعشاری نظام میں ہم 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8 اور 9 دس ہندسوں کو ہی گننے کے لئے استعمال کرتے ہیں۔

اعشاری نظام میں کسی بھی عدد کو 10 کی قوت کے مجموعہ کے طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر

$5683 = 5\times1000+6\times100+8\times10+3$

$= 5\times10^3+6\times10^2+8\times10^1+3\times10^0$ یا

مشق 3.1

1. نیچے دیئے گئے سوالات کے جواب دیں۔

(i) ثنائی نظام کی وضاحت کریں اور پہلے آٹھ اعداد کو ثنائی نظام میں لکھیں۔

(ii) خمسی نظام کی وضاحت کریں اور پہلے بارہ اعداد کو خمسی نظام میں لکھیں۔

(iii) اساس آٹھ کے نظام کی وضاحت کریں اور پہلے سولہ اعداد کو اساس آٹھ کے نظام میں لکھیں۔

(iv) اعشاری نظام کی وضاحت مثالوں کی مدد سے کریں۔

2. ذیل میں دیئے گئے اعشاری اعداد کو 2 کی قوت کے مجموعہ کی صورت میں لکھیں۔

(i) 11 (ii) 15 (iii) 21 (iv) 29 (v) 37 (vi) 51 (vii) 63

3. ذیل میں دیئے گئے اعشاری اعداد کو 5 کی قوت کے مجموعہ کی صورت میں لکھیں۔

(i) 13 (ii) 24 (iii) 39 (iv) 47 (v) 59 (vi) 78 (vii) 99 (viii) 104

4. ذیل میں دیئے گئے اعشاری اعداد کو 8 کی قوت کے مجموعہ کی صورت میں لکھیں۔

(i) 30 (ii) 57 (iii) 78 (iv) 98 (v) 114 (vi) 225 (vii) 340

5. ذیل میں دیئے گئے اعشاری اعداد کو 10 کی قوت کے مجموعہ کی صورت میں لکھیں۔

(i) 201 (ii) 319 (iii) 4075 (iv) 56970 (v) 980762

3.2 تحویل

ہم اساس 2، 5، 8 اور 10 کے عددی نظام کے بارے میں سیکھ چکے ہیں۔ یہ تمام عددی نظام مقامی قیمت کے عددی نظام ہیں ان نظاموں میں استعمال ہونے والے اعداد کو ایک نظام سے دوسرے عددی نظام تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ سب سے زیادہ آسان اور اچھا طریقہ مسلسل تقسیم کا طریقہ ہے۔ اس طریقے کی مدد سے ہم عدد کو ایک نظام سے دوسرے نظام میں تحویل کر سکتے ہیں۔

3.2.1 اعشاریہ عدد کو ثنائی، خمسی اور اساس 8 میں تبدیل کرنا اور اس کے برعکس کرنا

(a) اعداد کو اعشاری نظام سے اساس 2، 5 اور 8 میں تبدیل کرنا

(i) اعداد کو اعشاری نظام سے ثنائی نظام تبدیل کرنا

مثال 1. 19 کو ثنائی نظام میں تبدیل کریں۔

حل: یہاں ہم طریقہ مسلسل تقسیم استعمال کرتے ہیں۔اس طریقہ میں ہم دیئے گئے عدد 19 کو بار بار 2 سے تقسیم کرتے ہیں یہاں تک کہ باقی 1 رہ جائے۔

پس 19 کو 2 سے متواتر تقسیم کرتے جاتے ہیں اور خارج قیمت کے باقی کو دائیں طرف لکھتے جاتے ہیں جب تک خارج قیمت 1 نہ رہ جائے۔

2	19
2	9 – 1
2	4 – 1
2	2 – 0
	1 – 0

مطلوبہ ثنائی عدد حاصل کرنے کیلئے باقی بچے اعداد کو نیچے سے اوپر لکھتے ہیں۔

پس $19 = 10011_2$

مثال 2. 276 کو ثنائی نظام میں تبدیل کریں۔

حل: ہم مسلسل تقسیم کا طریقہ استعمال کرتے ہیں۔

وضاحت: 276 کو 2 سے بار بار تقسیم کریں اور ہر خارج قیمت کے باقی کو دائیں طرف لکھیں جب تک خارج 1 نہ رہ جائے۔ مطلوبہ ثنائی عدد حاصل کرنے کیلئے باقی بچے اعداد کو نیچے سے اوپر کی جانب لکھیں۔

2	276
2	138 – 0
2	69 – 0
2	34 – 1
2	17 – 0
2	8 – 1
2	4 – 0
2	2 – 0
	1 – 0

پس $276 = 100010100_2$

(ii) اعداد کو اعشاری نظام سے خمسی نظام میں تبدیل کرنا

مثال 1. 678 کو خمسی نظام میں تبدیل کریں۔

حل: ہم مسلسل تقسیم کے طریقے استعمال کرتے ہیں

اس طریقے میں ہم دیئے گئے عدد 678 کو 5 سے بار بار تقسیم کرتے ہیں یہاں تک کہ خارج قیمت 4 یا اس سے کم بچے۔

اب 678 کی 5 سے بار بار تقسیم جاری رکھتے ہیں ہر خارج قیمت کے باقی کو دائیں جانب لکھتے ہیں جب تک خارج قیمت 4 یا اس سے کم نہ بچے۔

5	678
5	135 – 3
5	27 – 0
5	5 – 2
	1 – 0

مطلوبہ خمسی عدد حاصل کرنے کیلئے باقی بچے اعداد کو نیچے سے اوپر کی جانب لکھیں۔

پس $678 = 10203_5$

مثال 2. 6065 کو خمسی نظام میں تبدیل کریں۔

حل: پس $6065 = 143230_5$

5	6065
5	1213 – 0
5	242 – 3
5	48 – 2
5	9 – 3
	1 – 4

(iii) اعداد کو اعشاری نظام سے اساس 8 کے نظام میں تبدیل کرنا

مثال 1. 728 کو اساس 8 کے نظام میں تبدیل کریں۔

حل: مسلسل تقسیم کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے اس طریقے میں ہم دیئے گئے عدد 728 کو 8 سے بار بار تقسیم کرتے ہیں یہاں تک خارج قیمت 7 یا 7 سے کم نہ رہ جائے۔

8	728
8	91 – 0
8	11 – 3
	1 – 3

اب 728 کو 8 سے بار بار تقسیم جاری رکھتے ہیں اور ہر خارج قیمت کے باقی کو دائیں جانب لکھتے ہیں جب تک خارج قیمت 7 یا 7 سے کم بچے۔ مطلوبہ اساس 8 کے عدد کو حاصل کرنے کیلئے باقی بچے اعداد کو نیچے سے اوپر کی جانب لکھیں۔

پس $728 = 1330_8$

مثال 2. 2064 کو اساس 8 میں تبدیل کریں۔

حل: $2064 = 4020_8$

8	2064
8	258 – 0
8	32 – 2
	4 – 0

مشق 3.2

A. ذیل کے اعشاری اعداد کو ثنائی نظام میں تبدیل کریں۔

1. 36	**2.** 77	**3.** 89	**4.** 156	**5.** 280
6. 489	**7.** 654	**8.** 786	**9.** 999	**10.** 1600
11. 1705	**12.** 1808	**13.** 1096	**14.** 2001	**15.** 2020

B. ذیل کے اعشاری اعداد کو خمسی نظام میں تبدیل کریں۔

1. 87	**2.** 98	**3.** 169	**4.** 205	**5.** 370
6. 444	**7.** 666	**8.** 1072	**9.** 2007	**10.** 3333
11. 5005	**12.** 5050	**13.** 5016	**14.** 5602	**15.** 5005

C. ذیل کے اعشاری اعداد کو اساس 8 کے نظام میں تبدیل کریں۔

1. 504	**2.** 1765	**3.** 20093	**4.** 33661	**5.** 48360
6. 50607	**7.** 61278	**8.** 79118	**9.** 80877	**10.** 99099
11. 90009	**12.** 99229	**13.** 98765	**14.** 98065	**15.** 99999

(b) دوسرے عددی نظاموں سے اعشاری نظام میں تبدیل کرنا

(i) ثنائی نظام سے اعشاری نظام میں تبدیل کرنا

اعداد کی ثنائی نظام سے اعشاری نظام میں تبدیلی کی وضاحت ذیل کی مثالوں سے کی گئی ہے۔

مثال 1. **(a)** 11_2 **(b)** 111_2 **(c)** 110101_2 کو اعشاری نظام میں تبدیل کریں۔

حل:

(a) $11_2 = 1\times10_2^1 + 1\times10_2^0 = 1\times2^1 + 1\times2^0=2+1=3$

(b)
$$\begin{aligned} 111_2 &= 1\times10_2^2 + 1\times10_2^1 + 1\times10_2^0 \\ &= 1\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 \\ &= 1\times4 + 1\times2 + 1\times1 \\ &= 4+2+1 = 7 \\ 111_2 &= 7 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 110101_2 &= 1\times10_2^5+1\times10_2^4+0\times10_2^3+1\times10_2^2+0\times10_2^1+1\times10_2^0 \\ &= 1\times2^5+1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0 \quad \text{(مکانی قیمت)} \\ &= 1\times32+1\times16+0\times8+1\times4+0\times2+1\times1 \\ &= 32+16+0+4+0+1 = 53 \end{aligned}$$

(ii) خمسی نظام سے اعشاری نظام میں تبدیل کرنا

مثال 1. 42_5 کو اعشاری نظام میں تبدیل کریں۔

حل: $42_5 = 4\times5^1 + 2\times5^0 = 4\times5 + 2\times1 = 20 + 2 = 22$

مثال 2. 234_5 کو اعشاری نظام میں تبدیل کریں۔

حل:
$$\begin{aligned} 234_5 &= 2\times5^2 + 3\times5^1 + 4\times5^0 = 2\times25 + 3\times5 + 4\times1 \\ &= 50 + 15 + 4 = 69. \end{aligned}$$

مثال 3. 3044_5 کو اعشاری نظام میں تبدیل کریں۔

حل:

$$3044_5 = 3\times 5^3 + 0\times 5^2 + 4\times 5^1 + 4\times 5^0$$
$$= 3\times 125 + 0\times 25 + 4\times 5 + 4\times 1$$
$$= 375 + 0 + 20 + 4 = 399$$

پس $\boxed{3044_5 = 399}$

(iii) اعداد کو اساس 8 کے نظام سے اعشاری نظام میں تبدیل کرنا

مثال 1. 506_8 کو اعشاری نظام میں تبدیل کریں۔

حل:

$$506_8 = 5\times 8^2 + 0\times 8^1 + 6\times 8^0 \quad = 5\times 64 + 0\times 8 + 6\times 1$$
$$= 320 + 0 + 6 = 326$$

پس $\boxed{506_8 = 326}$

مثال 2. 1456_8 کو اعشاری نظام میں تبدیل کریں۔

حل:

$$1456_8 = 1\times 8^3 + 4\times 8^2 + 5\times 8^1 + 6\times 8^0$$
$$= 1\times 512 + 4\times 64 + 5\times 8 + 6\times 1 \quad = 512 + 256 + 40 + 6$$
$$= 814$$

پس $\boxed{1456_8 = 814}$

نوٹ: اساس 8 نظام میں اکائی والی جگہ پر ہندسے کو 8^0 سے اور بعد میں آنے والے ہندسوں کو 8^1، 8^2، 8^3، 8^4...وغیرہ سے ضرب دیں گے۔

(c) خمسی نظام والے عدد کو اساس 8 والے نظام میں تبدیل کرنا اور اُلٹ

یہاں پہلے خمسی نظام والے عدد کو اعشاری نظام میں تبدیل کریں اور بعد میں اعشاری نظام میں حاصل عدد کو اساس 8 کے نظام میں تبدیل کریں۔

مشق 3.3

A. ذیل کے ثنائی اعداد کو اعشاری اعداد میں تبدیل کریں۔

1. 1101_2	**2.** 11011_2	**3.** 10111_2	**4.** 110101_2
5. 1010101_2	**6.** 1110111_2	**7.** 1100110_2	**8.** 1100111_2
9. 11010110_2	**10.** 11111101_2	**11.** 10010010_2	**12.** 11000101_2

B. ذیل کے خمسی اعداد کو اعشاری اعداد میں تبدیل کریں۔

1. 21_5	**2.** 30_5	**3.** 40_5	**4.** 12_5	**5.** 22_5
6. 131_5	**7.** 442_5	**8.** 232_5	**9.** 401_5	**10.** 430_5
11. 1310_5	**12.** 4421_5	**13.** 2322_5	**14.** 4013_5	**15.** 4304_5

C. ذیل کے اساس 8 کے اعداد کو اعشاری اعداد میں تبدیل کریں۔

1. 47_8	**2.** 16_8	**3.** 40_8	**4.** 60_8	**5.** 70_8
6. 124_8	**7.** 242_8	**8.** 304_8	**9.** 450_8	**10.** 700_8
11. 3006_8	**12.** 1054_8	**13.** 6600_8	**14.** 4405_8	**15.** 5043_8

3.2.2 اساس 2، 5 اور 8 کے نظام کے اعداد کی بالترتیب جمع، تفریق اور ضرب کرنا

A. ثنائی نظام (اساس 2 کے اعداد)

(i) ثنائی نظام میں اعداد کی جمع

ثنائی نظام کی جمع بہت آسان ہے کیونکہ اس میں جمع کے لئے اعداد کے صرف تین جوڑے بناتے ہیں۔

$$0_2 + 0_2 = 0_2$$
$$0_2 + 1_2 = 1_2 + 0_2 = 1_2$$
$$1_2 + 1_2 = 10_2$$

جمع کی جدول

+	0	1
0	0	1
1	1	10

نوٹ: اگر 1 کو تین مرتبہ جمع کیا جائے تو ذیل کا نتیجہ حاصل ہو گا۔

$$1_2 + 1_2 = 10_2 \quad , \quad 1_2 + 1_2 + 1_2 = 10_2 + 1_2 = 11_2$$

مثال 1. 111_2 اور 101_2 کا مجموعہ معلوم کریں۔

حل: سب سے پہلے اعداد کو ہندسوں کی مقامی قیمت کے مطابق ایک دوسرے کے نیچے رکھیں اور پھر دائیں طرف سے جمع کرنا شروع کریں۔ 1 کو 1 میں جمع کرنے سے 2 حاصل ہوتا ہے جو کہ ثنائی نظام میں 10 برابر ہے۔ 0 لکھیں اور 1 حاصل دیں جو جمع ہو گا 1 اور 0 میں نتیجہ پھر 10 ہو گا۔ 0 لکھیں اور 1 حاصل دیں تو 1 کو 1 اور 1 میں جمع کرنے سے 3 ملے گا جو ثنائی نظام 11 ہے۔

$$\begin{array}{r} 111_2 \\ +\ 101_2 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111_2 \\ +\ 101_2 \\ \hline 1100_2 \\ \hline \end{array}$$

پس $101_2 + 111_2 = 1100_2$

مثال 2. 1010_2 اور 1111_2 کو جمع کریں۔

حل: $1010_2 + 1111_2$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1}\quad \\ 1010_2 \\ +\ 1111_2 \\ \hline 11001_2 \\ \hline \end{array}$$

پس $1010_2 + 1111_2 = 11001_2$

مثال 3. 1100_2، 1111_2 اور 1001_2 کو جمع کریں۔

حل: $1100_2 + 1111_2 + 1001_2$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1}\quad \\ 1100_2 \\ 1111_2 \\ +\ 1001_2 \\ \hline 100100_2 \\ \hline \end{array}$$

پس $1100_2 + 1111_2 + 1001_2 = 100100_2$

(ii) ثنائی نظام میں اعداد کی تفریق

ثنائی نظام میں تفریق کا عمل بلکل جمع کی طرح ہوتا ہے۔

مثال 1. 101_2 میں سے 10_2 کو تفریق کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r} 1^{1}01_2 \\ -\ 10_2 \\ \hline 11_2 \\ \hline \end{array} \quad \text{یا} \quad \begin{array}{r} 101_2 \\ -\ 10_2 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

پس $101_2 - 10_2 = 11_2$

مثال 2. 1011_2 میں سے 101_2 کو تفریق کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r} 1011_2 \\ -\ 101_2 \\ \hline 110_2 \\ \hline \end{array} \quad \text{یا}$$

$1011_2 - 101_2 = 110_2$

پس $1011_2 - 101_2 = 110_2$

(iii) ثنائی نظام میں اعداد کی ضرب

ثنائی نظام میں ضرب کا عمل جمع کے مقابلے میں بہت سادہ ہے صرف اس میں مقام کا خیال رکھنا ضروری ہوتا ہے۔ ضرب میں صرف اعداد کے تین جوڑے حاصل ہوتے ہیں جیسا نیچے جدول دکھایا گیا ہے۔

$0 \times 0 = 0$

$0 \times 1 = 1 \times 0 = 0$

$1 \times 1 = 1$

ضرب کی جدول

×	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

مثال 1. 1101_2 اور 101_2 کو ضرب کرتے ہیں۔

حل: عمل نیچے دیا گیا ہے

$$\begin{array}{rl} 1101_2 & \\ \times\ 101_2 & \\ \hline 1101 & (1\text{ سے ضرب}) \\ 00000 & (0\text{ سے ضرب}) \\ 110100 & (1\text{ سے ضرب}) \\ \hline 1000001_2 & \text{تینوں ضرب کی جمع} \\ \hline \end{array}$$

پس $1101_2 \times 101_2 = 1000001_2$

مثال 2. حل کریں $11100_2 \times 110_2$

حل:

$$\begin{array}{rl} 11100_2 & \\ \times\ 110_2 & \\ \hline 00000 & (0\text{ سے ضرب}) \\ 111000 & (1\text{ سے ضرب}) \\ 1110000 & (1\text{ سے ضرب}) \\ \hline 10101000_2 & \text{تینوں ضرب کی جمع} \\ \hline \end{array}$$

پس $11100_2 \times 110_2 = 10101000_2$

مشق 3.4

A . ذیل کو ثنائی نظام میں جمع کریں۔

1. $110_2 + 11_2$ **2.** $1010_2 + 101_2$ **3.** $1110_2 + 111_2$
4. $11011_2 + 11001_2$ **5.** $10101_2 + 110_2$ **6.** $111_2 + 11_2$
7. $1101_2 + 110_2 + 1001_2$ **8.** $1101_2 + 1001_2 + 11_2$
9. $11011_2 + 110101_2 + 110_2$ **10.** $11111_2 + 1010_2 + 111_2$
11. $1010_2 + 1111_2 + 10111_2$ **12.** $1111_2 + 11101_2 + 11111_2$

B . ذیل کو ثنائی نظام میں حل کریں۔

1. $1101_2 - 11_2$ **2.** $111_2 - 101_2$ **3.** $1110_2 - 110_2$
4. $11111_2 - 1010_2$ **5.** $110111_2 - 1101_2$ **6.** $10011_2 - 101_2$
7. $1001_2 - 10_2$ **8.** $1111_2 - 1000_2$ **9.** $11011_2 - 1010_2$
10. $11111 - 1010$

C. ذیل کو مختصر کریں۔

1. $(1111_2 + 101_2) - (1100_2 - 101_2)$ **2.** $(1101_2 + 10010_2) - (10101_2 - 1010_2)$
3. $1111_2 - 1010_2 + 101_2$ **4.** $(10101_2 - 10010_2) - (10001_2 - 1110_2)$

D. ضرب کریں۔

1. $101_2 \times 11_2$ **2.** $110_2 \times 101_2$ **3.** $1111_2 \times 100_2$
4. $110_2 \times 1101_2$ **5.** $101_2 \times 111_2$ **6.** $10101_2 \times 1010_2$
7. $11110_2 \times 101_2$ **8.** $1001_2 \times 101_2$ **9.** $10100_2 \times 11_2$
10. $110111_2 \times 111_2$ **11.** $101010_2 \times 101_2$ **12.** $101110_2 \times 110_2$

B. Base Five System

B. خمسی نظام

(i) خمسی نظام میں اعداد کی جمع اور تفریق

ہم جانتے ہیں کہ خمسی نظام میں علامات 0، 1، 2، 3 اور 4 استعمال ہوتیں ہیں۔ جمع اور تفریق کے طریقے کی ذیل کی مثالوں سے وضاحت کی گئی ہے۔

مثال 1. حل کریں $4_5 + 1_5$

حل: 4 اور 1 کا مجموعہ 5 ہے جو کہ خمسی نظام میں '10' ہے۔

پس $4_5 + 1_5 = 10_5$

$$\begin{array}{r} 4_5 \\ +\ 1_5 \\ \hline 10_5 \\ \hline \end{array}$$

مثال 2. حل کریں $3_5 + 4_5$

حل: 3 اور 4 کا مجموعہ 7 ہوتا ہے جو خمسی نظام میں 12 ہوتا ہے۔

پس $3_5 + 4_5 = 12_5$

$$\begin{array}{r} 3_5 \\ +\ 4_5 \\ \hline 12_5 \end{array}$$

مثال 3. 123_5 اور 312_5 کو جمع کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r} ① \\ 123_5 \\ +\ 312_5 \\ \hline 440_5 \end{array}$$

پس $123_5 + 312_5 = 440_5$

مثال 4. 4141_5 اور 3421_5 کا مجموعہ معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r} ①① \\ 4141_5 \\ +\ 3421_5 \\ \hline 13112_5 \end{array}$$

پس $4141_5 + 3421_5 = 13112_5$

جمع کے عمل کو آسان بنانے کے لئے طلبہ خمسی نظام کا جدول استعمال کر سکتے ہیں

ہم خمسی نظام تفریق کے لئے بلکل ویسا طریقہ اپناتے ہیں جیسا کہ ثنائی نظام ہوتا ہے۔

خمسی نظام کا جمع کا جدول

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

مثال 5. 424_5 میں 231_5 کو تفریق کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r} 424_5 \\ -\ 231_5 \\ \hline 143_5 \end{array}$$

یا $424_5 - 231_5 = 143_5$

وضاحت: 4 میں سے 1 کو تفریق کرنے سے ہمیں 3 حاصل ہوتا ہے، لیکن ہم 2 میں سے 3 تفریق نہیں کر سکتے تو ہمیں 4 میں سے 1 اُدھار لیتے ہیں۔ جہاں 1 برابر ہے 5 کے اور 2 میں جمع کرنے سے 7 ہو جاتا ہے اور پھر اس میں 3 تفریق کرنے سے 4 حاصل ہوتا ہے۔ آخر میں 3 میں سے 2 تفریق کرنے سے 1 باقی بچتا ہے۔ پس $424_5 - 231_5 = 143_5$

مثال 6. 13012_5 میں سے 4141_5 تفریق کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r} 13012_5 \\ -\ 4141_5 \\ \hline 3321_5 \end{array}$$

یا

$13012_5 - 4141_5 = 3321_5.$

(ii) خمسی نظام میں اعداد کی ضرب

دراصل عدد کی ضرب ایسا ہی ہے جیسے بار بار جمع ہم خمسی نظام میں ضرب کے عمل کے لئے یہ ہی طریقہ اختیار کرتے ہیں یہ خمسی نظام میں ضرب کی جدول ہے۔

خمسی نظام میں ضرب کی جدول

×	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

مثالیں: $2_5 \times 2_5 = 4_5$ $\quad 3_5 \times 3_5 = 14_5$

$3_5 \times 2_5 = 11_5$ $\quad 3_5 \times 4_5 = 22_5$

$4_5 \times 4_5 = 31_5$

$10_5 \times 4_5 = 4_5 \times 10_5 = 40_5$

مثال 1. 231_5 اور 34_5 کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r} 231_5 \\ \times\ 34_5 \\ \hline 2024 \\ +\ 12430 \\ \hline 20004_5 \end{array}$$

(4 سے ضرب)
(3 سے ضرب)
دونوں ضرب کی جمع

پس $231_5 \times 34_5 = 20004_5$

مثال 2. 4321_5 اور 123_5 کو ضرب کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r} 4321_5 \\ \times\ 123_5 \\ \hline 24013 \\ 141420 \\ +\ 432100 \\ \hline 1203033_5 \end{array}$$

(3 سے ضرب)
(2 سے ضرب)
(1 سے ضرب)
تینوں ضرب کی جمع

پس $4321_5 \times 123_5 = 1203033_5$

مشق 3.5

A . جمع کریں۔

1. $432_5 + 134_5$
2. $3344_5 + 1304_5$
3. $4333_5 + 343_5$
4. $43_5 + 14_5$
5. $34321_5 + 24113_5$
6. $43_5 + 143_5$
7. $1432_5 + 2341_5 + 123_5$
8. $222_5 + 3433_5 + 142_5$
9. $4443_5 + 343_5$
10. $12340_5 + 3444_5 + 444_5$
11. $12340_5 + 12340_5$
12. $43324_5 + 1243_5$

B. ذیل کو حل کریں اور ضرب کی پڑتال کریں۔

1. $342_5 - 12_5$ **2.** $202_5 - 14_5$ **3.** $3214_5 - 1403_5$ **4.** $1203_5 - 134_5$
5. $4321_5 - 1234_5$ **6.** $4231_5 - 2304_5$ **7.** $4310_5 - 3421_5$ **8.** $20102_5 - 1424_5$

C. حل کریں۔

1. $342_5+444_5-341_5$ **2.** $1234_5+4321_5-444_5$ **3.** $1321_5+223_5-44_5$
4. $44444_5-321_5-444_5$ **5.** $23222_5-2111_5-232_5$ **6.** $4304_5-222_5-333_5$
7. $1234_5+4321_5-3221_5$ **8.** $304021_5-103002_5-200403_5$

D. حاصل ضرب معلوم کریں۔

1. $423_5 \times 321_5$ **2.** $14_5 \times 13_5$ **3.** $1134_5 \times 223_5$
4. $3221_5 \times 443_5$ **5.** $233_5 \times 343_5$ **6.** $403_5 \times 243_5$
7. $1004_5 \times 113_5$ **8.** $4004_5 \times 303_5$ **9.** $2410_5 \times 432_5$
10. $3210_5 \times 114_5$ **11.** $3344_5 \times 1230_5$ **12.** $4321_5 \times 234_5$

(c) اساس 8 کے نظام

(i) اساس 8 میں اعداد کی جمع

ہم جانتے ہیں علامات 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6 اور 7 کو اساس 8 کے نظام میں استعمال کیا جاتا ہے، جمع کے دوران اگر دو ہندسوں کا مجموعہ 7 سے بڑا ہو تو ہم مجموعہ کو 8 سے تقسیم کرتے ہیں اور باقی کو لکھتے ہیں۔

مثال 1. اساس 8 کے اعداد کو جمع کریں۔

(i) 5_8 اور 7_8 (ii) 64_8 اور 74_8

حل: (i)

$$\begin{array}{r} 5_8 \\ +\ 7_8 \\ \hline 14_8 \\ \hline \end{array}$$

$5_8 + 7_8 = \square$ یا

پس $5_8 + 7_8 = 14_8$

حل: (ii) $64_8 + 74_8 = \square$

$$\begin{array}{r} ① \\ 64_8 \\ +\ 74_8 \\ \hline 160_8 \\ \hline \end{array}$$

پس $64_8 + 74_8 = 160_8$

ذیل میں دی گئی جدول اساس 8 کا نظام میں مجموعہ معلوم کرنے میں مدد کرے گی۔

مثال 2. جمع کریں۔

(i) 445_8 اور 443_8

(ii) 675_8 اور 756_8

حل (i): $445_8 + 443_8 = \boxed{}$

$$\begin{array}{r} ^{1\,1} \\ 445_8 \\ +\ 443_8 \\ \hline 1110_8 \\ \hline \end{array}$$

پس $445_8 + 443_8 = 1110_8$

حل (ii): $675_8 + 756_8 = \boxed{}$

$$\begin{array}{r} ^{1\,1} \\ 675_8 \\ +\ 756_8 \\ \hline 1653_8 \\ \hline \end{array}$$

پس $675_8 + 756_8 = 1653_8$

اساس 8 کے نظام جمع کی جدول

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

وضاحت: $3_8 + 5_8 = 10_8,\ 5_8 + 6_8 = 13_8$

(ii) اساس 8 کے نظام میں اعداد کی تفریق

اساس 8 کے نظام میں جب ایک عدد کو دوسرے میں سے تفریق کرتے ہیں اور اگر تفریق کرنے والا عدد دوسرے سے بڑا ہو تو ہم اگلے کالم میں ایک اُدھار لیتے ہیں جو 8 کے برابر ہوتا ہے۔ ہم 8 کو اس عدد میں جمع کرتے ہیں پھر تفریق کرتے ہیں۔

مثال 1. حل کریں۔ (i) $14_8 - 6_8$ (ii) $604_8 - 247_8$

حل (i): $14_8 - 6_8 = \boxed{}$

$$\begin{array}{r} 14_8 \\ -\ 6_8 \\ \hline 6_8 \\ \hline \end{array}$$

پس $14_8 - 6_8 = 6_8$

حل (ii): $604_8 - 247_8 = \boxed{}$

$$\begin{array}{r} 604_8 \\ -\ 247_8 \\ \hline 335_8 \\ \hline \end{array}$$

پس $604_8 - 247_8 = 335_8$

مثال 2. تفریق کریں۔

(i) 2547_8 کو 3756_8 میں سے

حل (i): 2547_8 کو 3756_8 میں سے تفریق کریں۔

$3756_8 - 2547_8 = \boxed{}$

$(3756_8 - 2547_8)$ کو عمودی شکل میں لکھیں اور پھر تفریق کریں

$$\begin{array}{r} 3756_8 \\ -\ 2547_8 \\ \hline 1207_8 \\ \hline \end{array}$$

پس $3756_8 - 2547_8 = 1207_8$

(ii) 476053_8 کو 567442_8 میں سے

حل (ii): 476053_8 کو 567442_8 میں سے تفریق کریں۔

$567442_8 - 476053_8 = \boxed{}$

$(567442_8 - 476053_8)$ عمودی شکل میں لکھیں اور پھر تفریق کریں

$$\begin{array}{r} 567442_8 \\ -\ 476053_8 \\ \hline 71367_8 \\ \hline \end{array}$$

پس $567442_8 - 47053_8 = 71367_8$

(iii) اساس 8 کے نظام میں اعداد کی ضرب

یہ ضربی جدول اساس 8 کے نظام میں اعداد کو ضرب کرنے میں مدد کرے گی

اساس 8 کے نظام میں ضرب

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61
وضاحت: $3_8 \times 3_8 = 11_8,\ 3_8 \times 6_8 = 22_8$								

مثال 1.

حل کریں $36_8 \times 43_8$

حل: $36_8 \times 43_8 = \boxed{}$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3} \\ {\scriptstyle 2} \\ 36_8 \\ \times\ 43_8 \\ \hline 132 \\ +\ 1700 \\ \hline 2032_8 \\ \hline \end{array}$$

پس $36_8 \times 43_8 = 2032_8$

مثال 2. حل کریں۔

(i) $446_8 \times 213_8$ (ii) $30456_8 \times 234_8$

حل (i): $446_8 \times 213_8$ کو اُفقی شکل میں لکھیں

$$
\begin{array}{rl}
446_8 & \\
\times\ 213_8 & \\
\hline
1562 & \text{(3 سے ضرب کرنے سے)} \\
4460 & \text{(1 سے ضرب کرنے سے)} \\
+\ 111400 & \text{(2 سے ضرب کرنے سے)} \\
\hline
117642_8 & \text{تینوں ضربوں کو جمع کرنے سے} \\
\hline
\end{array}
$$

پس $446_8 \times 213_8 = 117642_8$

حل (ii): $30456_8 \times 234_8$ کو اُفقی شکل میں لکھیں

$$
\begin{array}{rl}
30456_8 & \\
\times\ 234_8 & \\
\hline
142270 & \text{(4 سے ضرب کرنے سے)} \\
1116120 & \text{(3 سے ضرب کرنے سے)} \\
+\ 6113400 & \text{(2 سے ضرب کرنے سے)} \\
\hline
7374010_8 & \text{تینوں ضربوں کو جمع کرنے سے} \\
\hline
\end{array}
$$

پس $30456_8 \times 234_8 = 7374010_8$

مشق 3.6

1. جمع کریں۔

(i) $356_8 + 67_8$ (ii) $5034_8 + 6721_8$ (iii) $5003_8 + 66644_8$
(iv) $7356_8 + 6256_8$ (v) $657546_8 + 46701_8$

2. حل کریں۔

(i) $73_8 - 46_8$ (ii) $200_8 - 173_8$ (iii) $4326_8 - 3754_8$
(iv) $77601_8 - 67706_8$ (v) $163732_8 - 77766_8$

3. ضرب کریں۔

(i) $67_8 \times 45_8$ (ii) $345_8 \times 171_8$ (iii) $13470_8 \times 563_8$
(iv) $30076_8 \times 324_8$ (v) $763541_8 \times 4061_8$

3.2.3 مختلف اساس والے اعداد کی جمع، تفریق اور ضرب کرنا

آئیں ذیل کی مثالوں پر غور کریں۔

مثال 1. $12 + 12_5 + 110_2$ کو مختصر کریں اور جواب کو ثنائی نظام میں لکھیں۔

حل: $12 + 12_5 + 110_2 = ?$

آئیں 12_5 اور 110_2 کو اعشاری نظام میں تبدیل کرتے ہیں اور مختصر کرتے ہیں

$$12_5 = 1\times5^1 + 2\times5^0$$
$$= 1\times5 + 2\times1 = 5+2$$
پس $12_5 = 7$
$$110_2 = 1\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0$$
$$= 1\times4 + 1\times2 + 0\times1 = 4+2$$
پس $110_2 = 6$

اب $12 + 12_5 + 110_2 = 12 + 7 + 6 = 25$

مختصر کرنے پر جواب 25 ہے۔

پس $12 + 12_5 + 110_2 = 25 = 11001_2$

اب 25 کو اساس 2 میں تبدیل کرتے ہیں:

2	25
2	12 — 1
2	6 — 0
2	3 — 0
	1 — 1

پس $25 = 11001_2$

مثال 2. $125 - 114_5 - 110_2$ کو مختصر کریں اور جواب کو خمسی نظام میں لکھیں۔

حل: آئیں 114_5 اور 110_2 کو اعشاری نظام میں تبدیل کریں اور پھر مختصر کریں۔

$$114_5 = 1\times5^2 + 1\times5^1 + 4\times5^0$$
$$= 1\times25 + 1\times5 + 4\times1 = 25+5+4 = 34$$
$$110_2 = 1\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0$$
$$= 1\times4 + 1\times2 + 0\times1 = 4+2 = 6$$

اب $125 - 114_5 - 110_2 = 125 - 34 - 6$
$$= 125 - 40 = 85$$

مختصر کرنے پر جواب 85 ہے۔

پس $125 - 114_5 - 110_2 = 85 = 320_5$

اب 85 کو خمسی نظام میں تبدیل کرتے ہیں:

5	85
5	17 — 0
	3 — 2

پس $85 = 320_5$

مثال 3. $102_5 \times 1001_2$ کو مختصر کریں اور جواب کو ثنائی نظام اور خمسی نظام میں تبدیل کریں۔

حل: $102_5 \times 1001_2$

$$102_5 = 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 2 \times 5^0$$
$$= 1 \times 25 + 0 \times 5 + 2 \times 1$$
$$= 25 + 2 = 27$$
$$1001_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$
$$= 1 \times 8 + 0 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1$$
$$= 8 + 1 = 9$$

پس $102_5 \times 1001_2 = 27 \times 9 = 243$

اب 243 کو خمسی نظام میں تبدیل کرتے ہیں:

5	243
5	48 — 3
5	9 — 3
	1 — 4

پس $102_5 \times 1001_2 = 243 = 1433_5$

اب عدد 243 کو ثنائی نظام میں تبدیل کرتے ہیں:

2	243
2	121 — 1
2	60 — 1
2	30 — 0
2	15 — 0
2	7 — 1
2	3 — 1
	1 — 1

پس $243 = 11110011_2$

پس $102_5 \times 1001_2$

$243 = 1433_5 = 11110011_2$

مشق 3.7

1. مختصر کریں اور ثنائی نظام میں لکھیں۔

(i) $31 + 13_5 + 26_8$ (ii) $65 + 31_5 + 101_8$ (iii) $71 + 121_5 + 1010_2 + 20_8$

(iv) $34 + 34_5 + 110_2 + 15_8$ (v) $45 + 44_5 + 1010_2 + 30_8$

2. مختصر کریں اور خمسی نظام میں لکھیں۔

(I) $31 - 13_5 - 101_2$ (ii) $65 - 31_5 - 10_8$ (iii) $71 - 121_5 - 111_2 - 11_8$

(iv) $100 - 100_5 - 100_2$ (v) $1000 - 1001_5 - 1010_2 - 100_8$

3. مختصر کریں اور خمسی نظام اور ثنائی نظام میں لکھیں۔

(i) $32 \times 114_5 \times 110_2$ (ii) $32 \times 101_5 \times 111_2$ (iii) $95 \times 1101_5 \times 101_8$

4. 11100_2 اور 101_5 کے مجموعہ کو 39 اور 3145 کے مجموعہ میں سے تفریق کریں اور نتیجے کو ثنائی نظام، خمسی نظام اور اساس 8 کے نظام میں لکھیں۔

5. 123_5 اور 11011_2 کے حاصل ضرب کو 29 اور 2145_8 کے حاصل ضرب میں سے تفریق کریں اور نتیجے کو ثنائی نظام، خمسی نظام اور اساس 8 کے نظام میں لکھیں۔

جائزہ مشق 3

1. مندرجہ ذیل اعداد کو اساس 8 کے نظام میں تبدیل کریں۔

(i) 3421_5 (ii) 44332_5 (iii) 1020304_5

2. مختصر کریں اور نتیجے کو اعشاری نظام میں لکھیں۔

(i) $12431_8 + 34211_5 + 101_2 + 289$ (ii) $40044_8 - 202023_5 - 101000_2$

(iii) $4021_8 \times 1204_5$ (iv) $11000_2 \times 1100_5 \times 100_8$

3. مختصر کریں اور نتیجے کو ثنائی نظام، خمسی نظام اور اساس 8 کے نظام میں لکھیں۔

(i) $408 + 4310_5 + 1011_2 + 110_8$ (ii) $4401_5 - 753_8 - 111101_2$

(iii) $3412_5 \times 25_8 \times 110_2$ (iv) $25 \times 24_8 \times 23_5 \times 100_2$

4. خالی جگہیں پُر کریں۔

	اعشاری اعداد	خمسی اعداد	اعداد اساس 8
(i)	40	______	______
(ii)	82	______	______
(iii)	______	132	______
(iv)	______	______	62
(v)	______	______	705

5. 31204 میں

(i) اساس ______ کے نظام میں 2 کی مقامی قیمت 200 ہے۔

(ii) اساس ______ کے نظام میں 2 کی مقامی قیمت 128 ہے۔

(iii) اساس ______ کے نظام میں 2 کی مقامی قیمت 50 ہے۔

(iv) اساس ______ کے نظام میں 1 کی مقامی قیمت 125 ہے۔

(v) اساس ______ کے نظام میں 1 کی مقامی قیمت 512 ہے۔

(vi) اساس ______ کے نظام میں 1 کی مقامی قیمت 1000 ہے۔

6.عدد 12034 کے لئے خالی جگہیں پُر کریں۔

	مقامی قیمت	خمسی نظام میں	اساس 8 کے نظام میں	اعشاری نظام میں
(i)	**4**	$4 \times 5^0 = 4 \times 1 = 4$	________	________
(ii)	**3**	________	$3 \times 8^1 = 24$	________
(iii)	**0**	$0 \times 5^2 = 0$	________	________
(iv)	**2**	________	________	$2 \times 10^3 = 2000$
(v)	**1**	________	$1 \times 8^4 =$ _____	________

خلاصہ

- اعشاری نظام کی اساس 10 ہوتی ہے۔
- اعشاری نظام میں بنیادی ہندسے 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8اور 9 ہوتے ہیں۔
- اساس 2 کا نظام ثنائی نظام بھی کہلاتا ہے۔
- ثنائی نظام میں صرف دو ہندسے '0' اور '1' استعمال ہوتے ہیں۔ثنائی اعداد کو جمع، تفریق اور ضرب بھی کیا جاسکتا ہے۔
- خمسی نظام میں ہندسے 0، 1، 2، 3اور 4 استعمال ہوتے ہیں۔
- خمسی نظام میں سب سے بڑا ہندسہ 4 ہے۔
- اساس 8 کے نظام میں ہندسہ 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6اور 7 ہوتے ہیں۔
- اساس 8 کے نظام میں جب 7 میں 1 جمع کیا جاتا ہے تو ہمیں 10_8 حاصل ہوتا ہے۔
- اعداد کو اعشاری اعداد سے ثنائی نظام، خمسی نظام اور اساس 8 کے نظام میں تبدیل کیا جاسکتا ہے اور اس کا اُلٹ بھی کیا جاسکتا ہے۔
- ہم اساس 2، 5اور 8 کے اعداد کو جمع، تفریق اور ضرب کر سکتے ہیں۔
- ہم مختلف اساس کے اعداد کو بھی جمع، تفریق اور ضرب کر سکتے ہیں۔

مالیاتی حساب

اعادہ مشق IV

1. ذیل میں تناسب کا چوتھا رکن معلوم کریں۔

(i) 3,4,6 (ii) 7, 11, 17 (iii) 38, 19, 18
(iv) 5.6, 6.3, 4.8

2. 11 اور 27 تناسب کے طرفین ہیں اگر ایک وسطین 9 ہے تو دوسرا وسطین معلوم کریں۔

3. 25 اشیاء کی قیمت 300 روپے ہے۔ایسی 225 اشیاء کی قیمت کیا ہو گی۔

4. 1,315 روپے کا کتنا میٹر کپڑا خریدا جائے گا اگر 40 میٹر کپڑے کی قیمت 1,000 روپے ہے۔

5. ایک سمندری جہاز 800 سمندری میل کا فاصلہ 40 دن میں طے کرتا ہے تو جہاز 2,440 سمندری میل کا فاصلہ کتنے دنوں میں طے کرے گا۔

6. ایک گھڑی ہر 12 گھنٹے کے بعد 3 منٹ آگے ہو جاتی ہے تو بتائیں 14 دنوں کے بعد کتنے منٹ آگے ہو جائے گی۔

7. ایک مینار کی اونچائی 20 میٹر ہے اور اُس کے سائے کی لمبائی 25 میٹر ہے تو اگر اُس وقت دوسرے مینار کے سائے کی لمبائی 75 میٹر ہو تو اُس مینار کی اونچائی کیا ہو گی۔

8. 120 آدمی ایک کام کو 90 دن میں مکمل کرتے ہیں، تو اس کام کو 40 دن میں مکمل کرنے کیلئے مزید کتنے آدمیوں کی ضرورت ہو گی۔

9. ایک قلعے میں 600 آدمیوں کے لئے 27 دن کا راشن موجود ہے۔اگر 10 دن کے بعد 20 آدمی مزید آگئے تو بتائیں یہ راشن کتنے دنوں کے لئے کافی ہو گا۔

10. ایک کیمپ میں 200 آدمیوں کے لئے 20 دن کا کھانا ہے تو بتائیں کہ کتنے آدمی کیمپ سے چلے جائیں کہ یہ راشن 25 دنوں کے لئے کافی ہو۔

4.1 مرکب تناسب

4.1.1 مرکب تناسب کی وضاحت

دو یا دو سے زیادہ تناسب کے درمیان تعلق کو مرکب تناسب کہتے ہیں۔

مرکب تناسب کی تین صورتیں ہوتی ہیں:

صورت 1. دونوں تناسب راست ہو

صورت 2. ایک تناسب راست اور دوسرا تناسب معکوس ہو

صورت 3. دونوں تناسب معکوس ہو

4.1.2 مرکب تناسب، شراکت داری اور وراثت پر مشتمل روزمرہ زندگی کے مسائل حل کرنا

(A) مرکب تناسب: مرکب تناسب کی مزید وضاحت کے لئے ذیل کی مثالوں پر غور کریں۔

مثال 1. اگر 70 آدمی 630 مکعب میٹر زمین 5 دن میں کھودتے ہیں تو 80 آدمی 10 دنوں میں کتنی زمین کھودینگے۔

حل: اس مثال کا تعلق پہلی صورت سے ہے۔

آدمیوں میں اضافہ $\Leftarrow$ زمین میں اضافہ (تناسب راست)

دنوں میں اضافہ $\Leftarrow$ زمین میں اضافہ (تناسب راست)

فرض کریں 80 آدمی 10 دن میں x مکعب میٹر زمین کھودتے ہیں۔

زمین (مکعب میٹر)	دن	آدمی	
630	5	70	
x	10	80	(دونوں میں اضافہ)

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{630} = \frac{10}{5} \times \frac{80}{70}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\overset{2}{\cancel{10}} \times 80 \times \overset{9}{\cancel{630}}}{\cancel{5} \times \cancel{70}}$$

$$= 2 \times 80 \times 9 \quad = 1440 \text{ m}^3. \text{ مکعب میٹر}$$

لہٰذا 1440 مکعب میٹر زمین کھودی جائے گی۔

مثال 2. ایک خاندان کے 4 افراد کے لئے 32 دنوں کے لئے 12,000 روپے کافی ہیں تو خاندان کے 8 افراد کے لئے 24,000 روپے کتنے دنوں کے لئے کافی ہونگے۔

حل: اس مثال کا تعلق دوسری صورت سے ہے

روپوں میں اضافہ $\Leftarrow$ دنوں میں اضافہ (تناسب راست)

افراد میں اضافہ $\Leftarrow$ دنوں میں اضافہ (تناسب معکوس)

فرض کریں 8 افراد پر مشتمل خاندان کے لئے 24,000 روپے x دنوں کے لئے کافی ہیں۔

دن	افراد	روپے
↑ 32	↓ 4	↑ 12,000
x	8	24,000

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{32} = \left(\frac{24000}{12000}\right) \times \frac{4}{8} = \frac{\cancel{24000}^{2}}{\cancel{12000}_{1}} \times \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{8}_{\cancel{4}_{1}}} = \frac{1}{1}$$

$$\frac{x}{32} = \frac{1}{1} \quad \Rightarrow x = 32 \text{ دن}$$

پس دی گئی رقم 32 دنوں کے لئے کافی ہوگی۔

مثال 3. اگر 2,400 آدمیوں کے لئے 1.2 کلو گرام فی آدمی کے حساب سے 20 دن کے لئے خوراک کافی ہے تو کتنے آدمی چلے جائیں کہ یہ خوراک 1.5 کلو گرام فی آدمی کے حساب سے 40 دن کے لئے کافی ہو گی۔

حل: اس مثال کا تعلق تیسری صورت سے ہے ۔

فرض کریں x آدمیوں کے لئے یہ خوراک 1.5 کلو گرام فی آدمی کے حساب سے 40 دن کے لئے کافی ہے۔

خوراک فی آدمی اضافہ ⇐ آدمیوں میں کمی (تناسب معکوس)

دنوں میں اضافہ ⇐ آدمیوں میں کمی (تناسب معکوس)

آدمی	دن	خوراک فی آدمی
↑ 2400	↓ 20	↓ 1.2 کلو گرام
x	40	1.5 کلو گرام

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{2400} = \frac{\cancel{20}}{\cancel{40}_{\cancel{2}_{1}}} \times \frac{\cancel{1.2}^{\cancel{4}^{2}}}{\cancel{1.5}_{5}} = \frac{2}{5} \qquad \text{(دونوں میں کمی)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{5} \times 2400 = \frac{2}{\cancel{5}_{1}} \times \cancel{2400}^{480} = 960 \text{ آدمی}$$

پس 1.5 کلو گرام فی آدمی خوراک 960 آدمیوں کے لئے کافی ہوگی۔

لہٰذا $(2400 - 960) = 1440$ آدمی چلے جائیں گے۔

مشق 4.1

1. 12 کلو گرام سامان کو 36 کلو میٹر تک لے جانے کا کرایہ 24 روپے ہے تو بتائیں کہ 18 کلو گرام وزن کو 12 کلو میٹر تک لے جانے کا کرایہ کتنا ہوگا۔
2. 1.5 کلو گرام فی آدمی کے حساب سے 4,800 آدمیوں کے لئے 20 دن کی خوراک موجود ہے تو بتائیں 1.0 کلو گرام فی آدمی کے حساب سے یہ خوراک 16 دن تک کتنے آدمیوں کے لئے کافی ہو گی۔
3. 16 میٹر لمبے اور 6 میٹر چوڑے قالین کی قیمت 6,288 روپے ہے تو 24 میٹر لمبے اور 12 میٹر چوڑے قالین کی قیمت کیا ہو گی۔
4. 10 آدمی 200 سائیکلیں 8 دن میں بناتے ہیں تو 5 آدمی 16 دن میں کتنی سائیکلیں بنائیں گے۔
5. اگر 60 آدمی 40 کلو گرام شکر 12 دن میں استعمال کرتے ہیں تو معلوم کریں 90 آدمی 200 کلو گرام شکر کتنے دن تک استعمال کرینگے۔
6. 14 آدمی روزانہ 5 گھنٹے کام کر کے 8 دن میں کام مکمل کرتے ہیں تو معلوم کریں اس کام کو 35 آدمی 4 دنوں میں مکمل کرنے میں کتنے گھنٹے روزانہ کام کرینگے۔
7. ایک ٹھیکیدار نے روڈ بنانے کے لئے 30 مزدوروں کو 30 دن کے لئے لگایا لیکن 10 دن کے بعد صرف ایک چوتھائی کام مکمل ہوا۔ تو کام کو مقررہ وقت میں مکمل کرنے کے لئے کتنے مزدوروں کی مزید ضرورت ہے۔
8. اگر 1,200 کلو گرام وزن کو 200 کلو میٹر تک لے جانے کے لئے 300 روپے کرایہ ہے تو معلوم کریں کہ 500 روپے میں 300 کلو میٹر تک کتنا وزن لے جایا جائے گا۔
9. 3 مزدور 100 میٹر لمبے اور 40 میٹر چوڑے فرش کو بنانے میں 16 دن لگاتے ہیں تو 4 مزدور 160 میٹر لمبے اور 50 میٹر چوڑے فرش کو کتنے میں بنائینگے۔
10. 14 مزدور 5 گھنٹے روزانہ کام کر کے 8 دن میں ایک تہائی کام مکمل کرتے ہیں تو معلوم کریں کہ 35 آدمی کتنے گھنٹے روزانہ کام کریں کہ باقی کام 4 دن میں مکمل ہو جائے۔

(B) شراکت داری:
یہ ایک کاروبار ہے جس میں دو یا دو سے زیادہ آدمی نفع اور نقصان کی بنیاد پر حصہ داری کرتے ہیں۔

(i) سادہ شراکت داری: یہ ایسی شراکت داری ہے جس میں حصہ دار ایک جیسے یا مختلف سرمائے سے ایک ساتھ کاروبار شروع اور بند کرتے ہیں۔

(ii) مرکب شراکت داری: اس شراکت داری میں حصہ دار مختلف سرمائے کو مختلف وقت کے لئے لگاتے ہیں۔ نفع اور نقصان کی تقسیم بھی سرمائے اور وقت کے مطابق کی جاتی ہے۔

شراکت داری پر مشتمل روزمرہ زندگی کے مسائل حل کرنا

مثال 1. اسد اور عمار نے بالترتیب 63,000 روپے اور 72,000 روپے سے ایک کاروبار شروع کیا ایک سال کے بعد انھیں 45,000 روپے کا منافع ہوا۔ منافع میں ہر ایک کا حصہ معلوم کریں۔

حل: یہ سادہ شراکت داری کی صورت ہے جیسا دونوں کی سرمایہ کاری کا عرصہ ایک جیسا ہے تو لہٰذا منافع دونوں کے سرمائے کی نسبت کے مطابق تقسیم کیا جائے گا۔

سرمائے کی نسبت

عمار کا سرمایہ	:	اسد کا سرمایہ
72,000	:	63,000
72	:	63
8×9	:	7×9
8	:	7

نسبتوں کا مجموعہ $= (7 + 8) = 15$

کل منافع = 45,000 روپے

اسد کے منافع کا حصہ ہے: $\frac{7}{15}$

عمار کے منافع کا حصہ ہوا: $\frac{8}{15}$

اسد کا منافع $= \frac{7}{\cancel{15}_{1}} \times \cancel{45,000}^{3,000} = 21,000$ روپے

عمار کا منافع $= \frac{8}{\cancel{15}_{1}} \times \cancel{45,000}^{3,000} = 24,000$ روپے

مثال 2. امجد نے 30,000 روپے کے سرمائے سے ایک کاروبار شروع کیا۔ 6 ماہ بعد عمر بھی 60,000 روپے کے سرمائے سے ان کے ساتھ شامل ہوگیا۔ عثمان بھی 3 ماہ بعد 180,000 روپے کے سرمائے سے ان کے ساتھ شامل ہوگیا۔ سال کے آخر میں ان کو 490,000 روپے کا منافع ہوا۔ تو ہر شراکت دار کا نفع میں حصہ معلوم کریں۔

حل: یہ مرکب شراکت داری کی صورت ہے جس میں شراکت داروں کا سرمایہ اور مدت دونوں مختلف ہیں

امجد کا سرمایہ = سرمایہ × مدت

$= 30,000 \times 12 = 360,000$ روپے

عمر کا سرمایہ $= 60,000 \times 6 = 360,000$ روپے

عثمان کا سرمایہ $= 18,000 \times 3 = 54,000$ روپے

سرمایوں کی نسبت

عثمان	:	عمر	:	امجد
540,000	:	360,000	:	360,000
54	:	36	:	36
3×18	:	2×18	:	2×18
3	:	2	:	2

نسبتوں کا مجموعہ $3 + 2 + 2 = 7$

امجد کا نفع میں حصہ $= \frac{2}{7} \times 490,000 = 140,000$ روپے

عمر کا نفع میں حصہ $= \frac{2}{7} \times 490,000 = 140,000$ روپے

عثمان کا نفع میں حصہ $= \frac{3}{7} \times 490,000 = 210,000$ روپے

(C) وراثت

آدمی مرنے کے بعد اپنے پیچھے جو مال و اسباب وہ چھوڑ جاتا ہے وہ وراثت کہلاتی ہے اور وہ قانونی وارثوں میں شریعت کے قانون کے مطابق تقسیم کیا جاتا ہے اور تقسیم کے دوران نیچے دیے گئے مراحل سامنے رکھے جائینگے۔

- سب سے پہلے اُس کا قرض ادا کیا جاتا ہے۔
- پھر وصیت کے مطابق $\frac{1}{3}$ حصہ دیا جائے گا۔
- پھر باقی وراثت کو اس کے ورثاء میں یوں تقسیم کیا جائے گا

(i) اگر مرنے والے کے والدین زندہ ہیں تو اس کی وراثت کا $\frac{1}{6}$ ہر ایک کو ملے گا۔

(ii) بیوہ کو $\frac{1}{8}$ حصہ ملے گا جب کہ شوہر کو $\frac{1}{4}$ ملے گا اگر بچے ہو تو، بچے نہ ہونے کی صورت میں بیوہ کو $\frac{1}{4}$ ملے گا جب کہ شوہر کو $\frac{1}{2}$ ملے گا اور باقی بھائیوں اور بہنوں کو ملے گا۔

(iii) ہر بیٹی کو بیٹے کا نصف ملے گا

4.1.3 وراثت پر مشتمل روزمرہ زندگی کے مسائل حل کرنا

مثال 3. انور نے اپنی جائیداد میں 1,000,000 روپے نقد اور 600,000 روپے کا ایک پلاٹ چھوڑا ہے اگر اُس کے اپنے ورثاء میں ایک بیوہ، دو بیٹے اور 3 بیٹیاں ہیں تو ہر ایک کو کتنی رقم ملے گی۔

حل: کل جائیداد = نقد رقم + ایک پلاٹ

= 1,000,000 روپے + 600,000 روپے = 1,600,000 روپے

بیوہ کا حصہ $= 1,600,000 \times \frac{1}{8} = 200,000$ روپے

باقی رقم $= (1,600,000 - 200,000) = 1,400,000$ روپے

فرض کریں بیٹی کا حصہ 1 ہے تو بیٹے کا حصہ 2 ہوگا

3 بیٹیوں کا حصہ ہوگا: $3 \times 1 = 3$ اور دو بیٹوں کا حصہ ہوگا: $2 \times 2 = 4$

بیٹیوں اور بیٹوں کے حصوں کا مجموعہ $= 3 + 4 = 7$

ہر بیٹے کا حصہ $= 1,400,000 \times \frac{2}{7} = 400,000$ روپے

ہر بیٹی کا حصہ $= 1,400,000 \times \frac{1}{7} = 200,000$ روپے

مثال 4. بیگم فاطمہ 645,000 روپے کی جائیداد چھوڑ کر مریں۔ 40,000 روپے ان پر قرض تھا اور ان کی تدفین پر 5,000 روپے خرچ ہوئے۔ باقی رقم ان کی ماں، شوہر، ایک بیٹی اور تین بیٹوں میں تقسیم کریں۔

حل: کل رقم جو ان کے ورثہ میں تقسیم کی جائے گی = (تدفین کے اخراجات + قرض کی رقم) – کل رقم

$= 645,000 - (40,000 + 5,000)$

= 600,000 روپے

ماں کا حصہ $= 600,000 \times \frac{1}{6} = 100,000$ روپے

شوہر کا حصہ $= 600,000 \times \frac{1}{4} = 150,000$ روپے

بقایا رقم $= 600,000 - (100,000 - 150,000)$ روپے

= 350,000 روپے

بیٹی کا حصہ = 1 اور بیٹے کا حصہ = 2

ایک بیٹی کا حصہ = 1، اور تین بیٹوں کے حصے = $2 \times 3 = 6$ اور حصوں کا مجموعہ = $6 + 1 = 7$

بیٹی کا حصہ = $350{,}000 \times \frac{1}{7} = 50{,}000$ روپے

ہر بیٹے کا حصہ = $350{,}000 \times \frac{2}{7} = 100{,}000$ روپے

مشق 4.2

1. وسیم اور عارفہ نے بالترتیب 60,000 روپے اور 80,000 روپے سے کاروبار شروع کیا ایک سال کے بعد انہیں 21,000 روپے کا منافع ہوا۔ منافع میں ہر شراکت دار کا حصہ معلوم کریں۔

2. اکرم نے 70,000 روپے سے کاروبار شروع کیا۔ 3 ماہ کے بعد 40,000 روپے سے اسلم بھی اس کاروبار میں شامل ہو گیا اور 6 ماہ کے بعد اصغر نے بھی 40,000 روپے اس کاروبار میں لگائے۔ سال کے آخر میں انھوں نے 28,800 روپے منافع کمایا تو ہر شراکت دار کا منافع میں حصہ معلوم کریں۔

3. علی، زین اور سعد بالترتیب 30,000 روپے، 30,000 روپے اور 24,000 روپے سے ایک کاروبار شروع کیا۔ 5 ماہ کے بعد زین نے 18,000 روپے کاروبار میں سے نکال لیے اور 10 ماہ کے بعد کاروبار بند کر دیا۔ تو معلوم کریں ہر شراکت دار کو 37,500 روپے منافع میں کتنا کتنا حصہ ملے گا۔

4. علی اور عثمان نے مختلف رقم مختلف مدت کے لئے کاروبار میں لگائی۔ اگر ایک سال کے بعد کل منافع 60,000 روپے ہوا تو ذیل میں دی گئی خالی جگہیں پُر کریں۔

نمبر شمار	علی کی رقم (روپے)	عثمان کی رقم (روپے)	علی کی مدت (مہینوں میں)	عثمان کی مدت (مہینوں میں)	نفع کی نسبت	علی کا نفع (روپے)	عثمان کا نفع (روپے)
(i)	50,000	25,000	12	12	2:1	40,000	20,000
(ii)	50,000	75,000	12	12	--	--	--
(iii)	25,000	25,000	12	6	--	--	--
(iv)	50,000	--	6	6	2:3	--	--

5. ایک آدمی نے وراثت میں 1,800,000 روپے چھوڑے جب کہ ورثاء میں اس کی 6 بیٹیاں اور 2 بیٹے شامل ہیں تو ہر ایک کا حصہ معلوم کریں۔

6. اسلم 1,660,000 روپے کی جائیداد چھوڑ کر مرا۔ اُس کی دو بیواہ، دو بیٹے اور ایک بیٹی تھی اگر تدفین کے اخراجات 60,000 روپے تھے تو ہر ایک کا حصہ معلوم کریں۔

7. اکرم نے 1,520,000 روپے مالیت کی جائیداد ایک ماں، ایک بیوہ، تین بیٹے اور چار بیٹیاں کے درمیان چھوڑی۔ اگر اُس پر 50,000 روپے قرض تھا اور اُس کی تدفین پر 30,000 روپے خرچ ہوئے تو ہر وارث کا حصہ معلوم کریں۔

8. بیگم عبدالرحمٰن نے اپنے پیچھے ایک والد، ایک ماں، دو بیٹے اور ایک شوہر چھوڑا اگر ان کی وراثت کی رقم 480,000 روپے ہے تو ان کے ہر بیٹے کا حصہ معلوم کریں۔

9. ایک آدمی کئی بچے چھوڑ کر مرا (مگر نہ کوئی والدین اور نہ کوئی بیوی) اگر اُس کی وراثت کی رقم 800,000 روپے ہے۔ خالی جگہیں پُر کریں۔

نمبر شمار	بیٹوں کی تعداد	بیٹیوں کی تعداد	بیٹوں کا کل حصہ	بیٹیوں کا کل حصہ	ہر بیٹے کی رقم (روپے)	ہر بیٹی کی رقم (روپے)
(i)	1	2	2	2	400,000	200,000
(ii)	2	1	4	1	--	--
(iii)	2	4	--	--	--	--
(iv)	--	6	2	--	--	--
(v)	3	--	--	4	--	--
(vi)	--	--	2	--	--	100,000

4.2 بینکنگ

بینک کا خاص کام یہ ہے کہ وہ اپنے اکاؤنٹ ہولڈر سے رقم وصول کرے اور انھیں قرضہ دے اس کے بدلے میں وہ جمع شدہ رقم پر کچھ نفع دیتا ہے اور قرض پر مارک اپ یعنی منافع لیتا ہے۔

4.2.1 بینک اکاؤنٹ کی اقسام

(a) کمرشل بینک ڈیپوزٹ کی وضاحت

بینک اکاؤنٹ ہولڈر سے رقم وصول کی جاتی ہے پھر انھیں مختلف اکاؤنٹ میں رکھا جاتا ہے جیسے کرنٹ

اکاؤنٹ، PLS اکاؤنٹ، فارن کرنسی اکاؤنٹ وغیرہ کمرشل بینک ڈیپوزٹ کہلاتے ہیں۔

ذیل میں بینک اکاؤنٹ کی اقسام دی گئی ہیں۔

(i) PLS بچت بینک اکاؤنٹ:

یہ اکاؤنٹ اپنے اکاؤنٹ ہولڈر کی حوصلہ افزائی کرتا ہے کہ وہ زیادہ سے زیادہ رقم مناسب منافع کی شرح پر جمع کروائیں اس اکاؤنٹ میں رقم جمع کرنے کی شرائط منجمد نہیں ہوتیں۔

(ii) کرنٹ ڈیپوزٹ اکاؤنٹ:

اس اکاؤنٹ کو روزانہ لین دین کی بنیاد پر کھولا جاتا ہے کرنٹ اکاؤنٹ پر کسی قسم کا نفع نہیں دیا جاتا ہے۔

(iii) PLS منجمد ڈیپوزٹ اکاؤنٹ:

اس قسم کے اکاؤنٹ میں رقم ایک مقررہ مدت کے لئے رکھی جاتی ہے دوسرے تغیر پذیر اکاؤنٹ کے مقابلے میں بینک غیر تغیر پذیر اکاؤنٹ پر زیادہ سے زیادہ شرح کی بنیاد پر نفع دیتا ہے۔

(iv) فارن کرنسی اکاؤنٹ

بین الاقوامی یا پاکستانی کمپنیاں جو دوسرے ملکوں میں رہتی ہیں وہ اس طرح کے اکاؤنٹ استعمال کرتی ہیں اس اکاؤنٹ میں لین دین کی اجازت فارن کرنسی میں دی جاتی ہے۔

(b) بینک سے لین دین کے ذرائع کی وضاحت

یہ مطالبے پر یا ایک خاص مدت پر ایک خاص رقم ادا کرنے کا تحریری معاہدہ ہوتا ہے اس کی عام مثالیں چیک، پے آرڈر اور ڈیمانڈ ڈرافٹ وغیرہ ہیں۔

(i) چیک: یہ اکاؤنٹ ہولڈر کے لئے بینک اکاؤنٹ سے رقم نکلوانے کا ایک طریقہ ہے، یہ تحریری دستاویز ہوتی ہے جو مخصوص بینک کے لئے ہوتی ہے۔

(ii) ڈیمانڈ ڈرافٹ: یہ ایک غیر مشروط تحریری حکم نامہ ہوتا ہے جو کسی ایک بینک سے دوسرے بینک کے ذریعے کسی تیسری پارٹی کو ایک خاص رقم مطالبے پر ادا کرتا ہے۔

(iii) پے آرڈر: یہ ایک ذریعہ ہوتا ہے جو کسی بینک کو کسی تیسری پارٹی کو ایک خاص رقم ادا کرنے کی ہدایت کرتا ہے۔

4.2.2 آن لائن بینکنگ

(i) آن لائن بینکنگ کی وضاحت: آن لائن بینکنگ اپنے اکاؤنٹ ہولڈر کو یوٹیلٹی بل کی ادائیگی، اپنے اکاؤنٹ کسی بھی وقت رقم نکلوانے یا منتقل کرنے جیسی سہولتیں بذریعہ کمپیوٹر اور انٹرنیٹ دستیاب کرتا ہے۔

(ii) رقم کی وصولی بذریعہ آٹو ٹیلر مشین (ATM): اکاؤنٹ ہولڈر کو ایک ATM کارڈ ATM کی سہولت کو استعمال کے لئے دیا جاتا ہے۔ جب اکاؤنٹ ہولڈر ATM کارڈ مشین میں ڈالتا ہے تو کچھ معلومات جیسے PIN کوڈ وغیرہ کے مہیا کرنے پر ATM پروگرام ٹرانزیکشن پورا کرتا ہے۔

(iii) ڈیبٹ کارڈ: یہ اکاؤنٹ ہولڈر کے اکاؤنٹ سے رقم نکلنے یا اشیاء خریدنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

(iv) کریڈیٹ کارڈ

یہ ایک پلاسٹک کا کارڈ ہوتا ہے جس پر ایک مقناطیسی پٹی لگی ہوتی ہے جس پر اکاؤنٹ ہولڈر کے متعلق معلومات ہوتی ہے جو مقامی طور پر خریداری کی اجازت دیتا ہے۔

4.2.3 کرنسی کی تحویل

کرنسی کی تحویل کے لئے تبدیلی کی شرح کا استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ شرح مختلف ممالک کے درمیان کرنسی کے تعلق کو ظاہر کرتا ہے جو مستقل نہیں ہوتی ہے۔

(a) پاکستانی کرنسی کی دنیا کی جانی پہچانی کرنسی میں تبدیلی: فارن کرنسی کی تبدیلی کی شرح اس بات کا تعین کرتی ہے کہ دوسرے ممالک کی کرنسی کو پاکستان کی کرنسی میں کس قیمت پر خریدہ جائے۔ یہ جدول کچھ ممالک کی کرنسی کی تبدیلی کی شرح کو ظاہر کرتا ہے۔

ملک	کرنسی	علامت	قیمت خرید (روپے)	قیمت فروخت (روپے)
US	ڈالر	$	103.40	103.65
UK	پاؤنڈ	£	139.00	139.75
بھارت	روپیہ	₹	1.60	1.65
یورپین (مشترکہ مارکیٹ)	یورو	€	126.00	126.25
چین	یان	¥	16.25	16.50
جاپان	ین	¥	0.946	0.953
سعودی عرب	ریال	ریال	27.15	27.40

یہ شرح اس کتاب کے لکھے جانے کی تاریخ کے مطابق ہے۔ یہ وقتاً فوقتاً تبدیل ہوتی رہتی ہے، موجودہ شرح معلوم کرنے کے لئے الیکٹرونک یا پرنٹ میڈیا سے رجوع کیا جاسکتا ہے۔

مثال 1. ایک امریکی شخص 250 ڈالر کے بدلے میں پاکستانی روپے لینا چاہتا ہے تو بتائیں اُسے کتنے روپے ملینگے (1 US ڈالر = 103.40 روپے)

حل: 1 US ڈالر = 103.40 روپے

250 US ڈالر = 250 × 103.40 = 25,850 روپے

مثال 2. مسٹر جمال 60,000 روپوں کے بدلے میں سعودی ریال لینا چاہتے ہیں تو بتائیں اُن کو کتنے سعودی ریال ملیں گے (1 سعودی ریال = 27.15 روپے)

حل: کل رقم = 60,000 روپے

27.15 روپے = 1 سعودی ریال

60,000 روپے = $\frac{60,000}{27.15}$ = 2,209 سعودی ریال

مشق 4.3

1. تبدیل کریں۔

(i) 90,000 روپے کو چینی یان میں (1 یان = 16.25 روپے)

(ii) 50,000 روپے کو انڈین روپوں میں (1 انڈین روپیہ = 1.60 پاکستانی روپے)

(iii) 110 UK پاؤنڈ کو پاکستانی روپوں میں (1 UK پاؤنڈ = 139 پاکستانی روپے)

(iv) 250 یورو کو پاکستانی روپوں میں (1 یورو = 126.0 پاکستانی روپے)

(v) 64,200 روپے کو ترک لیرا میں (1 ترک لیرا = 42.80 پاکستانی روپے)

2. ایک پاکستانی سعودی عرب میں کام کرتا ہے اور ماہانہ 9,000 ریال کماتا ہے جب کہ 2,500 ریال ایک ماہ میں خرچ کرتا ہے تو اُس کی ماہانہ بچت پاکستانی روپوں میں معلوم کریں۔

3. کمال کے پاس 38,400 پاکستانی روپے اور 4,000 چینی یان ہیں اور ان سب کو وہ امریکی ڈالر میں تبدیل کروانا چاہتا ہے تو معلوم کریں کہ اُسے کتنے امریکی ڈالر ملیں گے اگر تبدیلی کی شرح اس طرح ہے (1 US ڈالر = 103.4 پاکستانی روپے اور 1 چینی یان = 16.25 پاکستانی روپے)۔

4. 48,000 پاکستانی روپے کو انڈین روپے میں تبدیل کریں۔

5. 48,000 انڈین روپوں کو پاکستانی روپے میں تبدیل کریں۔

6. ایک فریج کی پاکستانی مارکیٹ میں قیمت 77,500 روپے ہے اور اس ہی طرح کا ایک فریج جاپان میں 70,000 ین میں فروخت ہو رہا ہے، لانے کے اخراجات 5,000 روپے اور کسٹم ڈیوٹی 3,000 روپے ہے، اگر اس کو جاپان برآمد کیا جائے تو اس کی کیا قیمت ہو گی اور کتنے پیسوں کی بچت ہو گی اگر تبدیلی کی شرح 1 ین = 0.946 روپے ہو۔

4.2.4 نفع/ مارک اپ

(i) a. **نفع (I):** جب ہم بینک میں پیسے جمع کرواتے ہیں تو بینک ہمارے پیسے کو استعمال کرتا ہے اور اس کے صلے میں اصل رقم کے ساتھ کچھ اضافی رقم بھی دیتا ہے یہ اضافی رقم نفع کہلاتی ہے۔

(i) b. **مارک اپ (I):** جب ہم بینک سے کچھ رقم ادھار لیتے ہیں تو بینک اصل رقم کے ساتھ کچھ اضافی رقم بھی لیتا ہے اس اضافی رقم کو مارک اپ کہتے ہیں۔

(ii) **اصل رقم (P):** یہ وہ رقم ہے جو بینک میں جمع کروائی جاتی ہے یا بینک سے اُدھار لی جاتی ہے۔

(iii) **نفع/ مارک اپ کی شرح (R):** یہ وہ شرح ہے جس کے حساب سے بینک اپنے اکاؤنٹ ہولڈر کو نفع دیتا ہے یا مارک اپ لیتا ہے اس کا حساب جمع کردہ رقم یا اُدھار لی گئی رقم پر فیصد میں لگایا جاتا ہے۔

(iv) **مدت (T):** جتنے وقت کے لئے بینک میں رقم جمع کروائی جائے یا اُدھار لی جائے وہ مدت کہلاتی ہے۔

4.2.5 نفع/ مارک اپ، اصل رقم، نفع/ مارک اپ کی شرح اور مدت معلوم کرنا

(a) نفع/ مارک اپ (I) معلوم کریں

نفع/ مارک اپ معلوم کرنے کے لئے ہم یہ کلیہ استعمال کرتے ہیں: $I = PRT$

جیسے نفع یا مارک اپ = اصل رقم×شرح×مدت

مثال 1. اکرم نے بینک سے 70,000 روپے 7% کی شرح کے حساب سے 3 سال کے لئے لیے۔ مارک اپ کی رقم اور کل ادا کردہ رقم معلوم کریں۔

حل: یہاں اصل رقم (P) = 70,000 روپے

شرح (R) = 7%، وقت (T) = 3 سال

مارک اپ (I) = PRT = $70,000 \times \frac{7}{100} \times 3 = 700 \times 7 \times 3 = 14,700$ روپے

لہٰذا کل ادا کردہ رقم = اُدھار لی گئی رقم + مارک اپ

$= 70,000 + 14,700 = 84,700$ روپے

(b) اصل رقم (P) معلوم کریں۔

ہمیں معلوم ہے $I = PRT$ لہٰذا $P = \frac{I}{R \times T}$

مثال 2. معلوم کریں کہ ریاض نے کاروبار میں کتنی رقم لگائی تھی اگر اُسے 3 سال میں 12% سالانہ کے حساب سے 27,000 روپے منافع ہوا۔

حل: یہاں I = 27,000 روپے، R = 12%، T = 3 سال

$P = \frac{I}{R \times T} = \frac{27,000 \times 100}{12 \times 3} = 75,000$ روپے

لہٰذا ریاض نے 75,000 روپے کاروبار میں لگائے تھے۔

(c) نفع یا مارک اپ معلوم کریں (R):

ہم جانتے ہیں $I = PRT$ تو $R = \frac{I}{P \times T}$

مثال 3. مارک اپ کی شرح کیا ہوگی کہ 34,000 روپے 3 سال میں 43,180 روپے ہو جائینگے۔

حل: مارک اپ (I) = (کل رقم – اصل رقم)

$= (43,180 - 34,000) = 9,180$ روپے

جیسا کہ مدت (T) = 3 سال اس لئے

$\therefore R = \frac{I}{P \times T} = \frac{9180}{34000 \times 3} = 0.09$

لہٰذا مارک اپ کی شرح $= 0.09 \times 100 = 9$ فیصد

پس $R = 9\%$

(d) مدت (T) معلوم کرنا (بذریعہ استعمال $I = PRT$ تو $T = \frac{I}{P \times R}$)

مثال 4. 5% مارک اپ کے حساب سے کتنی مدت میں اصل رقم تین گنا ہو جائے گی۔

حل: فرض کریں کہ اصل رقم = P = 100 روپے

تین گنا رقم = 3P = 300 روپے

مارک اپ (I) = (اصل رقم–کل رقم) = (3P – P) = 2P = (300 – 100) = 200 روپے

یہاں R = 5% = $\frac{5}{100}$ = 0.05

$$\therefore T = \frac{I}{P \times R} = \frac{200}{100 \times 0.05} = \frac{200}{5} = 40$$ سال

مثال 5. 25,000 روپے بینک میں جمع کرنے کے کتنی مدت بعد 12% سالانہ کے حساب سے رقم 34,000 روپے ملے گی۔

حل: اصل رقم = P = 25,000 روپے، حاصل شدہ رقم = 34,000 روپے

مارک اپ (I) = (اصل رقم–کل رقم)

= (34,000 – 25,000) = 9,000 روپے

$$R = 12\% = \frac{12}{100}$$

$$T = \frac{I}{P \times R} = \frac{9000 \times 100}{25000 \times 12} = 3$$ سال

لہٰذا 3 سال کی مدت 12 فیصد سالانہ کے حساب سے 25,000 کی رقم 34,000 بنے گی۔

4.2.6 سرمائے کی اقسام

وضاحت

(i) اوورڈرافٹ (OD): اُدھار کی یہ سہولت بینک اپنے اکاؤنٹ ہولڈر، کاروباری اشخاص، کمپنیوں وغیرہ کو فراہم کرتا ہے کہ وہ اپنے اصل اکاؤنٹ بیلنس سے کچھ زیادہ رقم لے سکتے ہیں۔

(ii) متحرک سرمایہ (رننگ فنانس): یہ اوورڈرافٹ جیسا ہی ہے اس کو ایک خاص حد تک متحرک نفع کی شرح پر اُدھار کی سہولت تصور کیا جاسکتا ہے۔

(iii) ڈیمانڈ فنانس: یہ ایک قسم کا قرض ہے جو کسی بھی وقت بینک سے لیا جاسکتا ہے یہ مختصر وقت کے لئے اور لمبے عرصے کے لئے بھی لیا جاسکتا ہے۔

(iv) پٹے پر (لیزنگ): لیزنگ استعمال کرنے والے (یعنی لیزی) اور مالک (یعنی لیزر) کے درمیان اثاثوں کو استعمال کرنے کا معاہدہ ہوتا ہے۔ پٹے کی مدت کے دوران اثاثوں کے مالکانہ حقوق کرایہ کہلاتے ہیں اشیاء کی خریدنے کے اس طریقے میں شرائط کے مطابق ادائیگی کی جاتی ہے۔ ابتدائی رقم پیش گی ادائیگی کہلاتی ہے۔

4.2.7 بینکنگ اور فنانس سے متعلق روزمرہ زندگی کے مسائل حل کرنا

مثال 1. ایک کمپنی نے ایک گھر 6 سال کے لئے پٹے پر لیا۔ معاہدے کے مطابق کمپنی نے 2,000,000 روپے کی پیش گی ادائیگی کی اور ہر ماہ 40,000 روپے بطور کرایہ ادا کرنے کا معاہدہ کیا۔ 3 سال کے بعد کمپنی 5 فیصد کرایہ بڑھائے گی تو معلوم کریں کہ مالک کو کل کتنی رقم ملے گی۔

حل. مالک کو پیش گی ادائیگی = 2,000,000 روپے

3 سال کے لئے ماہانہ کرایہ = 40,000 روپے

3 سال کا کرایہ = $40,000 \times 3 \times 12 = 1,440,000$ روپے

3 سال کے بعد ماہانہ کرایہ = $40,000 \times \frac{105}{100} = 42,000$ روپے

اگلے 3 سال کا کرایہ = $42,000 \times 12 \times 3 = 1,512,000$ روپے

لہٰذا مالک کو کل رقم ملے گی = پیش گی ادائیگی + پہلے 3 سال کا کرایہ + اگلے 3 سال کا کرایہ

$= 2000,000 + 1,440,000 + 1,512,000 = 4,952,000$ روپے

مثال 2. ایک کار کی قیمت 900,000 روپے ہے اس کو قیمت کا 15% پیش گی ادائیگی پر خریدا جا سکتا ہے باقی رقم 2 سال میں 10 فیصد مارک اپ پر ماہانہ بنیادوں پر ادا کرنی ہے، تو معلوم کریں۔

(i) ماہانہ اقساط **(ii)** کار کی کل ادا کی جانے والی رقم

حل: پیش گی ادائیگی = 900,000 روپے کا 15 فیصد = $900,000 \times \frac{15}{100}$

$= 9,000 \times 15 = 135,000$ روپے

بقایا رقم $(P) = ($900,000 روپے $-$ 135,000 روپے$) = $ 765,000 روپے

باقی رقم پر 2 سال کے لئے مارک اپ

$$I = P \times R \times T = 765{,}000 \times \frac{10}{100} \times 2 = 153{,}000 \text{ روپے}$$

لہٰذا اقساط کی صورت میں 24 ماہ میں ادا کی جانے والی رقم = بقایا رقم + مارک اپ (I)

918,000 = 765,000 + 153,000 روپے

(i) ماہانہ اقساط = 24 ÷ 918,000 = 38,250 روپے

(ii) کل ادا کردہ رقم = پیشگی ادائیگی + بقایا رقم + مارک اپ

1,053,000 = 153,000 + 765,000 + 135,000 روپے

مشق 4.4

1. 5 فیصد سالانہ کے حساب سے 6 سال کے لئے 50,000 روپے پر نفع معلوم کریں۔
2. اسلم نے 8 فیصد سالانہ کے حساب سے 4 سال کے لئے بینک سے 25,000 روپے قرض لیا، مارک اپ معلوم کریں۔
3. نسیم نے 12% سالانہ کے حساب سے 3 سال میں 27,000 روپے منافع حاصل کیا تو اس کی اصل رقم معلوم کریں۔
4. کس سالانہ شرح فیصد سے 11 سال میں 68,000 روپے منافع 90,440 روپے پر ہوگا۔
5. کتنی مدت کے لئے 6 فیصد سالانہ کے حساب سے 31,000 روپے پر منافع 5,332 روپے حاصل ہوگا
6. کس مارک اپ کی شرح کے لحاظ سے 20 سال میں رقم دگنی ہو جائے گی۔
7. کس مدت میں 8% سالانہ کے حساب سے رقم دگنی ہو جائے گی۔
8. ذیل کی جدول کو مکمل کریں۔

نمبر شمار	مارک اپ (I) (روپے)	اصل رقم (P) (روپے)	وقت (T) (سال)	مارک اپ کی شرح (فیصد)
(i)	---	20,000	5	4
(ii)	---	98,000	6	6.5
(ii)	10,500	21,000	---	5
(iv)	2,100	---	6	7
(v)	1,740	5,800	3	---

9. ہاشم نے ایئر کنڈیشنر 50,000 روپے میں خریدا اس نے 20% پیش گی ادائیگی کی اور باقی رقم 10% سالانہ مارک اپ پر $2\frac{1}{2}$ سال کی ماہانہ اقساط پر طے کی تو معلوم کریں

(i) ماہانہ قسط (ii) کل ادا کردہ رقم

10. ایک ادارے میں کچھ جگہ 4 سال کے لئے پٹے پر لی گئی۔ ادارے نے 80,000 روپے پیش گی ادا کئے اور 20,000 روپے ماہانہ کرایہ طے کیا۔ دو سال کے بعد ادارے نے 5 فیصد کرایہ اضافہ کرنا طے کیا تو مالک کو ملنے والی رقم کا حساب لگائیں۔

11. ارشد نے ایک مکان 200,000 روپے پٹے پر لیا مختلف مارک کی شرح اور مدت کے لحاظ سے ذیل میں دی گئی جدول مکمل کریں۔

نمبر شمار	پیش گی ادائیگی (فیصد میں)	سالانہ مارک اپ (فیصد میں)	پٹے کی مدت (سالوں میں)	ماہانہ قسط (روپوں میں)	کل ادا کردہ رقم (روپوں میں)
(i)	20%	10%	2	8,000	232,000
(ii)	20%	5%	2	---	---
(iii)	20%	10%	4	---	---
(iv)	40%	10%	2	---	---

4.3 فیصد

فیصد کا مطلب 'فی صد' یا 'سو میں سے' فیصد کی علامت '%' ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر 40 فیصد کا مطلب ہے کہ 100 میں سے 40۔

4.3.1 نفع اور نقصان

اگر قیمت فروخت قیمت خرید سے زیادہ ہے تو نفع ہوگا۔ نفع، قیمت فروخت اور قیمت خرید کا فرق ہوتا ہے۔

نفع = (قیمت خرید – قیمت فروخت)

اگر قیمت خرید قیمت فروخت سے زیادہ ہے تو نقصان ہوگا۔ نقصان فرق ہوتا ہے قیمت خرید اور قیمت فروخت کا

نقصان = (قیمت فروخت – قیمت خرید)

4.3.1 (i) فیصد نفع اور فیصد نقصان معلوم کریں

نفع اور نقصان ہمیشہ قیمت خرید پر ہوتے ہیں، لہٰذا فیصد نفع اور فیصد نقصان قیمت خرید پر معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\text{فیصد نفع} = \frac{\text{نفع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100 \text{، } \text{فیصد نقصان} = \frac{\text{نقصان}}{\text{قیمت خرید}} \times 100$$

مثال 1. اگر قیمت خرید 1,000 روپے اور نفع 150 روپے ہو تو

$$\text{فیصد نفع} = \frac{\text{نفع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100 = \frac{150}{1000} \times 100 = 15 \text{ فیصد}$$

مثال 2. اگر قیمت خرید 2,000 روپے اور نقصان 100 روپے ہو تو

$$\text{فیصد نقصان} = \frac{\text{نقصان}}{\text{قیمت خرید}} \times 100 = \frac{100}{2000} \times 100 = 5 \text{ فیصد}$$

4.3.2 ڈسکاؤنٹ (رعایت)

کبھی کبھار گاہکوں کو متوجہ کرنے کے لئے اشیاء کی قیمتیں کم کر دی جاتی ہے اور انھیں درج شدہ قیمت سے کم قیمت پر بیچا جاتا ہے۔ اشیاء کی درج شدہ قیمت اور قیمت فروخت کا فرق ڈسکاؤنٹ (رعایت) کہلاتا ہے۔

لہٰذا ڈسکاؤنٹ (رعایت) = (درج شدہ قیمت − قیمت فروخت) = M.P − S.P

$$\text{فیصد ڈسکاؤنٹ (رعایت)} = \frac{\text{ڈسکاؤنٹ}}{\text{M.P}} \times 100$$

فیصد ڈسکاؤنٹ کو ڈسکاؤنٹ کی شرح بھی کہا جاتا ہے۔

(ii) فیصد ڈسکاؤنٹ معلوم کریں۔

مثال 1. درج شدہ قیمت (M.P) = 3,000 روپے، قیمت فروخت (S.P) = 2,700 روپے

اس لئے ڈسکاؤنٹ = (M.P − S.P) = (3,000روپے − 2,700روپے) = 300 روپے

$$\text{فیصد ڈسکاؤنٹ (رعایت)} = \frac{\text{ڈسکاؤنٹ}}{\text{M.P}} \times 100 = \frac{300}{3000} \times 100 = 10 \text{ فیصد}$$

مثال 2. قیمت فروخت = 1,500 روپے، ڈسکاؤنٹ = 200 روپے

چونکہ درج شدہ قیمت = قیمت فروخت + ڈسکاؤنٹ = 200روپے + 1,000روپے = 17,00روپے

$$\text{فیصد ڈسکاؤنٹ (رعایت)} = \frac{\text{ڈسکاؤنٹ}}{\text{M.P}} \times 100 = \frac{200}{1700} \times 100 = 11.76 \text{ فیصد}$$

(iii) مسلسل یا لگاتار لین دین پر مشتمل مسائل کو حل کریں۔

اگر درج شدہ قیمت میں سے ایک کے بعد ایک ڈسکاؤنٹ (رعایت) نفی کیا جائے تو یہ مسلسل یا پے درپے ڈسکاؤنٹ کہلاتا ہے۔

نوٹ: ڈسکاؤنٹ (رعایت) کی شرح ہر مرتبہ مختلف بھی ہو سکتی ہے اور ایک جیسی بھی۔

ڈسکاؤنٹ میں ہم پہلا ڈسکاؤنٹ درج شدہ قیمت پر معلوم کرتے ہیں اور پہلی قیمت فروخت معلوم کرتے ہیں اور پھر دوسری قیمت فروخت معلوم کرنے کے لئے پہلے قیمت فروخت پر دوسرے ڈسکاؤنٹ کی رقم معلوم کرتے ہیں۔

مثال 1. ایک صوفہ سیٹ کی قیمت فروخت معلوم کریں۔ اگر اُس کی درج شدہ قیمت 80,000 روپے ہے اور مسلسل ڈسکاؤنٹ 8 فیصد اور 4 فیصد ہے۔

حل: درج شدہ قیمت (M.P) = 80,000 روپے

پہلا ڈسکاؤنٹ = 80,000 روپے کا 8 فیصد = $= \frac{8}{100} \times 80{,}000 = 6{,}400$ روپے

قیمت فروخت = (درج شدہ قیمت – پہلا ڈسکاؤنٹ) $= 80{,}000 - 6{,}400 = 73{,}600$ روپے

دوسرا ڈسکاؤنٹ = پہلی قیمت فروخت (S.P) کا $4\% = \frac{4}{100} \times 73{,}600 = 2{,}944$ روپے

اس لئے دوسری یا آخری قیمت فروخت (S.P) = (پہلی قیمت فروخت – دوسرا ڈسکاؤنٹ)

$= (73{,}600 - 2{,}944) = 70{,}656$ روپے

نوٹ: طلبہ کو مشورہ دیا جاتا ہے کہ پڑتال کریں کہ صوفے کی آخری قیمت فروخت ایک جیسی رہے گی اگر مسلسل ڈسکاؤنٹ کی شرح 4 فیصد اور 8 فیصد کر دیں تو (ڈسکاؤنٹ کی شرح کی ترتیب کوئی اہمیت نہیں رکھتی ہے)

مثال 2. اسد نے ایک کار 500,000 روپے میں خریدی اور 550,000 روپے میں فروخت کر دی تو اُس کا فیصد نفع معلوم کریں۔

حل: قیمت خرید = 500,000 روپے، قیمت فروخت = 550,000 روپے

نفع = (قیمت فروخت – قیمت خرید) $= (550{,}000 - 50{,}000) = 50{,}000$ روپے

اور فیصد نفع = $\frac{\text{نفع}}{\text{C.P}} \times 100 = \frac{\cancel{50{,}000}^{10}}{\cancel{500{,}000}_{1}} \times \cancel{100} = 10$ فیصد

مثال 3. جمال نے ایک گھر 333,000 روپے میں خریدا اور پھر اُسے 283,050 روپے میں فروخت کیا تو اُس کا نقصان فیصد میں معلوم کریں۔

حل: قیمت خرید = 333,000 روپے، قیمت فروخت = 283,050 روپے

نقصان = $\text{C.P} - \text{S.P} = 333{,}000 - 283{,}050 = 49{,}950$ روپے

پس فیصد نقصان = $\frac{\text{نقصان}}{\text{C.P}} \times 100 = \frac{\cancel{49950}^{\cancel{1665}^{\cancel{555}^{15}}}}{\cancel{333{,}000}_{\cancel{111}_{\cancel{37}_{1}}}} \times \cancel{100} = 15$ فیصد

مثال 3. ایک چیز کی درج شدہ قیمت 1,800 روپے ہے اور ڈسکاؤنٹ کے بعد وہ چیز 1,620 روپے فروخت کی گئی تو ڈسکاؤنٹ فیصد معلوم کریں۔

حل: درج شدہ قیمت = 1,800 روپے، قیمت فروخت = 1,620 روپے

ڈسکاؤنٹ = $(\text{M.P} - \text{S.P}) = (1,800 - 1,620) = 180$ روپے

پس فیصد ڈسکاؤنٹ = $\dfrac{\text{ڈسکاؤنٹ}}{\text{درج شدہ قیمت}} \times 100 = \dfrac{180}{1800} \times 100 = 10$ فیصد

مثال 4. کمال نے کچھ اشیاء خریدیں جن کی درج شدہ قیمت 5,000 روپے تھی ان اشیاء پر 20% ڈسکاؤنٹ دیا گیا، تو ان اشیاء کی قیمت فروخت معلوم کریں۔

حل: درج شدہ قیمت = 5,000 روپے، ڈسکاؤنٹ کی شرح = 2 فیصد

ڈسکاؤنٹ = $5,000 \times \dfrac{20}{100} = 1000$ روپے

پس قیمت فروخت = $\text{M.P} -$ ڈسکاؤنٹ $= (5,000 - 1,000) = 4,000$ روپے

مثال 5. ایک کھلونے کی قیمت خرید 3,000 روپے ہے۔ دوکان دار کھلونے کی درج شدہ قیمت، قیمت خرید سے 15% زیادہ لکھتا ہے اُسے 2,760 روپے میں فروخت کرتا ہے تو معلوم کریں کہ گاہک کو کتنا فیصد ڈسکاؤنٹ دیا گیا۔

حل: قیمت خرید = 3,000 روپے، اضافہ = 15 فیصد، قیمت فروخت = 2,700 روپے

قیمت خرید میں کل اضافہ = $\dfrac{3000 \times 15}{100} = 450$ روپے

اس لئے درج شدہ قیمت = قیمت خرید + قیمت خرید میں کل اضافہ

$= 3,000 + 450 = 3,450$ روپے

قیمت فروخت = 2,700 روپے

ڈسکاؤنٹ = $(\text{M.P} - \text{S.P}) = (3,450 - 2,700) = 690$ روپے

فیصد ڈسکاؤنٹ = $\dfrac{\text{ڈسکاؤنٹ}}{\text{درج شدہ قیمت}} \times 100$

$= \dfrac{690}{3450} \times 100 = \dfrac{\cancel{690}^{1}}{\cancel{3450}_{5}} \times 100 = \dfrac{\cancel{100}^{20}}{\cancel{5}_{1}} = 20$ فیصد

مثال 6. ایک ہول سیلر نے ایک موٹر سائیکل رٹیلر کو 10% نفع پر فروخت کی اور رٹیلر نے اُسے 15% نفع پر 37,950 روپے میں فروخت کی تو ہول سیلر کی قیمت خرید کیا تھی؟

حل: سب سے پہلے ہم رٹیلر کی قیمت خرید معلوم کرینگے، جو کہ ہول سیلر کی قیمت فروخت ہے۔

رٹیلر کی قیمت فروخت= 37,950 روپے، رٹیلر کا فیصد نفع= 15 فیصد

فرض کریں رٹیلر کی قیمت خرید= 100 روپے

رٹیلر کی قیمت فروخت=قیمت خرید+ فیصد نفع= 100 + 15 = 115 روپے

اگر رٹیلر کی قیمت فروخت 115 روپے ہے تو اُس کی قیمت خرید= 100 روپے

اگر رٹیلر کی قیمت فروخت 1 روپیہ ہے تو اس کی قیمت خرید= $\frac{100}{115}$

اگر رٹیلر کی قیمت فروخت 37,950 روپے ہے تو اس کی قیمت خرید ہوگی

$$= \frac{100}{\cancel{115}_{\cancel{23}_{1}}} \times \cancel{37950}^{\cancel{7590}^{330}} = 33,000$$ روپے

چونکہ ہول سیلر کی قیمت فروخت=رٹیلر کی قیمت خرید= 33,000روپے

اب ہمیں ہول سیلر کی قیمت خرید معلوم کرنی ہے۔

فرض کریں ہول سیلر کی قیمت خرید= 100 روپے اور ہول سیلر کا فیصد نفع= 10 فیصد

تو ہول سیلر کی قیمت فروخت 110 روپے ہے، اُس کی قیمت خرید= 100 روپے ہے

اگر ہول سیلر کی قیمت فروخت 1 روپیہ ہے تو اس کی قیمت خرید= $\frac{100}{110}$

اگر ہول سیلر کے لئے قیمت فروخت 33,000روپے

تو اُس کی قیمت خرید= $\frac{100}{\cancel{110}_{1}} \times \cancel{33,000}^{3,000} = 30,000$روپے

لہٰذا ہول سیلر کی قیمت خرید 30,000 روپے ہے

مشق 4.5

1. ذیل کی جدول مکمل کریں۔

نمبر شمار	C.P (روپوں میں)	S.P (روپوں میں)	نفع (روپوں میں)	فیصد نفع
(i)	1,050	1,155	---	---
(ii)	1,665	---	333	---
(iii)	6,000	---	---	22
(iv)	---	1,250	---	25

2. ایک دوکاندار نے 160 کرسیاں 900 روپے فی کرسی کے حساب سے خریدیں۔اس نے 60 کرسیاں 1,000 روپے فی کرسی کے حساب سے فروخت کیں اور باقی کرسیاں 960 روپے فی کرسی کے حساب سے فروخت کیں تو فیصد نفع یا فیصد نقصان معلوم کریں۔

3. جلیل نے 4 پرانی کاریں 900,000 روپے میں خریدیں۔ اُس نے یہ کاریں بالترتیب 225,000 روپے، 250,000 روپے، 300,000 روپے اور 215,000 روپے میں فروخت کیں تو جلیل کا فیصد نفع یا فیصد نقصان معلوم کریں۔

4. خلیل نے 250 انڈوں کا کارٹن 2,200 روپے میں خریدا۔ان میں سے 20 انڈے خراب نکلے اور 10 انڈے لانے کے دوران ٹوٹ گئے اور اس نے باقی انڈے 11 روپے فی انڈے کے حساب سے فروخت کیے۔ نفع یا نقصان فیصد میں معلوم کریں۔

5. ذیل میں دی گئی جدول مکمل کریں جب کہ ایک چیز کی درج شدہ قیمت 10,000 روپے ہے اور اس کو مختلف مسلسل ڈسکاؤنٹ میں فروخت کیا گیا ہے۔

نمبر شمار	مسلسل فیصد ڈسکاؤنٹ	ڈسکاؤنٹ (روپوں میں)	قیمت فروخت (روپوں میں)	مترادف سادہ ڈسکاؤنٹ فیصد میں
(i)	5% اور 15%	500 اور 1425	8,075	19.25
(ii)	15% اور 5%	---	---	---
(iii)	15% اور 10%	---	---	---
(iv)	18% اور 12%	---	---	---

6. ایک سائیکل کی درج شدہ قیمت 8,500 روپے ہے ہول سیلر نے رٹیلر کو 10 فیصد اور 5 فیصد مسلسل ڈسکاؤنٹ دیتا ہے۔ہول سیلر کی قیمت فروخت معلوم کریں۔

7. 20 فیصد، 10 فیصد اور 5 فیصد مسلسل ڈسکاؤنٹ کے مترادف واحد ڈسکاؤنٹ معلوم کریں۔

8. ایک چیز جس کی لاگت 5,000 روپے ہے، اُسے 20 فیصد منافع پر فروخت کیا گیا۔ خریدار نے مزید 25 فیصد پر اُسے فروخت کر دیا۔ آخری قیمت فروخت معلوم کریں۔

4.4 انشورنس

4.4.1 انشورنس کی وضاحت کرنا

انشورنس نقصان یا خطرات کے تحفظ کی علامت ہے یہ دو پارٹنرز کے درمیان ایک معاہدہ ہے ایک شخص یا ایک

پارٹی جو کچھ رقم ماہانہ، سہ ماہی یا سالانہ انشورنس کمپنی کو ادا کرنے کا معاہدہ کرتی ہے وہ انشورنس کہلاتا ہے اور انشورنس کمپنی مالی، زندگی اور انتہائی صحت کے نقصان کی صورت میں مالی تحفظ مہیا کرتی ہے۔

یہ معاہدہ انشورنس پالیسی کہلاتا ہے۔ قسط پریمیم کہلاتی ہے۔ مدت جو دونوں پارٹیوں کے درمیان طے کی جاتی ہے وہ میچوریٹی کہلاتی ہے۔

4.4.2 زندگی اور گاڑیوں کی انشورنس پر مشتمل روزمرہ زندگی کے مسائل حل کرنا

(i) لائف انشورنس

لائف انشورنس کسی شخص اور انشورنس کمپنی کے درمیان ایک مدت کے لئے معاہدہ ہوتا ہے۔ پالیسی کا مالک انشورنس کمپنی کو باقاعدگی سے اقساط ادا کرنے پر راضی ہوتا ہے اور موت، بیماری یا مقررہ مدت کے بعد کمپنی ایک خاص رقم پالیسی کے مالک کو ادا کرنے کی پابند ہوتی ہے۔ کمپنی کے قانون کے مطابق اور پالیسی کے مالک کی عمر کے لحاظ سے پریمیم کی رقم اور میچوریٹی کی مدت متعین کی جاتی ہے۔

مثال: ایک آدمی نے 400,000 روپے کی انشورنس پالیسی خریدی، سالانہ پریمیم پالیسی کی رقم کا 4.5 فیصد ہے جب کہ پالیسی کی فیس 0.25 فیصد ہے۔ تو سالانہ پریمیم اور سالانہ پریمیم کا 27 فیصد سہ ماہی پریمیم معلوم کریں۔

حل: پالیسی کی رقم = 400,000 روپے

پالیسی کی فیس $= \frac{0.25}{100} \times 400,000 = 1,000$ روپے

پہلا پریمیم $= \frac{4.5}{100} \times 400,000 = 18,000$ روپے

سالانہ پریمیم = پہلا پریمیم + پالیسی کی فیس

$= 18,000 + 1,000 = 19,000$ روپے

سہ ماہی پریمیم $= \frac{27}{100} \times 19,000 = 5,130$ روپے

(ii) گاڑیوں کا انشورنس

کبھی کبھار اشخاص یا کمپنی اپنی گاڑیوں کو چوری، حادثات، آگ وغیرہ کے نقصان سے بچنے کے لئے انشورنس

کرواتے ہیں۔اس صورت میں پریمیم کا انحصار گاڑی کی نوعیت،گاڑی کی قیمت،ڈرائیور کی عمر وغیرہ پر ہوتا ہے۔
انشورنس کمپنی پریمیم عام طور پر ایک سال کی کل اقساط کے برابر ہوتا ہے۔

مثال 1. اکبر نے سالانہ 4.5 فیصد کی شرح سے اپنی کار کو ایک سال کے لئے انشور کروائی اگر کار کی قیمت 800,000 روپے ہو تو پریمیم کی رقم معلوم کریں۔

حل: کار کی قیمت = 800,000 روپے اور انشورنس کی شرح = 4.5 فیصد

پریمیم کی رقم: $\frac{4.5}{1\cancel{00}} \times 800,0\cancel{00} = 36,000$ روپے

مثال 2. فہیم نے اپنی بس 2 سال کے لئے 3 فیصد سالانہ کی شرح سے انشور کروائی۔اگر بس کی کل مالیت 4,000,000 روپے ہے تو پریمیم کی کل رقم معلوم کریں اگر قیمت میں کمی کی شرح 10 فیصد سالانہ ہے۔

حل: بس کی کل مالیت = 4,000,000 روپے

سالانہ انشورنس کی شرح = 3 فیصد، قیمت میں کمی کی شرح = 10 فیصد

پہلا پریمیم = $\frac{3}{100} \times 4,000,000 = 120,000$ روپے

ایک سال کے بعد قیمت میں کمی = $\frac{10}{100} \times 4,000,000 = 400,000$ روپے

ایک سال کے بعد کی قیمت = (قیمت میں کمی – اصل قیمت)

$= 4,000,000 - 400,000 = 3,600,000$ روپے

دوسرا پریمیم = $\frac{3}{1\cancel{00}} \times 3,600,0\cancel{00} = 108,000$ روپے

بطور پریمیم کل ادا کردہ رقم = پہلا پریمیم + دوسرا پریمیم

$= 120,000 + 108,000 = 228,000$ روپے

مشق 4.6

1. اگر پریمیم کی رقم یوں معلوم کی جاتی ہے:

سالانہ = پالیسی کی رقم کا 4.75% + پالیسی کی فیس

پالیسی کی فیس = پالیسی کی رقم کا 0.2 فیصد

نصف سال کا پریمیم = سالانہ پریمیم کا 52 فیصد

سہ ماہی پریمیم = سالانہ پریمیم کا 27 فیصد

ماہانہ پریمیم = سالانہ پریمیم کا 9 فیصد ہے تو ذیل میں دی گئی جدول مکمل کریں۔

نمبر شمار	پالیسی کی رقم (روپوں میں)	سالانہ پریمیم (روپوں میں) 4.75 فیصد + 0.2 فیصد	نصف سال کا پریمیم (روپوں میں) سال کا 52 فیصد	سہ ماہی پریمیم سال کا 27 فیصد	ماہانہ پریمیم سال کا 9 فیصد
(i)	100,000	---	---	---	---
(ii)	150,000	---	---	---	---
(iii)	300,000	---	---	---	---

.2 حمید نے 300,000 روپے کی لائف انشورنس پالیسی خریدی، پہلا پریمیم معلوم کریں اگر سالانہ پریمیم کی شرح 5.2 فیصد اور پالیسی فیس 0.25 فیصد ہو۔

.3 بشیر نے اپنی کار کو سالانہ 2 فیصد کی شرح سے 3 سال کے لئے 500,000 روپے کی انشورنس کروائی۔ قیمت میں کمی کی شرح 5 فیصد ہے، تو معلوم کریں کہ اُسے پریمیم کی کل کتنی رقم ادا کرنی ہوگی۔

.4 اگر گاڑی کی کل مالیت کا 4.0 فیصد اور قیمت میں کمی کی شرح 10 فیصد کے حساب سے سالانہ گاڑی کا پریمیم معلوم کریں۔ اگر مدت = 3 سال تو نیچے دی گئی جدول مکمل کریں۔

نمبر شمار	گاڑی کی مالیت (روپے ہزاروں میں)	پہلا پریمیم (روپے ہزاروں میں)	دوسرا پریمیم (روپے ہزاروں میں)	تیسرا پریمیم (روپے ہزاروں میں)	کل پریمیم (روپے ہزاروں میں)
(i)	100	4	3.60	3.24	10.84
(ii)	250	10	---	---	---
(iii)	300	---	---	---	---
(iv)	---	---	---	16.20	---
(v)	---	---	36	---	---

.5 ایک عورت نے خود اپنے آپ کو ایک سال کے لئے 5 فیصد پریمیم کی شرح پر انشور کروایا اور اُس نے 25,000 روپے بطور پریمیم ادا کیا۔ تو اُس کے انشورنس کی مکمل رقم معلوم کریں۔

4.5 انکم ٹیکس

4.5.1 انکم ٹیکس، ٹیکس سے مستثنیٰ آمدنی اور ٹیکس اطلاق شدہ آمدنی

(a) انکم ٹیکس: کسی شخص یا کمپنی کی آمدنی جو ایک متعین حد سے زیادہ ہو جاتی ہے اس آمدنی پر حکومت انکم ٹیکس لگاتی ہے۔ حکومت انکم ٹیکس کے اصولوں اور شرح میں ترمیم کرتی ہے اور اس کا اعلان سالانہ بجٹ میں کیا جاتا ہے۔

(b) انکم ٹیکس سے مستثنیٰ آمدنی: یہ وہ آمدنی ہوتی ہے جس پر موجود قانون کے مطابق انکم ٹیکس کا اطلاق نہیں ہوتا۔ انکم ٹیکس سے مستثنیٰ آمدنی مندرجہ ذیل ہیں۔

(i) زرعی آمدنی (ii) گریجویٹی یا پنشن

(iii) گھر کی آمدنی یا بیوہ کی پراپرٹی

(c) قابل ٹیکس آمدنی: یہ کل سالانہ آمدنی اور ٹیکس سے مستثنیٰ آمدنی کا فرق ہوتی ہے

قابل ٹیکس آمدنی = (ٹیکس سے مستثنیٰ آمدنی – کل سالانہ آمدنی)

(d) کٹوتی: حکومت کسی شخص کی آمدنی کی ایک ایسی حد مقرر کرتی ہے جس پر ٹیکس کا اطلاق نہیں ہوتا ہے وہ کٹوتی کہلاتی ہے۔ مثال کے طور پر اگر کسی تنخواہ دار آدمی کی سالانہ آمدنی 500,000 روپے ہے اور کٹوتی 400,000 روپے ہے تو اُسے صرف 100,000 روپے پر ٹیکس ہر سال کے بجٹ میں دی گئی شرح کے مطابق دینا ہوگا۔

(e) جانچ کی مدت: یہ ہر سال پہلی جولائی سے شروع ہوتا ہے اور اس کا اختتام 30 جون کو ہوتا ہے۔

قابل ٹیکس آمدنی 2017 -2016 کا جدول

نمبر شمار	قابل ٹیکس (آمدنی)	انکم ٹیکس کی شرح
.1	جب آمدنی 400,000 روپے سے تجاوز نہ کرے	0 فیصد
.2	جب آمدنی 400,000 روپے سے زیادہ ہو لیکن 500,000 روپے سے تجاوز نہ کرے	400,000 روپے سے زائد رقم کا 2 فیصد
.3	جب آمدنی 500,000 روپے سے زیادہ ہو لیکن 750,000 روپے سے تجاوز نہ کرے	2,000 روپے + 500,000 روپے سے زائد رقم کا 5 فیصد
.4	جب آمدنی 750,000 روپے سے زیادہ ہو لیکن 1,400,000 روپے سے تجاوز نہ کرے	14,500 روپے + 750,000 روپے سے زائد رقم کا 10 فیصد

نمبر شمار	قابل ٹیکس (آمدنی)	انکم ٹیکس کی شرح
.5	جب آمدنی 1,400,000 روپے سے زیادہ ہو لیکن 1,500,000 روپے سے تجاوز نہ کرے	79,500 روپے + 1,400,000 روپے سے زائد رقم کا 12.5 فیصد
.6	جب آمدنی 1,500,000 روپے سے زیادہ ہو لیکن 1,800,000 روپے سے تجاوز نہ کرے	92,000 روپے + 1,800,000 روپے سے زائد رقم کا 15 فیصد
.7	جب آمدنی 1,800,000 روپے سے زیادہ ہو لیکن 2,500,000 روپے سے تجاوز نہ کرے	137,000 روپے + 1,800,000 روپے سے زائد رقم کا 17.5 فیصد
.8	جب آمدنی 2,500,000 روپے سے زیادہ ہو لیکن 3,000,000 روپے سے تجاوز نہ کرے	259,500 روپے + 2,500,000 روپے سے زائد رقم کا 20 فیصد
.9	جب آمدنی 3,000,000 روپے سے زیادہ ہو لیکن 3,500,000 روپے سے تجاوز نہ کرے	359,500 روپے + 3,000,000 روپے سے زائد رقم کا 22.5 فیصد
.10	جب آمدنی 3,500,000 روپے سے زیادہ ہو لیکن 4,000,000 روپے سے تجاوز نہ کرے	472,000 روپے + 3,500,000 روپے سے زائد رقم کا 25 فیصد
.11	جب آمدنی 4,000,000 روپے سے زیادہ ہو لیکن 7,000,000 روپے سے تجاوز نہ کرے	597,000 روپے + 4,000,000 روپے سے زائد رقم کا 27.5 فیصد
.12	جب آمدنی 7,000,000 روپے سے تجاوز کرے	1,422,000 روپے + 7,000,000 روپے سے تجاوز آمدنی کا 30 فیصد

4.5.2 انفرادی انکم ٹیکس کی جانچ سے متعلق روزمرہ زندگی کے مسائل حل کرنا

مثال 1. جنید کی سالانہ آمدنی 480,000 روپے ہے تو اس پر ادا کی جانے والی انکم ٹیکس کی رقم معلوم کریں۔

حل: سالانہ آمدنی = 480,000 روپے

قابل ٹیکس آمدنی کے جدول کے نمبر شمار (2) کے مطابق جہاں 400,000 روپے سے زائد آمدنی پر 2 فیصد ٹیکس کی شرح دی گئی ہے۔ یہاں کم از کم انکم ٹیکس 0 (0.0 روپے) ہے۔

400,000 روپے سے زائد آمدنی ہے:

(480,000 روپے − 400,000 روپے) = 80,000 روپے

انکم ٹیکس = انکم ٹیکس کی شرح × 400,000 روپے سے زائد آمدنی

$$= 2\text{ فیصد} \times 80,000 = \frac{2}{100} \times 80,000 = 1,600 \text{ روپے}$$

مثال 2. اشرف کی سالانہ آمدنی 900,000 روپے ہے اگر اُس نے 50,000 روپے زکواۃ ادا کی تو انکم ٹیکس کی رقم معلوم کریں۔

حل: سالانہ آمدنی 900,000 روپے، زکواۃ کی رقم 50,000 روپے

قابل ٹیکس رقم = (900,000 − 50,000) = 850,000 روپے

قابل ٹیکس آمدنی کے جدول کے نمبر شمار (4) کے مطابق، جہاں 750,000 روپے سے زائد آمدنی پر 10 فیصد شرح درج ہے۔

(750,000 روپے − 850,000 روپے) = 100,000 روپے

کم از کم انکم ٹیکس ہو گی 14,500 روپے

لہٰذا کل انکم ٹیکس = کم از کم انکم ٹیکس + 100,000 روپے پر ٹیکس

= 14,500 روپے + 100,000 روپے کا 10 فیصد

= 14,500 + 10,000 = 24,500 روپے

لہٰذا اشرف کو 24,500 روپے بطور انکم ٹیکس ادا کرنے ہیں

مثال 3. حرمین نے ایک سال میں 107,000 روپے بطور انکم ٹیکس ادا کئے۔ تو اُس کی سالانہ آمدنی معلوم کریں۔

حل: ایک سال میں ادا کردہ انکم ٹیکس = 107,000 روپے، جیسا کہ یہ رقم 92,000 روپے، 15,000 روپے سے زیادہ ہے اور 137,000 روپے سے کم ہے تو لہٰذا حرمین کے انکم ٹیکس کی شرح جدول میں نمبر شمار (6) میں واقع ہے یہاں 1,500,000 روپے سے زائد آمدنی پر انکم ٹیکس کی شرح 15 فیصد ہے۔ پس ہمیں 1,500,000 روپے سے زائد وہ آمدنی معلوم کرنی ہے یہاں حرمین نے 92,000 روپے سے زیادہ 15,000 روپے بطور انکم ٹیکس ادا کئے ہیں۔

15,000 روپے انکم ٹیکس ہے $\frac{100}{15} \times$ 15,000 روپے پر = 100,000 روپے

لہٰذا حرمین کی سالانہ آمدنی ہے: 100,000 روپے + 1,500,000 روپے = 1,600,000 روپے

تصدیق: 1,600,000 روپے پر انکم ٹیکس = 92,000 + 100,000 روپے کا 15 فیصد

1,5000 روپے + 92,000 روپے = 107,000 روپے

مشق 4.7

1. امجد کی ماہانہ آمدنی 75,000 روپے ہے۔ سالانہ انکم ٹیکس معلوم کریں۔

.2 حانیہ ایک سال میں 495,000 روپے کماتی ہے تو اُس کا انکم ٹیکس معلوم کریں اگر اُس نے 40,000 روپے بطور زکواۃ ادا کئے؟

.3 ایک آدمی ایک سال میں 7,000,000 روپے کماتا ہے۔ 120,000 روپے ٹیکس پہلے ئی کٹ گئے اور 130,000 روپے زکواۃ بھی ادا کی ہے۔ معلوم کریں سال کے آخر میں باقی اس کو کتنا انکم ٹیکس بھرنا پڑے گا؟

.4 اسماعیل کی ماہانہ تنخواہ 200,000 روپے ہے تو انکم ٹیکس معلوم کریں اگر اُس نے بالترتیب 80,000 روپے اور 20,000 روپے بطور زکواۃ اور دولت ٹیکس ادا کیا ہو؟

.5 سفیان نے 497,000 روپے بطور انکم ٹیکس ایک سال میں ادا کئے تو اس کی ماہانہ آمدنی معلوم کریں؟

.6 بشرہ نے سال کے آخر میں 289,500 روپے بطور انکم ٹیکس ادا کئے۔ اگر اُس نے 130,000 روپے بطور دولت ٹیکس اور 120,000 روپے بطور زکواۃ ادا کئے۔ تو اُس کی سالانہ آمدنی معلوم کریں؟

.7 آمدنی کی مختلف اقسام کے لئے ذیل کی جدول مکمل کریں:

نمبر شمار	سالانہ آمدنی (روپے ہزاروں میں)	انکم ٹیکس جدول کا شمار نمبر	کم از کم انکم ٹیکس (روپے)	زیریں حد (روپے)	زیریں حد سے تجاوز انکم ٹیکس (روپے ہزاروں میں)	شرح (فیصد)	کل انکم ٹیکس (روپوں میں)
(i)	578	03	2,000	500000	78	5فیصد	5,900
(ii)	480	---	---	---	---	---	---
(iii)	900	---	14,500	---	---	---	---
(iv)	6,000	11	---	---	2,000	27.5فیصد	---

جائزہ مشق 4

.1 درست جواب پر دائرہ لگائیں۔

(i) درج شدہ قیمت پر رعایت کہلاتی ہے۔

(a) ٹیکس (b) نفع (c) ڈسکاؤنٹ (d) نقصان

(ii) دو یا دو سے زیادہ تناسب کے درمیان تعلق کہلاتا ہے:

(a) راست تناسب (b) تناسب

(c) معکوس تناسب (d) مرکب تناسب

(iii) ATM مخفف ہے:

(a) اکاؤنٹ ٹیلی مشین (b) اکاؤنٹ ٹرانسفر مشین

(c) آٹومیٹک ٹیلر مشین (d) آٹو کیش ٹرانسفر مشین

(iv) زکواۃ کی شرح ہے:

(a) 5 فیصد (b) 2.5 فیصد (c) 10 فیصد (d) 1.0 فیصد

(v) ایک کتاب کی قیمت 300 روپے ہے اگر اُسے 20 فیصد ڈسکاؤنٹ پر فروخت کیا جاتا ہے تو اُس کی قیمت فروخت معلوم کریں:

(a) 240 روپے (b) 260 روپے (c) 230 روپے (d) 280 روپے

(vi) اگر ایک سعودی ریال = 27.15 روپے تو 54,300 روپے = ______ سعودی ریال

(a) 1900 (b) 2100 (c) 2000 (d) 2010

(vii) آمدنی پر لگایا جانے والا ٹیکس کہلاتا ہے:

(a) عشر (b) جزیہ (c) انکم ٹیکس (d) پراپرٹی ٹیکس

(viii) ایک مرنے والے شخص کی آمدنی اُس کی بیوہ، تین بیٹیوں اور دو بیٹوں میں تقسیم کرنی ہے تو ہر بیٹے کو حصہ ملے گا:

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{3}$

(ix) ماہانہ رقم 8 فیصد مارک اپ کی قیمت ____________ سال میں ہوگی

(a) 40 (b) 30 (c) 20 (d) 25

(x) ایک واحد ڈسکاؤنٹ مسلسل ڈسکاؤنٹ 10 فیصد اور 5 فیصد کے مترادف ہوگا۔

(a) 15 فیصد (b) 14.5 فیصد (c) 15.5 فیصد (d) 14 فیصد

2. ایک کمپنی نفع کماتی ہے اور اُسے چار شراکت داروں A, B, C اور D میں 6:5:4:3 کی تناسب سے تقسیم کرتی ہے اگر D کو 5,400 روپے ملتے ہیں تو A اور B کو کیا ملے گا اور کل نفع معلوم کریں۔

3. اگر 30 آدمی 20 کلو گرام شکر 5 دنوں میں استعمال کرتے ہیں تو بتائیں کہ 15 آدمی 320 کلو گرام شکر کتنے دنوں میں استعمال کرینگے۔

4. بڑے سے بڑا ڈسکاؤنٹ کونسا ہے ایک واحد ڈسکاؤنٹ 25 فیصد یا دو مسلسل ڈسکاؤنٹ 15 فیصد اور 10 فیصد ہیں؟

5. اکبر نے ایک کار 1,000,000 روپے میں خریدی۔ اصغر کو 20 فیصد نفع پر بیچ دی۔ اصغر نے وہی کار انور کو 20% نقصان پر فروخت کی۔ معلوم کریں کہ انور نے کار کی کتنی قیمت ادا کی؟

6. عصامہ نے اپنی کار کی ایک سال کی انشورنس کیلئے پہلا پریمیم 40,500 روپے ادا کیا اُس کار کی قیمت کیا ہے اگر شرح 3.85 فیصد ہے اور سروس چارجز 2,000 روپے ہیں؟

7. ایک فیکٹری کنفکشنری اشیاء پر جو قیمت درج کرتی ہے وہ لاگت سے 20 فیصد زیادہ ہے اور وہ کچھ رعایت بھی دیتے ہیں اگر کنفکشنری اشیاء پر لاگت 2,500 روپے اور قیمت فروخت 2,700 روپے ہو تو گاہک کو ملنے والا فیصد ڈسکاؤنٹ معلوم کریں؟

8. احمد کی خالص سالانہ آمدنی معلوم کریں اگر اس نے 8,900 بطور انکم ٹیکس اور 20,000 روپے بطور زکواۃ ادا کئے؟

خلاصہ

- تین یا تین سے زیادہ تناسب کے درمیان تعلق مرکب تناسب ہوتا ہے۔
- اگر دو یا دو سے زیادہ اشخاص ایک کاروبار چلاتے ہیں تو وہ شراکت داری کہلاتا ہے۔
- جب ایک آدمی مر جاتا ہے تو جو جائیداد وہ اپنے پیچھے چھوڑ جاتا ہے وہ وراثت کہلاتی ہے جو اُس کے قانونی وارثوں میں تقسیم کی جاتی ہے۔
- ایسا بینک جو رقم وصول کرتا ہے قرض دیتا ہے اور اپنے اکاؤنٹ ہولڈر کو سہولت دیتا ہے وہ کمرشل بینک کہلاتا ہے۔
- نفع اور نقصان کی بناء پر اکاؤنٹ PLS اکاؤنٹ کہلاتا ہے۔
- کرنٹ ڈیپوزٹ اکاؤنٹ بغیر منافع کے چلایا جاتا ہے۔ یہ کاروباری اشخاص روزانہ لین دین کے لئے استعمال کرتا ہے۔
- چیک ایک ایسا تحریری حکم ہوتا ہے جو بینک کو حکم دیتا ہے کہ ایک خاص رقم ایک خاص اکاؤنٹ سے چیک رکھنے والے کو دی جائے۔
- ڈیمانڈ ڈرافٹ ایک تحریری حکم ہوتا ہے جو ایک بینک سے دوسرے بینک کو ایک مخصوص رقم ڈیمانڈ ڈرافٹ رکھنے والے کو اس کے مطالبے پر دی جاتی ہے۔
- پے آرڈر ایک ایسی دستاویز ہوتی ہے جو بینک کو ایک خاص رقم تیسری پارٹی کو دینے کی ہدایت کرتا ہے۔ بینک جو پے آرڈر جاری کرتی ہے وہ اس بات کی ضمانت ہوتی ہے کہ رقم ادا کر دی جائے گی۔

- آن لائن بینکنگ اپنے گاہکوں کو رقم نکلوانے، رقم جمع کروانے، رقم منتقل کرنے، بیلنس چیک کرنے کی سہولت فراہم کرتی ہے۔
- ایک آٹو میٹک ٹیلر مشین ایک ایسی مشین ہے جو بینک کے گاہک کو رقم نکلوانے اور اپنا بیلنس کسی بھی وقت چیک کرنے کی سہولت فراہم کرتی ہے۔
- کریڈٹ کارڈ ایک مقناطیسی پٹی پر مشتمل ایک پلاسٹک کارڈ ہے جو اکاؤنٹ ہولڈر کے بارے میں معلومات جمع رکھتا ہے اسے نقد رقم کے بغیر خریداری کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔
- مارک اپ وہ اضافی رقم ہوتی ہے جو بینک اپنے اکاؤنٹ ہولڈر سے اُدھار لینے کے صورت میں وصول کرتا ہے۔
- جس شرح سے بینک اپنے اکاؤنٹ ہولڈر کو رقم اُدھار دیتا ہے وہ مارک اپ کہلاتی ہے۔
- اوورڈرافٹ ایک ایسی سہولت جو بینک اپنے اکاؤنٹ ہولڈر کو مہیا کرتا ہے کہ وہ اصل رقم سے کچھ زیادہ رقم نکلوا سکتا ہے۔
- $I = PRT$ ، یہاں P = اصل رقم، R = مارک اپ کی شرح، T = مدت اور I = مارک اپ۔
- لیز استعمال کرنے والے اور مالک کے درمیان ایک معاہدہ ہوتا ہے جو مالک کو کچھ رقم ادا کرتا ہے۔
- ڈسکاؤنٹ کا مطلب ہے درج شدہ قیمت پر کچھ کمی

  ڈسکاؤنٹ = درج شدہ قیمت ـ قیمت فروخت
- لائف انشورنس پالیسی لینے والے اور انشورنس کمپنی کے درمیان ایک طے شدہ مدت کے لئے ایک معاہدہ ہوتا ہے۔
- جب کسی شخص یا کمپنی کی آمدنی کسی خاص حد سے تجاوز کر جاتی ہے تو حکومت کی جانب سے اُس کی آمدنی پر انکم ٹیکس لگایا جاتا ہے اور اس حد کا تعین ہر سال کیا جاتا ہے۔
- انکم ٹیکس سے مستثنیٰ آمدنی وہ آمدنی ہوتی جو انکم ٹیکس کے دائرے میں نہیں آتی۔ جیسے زرعی آمدنی، پینشن، بیوہ کی پراپرٹی
- ٹیکس کے قابل آمدنی = (ٹیکس سے مستثنیٰ آمدنی ـ کل سالانہ آمدنی)
- کٹوتی ٹیکس سے مستثنیٰ آمدنی ہوتی ہے۔

یونٹ 5

کثیر رقمی اظہاریے

5.1 الجبری اظہاریہ

آلجبرا کا انتخاب مسلم ریاضیدان الخوارزمی (780-850) نے کیا۔ ان کو جدید آلجبرا کا ابو مانا جاتا ہے۔

مستقلات اور متغیرات کا مجموعہ جو عوامل جمع (+)، تفریق (–)، ضرب (×) ، تقسیم (÷) ،جذر ($\sqrt{}$) اور قوت سے جوڑا گیا ہو وہ الجبری اظہاریہ یا صرف اظہاریہ کہلاتا ہے۔مثال کے طور پر:

(i) x (ii) -5 (iii) xyz

(iv) $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ (v) $\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{5}x+\frac{1}{4}$

الجبری اظہاروں کی مثالیں ہیں۔کسی الجبری اظہاریہ کے حصے جو علامات + یا – سے الجبرا سے مربوط ہوتے ہیں اسے رقم کہا جاتا ہے۔آخری مثال (v) میں $\frac{1}{2}x^3$، $-\frac{1}{3}x^2$، $-\frac{1}{5}x$ اور $\frac{1}{4}$ تمام رقوم ہیں۔

مختصراً الجبری اظہاریہ مساوات کو حل کرنے کے لئے استعمال کئے جاتے ہیں۔پرانے طریقے سے بچنے کے لئے جس میں ہر چیز کو الفاظ میں لکھا جاتا تھا کلیوں میں ظاہر کیا جاتا ہے اور تجزیدی سوچ کو بڑھا کر زندگی آسان بناتے ہیں اور وقت کو بھی بچاتے ہیں۔

5.1.1 کچھ بنیادی اصطلاحات، مستقل، متغیر، حرف اور عددی سر کو دہرانا

(i) مستقل: ایک مستقل جس کی متعین عددی قیمت ہوتی ہے مستقل کہلاتا ہے۔مثال کے طور پر ان اظہاریوں، $2x$، $3x+9y-1$ اور $5x^2y-4xy^2+8$ میں 2، 3، 9، 1–، 5، 4– اور 8 مستقلات ہیں۔

(ii) متغیرات: غیر خالی سیٹ کے ہر عنصر کو علامت یا حرف سے ظاہر کیا جاتا ہے جسے متغیر یا نا معلوم کہتے ہیں اوپر والی مثالوں میں x اور y بطور متغیر استعمال کئے گئے ہیں۔متغیر کو انگریزی حرف تہجی کے چھوٹے حروف سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(iii) حرف (Literal): ایک اظہاریہ میں مستقل اور متغیر کو ظاہر کرنے والے کو حرف (Literal) کہا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر: $ax+by+c$ میں حرف a، b اور c مستقلات کو جب کہ x اور y متغیرات کو ظاہر کر رہے ہیں اور $2x-5y+p$ میں x، y اور p حرف ہیں۔

(iv) عددی سر: ایک مستقل جو کسی متغیر سے ضرب دیا گیا ہو عددی سر کہلاتا ہے۔

5.2 کثیر رقمی اظہاریہ

5.2.1 کثیر رقمی اور کثیر رقمی اظہاریوں کے درجہ اور عددی سر کی وضاحت کریں۔

(i) کثیر رقمی اظہاریہ: ایک متغیر والے کثیر رقمی اظہاریہ، x طرز کی اظہاریہ کو کہا جاتا ہے

$a_0x^n+a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n\ldots$ جہاں n غیر منفی صحیح عدد اور عددی سر

a_0، a_1، a_2، a_3،...، a_n حقیقی اعداد ہیں اس کو عموماً $P(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$P(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n\ldots \quad (1)$$

دو متغیرات جیسے x اور y میں ایک کثیر رقمی اظہاریہ بھی ایک الجبری اظہاریہ ہے

مثال کے طور پر: (i) 1 (ii) 0 (iii) $2y-\frac{1}{2}$

(iv) x^2+2x-3 (v) $\sqrt{3}\,x^2y+1$

کثیر رقمی اظہاریہ ہیں جب کہ

(i) $\frac{3}{x}$ (ii) $6\sqrt{x-y}$ (iii) $2x^{2/3}+5x^{5/7}$ (iv) $\frac{1}{x^2}$

کثیر رقمی اظہاریے نہیں ہیں۔

(ii) کثیر رقمی اظہاریہ کا درجہ: اگر (1) میں، $a_0 \neq 0$ تو اوپر دی گئی کثیر رقمی اظہاریے کو درجہ n کی کثیر رقمی اظہاریہ کہا جاتا ہے۔

اگر $n=0$ اور $a_0\neq0$ تو $P(x)=0$ جو کہ کثیر رقمی اظہاریہ ہے لیکن اس کا کوئی درجہ نہیں ہے۔

(iii) کثیر رقمی اظہاریہ کا عددی سر: ہم جانتے ہیں کہ یہ ایک متغیر میں کثیر رقمی اظہاریہ ہے

$$P(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n\ldots$$

یہاں a_0، a_1، a_2،...، a_{n-1}، a_n حقیقی اعداد ہیں جو کہ کثیر رقمی اظہاریے کے عددی سر کہلاتے ہیں

مثال کے طور پر: $2x^4-3x^3+7x^2-8x+5$ میں 2، -3، 7، -8 اور 5 تمام کثیر رقمی اظہاریے کے عددی سر ہیں۔

5.2.2 ایک، دو، تین اور زیادہ متغیر میں کثیر رقمی اظہاریہ کو پہچاننا

آئیں مندرجہ ذیل مثالوں کے ذریعے کثیر رقمی اظہاریے کو متغیرات کے لحاظ سے پہچانے

(i) $9 + 4x$، $2x^2 - 1$، $5x^2 + 6x$ اور $y^3 - 3y^2 + y + 7$

ان میں سے ہر ایک، ایک متغیر میں کثیر رقمی اظہاریے ہیں۔

(ii) $3xy$، $2x^3 - 3y + 2$، $a^3 - 2b^3$ اور $p^4 + 4p^2q - 2pq^2 + q^4$ دو متغیرات میں کثیر رقمی اظہاریے ہیں۔

(iii) $x^4yz + xy^2z + xyz^2 + 5$ تین متغیرات x، y اور z میں کثیر رقمی اظہاریے ہیں۔

لٰہذا کثیر رقمی ایک، دو، تین اور زیادہ متغیرات میں ہو سکتے ہیں۔

5.2.3 مختلف درجوں والی کثیر رقمی اظہاریے کو پہچاننا (مثلاً ایک درجی، دو درجی، تین درجی اور چار درجی کثیر رقمی اظہاریے)

جیسا کہ کثیر رقمی اظہاریے کا درجہ اُس کے غیر صفر رقم کی بڑی سے بڑی قوت ہوتی ہے تو آئیں کثیر رقمی اظہاریوں کے درجوں سے پہچانیں۔

(i) ایک درجی کثیر رقمی اظہاریہ: جس کا درجہ 1 ہوتا ہے۔

مثالیں: $5x$، $2x + 3y$، $5x - 9y - z$، $\frac{x}{4} + 4$ ایک درجی کثیر رقمی اظہاریے ہیں۔

(ii) دو درجی کثیر رقمی اظہاریہ: جس کا درجہ 2 ہوتا ہے۔

مثالیں: xy، $\frac{1}{3}y^2$، $2xy + \sqrt{3}$، $p^2 + q^2 + r$ دو درجی کثیر رقمی اظہاریے ہیں۔

نوٹ: کثیر رقمی اظہاریہ xy میں صرف ایک غیر صفر رقم ہے لٰہذا اس کا درجہ x اور y کی قوتوں کا مجموعہ ہے جو کہ $2 = 1 + 1$ ہے۔

(iii) تین درجی کثیر رقمی اظہاریہ: جس کا درجہ 3 ہوتا ہے۔

مثالیں: x^2y، $xyz + 3x + 1$، $x^3 + y^3$ اور $5pq^2 + 2p^2 + 5q^2$ تمام تین درجی کثیر رقمی اظہاریے ہیں۔

(iv) چار درجی کثیر رقمی اظہاریے: جس کا درجہ 4 ہوتا ہے۔

مثالیں: $2x^4$، $x^3y - xy^3$، $x^4 + x^3y - 5xy^3 - y^4$ اور $p^2qr + pq + qr + pr + 3$ تمام چار درجی کثیر رقمی اظہاریے ہیں۔

مشق 5.1

1. ذیل میں دی گئی ہر الجبرائی اظہاریوں جس سے مستقل، متغیرات اور حرف علیحدہ کریں۔

(i) $3x + 1$ (ii) 0 (iii) $2a^2 + \frac{1}{3}b - 3$ (iv) $3l - 2m$

(v) $a + b^2 - 2c + 4$ (vi) $px + qy + r$ (vii) $-5x + 9y - 4$ (viii) $3^2p - 2^2q$

(ix) $y^2 - y - 1$ (x) $\sqrt{3}a - 9ab + \sqrt{5}$ (xi) $7x^2 - 2x + 3$ (xii) -8

2. ذیل میں سے کثیر رقمی اظہاریوں کی شناخت کریں۔

(i) -1 (ii) $\frac{3}{y}$ (iii) $\frac{1}{x} - x$ (iv) $\sqrt{5}x + y$

(v) $5xy^3$ (vi) $2 - x$ (vii) $\frac{\sqrt{1}}{3}$ (viii) $\frac{1}{x^2 + 3}$

(ix) $x^2 + 3x - 1$ (x) $3^5 + \frac{4}{x}$ (xi) $ax^2 + bx + c$ (xii) $2a^2 + 3a + 1$

3. ذیل میں ہر کثیر رقمی اظہاریہ کے درجے کی نشاندہی کریں۔

(i) 5^3 (ii) x (iii) $x + y^2$ (iv) $x^2y^2 + y^2$

(v) $x^3y^2z^2 + 1$ (vi) $-\frac{1}{4} + 3x + 5$ (vii) $x^4y + y^2 + y^3$ (viii) 3^2xyz

(ix) $x^6 + x^2y^3 + xy^4$ (x) $-x^3 + 8xyz^2$ (xi) $\frac{2}{13}$ (xii) $4^2x^45^2y^4$

4. ذیل میں ہر کثیر رقمی اظہاریہ کے عددی سر لکھیں۔

(i) 3 (ii) $\sqrt{4}xy$ (iii) $-x$ (iv) $x^2yz + 1$

(v) $5x^2 + 9y + z$ (vi) $\sqrt{2}x^3 - \sqrt{3}y^4$ (vii) $-2xyz$ (viii) $-\frac{3}{4}x^2$

5. ذیل میں ہر کثیر رقمی اظہاریہ میں متغیرات کی تعداد معلوم کریں۔

(i) $3x + 2y$ (ii) $5x^2 - 4y - 3z$ (iii) $x^2 - y^3 + 1$ (iv) $2x^2y$

(v) $xy + 3$ (vi) $3x^7$ (vii) 25 (viii) $6x^3y^4z^2$

1. ذیل میں دی گئی ہر الجبرائی اظہاریوں میں سے مستقل، متغیرات اور حرف علیحدہ کریں۔

(i) $x+2y$ (ii) $3x-5$ (iii) $2xy+\frac{y}{5}$ (iv) y^2+y-3

(v) x^3+xy+5 (vi) $x^4-2x^3+\frac{1}{2}$ (vii) $x^3+x^2+\sqrt{4}$ (viii) $5x^4$

(ix) $-9xy^2$ (x) $x^2+2x^2y^2+y^2$ (xi) x^2-x (xii) $3xy^2z$

5.3 کثیر رقمی اظہاریوں پر عوامل

5.3.1 کثیر رقمی اظہاریوں کی جمع، تفریق اور ضرب

ہم پہلے ہی اوپر دیئے گئے کثیر رقمی اظہاریوں پر عوامل سیکھ چکے ہیں۔

(i) کثیر رقمی اظہاریوں کی جمع

کثیر رقمی اظہاریوں کی ایک جیسی رقموں کو اکھٹا کر کے خاصیت مبادلہ، تلازم اور تقسیمی استعمال کرتے ہوئے جمع کر سکتے ہیں یہ افقی اور عمودی دونوں طریقوں سے کیا جاسکتا ہے۔

مثال 1. $2x+3y-4z$ اور $5z+6x-3y$ کو افقی طریقے سے جمع کریں۔

اُفقی طریقہ

حل:

دیے گئے دو اظہاروں کی جمع $= (2x+3y-4z)+(5z+6x-3y)$

$= 2x+3y-4z+5z+6x-3y$

$= 2x+6x+3y-3y-4z+5z$

$= 8x+z$ = مطلوبہ مجموعہ

مثال 2. $2ab+b^2-3bc-4c^2$ ،$a^2-ab+2bc+3c^2$ اور $ab-4bc+c^2-a^2$ کو عمودی اور افقی طریقوں سے جمع کریں۔

حل:

عمودی طریقہ

$$\begin{array}{rrrrr} a^2 & -\ ab & +\ 2bc & +\ 3c^2 & +\ 0b^2 \\ 0a^2 & +\ 2ab & -\ 3bc & -\ 4c^2 & +\ b^2 \\ -a^2 & +\ ab & -\ 4bc & +\ c^2 & +\ 0b^2 \\ \hline +0 & +\ 2ab & -\ 5bc & +\ 0 & +\ b^2 \\ \hline \end{array}$$

افقی طریقہ

دیے گئے تین اظہاروں کی جمع $= (a^2-ab+2bc+3c^2)+$
$(2ab+b^2-3bc-4c^2)+(ab-4bc+c^2-a^2)$

$= a^2-ab+2bc+3c^2+2ab+b^2-3bc$
$-4c^2+ab-4bc+c^2-a^2$

$= a^2-a^2-ab+2ab+ab+2bc-3bc$
$-4bc+b^2+3c^2-4c^2+c^2$

$= 2ab-5bc+b^2$

لہٰذا $2ab-5bc+b^2$ مطلوبہ مجموعہ ہے

(ii) کثیر رقمی اظہاریوں کی تفریق

دو کثیر رقمی اظہاریوں کی تفریق میں تفریق کی جانے والی کثیر رقمی اظہاریہ کی ہر رقم کی علامت تبدیل کر کے اُسے دوسری کثیر رقمی اظہاریہ میں جمع کرتے ہیں۔

مثال 1. $2a + 3b + 4$ کو $6 + 5a - 6b$ میں سے تفریق کریں۔

حل:

مطلوبہ فرق $= (6 + 5a - 6b) - (2a + 3b + 4)$

$= 6 + 5a - 6b - 2a - 3b - 4$

$= 6 - 4 + 5a - 2a - 6b - 3b$

$= 2 + 3a - 9b$

مثال 2. $(a^4 - 7a^3b + 6a^2b^2 + 5ab^3 + 6b^4)$ کو $(5ab^3 + 6b^4 - a^4 + 7a^3b - 8a^2b^2 + 7)$ میں سے بذریعہ عمودی اور افقی طریقوں سے تفریق کریں۔

حل:

عمودی طریقہ

$$\begin{array}{rrrrrr}
5ab^3 & +6b^4 & -a^4 & +7a^3b & -8a^2b^2 & +7 \\
+5ab^3 & +6b^4 & +a^4 & -7a^3b & +6a^2b^2 & -0 \\
- & - & - & + & - & + \\
\hline
0 & +0 & -2a^4 & +14a^3b & -14a^2b^2 & +7 \\
\hline
\end{array}$$

اُفقی طریقہ

$(5ab^3 + 6b^4 - a^4 + 7a^3b - 8a^2b^2 + 7) - (a^4 - 7a^3b + 6a^2b^2 + 5ab^3 + 6b^4)$

$= 5ab^3 + 6b^4 - a^4 + 7a^3b - 8a^2b^2 + 7 - a^4 + 7a^3b - 6a^2b^2 - 5ab^3 - 6b^4$

$= 5ab^3 - 5ab^3 + 6b^4 - 6b^4 - a^4 - a^4 + 7a^3b + 7a^3b - 8a^2b^2 - 6a^2b^2 + 7$

$= -2a^4 + 14a^3b - 14a^2b^2 + 7 \Rightarrow 14a^3b - 2a^4 - 14a^2b^2 + 7$

لہٰذا $14a^3b - 2a^4 - 14a^2b^2 + 7$ مطلوبہ فرق ہے

(iii) کثیر رقمی اظہاریوں کی ضرب

کثیر رقمی اظہاریوں کی ضرب کو بذریعہ قوانین قوت نما، علامات کے اصول اور خاصیت مبادلہ، تلازم اور تقسیمی استعمال کرتے ہوئے دو اظہاروں کی ضرب کی جاتی ہے۔ ضرب کا عمل اُفقی اور عمودی دونوں طریقوں سے کیا جاسکتا ہے۔

مثال کے طور پر: $2x$ کی $3y$ سے ضرب کو یوں لکھتے ہیں جیسے: $2x \times 3y = 6xy$

مثال 1. $3a^2bc$ اور $4ab^3c^4$ کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

حل: اُفقی طریقہ

$(3a^2bc)\,(4ab^3c^4)$

$= (3\times 4)\,(a^2bc)\,(ab^3c^4)$ (قانون تلازم)

$= 12a^{2+1}\,b^{1+3}\,c^{1+4}$

$= 12a^3b^4c^5$ (قوانین قوت نما)

یا

عمودی طریقہ

$$\begin{array}{r} 4ab^3c^4 \\ \times\, 3a^2bc \\ \hline \end{array}$$

$(4\times 3)\,(a\times a^2)\,(b^3\times b)\,(c^4\times c)$

$= 12a^{1+2}\,b^{3+1}\,c^{4+1} = 12a^3b^4c^5$

مثال 2. x^2-2x-5 کو $x+3$ سے ضرب کریں

حل: عمودی طریقہ

$$\begin{array}{r} x^2-2x-5 \\ x\quad +3 \\ \hline x^3-2x^2-5x \qquad \\ +3x^2-6x-15 \\ \hline x^3+x^2-11x-15 \\ \hline \end{array}$$

یا

اُفقی طریقہ

$(x^2-2x-5)\,(x+3)$

$= x^2(x+3)-2x(x+3)-5(x+3)$

$= x^3+3x^2-2x^2-6x-5x-15$

$= x^3+x^2-11x-15$

لہٰذا $x^3+x^2-11x-15$ مطلوبہ حاصل ضرب ہے

5.3.2 ایک کثیر رقمی اظہاریہ کی یک درجی کثیر رقمی اظہاریہ سے تقسیم

ضرب کا اُلٹ عمل تقسیم ہوتا ہے۔ آئیں اس عمل کو بذریعہ مثال سیکھیں۔

مثال 1. $6x^2+8x-14$ کو 2 سے تقسیم کریں

حل: $(6x^2+8x-14)\div 2 = \dfrac{(6x^2+8x-14)}{2} = \dfrac{6x^2}{2}+\dfrac{8x}{2}-\dfrac{14}{2} = 3x^2+4x-7$

مثال 2. k کی کس قیمت کے لئے کثیر رقمی اظہاریہ x^2+5x+k ، $x+4$ سے تقسیم پذیر ہے

حل:

$$\begin{array}{r|l} x+4 & x^2+5x+k\;(x+1 \\ & \underline{\pm x^2 \pm 4x} \\ & \quad x+k \\ & \quad \underline{\pm x \pm 4} \\ & \quad k-4 \end{array}$$

مکمل طور تقسیم کے لئے باقی صفر رہتا ہے

اس لئے $k-4=0 \Rightarrow k=4$

لہٰذا k کی مطلوبہ قیمت 4 ہے

پس

$$\frac{x^2+5x+4}{x+4} = x+1$$

یہاں x^2+5x+4 مقسوم ہے

$x+4$ مقسوم علیہ ہے

$x+1$ خارج قسمت ہے اور

0 باقی ہے

مثال 3. $5x^2 - 16xy + 3y^2$ کو $x - 3y$ سے بذریعہ عمودی طریقہ تقسیم کریں

حل:

$$\begin{array}{r}
5x - y \\
x - 3y \overline{\smash{)}\,5x^2 - 16xy + 3y^2} \\
5x^2 - 15xy \\
- \quad + \\
\hline
-xy + 3y^2 \\
-xy + 3y^2 \\
+ \quad - \\
\hline
0 = \text{باقی}
\end{array}$$

لہٰذا $5x - y$ مطلوبہ خارج قسمت ہے

نوٹ: اگر باقی صفر ہے تو دی گئی کثیر رقمی دوسری کثیر رقمی اظہاریہ مکمل طور تقسیم پذیر ہے۔

وضاحت: مرحلہ 1: مقسوم کی پہلی رقم کو مقسوم علیہ کی پہلی رقم سے تقسیم کریں: $\frac{5x^2}{x} = 5x$

مرحلہ 2: نتیجے کو مقسوم علیہ سے ضرب کریں:
$(5x)(x - 3y) = 5x^2 - 15xy$

مرحلہ 3: نتیجے کو مقسوم میں سے تفریق کریں اور باقی معلوم کریں۔

مرحلہ 4: یہ عمل اُس وقت تک دہرائیں جب تک مقسوم کی قوت مقسوم علیہ سے کم نہ ہو جائے۔

مشق 5.2

1. جمع کریں۔

(i) $4x + 6y + 5z,\ -3x - 9y$ اور $x + 3y - 4z$

(ii) $7x + 2y^3 - 4xy,\ 3x - 2xy^3 + 7xy$ اور $2xy - 5x + 6y^3$

(iii) $4x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 3,\ \ 2x - y^2 + 3x^2 - 4y + 3$ اور $-6x^2 - 2y^2 - 1$

(iv) $6ab - a^2 - b^2 - 7,\ 5a^2 - 7ab + 3b^2 + 9$ اور $-4b^2 - 3ab - 2a^2 - 3$

2. تفریق کریں

(i) $2x - 3y - z$ سے $z - 4x - 6y$

(ii) $y^4 - 6y^2 - 3y^3 + 4y^5$ سے $6y^2 - 3y^5 + 2y^4 + 3y^3 + 8$

(iii) $7x - 8y + 4z - 5w$ سے $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 7y - 5z - 5w$

(iv) $5z^2 - 3yz + 2y^2$ سے $10y^2 - 2yz - 3z^2$

3. $p^2 + 3pq + q^2$ اور $2p^2 - pq + 5q^2$ کے مجموعہ کو $6p^2 - 7pq + 4q$ اور $7p^2 - 2pq + 3q^2$ کے مجموعہ میں سے تفریق کریں۔

4. دو کثیر رقمی اظہاریوں کا مجموعہ $3a^3 + 3a + 7b + 4ab$ ہے۔ اگر ایک کثیر رقمی اظہاریہ $4ab - 3a^3$ ہو تو دوسری کثیر رقمی اظہاریہ معلوم کریں۔

5. مختصر کریں۔

(i) $6(2x+y-7xy)-3(5x-2y+5xy)$ (ii) $4(2x-3y+xy)-5(3x-2y-xy)$

(iii) $x(x^2+2xy+y^2)+4y(x^2+3xy+9y^2)$ (iv) $x^2(x^2+xy+y^2)-y^2(x^2-xy-y^2)$

6. حاصل ضرب معلوم کریں۔

(i) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y)$ (ii) $(x^3-xy+y^3)(x^3+xy+y^3)$

(iii) $(a^2-b^2)(a^2-2ab+b^2)$ (iv) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

7. تقسیم کریں۔

(i) $(3x^3-6x^2+12x)\div 3x$ (ii) $(4x^4-16x^3+8x^2)\div 2x^2$

(iii) $(x^2+x-6)\div(x+3)$ (iv) $(9x^2-6xy-8y^2)\div(3x+2y)$

(v) $(a^3+b^3)\div(a+b)$ (vi) $(a^6-b^6)\div(a^2-b^2)$

8. دو کثیر رقمی اظہاریوں کی حاصل ضرب $x^4-3x^2y^2+y^4$ ہے اگر ایک کثیر رقمی اظہاریہ x^2-xy-y^2 ہو تو دوسری کثیر رقمی اظہاریہ معلوم کریں۔

9. $2a^4+3a^3-a^2-5$ میں سے کیا تفریق کیا جائے کہ یہ $a-2$ سے مکمل طور تقسیم پذیر ہو جائے۔

10. t کی کس قیمت کے لئے کثیر رقمی اظہاریہ $2x^4+3x^3-4x^2+14x+2t$ مکمل طور تقسیم پذیر ہے x^2-2x+3 سے۔

جائزہ مشق 5

1. ذیل کے سوالات کے جوابات دیں۔

(i) تین درجی کثیر رقمی اظہاریہ کا مطلب کیا ہوتا ہے؟ ایک متغیر کی مثال لکھیں۔

(ii) متغیر کی وضاحت مثالوں کی مدد سے کریں۔

(iii) کثیر رقمی اظہاریہ $a+2b+3c$ میں سے کون سے حرف استعمال کئے گئے ہیں

(iv) $x^3+2x^2+3x^2$ میں کتنی رقوم ہیں

(v) کثیر رقمی اظہاریہ کا درجہ کیا ہوتا ہے۔ مثالیں دیں۔

2. درست جواب پر (✓) کا نشان لگائیں۔

(i) ax^2+bx+c میں متغیرات کی تعداد ______ ہے۔

(a) صفر (b) تین (c) دو (d) ایک

(ii) $x - 1$ ____________ کثیر رقمی اظہاریہ ہے

(a) دو درجی (b) چار درجی (c) ایک درجی (d) تین درجی

(iii) دو درجی کثیر رقمی اظہاریہ کی شناخت کریں۔

(a) xy (b) $2a^4$ (c) $x + y$ (d) $a + x + 3$

(iv) $3x^2 + 4xy^4 + y^6 + 9$ کا درجہ ____________ ہے۔

(a) 9 (b) 4 (c) 5 (d) 6

(v) کثیر رقمی اظہاریوں میں متغیر اور متغیرات سے ضرب ہونے والا عدد ____________ کہلاتا ہے۔

(a) متغیر (b) عددی کسر (c) قوت نما (d) ان میں سے کوئی نہیں

(vi) ________________ تین درجی کثیر رقمی اظہاریہ ہے

(a) $xbc + a^2$ (b) $a^2 + b^2 + c^2$ (c) $x^3 + \frac{1}{x^3}$ (d) 3

(vii) کون سا الجبری اظہاریہ کثیر رقمی اظہاریہ نہیں ہے

(a) $x + \frac{1}{x^{-2}}$ (b) -7 (c) $x^3 - y^3$ (d) $x^{-3} + 1$

(viii) چار درجی کثیر رقمی اظہاریہ کا درجہ ________ ہوتا ہے۔

(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 0

(ix) کثیر رقمی اظہاریہ $px^2 + qx + r$ میں حرف ہیں

(a) p, q, r (b) x (c) x^2, x (d) p, q, r, x

(x) اگر ایک کثیر رقمی اظہاریہ دوسری کثیر رقمی اظہاریہ سے مکمل طور تقسیم پذیر ہو تو باقی ______ ہوتا ہے۔

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) ان میں سے کوئی نہیں

3. ذیل کی قیمت معلوم کریں۔

(i) $x - 5y$ جب کہ $x = 2a + 3b$ ، $y = a - 5b$

(ii) $(x + y)(x^3 - 2x^{2y} + xy^2)$ جب کہ $x = -2$ ، $y = -3$

(iii) $\frac{a^2+b^2}{a^2+2ab+b^2}$ جب کہ $a = 0$ ، $b = 5$

(iv) $\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right)$ جب کہ $a = 3$

(v) $(a+b+c)\ (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ جب کہ $a = -2$، $b = 0$، $c = 2$

4. مختصر کریں۔

(i) $\frac{x+y}{3} - \frac{y+z}{2} + \frac{4x-z}{5}$ (ii) $(\sqrt{x} + y)(\sqrt{x} - y)$

(iii) $(x+y+2)(x-y-2)$ (iv) $(a^3-2a+4) \div (a+2)$

5. k کی کس قیمت کے لئے کثیر رقمی اظہاریہ $k^3 - 5k^2 - 14$ سے مکمل طور تقسیم پذیر ہے $k-2$ سے۔

خلاصہ

- کثیر رقمی اظہاریہ ایک یا ایک سے زیادہ رقوم پر مشتمل ہوتا ہے ان کے متغیرات کی قوتیں غیر منفی صحیح اعداد ہوتی ہیں۔
- غیر متغیر قیمت رکھنے والی علامت مستقل کہلاتی ہے۔
- مستقلات اور متغیرات کا مجموعہ جو بنیادی عوامل (+، –، ×، ÷)، جذر، قوت سے جوڑا ہوا ہو، الجبری اظہاریہ کہلاتا ہے۔
- متغیر نا معلوم کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کی جانے والی علامت یا حرف ہوتی ہے
- ایک الجبری اظہاریے میں مستقل یا متغیر کو ظاہر کرنے کے لئے جو علامت استعمال کی جاتی وہ حرف کہلاتا ہے مثال کے طور پر $4a + 2b - 3c$ میں a، b اور c حرف ہیں۔
- کثیر رقمی اظہاریہ کا درجہ اُس کی غیر صفر رقم کی بڑی سے بڑی قوت ہوتی ہے۔
- الجبری اظہاریہ میں عدد جو متغیر سے ضرب دیا گیا ہو وہ اُس کا عددی سر کہلاتا ہے۔
- ایک درجی کثیر رقمی اظہاریہ ایک درجہ رکھتی ہے۔
- دو درجی کثیر رقمی اظہاریہ دو درجے رکھتی ہے۔
- تین درجی کثیر رقمی اظہاریہ تین درجے رکھتی ہے۔
- چار درجی کثیر رقمی اظہاریہ چار درجے درکھتی ہے۔

یونٹ 6

اجزائے ضربی، ہمزاد مساوات

6.1 بنیادی الجبری کلیات

6.1.1 کلیات کی یاددہانی

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
(iii) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

اوپر دیئے گئے کلیات کو ہم پہلے ہی پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں اور ثابت بھی کر چکے ہیں۔

آئیں انہیں سوالات کو حل کرنے کے لئے استعمال کرتے ہیں۔

مثال 1. حل کریں: (i) $(102)^2$ (ii) $(98)^2$ (iii) $(102)(98)$

(i) $(102)^2 = (100+2)^2$
$= (100)^2 + 2(100)(2) + (2)^2,$
$\because [(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2]$
$= 10000 + 400 + 4 = 10404$

(ii) $(98)^2 = (100-2)^2$
$= (100)^2 - 2(100)(2) + (2)^2,$
$\because [(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2]$
$= 10000 - 400 + 4 = 9604$

(iii) $(102)(98) = (100+2)(100-2)$
$\because [(a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$
$= (100)^2 - (2)^2,$
$= 10000 - 4 = 9996$

سر گرمی 203×197

حل: $(200 + \_\_\_\_) \times (\_\_\_\_ - 3)$
$(a+b)(a-b) = (\quad)$
$= (200)^2 - (\quad)^2$
$= 40{,}000 - \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

مثال 2. حل کریں: (i) $(1.02)^2$ (ii) $(0.98)^2$ (iii) $(1.02)(0.98)$

حل:

(i) $(1.02)^2 = (1+.02)^2$
$= (1)^2 + 2(1)(0.02) + (0.02)^2,$
$[\because (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2]$
$= 1 + 0.04 + 0.0004 = 1.0404$

حل:

(ii) $(0.98)^2 = (1-0.02)^2$
$= (1)^2 - 2(1)(0.02) + (0.02)^2,$
$[\because (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2]$
$= 1 - 0.04 + 0.0004 = 0.9604$

(iii) $(1.02)(0.98) = (1+0.02)(1-0.02) = (1)^2 - (0.02)^2,$
$[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$
$= 1 - 0.0004 = 0.9996$

مثال 3. $x^2+\frac{1}{x^2}$ اور $x^4+\frac{1}{x^4}$ کی قیمت معلوم کریں جب کہ (i) $x+\frac{1}{x}=6$ (ii) $x-\frac{1}{x}=2$

حل:

(i) $x+\frac{1}{x}=6$

$\Rightarrow (x+\frac{1}{x})^2=(6)^2$ (دونوں اطراف کو مربع کرنے سے)

$\Rightarrow x^2+2(x)(\frac{1}{x})+\frac{1}{x^2}=36$

$\Rightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=36$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=36-2$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=34$

$\Rightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=(34)^2$

(دونوں اطراف کو مربع کرنے سے)

$\Rightarrow x^4+2(x^2)(\frac{1}{x^2})+\frac{1}{x^4}=1156$

$\Rightarrow x^4+\frac{1}{x^4}=1156-2=1154$

(ii) $x-\frac{1}{x}=2$

$\Rightarrow (x-\frac{1}{x})^2=(2)^2$ (دونوں اطراف کو مربع کرنے سے)

$\Rightarrow x^2-2(x)(\frac{1}{x})+\frac{1}{x^2}=4$

$\Rightarrow x^2-2+\frac{1}{x^2}=4$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=4+2$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=6$

(دونوں اطراف کو مربع کرنے سے)

$\Rightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=(6)^2$

$\Rightarrow x^4+2(x^2)(\frac{1}{x^2})+\frac{1}{x^4}=36$

$x^4+\frac{1}{x^4}=36$

مثال 4. ثابت کریں۔ $x^4+\frac{1}{x^4}=(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2$

ثبوت: $\text{R.H.S}=(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2$

$$=(x^2)^2+2(x^2)(\frac{1}{x^2})+(\frac{1}{x^2})^2-2$$

$$=x^4+2+\frac{1}{x^4}-2=x^4+\frac{1}{x^4}=\text{L.H.S}$$ پس ثابت ہوا

$$\therefore \text{L.H.S}=\text{R.H.S}$$

مشق 6.1

1. مناسب کلیہ کی مدد سے ذیل کو حل کریں۔

(i) $(105)^2$ (ii) $(96)^2$ (iii) $(57)^2$ (iv) $(52)^2$

(v) 104×96 (vi) 47×53 (vii) 107×93 (viii) 89×111

.2 مناسب کلیہ کی مدد سے حل کریں۔

(i) $(1.03)^2$ (ii) $(0.99)^2$ (iii) $(1.05)^2$
(iv) $(0.91)^2$ (v) 1.03×0.97 (vi) 5.02×4.98

.3 $x^2+\frac{1}{x^2}$ اور $x^4+\frac{1}{x^4}$ کی قیمت معلوم کریں جب کہ

(i) $x+\frac{1}{x}=5$ (ii) $x+\frac{1}{x}=-4$ (iii) $x+\frac{1}{x}=7$

.4 $x^2+\frac{1}{x^2}$ اور $x^4+\frac{1}{x^4}$ کی قیمت معلوم کریں جب کہ

(i) $x-\frac{1}{x}=3$ (ii) $x-\frac{1}{x}=0.2$ (iii) $x-\frac{1}{x}=-6$

.5 ثابت کریں۔

(i) $x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$ (ii) $x^2+\frac{1}{x^2}=(x-\frac{1}{x})^2+2$

6.2 عمل تجزی (Factorization)

اگر دو یا دو سے زیادہ اظہاریوں کا حاصل ضرب دیئے ہوئے اظہارے کے برابر ہو تو یہ دو یا دو سے زیادہ اظہارے دیئے ہوئے اظہارے کے اجزاءِ ضربی کہلاتے ہیں۔

مثال کے طور پر اگر $3x^2+6x=3x(x+2)$ ہو تو 3، x اور $(x+2)$ اجزاءِ ضربی ہوں گے $3x^2+6x$ کے۔

اجزائے ضربی معلوم کرنے کا عمل، عمل تجزی کہلاتا ہے۔ ہم دیئے گئے اظہارے کو دو یا دو سے زیادہ اجزاءِ ضربی کے حاصل ضرب سے ظاہر کرتے ہیں۔

6.2.1 $ka+kb+kc$ کی طرز کے اظہاریوں کی تجزی

ہم جانتے ہیں کہ اگر k ایک غیر صفر حقیقی عدد ہے تو

$$\boxed{ka+kb+kc=k(a+b+c)}$$

یہاں $k(a+b+c)$ کے k اور $a+b+c$ دو اجزاءِ ضربی ہیں

مثال 1. تجزی کریں: (i) $5x+10y+20z$ (ii) $6x^2+12xy-30xy^2$

حل:

(i) $5x+10y+20z$
$=5(x+2y+4z)$,
(کیوں کہ 5 مشترکہ جزوِ ضربی ہے)

(ii) $6x^2+12xy-30xy^2$
$=6x(x+2y-5y^2)$,
(کیوں کہ $6x$ مشترکہ جزوِ ضربی ہے)

6.2.2 $ac + ad + bc + bd$ کی طرز کے اظہاریوں کی تجزی

ہم جانتے ہیں کہ $\boxed{ac + ad + bc + bd = (a + b)(c + d)}$

ثبوت:

$$\begin{aligned} \text{R.H.S} &= (a + b)(c + d) \\ &= a(c + d) + b(c + d) \\ &= ac + ad + bc + bd = \text{L.H.S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= \underline{ac + ad} + \underline{bc + bd} \\ &= a(c + d) + b(c + d) \\ &= (a + b)(c + d) = \text{R.H.S} \end{aligned}$$

مثال 2. تجزی کریں: (i) $5x + xz + 5z + z^2$ (ii) $3x^2y + 6xy^2 - 2xz - 4yz$

حل:

(i) $\underline{5x + xz} + \underline{5z + z^2}$

$= x(5 + z) + z(5 + z)$

$= (5 + z)(x + z)$

(ii) $\underline{3x^2y + 6xy^2} - \underline{2xz - 4yz}$

$= 3xy(x + 2y) - 2z(x + 2y)$

$= (x + 2y)(3xy - 2z)$

6.2.3 $a^2 \pm 2ab + b^2$ کی طرز کے اظہاریوں کی تجزی

(i) ہم جانتے ہیں کہ

ثبوت $\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &= \underline{a^2 + ab} + \underline{ab + b^2} \\ &= a(a + b) + b(a + b) \\ &= (a + b)(a + b) \\ &= (a + b)^2 = \text{R.H.S} \end{aligned}$$

(ii) ہم جانتے ہیں کہ

ثبوت $\boxed{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= a^2 - 2ab + b^2 \\ &= \underline{a^2 - ab} - \underline{ab + b^2} \\ &= a(a - b) - b(a - b) \\ &= (a - b)(a - b) = (a - b)^2 \\ &= \text{R.H.S} \end{aligned}$$

مثال 1. تجزی کریں $x^2 + 6xy + 9y^2$

حل:

$x^2 + 6xy + 9y^2$

$= (x)^2 + 2(x)(3y) + (3y)^2$

$= (x + 3y)^2$ (کلیہ کے ذریعہ)

مثال 2. تجزی کریں $25x^2 - 10xy + y^2$

حل:

$25x^2 - 10xy + y^2$

$= (5x)^2 - 2(5x)(y) + (y)^2$

$= (5x - y)^2$ (کلیہ کے ذریعہ)

6.2.4 $a^2 - b^2$ کی طرز کے اظہاریوں کی تجزی

ہم جانتے ہیں کہ

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

ثبوت:

$$\begin{aligned} \text{R.H.S} &= (a + b)(a - b) \\ &= a(a - b) + b(a - b) \\ &= a^2 - ab + ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2 = \text{L.H.S} \end{aligned}$$

مثال 1. تجزی کریں $4a^2 - 9b^2$

حل:

$4a^2 - 9b^2$

$= (2a)^2 - (3b)^2$

$= (2a + 3b)(2a - 3b)$

مثال 2. تجزی کریں۔ **(i)** $25x^2 - 36y^2$ **(ii)** $8a^2 - 50b^2$

حل: **(i)** $25x^2 - 36y^2$
$$= (5x)^2 - (6y)^2$$
$$= (5x + 6y)(5x - 6y)$$

حل: **(ii)** $8a^2 - 50b^2$
$$= 2(4a^2 - 25b^2)$$
$$= 2\{(2a)^2 - (5b)^2\}$$
$$= 2(2a + 5b)(2a - 5b)$$

6.2.5 $a^2 \pm 2ab + b^2 - c^2$ کی طرز کے اظہاریوں کی تجزی

اس طرز کے اظہاریوں میں ہم سب سے پہلے کلیہ کا اطلاق کرتے ہیں
$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$ اور پھر $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

مثال 1. تجزی کریں $x^2 + 10x + 25 - y^2$

حل: $x^2 + 10x + 25 - y^2 = [(x)^2 + 2(x)(5) + (5)^2] - y^2$
$$= (x + 5)^2 - y^2 = (x + 5 + y)(x + 5 - y)$$

اس ہی طرح سے ہم $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$ کی طرز کے اظہاریوں کی تجزی بذریعہ کلیہ $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ اور $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ کرتے ہیں۔

مثال 2. $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$ کے اجزائے ضربی معلوم کریں۔

حل: $x^2 - 2xy + y^2 - z^2 = [(x)^2 - 2(x)(y) + (y)^2] - z^2$
$$= (x - y)^2 - z^2 = (x - y + z)(x - y - z)$$

مشق 6.2

A. ذیل کی تجزی کریں۔

(1) $4x + 8z$
(2) $5x + 10y + 30z$
(3) $2x - 4xy + 8xz$
(4) $2a^2 + 10a^3 - 20a^4$
(5) $3a^2b + 7ab^2 - 8a^2b^2$
(6) $6a^2bc + 12ab^2c - 36abc^2$
(7) $5x + 10y + 3xz + 6yz$
(8) $abc - abd + cx - xd$
(9) $x^2 + 5x + 6xy + 30y$
(10) $7xy + 14yz - 5ax - 10az$
(11) $3x^2 + 6y^2 + 6x^2z + 12y^2z$
(12) $x^2 - 7xy - xz + 7yz$

B. تجزی کریں۔

(1) $a^2 + 10a + 25$
(2) $x^2 + 12xy + 36y^2$

(3) $4x^2+12xy+9y^2$ (4) $16a^2+40ab+25b^2$

(5) b^2+c^2-2bc (6) $49p^2-14p+1$

(7) $81c^2-36cd+4d^2$ (8) $144x^4-72x^2y^2+9y^4$

(9) $3a^2-6ab+3b^2$ (10) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{9}y^2$

C. تجزی کریں۔

(1) $81x^2-4y^2$ (2) $169a^2-100b^2$ (3) $3a^2-27b^4$

(4) $2p^2-18q^2$ (5) $5x^2-125y^2$ (6) $\frac{25}{x^2}-\frac{y^2}{16}$

(7) $\frac{x^2}{144}-y^2$ (8) $\frac{36}{25}l^2-\frac{49}{4}d^2$ (9) $c^2-(a-b)^2$

(10) $(x+y)^2-z^2$ (11) $(a+b)^2-(p+q)^2$ (12) $144-y^4$

(13) $32a^2-50b^2$ (14) x^4-y^4 (15) $(2a+b)-9c^2$

D. تجزی کریں۔

(1) $x^2+2xy+y^2-z^2$ (2) $a^2+b^2-2ab-c^2$

(3) $64a^2+48ab+9b^2-c^2$ (4) $4p^2-12pq+9q^2-49r^2$

(5) $x^4+2x^2y^2+y^4-25z^2$ (6) $\frac{x^2}{4}-xy+y^2-\frac{c^2}{36}$

(7) $2a^2+4ab+2b^2-2c^2$ (8) $81c^2-16p^2+18cd+d^2$

(9) $4x^2+12x+9-16y^2$ (10) $36-25a^2+70ab-49b^2$

6.3 الجبری اظہاریوں کی ضرب

اب ہم سوالات کو حل کرنے میں ذیل کے کلیات کا اطلاق کرتے ہیں۔

6.3.1 دو رقموں کے مجموعہ کے مکعب کا کلیہ

L.H.S $=(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

ثبوت

$=(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$

$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=$ R.H.S

نوٹ: $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$\Rightarrow a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

مثال 1. $2x + 3$ کا مکعب معلوم کریں۔

حل:
$$(2x+3)^3 = (2x)^3 + 3\,(2x)^2\,(3) + 3\,(2x)\,(3)^2 + (3)^3$$
$$= 8x^3 + 3\,(4x^2)\,(3) + 6x\,(9) + 27$$
$$= 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$$

مثال 2. $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$ کی قیمت معلوم کریں جب کہ $x + \frac{1}{x} = 5$

حل: ہمارے پاس $x + \frac{1}{x} = 5$

طریقہ 1: معلوم سے نامعلوم

دونوں اطراف کو مکعب کریں

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = (5)^3$$
$$x^3 + 3\,(x^2)\left(\frac{1}{x}\right) + 3\,(x)\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^3} = 125$$
$$\Rightarrow x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = 125$$
$$\Rightarrow x^3 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3} = 125$$
$$\Rightarrow x^3 + 3(5) + \frac{1}{x^3} = 125 \quad \left(\because x + \frac{1}{x} = 5\right)$$
$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 125 - 15 = 110.$$

طریقہ 2: نامعلوم سے معلوم

ہم جانتے ہیں

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab\,(a+b)$$
$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3(x)\left(\frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$= 5^3 - 3(5)$$
$$= 125 - 15$$
$$= 110.$$

6.3.2 دو رقموں کے فرق کے مکعب کا کلیہ

فارمولا: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

ثبوت

$$\text{L.H.S} = (a-b)^3 = (a-b)\,(a-b)^2 = (a-b)\,(a^2 - 2ab + b^2)$$
$$= a\,(a^2 - 2ab + b^2) - b\,(a^2 - 2ab + b^2) = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = \text{R.H.S}$$

مثال 1. $4x - 1$ کا مکعب معلوم کریں۔

دیا ہوا اظہار $= 4x - 1$

حل: مکعب کرنے سے $(4x-1)^3$

$= (4x)^3 - 3(4x)^2(1) + 3(4x)(1)^2 - (1)^3$

$= 64x^3 - 3(16x^2) + 12x - 1$

$= 64x^3 - 48x^2 + 12x - 1$

مثال 2. 19 کا مکعب بذریعہ کلیہ معلوم کریں۔

دیا ہوا عدد $= 19$

حل: مکعب کرنے سے $(19)^3 = (20-1)^3$

$= (20)^3 - 3(20)^2(1) + 3(20)(1)^2 - (1)^3$

مطلوبہ عدد $= 8000 - 1200 + 60 - 1 = 6,859$

6.3.3 $x^3 \pm \frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کریں جب کہ $x - \frac{1}{x}$ کی قیمت دی گئی ہے

مثال 3. $x^3 - \frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کریں

حل: $x - \frac{1}{x} = 2$

طریقہ 1: معلوم سے نامعلوم

دونوں اطراف کو مکعب کریں $(x - \frac{1}{x})^3 = (2)^3$

$\Rightarrow x^3 - 3(x^2)(\frac{1}{x}) + 3(x)(\frac{1}{x})^2 - \frac{1}{x^3} = 8,$

$\Rightarrow x^3 - 3x - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x} = 8$

$\Rightarrow x^3 - 3(x - \frac{1}{x}) - \frac{1}{x^3} = 8$

$\Rightarrow x^3 - 3(2) - \frac{1}{x^3} = 8 \quad (\because x - \frac{1}{x} = 2)$

$\Rightarrow x^3 - 6 - \frac{1}{x^3} = 8$ یا $x^3 - \frac{1}{x^3} = 8 + 6 = 14$

طریقہ 2: نامعلوم سے معلوم $x^3 - \frac{1}{x^3}$

فارمولا: $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

$\therefore x^3 - \frac{1}{x^3} = (x - \frac{1}{x})^3 + 3x\frac{1}{x}(x - \frac{1}{x})$

$= (x - \frac{1}{x})^3 + 3(x - \frac{1}{x})$

$= (2)^3 + 3(2) = 8 + 6 = 14$

مشق 6.3

1. ذیل میں دیئے گئے ہر ایک کا مکعب معلوم کریں۔

(i) $(2x + 3)$ (ii) $5x - 1$ (iii) $2x - 3y$ (iv) $2a + 5b$ (v) $x + 7z$

(vi) $\frac{x}{2} - 1$ (vii) $5 + 3a$ (viii) $5 - \frac{a}{4}$ (ix) $5a - 3b$ (x) $\frac{x}{3} + \frac{y}{5}$

2. کلیہ کی مدد سے ذیل میں دیئے گئے ہر ایک کا مکعب معلوم کریں۔

(i) 18 (ii) 13 (iii) 105 (iv) 10.1 (v) 0.98 (vi) 2.25

3. $x^3 + \frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کریں جب کہ

(i) $x + \frac{1}{x} = 6$ (ii) $x + \frac{1}{x} = -5$

(iii) $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ (iv) $x + \frac{1}{x} = 10.1$

4. $x^3 - \frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کریں جب کہ

(i) $x - \frac{1}{x} = 5$ (ii) $x - \frac{1}{x} = -2$

(iii) $x - \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$ (iv) $x - \frac{1}{x} = 9.9$

6.4 ہمزاد یک درجی مساوات

ہم جانتے ہیں کہ یک درجی مساوات کا درجہ ایک ہوتا ہے اور یہ ایک، دو اور دو سے زیادہ متغیرات میں بھی ہو سکتی ہے

مثال کے طور پر $2x + 6 = 0$ یک درجی مساوات ایک متغیر 'x' میں ہے۔

اسی طرح $5x + 6y = 9$ یک درجی مساوات دو متغیرات x اور y میں ہے۔

$ax + b = c$ یک درجی مساوات ایک متغیر میں معیاری شکل ہے جہاں a، b اور c حقیقی اعداد ہیں

جبکہ $a \neq 0$ اور $b \neq 0$

6.4.1 ایک اور دو متغیرات میں ہمزاد یک درجی مساوات کی شناخت کرنا

ایک ہی مسئلے میں دو یا دو سے زیادہ یک درجی مساوات ہمزاد یک درجی مساوات کہلاتی ہے۔

مثال 1. $2x + 3 = 5$ اور $2x + y = 6$ بالترتیب ایک اور دو متغیرات میں ہمزاد یک درجی مساوات ہے۔

مثال 2. $6x + y = 8$ اور $3x - y = 1$ دو متغیرات میں ہمزاد یک درجی مساواتیں ہیں۔

نوٹ: ہمزاد یک درجی مساوات کا صرف ایک ہی حل ہوتا ہے جیسا کہ مثال 1 کا حل ہے: $x = 1, y = 4$ یا $(x, y) = (1, 4)$۔ مثال 2 کا حل ہے: $x = 1, y = 2$ یا $(x, y) = (1, 2)$

6.4.2 دو متغیرات میں یک درجی مساوات بنانے کا تصور دینا

ہم جانتے ہیں کہ دو متغیرات میں یک درجی مساوات در حقیقت میں دو مقداروں پر مشتمل ایک الجبری عبارت ہوتی ہے۔

یک درجی مساوات بنانے کے لئے ہمیں ذیل کے مراحل پر عمل کرنا ہوتا ہے

مرحلہ 1. جملے یا عبارت کو غور سے پڑھیں اور نامعلوم مقداروں کی شناخت کریں جیسے $(x, y, z, t, \ldots)$

مرحلہ 2. نامعلوم مقداروں کو انگریزی حرف تہجی سے ظاہر کریں۔

مرحلہ 3. دی گئی عبارت یا جملے کی شرائط کو پورا کرتی ہوئی مساوات بنائیں۔

مثال 1. ذیل کی ہر عبارت کی یک درجی مساوات بنائیں۔

(i) دو طلبہ کی عمروں کا مجموعہ 30 سال ہے۔

(ii) 5 کلو گرام سیب اور 3 کلو گرام آموں پر کل 550 روپے خرچ ہوئے۔

(iii) 6 پینوں کی قیمت ایک کتاب کی قیمت کا دگنا ہے۔

حل (i): فرض کریں دونوں طلبہ کی عمر سالوں میں x اور y ہے تو مطلوبہ مساوات ہو گی $x + y = 30$

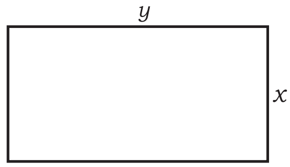
حل (ii): فرض کریں ایک کلو گرام سیبوں کی قیمت x روپے اور ایک کلو گرام آموں کی قیمت y روپے ہے تو مطلوبہ مساوات ہو گی $5x + 3y = 550$

حل (iii): فرض کریں ایک پین کی قیمت x روپے اور ایک کتاب کی قیمت y روپے ہے تو لہٰذا مطلوبہ مساوات ہو گی $6x = 2y$ یا $6x - 2y = 0$

مثال 2. ذیل کی عبارت کے لئے دو متغیرات میں دو ہمزاد یک درجی مساوات بنائیں۔

ایک مستطیل کی لمبائی اُس کی چوڑائی سے 4 سینٹی میٹر زیادہ ہے اور مستطیل کا احاطہ 192 سینٹی میٹر ہے۔

$y - x = 4 \ldots\ldots (i)$ ؛ $x + y = \frac{192}{2} = 96 \ldots\ldots (ii)$



حل: فرض کریں لمبائی $= y$ سینٹی میٹر اور چوڑائی $= x$ سینٹی میٹر تو

(i) $y = x + 4$ یا $y - x = 4$

$2(x + y) = 192$ یا $x + y = \frac{192}{2}$ یا $x + y = 96$

6.4.3 یک درجی مساوات کے بارے میں اہم حقیقتوں کا جاننا

(1) دو نامعلوم مقداروں میں یک درجی مساوات کو کئی مطلوبہ قیمتوں کے جوڑوں سے ثابت کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر $x + y = 6$ یہ دو متغیرات میں یک درجی مساوات ہے اور اس کے لاتعداد حل ہیں ان میں سے کچھ یہ ہیں....$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ وغیرہ۔

تصدیق: ہمارے پاس مساوات ہے $x + y = 6$ جس کے حل $(1, 5)$ کے لئے، ہمیں حاصل ہوتا ہے $1 + 5 = 6$
اسی طرح $(4, 2)$ کے لئے، ہمیں حاصل ہوتا ہے $4 + 2 = 6$ اور حل $(3,3)$ کے لئے حاصل ہوتا ہے $3 + 3 = 6$

(2) دو نامعلوم مقداروں میں دو ہمزاد یک درجی مساوات کا صرف ایک حل ہوتا ہے یعنی قیمتوں کا صرف ایک ہی جوڑا ملتا ہے۔

مثال کے طور پر $x + y = 5$ اور $x - y = 3$ دو ہمزاد یک درجی مساوات ہیں اور ان کا صرف ایک ہی حل ہے $(4, 1)$

تصدیق: $x = 4$ اور $y = 1$ ہمیں حاصل ہوتا ہے $4+1=5$ اور $4-1=3$ لہٰذا دونوں مساوات درست ہیں۔

دونوں مساوات دو متغیرات میں ہو یا ان میں سے ایک، ایک متغیر میں ہو۔

مثال کے طور پر $x = 3$ اور $y = 2x + 5$ دو یک درجی ساوات ہیں۔

نوٹ: دو ہمزاد مساوات کے حل کا مطلب ہے کہ نامعلوم کی قیمتیں دونوں مساواتوں کو ثابت کرتی ہیں۔

مشق 6.4

1. ایک متغیر میں یک درجی مساوات، دو متغیرات میں یک درجی مساوات اور ہمزاد یک درجی مساواتوں کو شناخت کریں اور علیحدہ کریں۔

(i) $2x + 3y = 6$ (ii) $2x - 7 = 0$ (iii) $2x = 6,\ x + y = 8$
(iv) $x - y = 7,\ x + y = 10$ (v) $5y = 8$ (vi) $3y - 7 = 8x$

2. ذیل کی ہر عبارت کے لئے یک درجی مساوات بنائیں۔

(i) دو لڑکوں کے وزنوں کا مجموعہ 50 کلو گرام ہے۔
(ii) چھ پینوں کی قیمت ایک رسالے کی قیمت کا تین گنا ہے۔
(iii) اگر کسی عدد کے دگنے میں 5 جمع کیا جائے تو نتیجہ 25 آتا ہے۔
(iv) اگر 6 کلو گرام آموں کی قیمت کو 3 کلو گرام امرودوں کی قیمت میں سے تفریق کیا جائے تو نتیجہ 45 روپے آتا ہے۔
(v) ایک اسکول میں لڑکیوں کی تعداد لڑکوں کی تعداد کا دو تہائی ہے۔

3. مساوات $2x + y = 10$ اور $x + y = 10$ کے کوئی تین حل بتائیں اور تصدیق کریں۔

4. مساوات $2x + y = 16$ اور $x - y = 2$ کے کوئی چار حل بتائیں اور تصدیق کریں۔

5. مساوات $x - y = 4$ اور $x - 2y = 2$ کا حل بتائیں اور تصدیق کریں۔

6. $(1, 5)$ اور $(6, 0)$ میں سے کون سا حل ہمزاد مساوات $2x + y = 7$ اور $6x - y = 1$ کا حل نہیں ہے۔

7. ذیل کے عبارات کے لئے ہمزاد یک درجی مساوات کے جوڑے بنائیں۔

(i) کتاب کی قیمت نوٹ بک کی قیمت سے 50 روپے زیادہ ہے اور دونوں کی قیمتوں کا مجموعہ 115 روپے ہے۔
(ii) دو اعداد کا مجموعہ 27 اور فرق 17 ہے۔
(iii) ایک زاویے اپنے کمپلیمنٹری زاویے کا دگنا ہے۔
(iv) ایک پین کی قیمت 50 روپے اور 2 پینوں اور 5 پنسلوں کی قیمت 200 روپے ہے۔

6.5 ہمزاد یک درجی مساوات کا حل

دو ہمزاد یک درجی مساوات کو حل کرنے کے بہت سے طریقے ہیں یہاں ہم صرف تین طریقہ پر بحث کرینگے۔

6.5.1 ہمزاد یک درجی مساوات کو حل کرنا بذریعہ عددی سروں کو یکساں کرنے کا طریقہ

اس طریقے میں ہم کسی ایک متغیر کے عددی سر کو اگر وہ مختلف ہو تو ایک جیسا بناتے ہیں اور پھر ان مساوات کو تفریق یا جمع کرتے ہیں۔ اس طرح سے حاصل ہونے والی مساوات سے وہ متغیر خارج ہو جاتا ہے جیسا کہ ذیل کی مثال میں واضح کیا گیا ہے

مثال 1. $2x - 3y = 3$ اور $5x + y = 16$ کو بذریعہ عددی سروں کو یکساں کرنے کے طریقہ سے حل کریں۔

حل: ہمارے پاس $2x - 3y = 3 \quad .... \text{(i)}$، $5x + y = 16 \quad .... \text{(ii)}$

x کے عددی سر کو یکساں کرنے کے لئے مساوات (i) کو 5 سے اور مساوات (ii) کو 2 سے ضرب دیں تو ہمیں حاصل ہوگا۔

$$10x - 15y = 15 \quad .... \text{(iii)}$$
$$10x + 2y = 32 \quad .... \text{(iv)}$$

مساوات (iv) کو مساوات (iii) میں سے تفریق کرنے سے

$$\begin{array}{l} 10x - 15y = 15 \\ \underline{\pm 10x \pm 2y = \pm 32} \\ -17y = -17 \end{array}$$ (x خارج ہو گیا)

$\Rightarrow \quad 17y = 17$ یا $y = \dfrac{17}{17} = 1.$

پس $y = 1$ رکھنے سے ہمیں حاصل ہوا

$$2x - 3(1) = 3$$
$$\Rightarrow \quad 2x - 3 = 3$$
$$\Rightarrow \quad 2x = 6$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{6}{6} = 3$$ اور
$$\therefore \quad x = 3 \quad y = 1$$

لہٰذا حل سیٹ = $\{(3, 1)\}$

(2) طریقہ اسقاط بذریعہ قیمت درج کرنا

اس طریقے میں ہم کسی ایک مساوات سے کسی ایک متغیر کی قیمت معلوم کرتے ہیں اور اُسے دوسری مساوات میں اُس متغیر کی جگہ رکھتے ہیں جس میں سے وہ متغیر خارج ہو جاتا ہے جیسا کہ مثال میں واضح کیا گیا ہے۔

مثال: $x + 2y = 8$ اور $3x - 4y = -6$ کو طریقہ اسقاط بذریعہ قیمت درج کرنا کی مدد سے حل کریں۔

حل: ہمارے پاس مساوات تین ہیں: $x + 2y = 8 ... \text{(i)}$

$$3x - 4y = -6 ... \text{(ii)}$$

مساوات (i) سے حاصل ہوتا ہے: $x = 8 - 2y ... \text{(iii)}$

مساوات (ii) میں x کی قیمت رکھنے سے ہمیں حاصل ہوا

پس $3(8 - 2y) - 4y = -6$

$$\Rightarrow \quad 24 - 6y - 4y = -6$$
$$\Rightarrow \quad 24 - 10y = -6$$
$$\Rightarrow \quad -10y = -6 - 24$$
$$\Rightarrow \quad -10y = -30$$
$$\Rightarrow \quad y = \frac{-30}{-10} = 3.$$

$y = 3$ کو مساوات (iii) میں رکھنے سے ہمیں حاصل ہوا $x = 8 - 2(3) = 2$

لہٰذا ہمیں حاصل ہوا $x = 2$ اور $y = 3$ پس حل سیٹ = $\{(2, 3)\}$

(3) ضرب چلیپائی کا طریقہ

اس طریقے کی وضاحت کے لئے ہم دو ہمزاد مساوات معیاری شکل میں لیتے ہیں جیسے $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ اور $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ذیل میں اس طریقے سے حل کرنے کے مراحل دیئے گئے ہیں۔

مرحلہ 1. ہم عددی سروں کے مستقلات کو یوں لکھتے ہیں۔

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 & c_2 \end{array}$$

مرحلہ 2. پہلے اور آخری کالم کو خارج کر کے ذیل کے طریقے سے ضرب چلیپائی کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 & c_2 \end{array}$$

مرحلہ 3. x اور y کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ذیل کی برابر نسبتوں کو استعمال کرتے ہیں۔

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

مثال 3. $2x + 3y = 4$ اور $4x - 5y = -3$ کو بذریعہ ضرب چلیپائی کا طریقہ حل کریں۔

حل: ہمارے پاس $4x - 5y + 3 = 0$ اور $2x + 3y - 4 = 0$ معیاری شکل میں ہیں

عددی سروں اور مستقلات کو یوں لکھیں اور پہلے اور آخری کالم کو خارج کرتے ہوئے ضرب چلیپائی کریں تو ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 3 & -4 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & -5 & 3 & 4 & -5 & 3 \end{array}$$

بذریعہ ضرب چلیپائی کا طریقہ

$$\frac{x}{(3)(3) - (-5)(-4)} = \frac{y}{(-4)(4) - (3)(2)} = \frac{1}{(2)(-5) - (4)(3)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{9-20} = \frac{y}{-16-6} = \frac{1}{-10-12} \quad \text{یا} \quad \frac{x}{-11} = \frac{y}{-22} = \frac{1}{-22}$$

دو مساواتیں $\frac{x}{-11} = \frac{1}{-22}$ اور $\frac{y}{-22} = \frac{1}{-22}$

لہٰذا $\Rightarrow -22x = -11$ اور $y = \frac{22}{22} = 1$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ اور } y = 1.$$

پس حل سیٹ: $\left\{\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$ یا $\left\{(0.5, 1)\right\}$

مشق 6.5

1. ذیل کی ہمزاد مساواتوں کو بذریعہ عددی سریکساں کرنے کے طریقہ سے حل کریں۔

(i) $2x + y = 10,$ $5x - 2y = 7.$
(ii) $5x - y = 3,$ $3x + y = 4.$
(iii) $3x + 7y = 27$ $5x + 2y = 16$
(iv) $2x + 3y = 2,$ $4x - 9y = -1.$
(v) $2x + y = 8,$ $6x - 2y = -1.$
(vi) $2x + 3y = 14$ $3x + 2y = 5$

2. ذیل کی ہمزاد مساواتوں کو طریقہ اسقاط بذریعہ قیمت درج کرنے سے حل کریں۔

(i) $3x - 5y = 5,$ $2x + y = 12.$
(ii) $4x + 3y = 2,$ $5x + 2y = -1.$
(iii) $13x - 9y = 1$ $11x - 12y = 14$
(iv) $7x - 4y = 1,$ $2x - 5y = 8.$
(v) $x + y = 1,$ $3x + 6y = 5.$
(vi) $3x - 7y = 1$ $4x + y = 22$

3. ذیل کی ہمزاد مساواتوں کو ضرب چلیپائی کے طریقے سے حل کریں۔

(i) $2x + 5y = 7,$ $5x - y = 4.$
(ii) $-2x + 5y = 5,$ $3x - 2y = -13.$
(iii) $2x + y = 10$ $x + 3y = 8$
(iv) $x - 4y = 2,$ $2x - 7y = 5.$
(v) $10x + 2y = 8,$ $5x + y = 2.$
(vi) $13x - y = 14$ $2x + 7y = 9$

6.5.2 دو متغیرات میں دو ہمزاد یک درجی مساوات پر مشتمل روزمرہ کے مسائل حل کرنا

آئیں دو متغیرات میں دو ہمزاد یک درجی مساوات پر مشتمل روزمرہ کے مسائل حل کریں۔

مثال 1. اسلم نے 3 کلو گرام سیب اور 2 کلو گرام آم خریدنے میں 400 روپے خرچ کئے ایک کلو گرام سیبوں کی قیمت معلوم کریں اگر سیبوں کی قیمت آموں کی قیمت کا دگنا ہو۔

حل: فرض کریں کہ 1 کلو گرام سیبوں کی قیمت x روپے اور 1 کلو گرام آموں کی قیمت y روپے ہے۔

سوال میں دی گئی شرائط کے مطابق $3x + 2y = 400$ — (i) اور $x = 2y$ ---- (ii)

مساوات (i) میں $x = 2y$ درج کرنے سے

ہمیں حاصل ہوا: $3x + 2y = 400$ — (i)

$3(2y) + 2y = 400$

$\Rightarrow \quad 6y + 2y = 400$

$\Rightarrow \quad 8y = 400$

$\Rightarrow \quad y = \frac{400}{8} = 50$

$\therefore \; y = 50$

مساوات (ii) میں $y = 50$ درج کرنے سے

ہمیں حاصل ہوا: $x = 2(50) = 100$

$\therefore \; x = 100$

پس ہمزاد مساواتوں کا حل ہوا:

$x = 100$ اور $y = 50$

لہٰذا 1 کلو گرام سیبوں کی قیمت 100 روپے ہے

مثال 2. بسمہ نے 50 روپے فی پین کے حساب سے کچھ پین اور 30 روپے فی کاپی کے حساب سے کچھ کاپیاں 350 روپے میں خریدیں۔ تو بتائیں کہ اُس نے کتنی پین خریدے اگر پین اور کاپیوں کی کل تعداد 9 تھی۔

حل: فرض کریں پینوں کی تعداد x اور کاپیوں کی تعداد y ہے۔

سوال میں دی گئی شرائط کے مطابق

$x + y = 9$ (i) اور $50x + 30y = 350$ (ii)

مساوات (i) سے حاصل ہوا: $x = 9 - y$ .... (iii)

اب $x = 9 - y$ مساوات (ii) میں رکھنے

سے ہمیں حاصل ہوا: $50(9 - y) + 30y = 350$

$\Rightarrow \quad 450 - 50y + 30y = 350$

$\Rightarrow \quad 450 - 20y = 350$

یا $\quad -20y = 350 - 450$

یا $\quad -20y = -100$

یا $\quad 20y = 100$

$\Rightarrow \quad y = \frac{100}{20} = 5.$

اس طرح $y = 5$ مساوات (iii) میں رکھنے سے حاصل ہوا: $x = 9 - 5 = 4$

ہمزاد مساواتوں کا حل ہوا: $x = 4, \; y = 5$

لہٰذا اُس نے 4 پین اور 5 کاپیاں خریدیں۔

مشق 6.6

1. عائشہ نے 6 کلو گرام آلو 300 روپے میں خریدے۔ ٹماٹروں کی قیمت فی کلو گرام کے حساب سے معلوم کریں اگر ٹماٹروں کی قیمت آلوں کی قیمت کا تین گنا ہے۔

2. طلحہ نے 100 روپے فی بلے کے حساب سے کچھ بلے اور 50 روپے فی گیند کے حساب سے کچھ گیندیں خریدیں تو بتائیں کہ اُس نے کتنی گیندیں خریدیں اگر اُس نے آٹھ چیزوں کے لئے 600روپے خرچ کئے۔

3. ایک مستطیلی میدان کی لمبائی اُس کی چوڑائی سے دگنی ہے اگر 30 روپے فی میٹر کے حساب سے میدان کے گرد باڑ لگانے کا خرچ 9000 روپے ہے تو میدان کے اطراف کی پیمائش معلوم کریں۔

4. ایک اسکول میں لڑکوں کی تعداد لڑکیوں کے مقابلے میں دگنی ہے۔ اگر طلبہ کی کل تعداد 450 ہے تو لڑکوں کی تعداد معلوم کریں۔

5. ایک مزدور کی ماہانہ آمدنی اور خرچ کی نسبت 15:14 ہے تو اُس کی ماہانہ آمدنی معلوم کریں اگر اُس کا ماہانہ خرچ 2000 روپے ہے۔

6.6 اسقاط (Elimination)

دو یا دو سے زیادہ مساوات سے کسی خاص متغیر سے ساقط ربط معلوم کرنے کا طریقہ اسقاط کہلاتا ہے۔

6.6.1 دو مساوات سے ایک متغیر کا اسقاط بذریعہ (a) قیمت درج کرنے سے (b) کلیہ کے اطلاق سے

دو متغیرات میں دو مساوات سے ایک متغیر ساقط کرنے کے بہت سے طریقے ہیں۔ تاہم ہم یہاں صرف دو طریقوں پر بحث کرینگے۔

(i) اسقاط بذریعہ قیمت درج کرنے سے

اس طریقے میں ہم ایک مساوات سے کسی ایک متغیر کی قیمت معلوم کرتے ہیں اور اُسے دوسری مساوات میں اُس متغیر کو ساقط کرنے کے لئے رکھتے ہیں۔

مثال 1. سامنے دی گئی ہمزاد مساواتوں سے x کو ساقط کریں۔ (i) $x + 4y = -2$ اور (ii) $x - 3y = 8$

حل: ہمارے پاس مساوات (ii) سے حاصل ہوا:

$x = 8 + 3y$ مساوات (i) میں رکھنے سے ہمیں حاصل ہوا:

$$x + 4y = -2 \Rightarrow 8 + 3y + 4y = -2 \Rightarrow 7y = -8 - = -10$$

پس ہمیں ربط $7y = -10$ حاصل ہوا جو x سے بالکل آزاد ہے۔

مثال 2. ذیل کی مساوات $V_f = V_i + gt$ اور $V_f^2 - V_i^2 = 2gs$ میں سے Vi کو ساقط کریں
یہاں (V_i اور V_f کا مطلب ابتدائی اور انتہائی رفتار ہے۔)

حل: ہمارے پاس

$V_f^2 - V_i^2 = 2gS \rightarrow$ (i)

$V_f = V_i + gt \rightarrow$ (ii)

V_i کو خارج کرنے کے لئے، V_f کی قیمت معلوم کریں گے

مساوات (ii) سے حاصل ہوا: $V_i = V_f - gt$

$V_i = V_f - gt$ کو مساوات (i) میں رکھنے سے ہمیں حاصل ہوا:

$V_f^2 - (V_f - gt)^2 = 2gS$

$\Rightarrow V_f^2 - (V_f^2 - 2gtV_f + g^2t^2) = 2gS$

$\Rightarrow V_f^2 - V_f^2 + 2gtV_f - g^2t^2 = 2gS$

$\Rightarrow g(2V_f t - gt^2) = 2gS$

$\Rightarrow 2V_f t - gt^2 = 2S$

$\Rightarrow S = \dfrac{2V_f t}{2} - \dfrac{gt^2}{2}$

$\Rightarrow S = V_f t - \dfrac{1}{2} gt^2.$

لٰہذا ربط $S = V_f t - \frac{1}{2} gt^2$ حاصل ہوا جو V_i سے بالکل آزاد ہے۔

(ii) اسقاط بذریعہ اطلاق کلیہ

اس طریقے میں سوال میں دی گئی شرائط کے مطابق ہم کلیات جیسے $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ اور $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ کا اطلاق کرتے ہیں۔

مثال 3. $x + \frac{1}{x} = a$ اور $x - \frac{1}{x} = b$ میں سے x ساقط کریں۔

حل: ہمارے پاس ہیں: $x + \frac{1}{x} = a$...(i) اور

$x - \frac{1}{x} = b$... (ii)

مساوات (i) اور مساوات (ii) کو دونوں اطراف مربع کرنے سے ہمیں حاصل ہوا:

$x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2} = a^2$... (iii)

$x^2 - 2 + \dfrac{1}{x^2} = b^2$... (iv)

اب مساوات (iv) کو مساوات (iii) میں تفریق کرنے سے ہمیں حاصل ہوا:

$$\begin{array}{r} x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = a^2 \\ x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = +b^2 \\ - \quad + \quad - \qquad - \\ \hline 4 = a^2 - b^2 \end{array}$$

یا $a^2 - b^2 = 4$

لٰہذا ربط $a^2 - b^2 = 4$ حاصل ہوا جو x سے بالکل آزاد ہے۔

مشق 6.7

1. بذریعہ قیمت درج کرنے کا طریقہ سے x ساقط کریں۔

(i) $x-y+1=0,\ 3x+y-3=0.$ (ii) $x+5y=2,\ 6x+3y=7.$ (iii) $2x+y=7,\ x+3y=4.$

(iv) $x^2+y=0,\ ax^2+b=0.$ (v) $x-2y+1=0,\ 3x+y-3=0.$ (vi) $4x+3y+8=0,\ x+5y-2=0.$

2. بذریعہ قیمت درج کرنے کے طریقے سے V_i ساقط کریں۔

(i) $V_f=V_i+at,\ S=V_it+\frac{1}{2}at^2.$ (ii) $V_f=V_i+gt,\ S=V_it-\frac{1}{2}gt^2.$ (iii) $V_f^2-V_i^2=2gS,\ V_f=V_i+gt.$

3. بذریعہ کلیہ x ساقط کریں۔

(i) $x+\frac{1}{x}=2a,\ x-\frac{1}{x}=2b+1.$ (ii) $x^2-\frac{1}{x^2}=2a,\ x^2+\frac{1}{x^2}=3b.$ (iii) $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=p,\ x-\frac{1}{x}=q^2$

(iv) $x^2+\frac{1}{x^2}=p^2,\ x^4+\frac{1}{x^4}=q^4.$ (v) $x+\frac{1}{x}=2y+1,\ x-\frac{1}{x}=y-2.$ (vi) $\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}=m,\ \frac{x^3}{y^3}-\frac{y^3}{x^3}=n$

جائزہ مشق 6

1. درست جواب کا انتخاب کریں۔

(i) $(x+y)^2=$ ________

(a) x^2+y^2 (b) $x^2+2xy+y^2$ (c) x^2-y^2 (d) a اور b دونوں

(ii) $x^2-y^2=$ ________

(a) $(x+y)^2$ (b) $(x-y)^2$ (c) x^2+y^2 (d) $(x-y)(x+y)$

(iii) $y^3+3y^2x+3yx^2+x^3=$ ____________

(a) $(y-x)^3$ (b) $(x-y)^3$ (c) $(x+y)^3$ (d) دونوں میں سے کوئی نہیں

(iv) $x + y + 6 = 0$ کا حل کون سا ہے۔

(a) (1, 2) (b) (−2, 4) (c) (−4, −2) (d) (4, 2)

(v) $x - y = 1$ اور $x + y = 5$ کا حل کون سا ہے۔

(a) (2, 3) (b) (3, 2) (c) (1, 4) (d) (4, 1)

2. جب کہ $x + \frac{1}{x} = 3$ اور $x - \frac{1}{x} = 5$ تو مندرجہ ذیل اظہاروں کی قیمت معلوم کریں۔

(i) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ (ii) $x^4 + \frac{1}{x^4}$ (iii) $x^4 - \frac{1}{x^4}$ (iv) $x^3 + \frac{1}{x^3}$ (v) $x^3 - \frac{1}{x^3}$ (vi) $x^6 - \frac{1}{x^6}$

3. کلیہ کی مدد سے مندرجہ ذیل کا حل معلوم کریں۔

(i) $(103)^2$ **(ii)** $(97)^2$ **(iii)** $(103) \times (97)$

4. تجزی کریں۔

(i) $5x + 10y + 15z$ **(ii)** $x^2 + 14x + 49$ **(iii)** $144x^2 - 121y^2$

(iv) $25x^2 - 10xy + y^2$ **(v)** $a^2 + 4ab + 4b^2 - 9y^2$ **(vi)** $1 - \frac{1}{x^4}$

5. سامنے دیے گئے اظہاروں کا مکعب معلوم کریں۔

(i) $2x + 3y$ **(ii)** $3x - 4y$ **(iii)** $x + \frac{1}{x}$ **(iv)** $x - \frac{1}{x}$

6. مندرجہ ذیل کا مکعب معلوم کریں بذریعہ مکعب کا کلیہ

(i) 29 **(ii)** 31

7. ذیل کی یک درجی مساوات کو حل کریں بذریعہ

(a) قیمت درج کرنے کے طریقے سے

(i) $2x - y = 6\ ,\ x + 3y = 10$ **(ii)** $2x + 5y = 1\ ,\ x - 2y = 4$

(b) عددی سر کو یکساں کرنے کے طریقے سے

(i) $3x + 2y = 7,\ 2x + 3y = 8$ **(ii)** $3x - 2y = 7\ ,\ 5x + y = 29$

(c) ضرب چلیپائی کے طریقے سے

(i) $2x + y = 5\ ,\ 3x - 2y = 4$ **(ii)** $5x + y = 56\ ,\ x + 18y = 29.$

8. ایک مستطیل کی چوڑائی اُس کی لمبائی کی نصف ہے اُس کا رقبہ معلوم کریں اگر اُس کا احاطہ 24 سینٹی میٹر ہے۔

9. کلیہ کی مدد سے x ساقط کریں۔

(i) $x - \frac{1}{x} = 2k - 1\ ,\ x + \frac{1}{x} = 5k$ **(ii)** $x - \frac{1}{x} = m\ ,\ x^2 + \frac{1}{x^2} = n^2$

خلاصہ

- ایک کثیر رقمی کو دو یا دو سے زیادہ کثیر رقمیوں کے حاصل ضرب میں ظاہر کرنے کا عمل تجزی کہلاتا ہے۔
- کچھ بنیادی کلیات

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

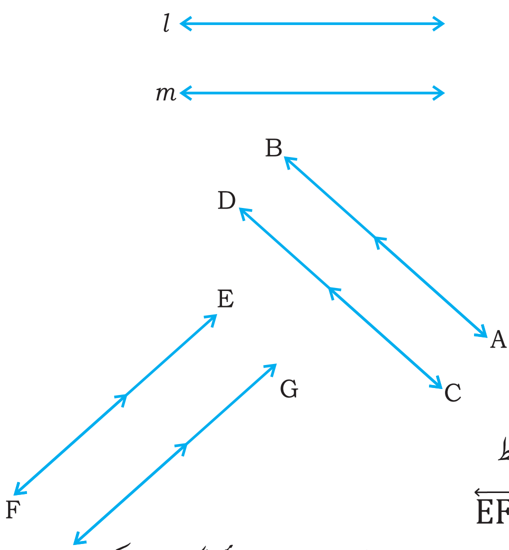
(iii) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

(iv) $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(v) $(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

- دو رقموں کے مجموعہ اور فرق کے مکعب کا کلیہ۔
- ایک مساوات جس کا درجہ ایک ہو وہ یک درجی مساوات کہلاتی ہے۔
- دو یا دو سے زیادہ مساوات جو ایک ہی سوال میں پائی جائیں ہو وہ ہمزاد یک درجی مساوات کہلاتی ہیں۔
- دو متغیرات میں یک درجی مساوات کے لاتعداد حل ہوتے ہیں۔
- دو متغیرات میں دو مختلف یک درجی مساوات ایک یا کوئی بھی حل نہیں ہوتا ہے۔
- کسی خاص متغیر سے آزاد ربط معلوم کرنے کا طریقہ اسقاط کہلاتا ہے۔
- ایک متغیر میں یک درجی مساوات کو اس شکل میں لکھا جاسکتا ہے $ax + b = 0$ یہاں b،a حقیقی اعداد ہے اور $a \neq 0$۔

جیومیٹری کے بنیادی تصورات



7.1 خطوط متوازی

7.1.1 تعریف:

ایسے دو خطوط متوازی کہلاتے ہیں جو

(i) ہم مستوی (coplanar) ہوں اور

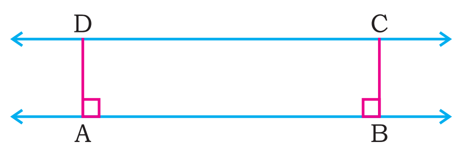
(ii) ایک دوسرے کو قطع نہ کریں۔

مثلاً ریلوے لائن۔ متوازی کی علامت // ہے۔

مثلاً $l // m$ کا مطلب ہے خط l متوازی ہے خط

m کے اسی طرح $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ اور $\overleftrightarrow{EF} // \overleftrightarrow{GH}$

دو متوازی خطوط کے درمیان فاصلہ ہر جگہ پر مساوی ہوتا ہے۔ مثلاً یہاں پر دی ہوئی شکل میں دیکھیے



$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ پس $m\overline{AD} = m\overline{BC}$

نوٹ کریں کہ $\overline{AD}$ اور $\overline{BC}$ خود بھی متوازی ہیں

7.1.2 خطوط متوازی کی اہم خصوصیات کی وضاحت بذریعہ اشکال

خاصیت 1: دو خطوط جو کسی ایک خط کے متوازی ہوں آپس میں متوازی ہوتے ہیں۔

ذیل میں دی گئی شکل کو غور سے دیکھئے

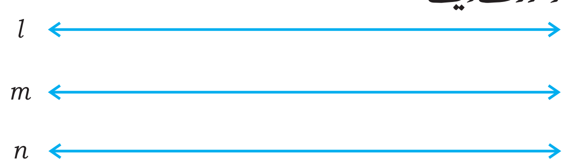
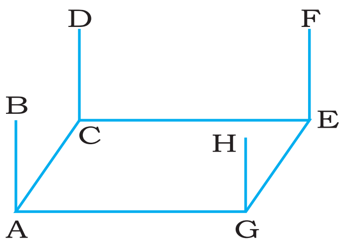


Fig. 1

مذکورہ بالا شکل میں $l \,//\, n$ اور $m \,//\, n$

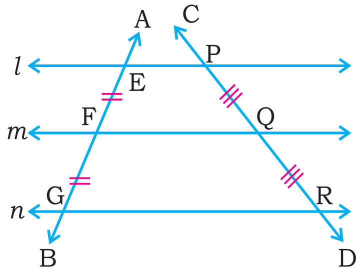
اس لئے $l \,//\, m$ متوازی خطوط سے متعلق یہ ایک اہم خاصیت ہے۔



مندرجہ ذیل شکل سے بھی اسی خاصیت کا اظہار ہوتا ہے۔

اس شکل میں بچوں والی ایک چھوٹی میز کو الٹ کر فرش پر رکھا گیا ہے۔ میز کی ٹانگ $\overline{AB}$ متوازی ہے ٹانگ $\overline{CD}$ سے اب آپ مزید ایسی ٹانگوں کی نشان دہی کریں جو کہ آپس میں متوازی ہوں۔

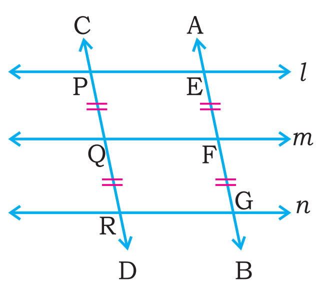
خاصیت 2: اگر تین متوازی خطوط ایک خطِ قاطع پر متماثل قطعات قطع کریں تو وہ کسی دوسرے خطِ قاطع پر متماثل قطعات قطع کریں گے۔



سامنے دی ہوئی شکل دیکھئے l، m اور n تین متوازی خطوط ہیں۔ قاطع $\overleftrightarrow{AB}$ انہیں نقاط E، F اور G پر بالترتیب قطع کرتے ہیں اور $m\,\overline{EF} = m\,\overline{FG}$ ایک دوسرا خط قطع $\overleftrightarrow{CD}$ کو نقاط P، Q اور R پر بالترتیب قطع کرتے ہیں۔

چونکہ پہلے خط قاطع $\overleftrightarrow{AB}$ پر قطع کیے ہوئے قطعات آپس میں متماثل ہیں اس لئے دوسرے خط قاطع پر بنے ہوئے قطعات بھی متماثل ہیں یعنی $m\,\overline{PQ} = m\,\overline{QR}$

یاد رکھئے یہ خاصیت یہ نہیں کہتی کہ پہلے خطِ قاطع والے قطعات دوسرے خط قاطع والے قطعات کے مساوی ہیں بلکہ یہ خاصیت کہتی ہے کہ دوسرے خطِ قاطع والے قطعات آپس میں مساوی ہیں۔ دوسرے خط قاطع پر بنے ہوئے قطعات پہلے خطِ قاطع پر بنے قطعات سے یا تو چھوٹے ہوں گے یا اس سے بڑے ہوں گے چاروں قطعات صرف اس صورت میں مساوی ہوں گے اگر دونوں خطوط قاطع آپس میں متوازی ہوں۔



ملاحظہ ہو دوسری تصویر جس میں $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$ اس لئے

$m\,\overline{EF} = m\,\overline{FG} = m\,\overline{PQ} = m\,\overline{QR}$

خاصیت 3: کسی مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطے سے کھینچا جانے والا خط جو دوسرے ضلع کے متوازی ہو تیسرے کی تنصیف کرتا ہے (مذکورہ بالا خصوصیات کا اطلاق)

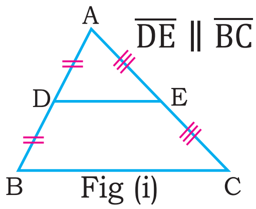


Fig (i)

سامنے دیئے ہوئے ΔABC میں نقطہ D ضلع $\overline{AB}$ کا وسطی نقطہ ہے اور $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ اس لئے دوسری خاصیت کے مطابق $m\,\overline{AE} = m\,\overline{EC}$ (کیونکہ $m\,\overline{AD} = m\,\overline{DB}$)۔

اب شکل نمبر 2 ملاحظہ ہو جس میں یہ دکھایا گیا ہے کہ مذکورہ بالا خصوصیات کا اطلاق کس طرح ہوا ہے۔

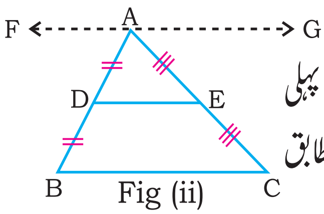
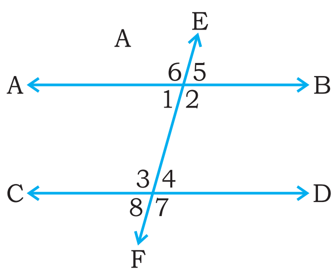


Fig (ii)

$\overleftrightarrow{FG}$ کو نقطہ A سے گزرتا ہو $\overline{DE}$ کے متوازی کھینچا گیا ہے اس لئے پہلی خاصیت کی بنا پر $\overline{BC} \parallel \overline{FG}$ اور دوسری خاصیت کے مطابق
$m\,\overline{AE} = m\,\overline{EC}$
(کیونکہ $m\,\overline{AD} = m\,\overline{DB}$)

7.1.3 ایک خطِ قاطع جب دو متوازی خطوط کو قطع کرے تو ان سے بننے والے زاویوں کے جوڑے

جب ایک خط قاطع دو یا زائد متوازی خطوط کو قطع کرے تو مندرجہ ذیل زاویے بنتے ہیں
(i) متقابلہ راسی زاویے
(ii) متناظرہ زاویے
(iii) متبادل اندرونی زاویے
(iv) اندرونی زاویوں کے جوڑے جو خطِ قاطع کے ایک ہی طرف ہوں



ذیل میں دی گئی شکل میں $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$ اور $\overleftrightarrow{EF}$ انہیں قطع کرتا ہے اس طرح آٹھ زاویے $(\angle 1, \angle 2, \ldots, \angle 8)$ وجود میں آتے ہیں ان آٹھ زاویوں میں سے $\angle 4$، $\angle 3$، $\angle 2$، $\angle 1$ اندرونی زاویے ہیں جبکہ $\angle 7$، $\angle 6$، $\angle 5$ اور $\angle 8$ بیرونی زاویے ہیں۔ زاویوں کے چار جوڑے $(\angle 5 ، \angle 1)$، $(\angle 6 ، \angle 2)$، $(\angle 7 ، \angle 3)$ اور $\angle 8$، $\angle 4$ راسی متقابلہ زاویے ہیں۔

مندرجہ ذیل میں دیئے جوڑے متناظرہ زاویے ہیں

(i) $\angle 4, \angle 5$ (ii) $\angle 3, \angle 6$ (iii) $\angle 1, \angle 8$ (iv) $\angle 2, \angle 7$.

نوٹ کریں کہ متناظرہ زاویوں کے ہر جوڑے میں ایک زاویہ اندرونی زاویہ ہے جبکہ دوسرا زاویہ بیرونی زاویہ ہے۔ دونوں زاویے خط قاطع کے ایک طرف دو مختلف راسی نقاط پر بنے ہیں۔

متبادلہ اندرونی زاویوں کے دو جوڑے مندرجہ ذیل ہیں:

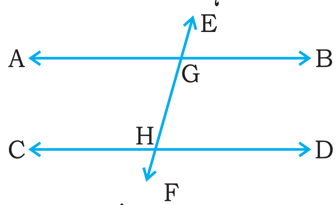
(i) $\angle 1$ اور $\angle 4$ (ii) $\angle 2$ اور $\angle 3$.

نوٹ کیجئے کہ متبادلہ اندرونی زاویے خطِ قاطع کے مختلف اطراف اور مختلف راسوں پر بنے ہیں۔

اندرونی دو زاویوں کے دو جوڑے جو خطِ قاطع کے ایک ہی طرف ہیں مندرجہ ذیل ہیں۔

(i) $\angle 1, \angle 3$ اور (ii) $\angle 2, \angle 4$.

مثال 1: دو متوازی خطوط $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ کو خطِ قاطع $\overleftrightarrow{EF}$ نقاط G اور H قطع کرتا ہے۔



مندرجہ ذیل زاویوں کے جوڑے لکھئے۔

(i) راسی متقابلہ زاویے

(ii) متناظرہ زاویے

(iii) متبادلہ اندرونی زاویے

(iv) خط قاطع کے ایک جانب والے اندرونی زاویے

حل **(i)**: راسی متقابلہ زاویوں کے چار جوڑے یہ ہیں:

(a) $\angle AGH, \angle EGB$ **(b)** $\angle AGE, \angle BGH$ **(c)** $\angle CHF, \angle GHD$ **(d)** $\angle GHC, \angle DHF$

(ii) متناظرہ زاویوں کے چار جوڑے یہ ہیں:

(a) $\angle AGH, \angle CHF$ **(b)** $\angle AGE, \angle GHC$ **(c)** $\angle EGB, \angle GHD$ **(d)** $\angle BGH, \angle DHF$

(iii) متبادلہ اندرونی زاویوں کے دو جوڑے یہ ہیں:

(a) $\angle AGH, \angle GHD$ **(b)** $\angle BGH, \angle GHC$

(iv) خطِ قاطع کے ایک طرف والے اندرونی زاویوں کے دو جوڑے یہ ہیں:

(a) $\angle AGH, \angle GHC$ **(b)** $\angle BGH, \angle GHD$

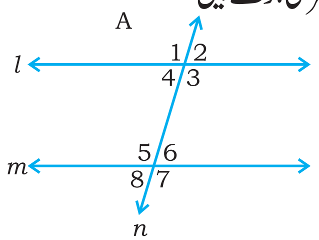
7.1.4. دو متوازی خطوط کو جب ایک خطِ قاطع قطع کرے تو وجود میں آنے والے زاویوں کے جوڑوں میں ربط

جب دو متوازی خطوط کو ایک خط قاطع قطع کرے تو:

(i) متناظرہ زاویے متماثل ہوتے ہیں

(ii) متبادلہ اندرونی زاویے متماثل ہوتے ہیں

(iii) خطِ قاطع کے ایک ہی طرف والے اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں



سامنے دی ہوئی شکل پر غور کیجئے جس میں $l \parallel m$ اور n خط انہیں قطع کرتا ہے

(الف) متناظرہ زاویوں کے جوڑے یہ ہیں

$(\angle 1, \angle 5); (\angle 2, \angle 6); (\angle 4, \angle 8); (\angle 3, \angle 7)$

ہر جوڑے کے زاویے آپس میں مساوی ہیں یعنی

$m\angle 1 = m\angle 5; m\angle 2 = m\angle 6; m\angle 4 = m\angle 8; m\angle 3 = m\angle 7$

(ب) متبادلہ اندرونی زاویوں کے دو جوڑے یہ ہیں:

$\angle 3$ اور $\angle 5$، $\angle 4$ اور $\angle 6$

ہر جوڑے کے زاویے آپس میں مساوی ہیں: $m\angle 3 = m\angle 5; m\angle 4 = m\angle 6$

(ج) خط قاطع کے ایک ہی طرف والے زاویوں کے دو جوڑے یہ ہیں

$\angle 5$ اور $\angle 4$، $\angle 6$ اور $\angle 3$

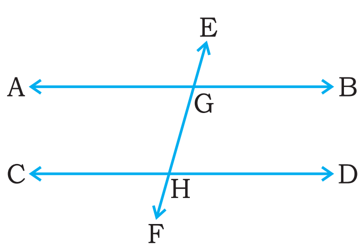
ہر جوڑے کے زاویے سپلیمنٹری ہیں

یعنی $\angle 4$ اور $\angle 5$ سپلیمنٹری ہیں اور $\angle 3$ اور $\angle 6$ سپلیمنٹری ہیں

یعنی $m\angle 5 + m\angle 4 = 180^\circ$

اور $m\angle 6 + m\angle 3 = 180^\circ$

مثال 2. سامنے والی شکل میں ذیل میں دیئے گئے زاویوں کی نشان دہی کریں۔



(i) $\angle GHD$ کا متماثل زاویہ متناظرہ

(ii) $\angle GHD$ کا متماثل زاویہ متبادلہ

(iii) $\angle GHD$ کا سپلیمنٹری زاویہ جو

(الف) خطِ قاطع کے ایک ہی طرف اندرونی زاویہ ہو

(ب) ایسا اندرونی زاویہ جو اس کے متصل ہو

(ج) ایسا بیرونی زاویہ جو اس کے متصل ہو

(د) $\angle GHD$ کے متماثل راسی متقابلہ زاویہ

حل: **(i)** $\angle EGB \cong \angle GHD$ (متناظرہ زاویے)

(ii) $\angle AGH \cong \angle GHD$ (متبادلہ زاویے)

(iii) **(الف)** $\angle BGH$ سپلیمنٹری ہے (زاویہ $\angle$ کا خط قاطع کے ایک ہی طرف کا اندرونی زاویہ)

(ب) $\angle GHC$ سپلیمنٹری ہے زاویہ GHD کا (متصلہ اندرونی زاویہ)

(ج) $\angle DHF$ سپلیمنٹری ہے $\angle GHD$ کا (متصلہ بیرونی زاویہ)

(د) $\angle CHF \cong \angle GHD$ (راسی متقابلہ زاویے)

مثال 3. مثال 2 کی شکل میں بقیہ زاویوں کی مقدار معلوم کریں جبکہ $m\angle GHD = 70^\circ$

(1) $\angle AGH \cong \angle GHD$ (متبادلہ زاویے) اس لئے $\therefore\ m\angle AGH = 70^\circ$

(2) $\angle EGB \cong \angle GHD$ (متناظرہ زاویے) اس لئے $\therefore\ m\angle EGB = 70^\circ$

(3) $(m\angle BGH + m\angle GHD = 180^\circ)$ (خط قاطع کے ایک ہی طرف کا اندرونی زاویہ)

$\Rightarrow m\angle BGH = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

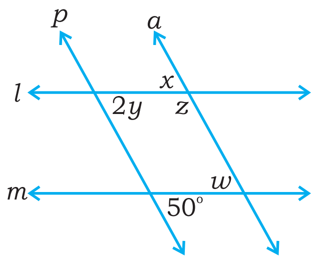
(4) $\angle AGE \cong \angle BGH$ (راسی متقابلہ زاویے) اس لئے $\therefore\ m\angle AGE = 110^\circ$

(5) $\angle GHC \cong \angle BGH$ (متبادلہ زاویے) اس لئے $\therefore\ m\angle GHC = 110^\circ$

(6) $\angle DHF \cong \angle GHC$ (راسی متقابلہ زاویے) اس لئے $\therefore\ m\angle DHF = 110^\circ$

(7) $\angle CHF \cong \angle GHD$ (راسی متقابلہ زاویے) اس لئے $\therefore\ m\angle CHF = 70^\circ$

مثال 4. اگر $l \parallel m$ اور $p \parallel q$ تو w, x, y اور z زاویوں کی مقدار بتائیے۔



حل: (1) w اور 50° متبادلہ زاویے ہیں

$\therefore\ m\angle w = 50^\circ$

(2) $\angle x = \angle w$ اس لئے

$\angle x = 50$ (x اور w متناظرہ زاویے ہیں)

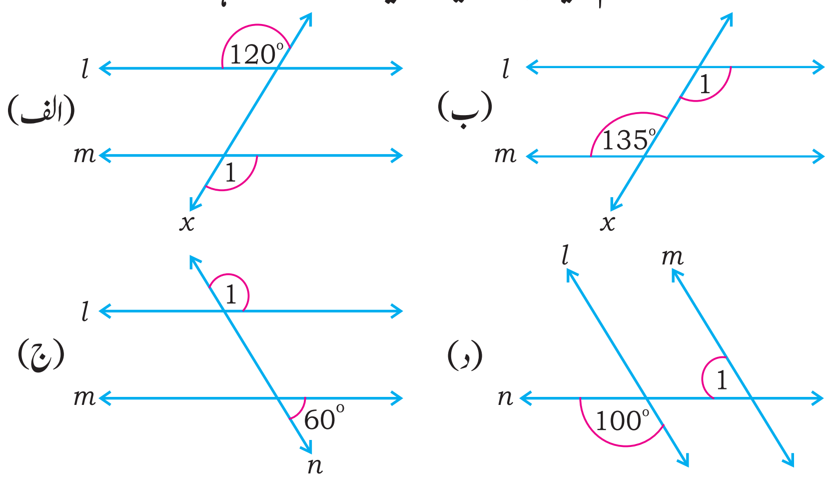
(3) $2y$ اور x متبادلہ زاویے ہیں اس لئے

$$\therefore \angle 2y = \angle x \quad \Rightarrow \angle 2y = 50^\circ \quad \Rightarrow \angle y = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$$

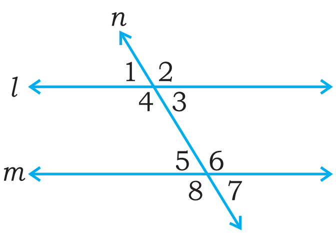
(4) زاویہ z زاویہ x کا سپلیمنٹری ہے اس لئے $\angle z = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

مشق 7.1

1. ہر شکل میں اے کی مقدار معلوم کریں جبکہ کسی ایک زاویہ کی مقدار دی گئی ہے۔



2. متصلہ شکل میں $l \parallel m$ تو بغیر زاویوں کی مقدار بتائیں جبکہ $m\angle 3 = 65^\circ$



3. $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{EF}$ انہیں نقاط P اور Q پر قطع کرتا ہے جس میں $m\angle PQD = 50^\circ$ تو شکل بنائیے اور بقیہ زاویوں کی مقدار معلوم کیجیے۔

4. $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{EF}$ انہیں بالترتیب نقاط G اور H پر قطع کرتا ہے تو ذیل میں پوچھے گئے زاویے بتائیے:

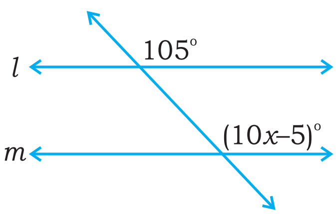
(i) $\angle GHC$ کا متناظرہ متماثل زاویہ **(ii)** $\angle GHC$ کا متبادلہ متماثل زاویہ

(iii) $\angle GHC$ کا راسی متقابلہ زاویہ

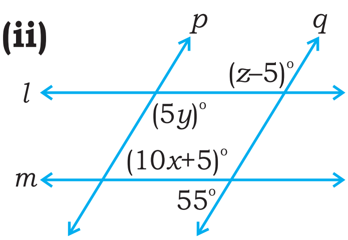
(iv) $\angle GHC$ کا سپلیمنٹ (الف) بطور اندرونی زاویہ جو خط قاطع کے ایک ہی طرف ہو (ب) بطور متصلہ اندرونی زاویہ (ج) بطور متصلہ بیرونی زاویہ

5. مندرجہ ذیل اشکال میں $m \parallel l$ اور $q \parallel p$ تو x، y یا z کی قیمت معلوم کیجیے۔

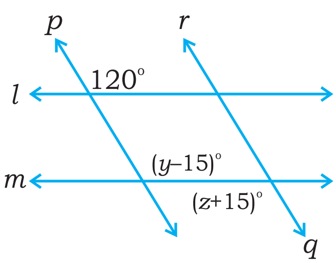
(i)



(ii)

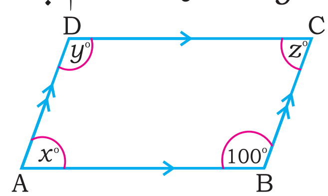


(iii)



(iv) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ اور $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

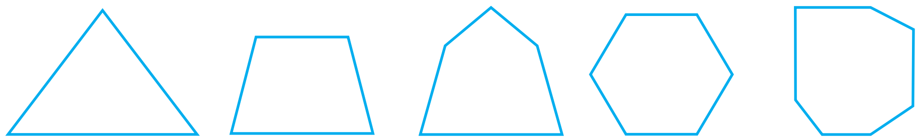
تو زاویے x، y اور z کی مقدار معلوم کیجیے۔



7.2 کثیر الاضلاع

7.2.1 کثیر الاضلاع کی تعریف

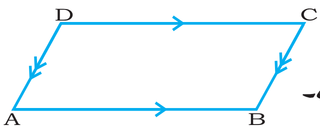
کسی مستوی میں واقع تین یا زاید اضلاع سے گھری ہوئی بند شکل کثیر الاضلاع کہلاتی ہے۔ چند اہم کثیر الاضلاع کی اشکال اور ان کے نام ذیل میں دیے گئے ہیں۔



مسبّع (سبع = سات) — مسدس (سدس = چھ) — مخمس (خمس = پانچ) — ذوار بعتہ الاضلاع (اربعہ = چار) — مثلث (ثلث = تین)

7.2.2 متوازی الاضلاع کی خصوصیات

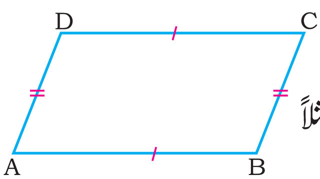
ہم جانتے ہیں کہ "متوازی الاضلاع ایک ایسا ذوار بعتہ الاضلاع ہے جس کے تقابل اضلاع متوازی ہوتے ہیں۔" مثلاً ذیل میں دی گئی شکل ذوار بعتہ الاضلاع ہے کیونکہ اس کے چار اضلاع ہیں لیکن چونکہ $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ اور $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ اس لئے ذوار بعتہ الاضلاع ABCD متوازی الاضلاع ہے۔ علامتی طور پر متوازی الاضلاع کو $\parallel^m$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس لئے مذکورہ بالا شکل $ABCD \parallel^m$ ہے۔ متوازی الاضلاع میں مندرجہ ذیل خصوصیات ہیں:



1. متقابل اضلاع متماثل ہوتے ہیں

متوازی الاضلاع کے متقابل ضلعے متماثل ہوتے ہیں مثلاً $ABCD \parallel^m$ ہے۔

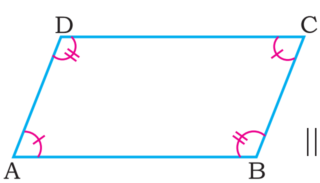
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ اور $\overline{AD} \cong \overline{BC}$



2. متقابل زاویے متماثل ہوتے ہیں

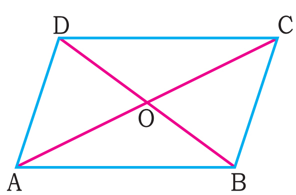
متوازی الاضلاع کے متقابل زاویے متماثل ہوتے ہیں۔ مثلاً $ABCD \parallel^m$ میں

$\angle B \cong \angle D$ اور $\angle A \cong \angle C$



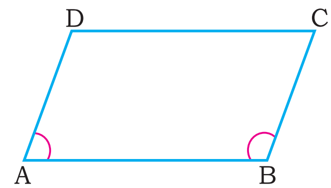
3. وتر ایک دوسرے کی تصنیف کرتے ہیں۔

متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔ مثلاً $\parallel^m$ ABCD میں $\overline{AC}$ دوسرے وتر $\overline{BD}$ کو نقطہ O پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ ایک دوسرے کو نقطہ O پر تنصیف کرتے ہیں یعنی نقطہ O دونوں وتروں کا وسطی نقطہ ہے مطلب یہ کہ



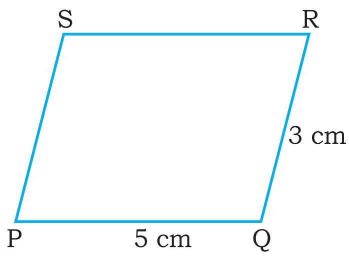
$\overline{AO} \cong \overline{CO}$ اور $\overline{BO} \cong \overline{DO}$

اور $m\,\overline{BO} = \frac{1}{2}\, m\,\overline{BD} = m\,\overline{DO}.$ ، $m\,\overline{AO} = \frac{1}{2}\, m\,\overline{AC} = m\,\overline{CO}$



4. ہر ضلع کے سروں پر بننے والے زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں

متوازی الاضلاع کے ہر مسلسل زاویوں کے جوڑے (یعنی ہر ضلع کے سروں پر بننے والے زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں مثلاً $||^m$ ABCD میں $m\angle A + m\angle B = 180^\circ$ اسی طرح $m\angle B + m\angle C = m\angle C + m\angle D = m\angle D + m\angle A = 180^\circ$



مثال 1. $||^m$ PQRS میں $m\overline{PQ} = 5\text{ cm},\ m\overline{QR} = 3\text{ cm}$ اور $m\angle P = 70^\circ$ تو بقیہ اضلاع اور زاویوں کی مقدار بتائیں۔

حل:

$\overline{RS} \cong \overline{PQ}$ ($||^m$ کے متقابل اضلاع) اور $m\overline{PQ} = 5\text{ cm}$ اس لئے $\therefore\ m\overline{QR} = 3\text{ cm}$

$\overline{PS} \cong \overline{QR}$ ($||^m$ کے متقابل اضلاع) اور $m\overline{QR} = 3\text{ cm}$ اس لئے $\therefore\ m\overline{PS} = 3\text{ cm}$

$\angle R \cong \angle P$ ($||^m$ کے متقابل زاویے) اور $\angle P = 70^\circ$ اس لئے $\therefore\ \angle R = 70^\circ$

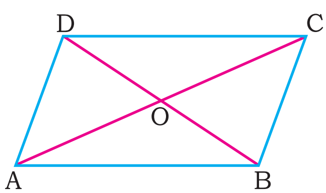
مزید برآں $m\angle P + m\angle Q = 180^\circ$ (خطِ قاطع کے ایک جانب کے اندرونی زاویے) اس لئے

$m\angle Q = 180^\circ - 70 \Rightarrow m\angle Q = 110^\circ$

مزید برآں $m\angle S = m\angle Q$ ($||^m$ کے متقابل زاویے) اور $m\angle Q = 110^\circ$ اس لئے

$\therefore\ m\angle S = 110^\circ$

مثال 2. $\overline{BD} = 4\text{ cm}$ اور $\overline{AC}$، $\overline{BD}$ کا ڈیڑھ گنا ہے دونوں وتر نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔ $\overline{OC}$ اور $\overline{OD}$ کی مقدار معلوم کریں۔



حل: $m\overline{OD} = \frac{1}{2}\, m\overline{BD} = \frac{1}{2}(4\text{ cm}) = 2\text{ cm}$

$\Rightarrow m\overline{OD} = 2\text{ cm}$

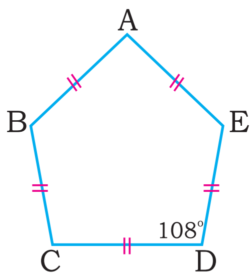
مزید برآں $m\overline{AC} = \frac{3}{2}\, m\overline{BD} = \frac{3}{2} \times 4 = 6\text{ cm}$

$\therefore\ m\overline{OC} = \frac{1}{2}\, m\overline{AC} \Rightarrow m\overline{OC} = \frac{1}{2}(6) = 3\text{ cm}$

7.2.3 منظّم مخمس، مسدس اور مثمن کی تعریف

ایسا کثیر الاضلاع جس کے تمام ضلعے آپس میں متماثل (مقدار میں مساوی) ہوں اسے منظّم کثیر الاضلاع کہتے ہیں۔ کسی کثیر الاضلاع کے تمام اندرونی زاویے بھی آپس میں متماثل ہوتے ہیں۔

منظّم مخمس



ایسا مخمس (پانچ اضلاع والی بند شکل) جس کے تمام اضلاع متماثل ہوں منظّم مخمس کہلاتا ہے۔

ہر منظّم مخمس کے اندرونی زاویے بھی متماثل ہوتے ہیں۔

کسی بھی منظّم کثیر الاضلاع کے تمام زاویوں کا مجموعہ ہے

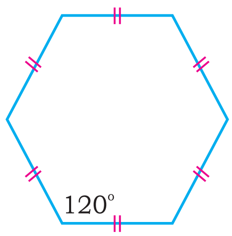
$$S = (2n - 4)\ rt\ \angle s$$

$$S = 2(5) - 4 = (10 - 4)\ rt\ \angle s = 6rt\ \angle s = 6 \times 90 = 540^{\circ}$$

اس لئے ہر زاویہ

$$\angle = \frac{540}{5} = 108^{\circ}$$

منظّم مسدس



ایسا مسدس (چھ اضلاع والی بند شکل) جس کے تمام اضلاع متماثل ہوں منظّم مسدس کہلاتا ہے۔

ہر منظّم مسدس میں اندرونی زاویے بھی متماثل ہوتے ہیں۔

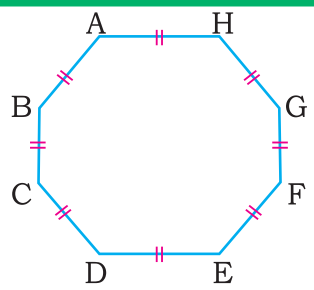
کسی بھی منظّم مسدس کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ

$$S = (2(6) - 4)\ rt\ \angle s$$

$$= (12 - 4)\ rt\ \angle s = 8rt\ \angle s = 8 \times 90 = 720^{\circ}$$

منظّم مسدس کا ہر زاویہ

$$\frac{720^{\circ}}{6} = 120^{\circ}$$



منظّم مثمن

ایسا مثمن (آٹھ اضلاع والی بند شکل) جس کے تمام اضلاع آپس میں متماثل ہوں، منظّم مثمن کہلاتا ہے۔

ہر منظّم مثمن کے اندرونی زاویے بھی آپس میں متماثل ہوتے ہیں۔

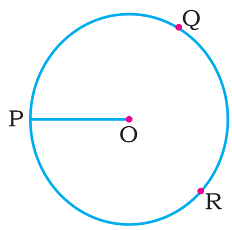
کسی بھی منظّم مثمن کے تمام زاویوں کا مجموعہ $S = (2n-4)\ rt \angle s$

$$S = (2(8)-4)\ rt\angle s = 16-4 = 12 rt\angle s = 12\times 90^\circ = 1080^\circ$$

اس لئے منظّم مثمن کا ہر زاویہ $= \dfrac{1080^\circ}{8} = 135^\circ$

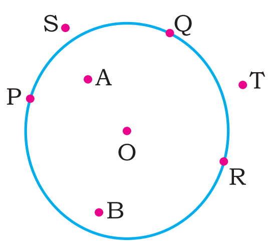
7.3 دائرہ

دائرہ (Circle) مستوی (Plane) کے ایسے نقاط کا سیٹ ہے جو مستوی کے مقررہ نقطے جسے مرکز کہتے ہیں ہم فاصلہ ہوتے ہیں اس شکل میں PQR ایک دائرہ ہے اس کا مرکز O ہے۔ دائرہ کو اس کے کسی بھی تین نقاط سے ظاہر کیا جاتا ہے یا پھر ہم صرف O (دائرہ ⊙) لکھتے ہیں۔ مرکز اور دائرہ کے کسی نقطے کو ملانے والے قطعہ خط کو رداسی قطعہ (radial segment) کہتے ہیں



اور دائرے پر کسی نقطے سے مرکز تک کے فاصلے کو رداس (radius) کہتے ہیں اس شکل میں $\overline{OP}$ رداسی قطعہ ہے جبکہ $m\overline{OP}$ اس کا رداس ہے۔

جب ہم کسی مستوی پر کوئی دائرہ بناتے ہیں تو اس مستوی کے تمام نقاط کا سیٹ تین تحتی سیٹوں میں تقسیم ہو جاتا ہے مثلاً:

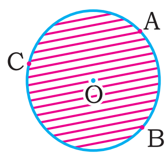


(1) دائرہ کے نقاط کا سیٹ: یہ سیٹ اُن نقاط پر مشتمل ہوتا ہے جن کا فاصلہ مرکز سے رداس کے برابر ہوتا ہے نقاط P,Q,R اس سیٹ کے ارکان ہیں۔ نقاط کے اس سیٹ کو دائرہ کا محیط بھی کہتے ہیں۔

(2) دائرہ کے اندرونہ کا سیٹ: یہ سیٹ مستوی کے ان نقاط پر مشتمل ہوتا ہے جس کا فاصلہ مرکز سے رداس سے کم ہوتا ہے نقاط کے اس سیٹ کو دائرہ کا اندرونہ کہتے ہیں نقاط A اور B دائرہ کے اندرونہ میں واقع ہیں کیونکہ $m\overline{OA} < m\ \overline{OP}$ اور $m\ \overline{OB} < m\ \overline{OP}$

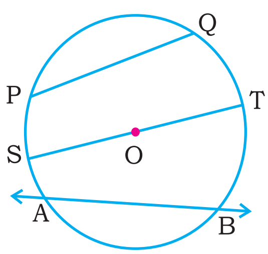
(3) دائرہ کے بیرونہ کا سیٹ: یہ سیٹ مستوی کے ان نقاط پر مشتمل ہوتا ہے جن کا مرکز سے فاصلہ رداس سے زیادہ ہوتا ہے۔ نقاط کے اس سیٹ کو دائرے کا بیرونہ کہتے ہیں۔ نقاط S اور T دائرے کے بیرونہ میں ہیں کیونکہ ($m\,\overline{OQ}$ یا $m\,\overline{OR}$ جو کہ رداس ہیں) $m\,\overline{OS} > m\,\overline{OP}$

اسی طرح $m\,\overline{OT} > m\,\overline{OP}$



دائرے کے نقاط اور دائرے کے اندرونہ کے نقاط کا اتصال (union) دائروی علاقہ کہلاتا ہے۔

7.3.2 دائرہ سے متعلق چند اصطلاحات کا بیان



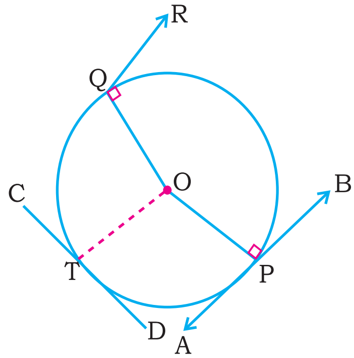
قوس: دائرے (یعنی دائروی محیط) کے کسی حصے یا جُز کو دائرے کا قوس کہتے ہیں۔ قوس دو طرح کے ہوتے ہیں۔ قوس صغیرہ اور قوس کبیرہ۔ قوس صغیرہ نصف دائرے سے چھوٹا جبکہ قوس کبیرہ نصف دائرے سے بڑا ہوتا ہے، اوپر والی شکل میں $\widehat{AB}$ قوس صغیرہ اور $\widehat{ACB}$ قوس کبیرہ ہے۔

وتر: دائرے کے کسی دو نقاط کو ملانے والے قطعہ خط کو وتر (chord) کہتے ہیں اور مرکز سے گزرنے والی وتر کو قطر (Diameter) کہتے ہیں۔

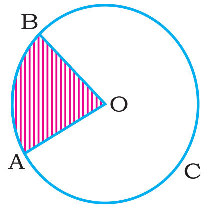
رداس: 2 =قطر

اس شکل میں $\overline{PQ}$ ایک وتر ہے، $\overline{ST}$ بھی ایک وتر ہے لیکن چونکہ $\overline{ST}$ مرکز سے گزرنے والا وتر ہے اس لئے اسے قطر $\overline{ST}$ کہتے ہیں۔

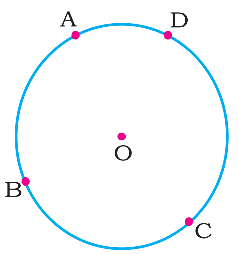
قاطع: ایک ایسا خط جو دائرے کے کسی دو نقاط سے گزرے اسے قاطع (secant) کہتے ہیں مذکورہ بالا شکل میں $\overleftrightarrow{AB}$ ایک قاطع ہے کیونکہ یہ دائرے کو دو مقام (نقاط) پر قطع کرتا ہے۔ یاد رہے کہ $\overline{AB}$ (جو کہ $\overleftrightarrow{AB}$ کا تحتی سیٹ ہے) ایک وتر ہے جبکہ $\overleftrightarrow{AB}$ قاطع ہے۔



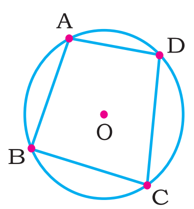
مماس: اگر کوئی خط (قطعہ خط یا شعاع) کسی دائرے کو ایک اور صرف ایک نقطہ پر قطع کرے تو اسے مماس (Tangent) کہتے ہیں یعنی مماس ایسا خط (قطعۂ خط یا شعاع) ہے جو دائرے کو مس کرتا ہوا گزرتا ہے۔ سامنے دی ہوئی شکل میں $\overleftrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{QR}$ اور $\overline{CD}$ نقاط P، Q اور T پر بالترتیب دائرہ ⊙ کے مماس ہیں۔ نقطہ P (Q یا T) کو نقطہ مماس (Point of Tangency) کہتے ہیں۔
رداسی قطعہ ہمیشہ مماس پر نقطہ مماس کے مقام پر عمود ہوتا ہے۔ مثلاً
$\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OP}$، $\overrightarrow{QR} \perp \overline{OQ}$ اور $\overline{CD} \perp \overline{OT}$۔



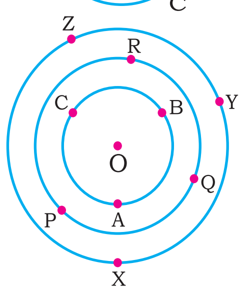
قطاع دائرہ: دائروی علاقہ کا حصہ جو کسی قوس اور دو رداسی قطعات سے گھرا ہوا ہو قطاع دائرہ (Sector of circle) کہلاتا ہے
یہاں دی ہوئی شکل میں سایہ دار جگہ قطاع دائرہ ہے یہ دو رداسی قطعات $\overline{OA}$ ، $\overline{OB}$ اور قوس $\widehat{AB}$ سے گھرا ہوا ہے۔ اس کے علاوہ غیر سایہ دار علاقہ بھی قطاع دائرہ ہے۔ یہ دو رداسی قطعات $\overline{OA}$ ، $\overline{OB}$ اور قوس کبیرہ $\widehat{ACB}$ سے گھرا ہوا ہے۔



ہم دائروی نقاط: چار (یا زائد) نقاط جن سے ایک دائرہ گزرتا ہو انہیں ہم دائروی نقاط (یا ہم دائرہ نقاط) کہتے ہیں سامنے شکل میں A, B, C اور D ہم دائرہ نقاط ہیں کیونکہ یہ تمام نقاط ایک دائرہ پر واقعہ ہیں مستطیل اور مربع کے راسی نقاط ہمیشہ ہم دائرہ ہوتے ہیں کیونکہ ان کے متقابلہ زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔ اس شکل میں A, B, C اور D ہم دائرہ ہیں اس لئے



$$m\angle A + m\angle C = 180^\circ \text{ and}$$
$$m\angle B + m\angle D = 180^\circ.$$



ہم مرکز دائرہ: دو یا (زائد) دائرے جن کا مرکز ایک ہی نقطہ مگر رداس مختلف ہوں ہم مرکز دائرہ کہلاتے ہیں۔
سامنے شکل میں ⊙ABC، ⊙ PQR اور ⊙ XYZ ہم مرکز دائرے ہیں۔

مشق 7.2

1. مندرجہ ذیل بیانات میں سے "غلط" بیانات کی نشان دہی کیجئے۔
ایک محتاط انتخاب خوش آئندہ ہوگا۔

(i) مستطیل ایک متوازی الاضلاع ہے۔

(ii) مربع نہ صرف متوازی الاضلاع ہے بلکہ مستطیل بھی ہے۔

(iii) کسی متوازی الاضلاع میں خطِ قطع کے ایک ہی جانب کے اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

(iv) اگر کوئی خط قاطع دو ہم مستوی خطوط کو قطع کرے تو متبادلہ اندرونی زاویے ہمیشہ متماثل نہیں ہوتے۔

(v) اگر خطِ قاطع کے ایک ہی جانب واقع اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوں تو خط قاطع ایسے دو ہم مستوی خطوط کو قطع کرتا ہے جو آپس میں ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے۔

(vi) اگر کسی ذوالربعتہ الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر تنصیف کریں تو وہ ذوار بعتہ الاضلاع متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔

(vii) مستطیل کے وتر ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر تنصیف نہیں کرتے۔

(viii) کسی متوازی الاضلاع میں اگر ایک وتر کھینچا جائے تو زاویہ متبادلہ کے دو جوڑے وجود میں آئیں گے اور ہر جوڑے کے زاویے آپس میں متماثل ہوں گے۔

(ix) مربع ایک منظّم ذوالربعتہ الاضلاع ہے۔

(x) اگر دو خطوط جس قدر بھی بڑھایا جائے آپس میں ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے پھر بھی وہ متوازی نہیں کہلاتے اور بعض اوقات متوازی ہو بھی سکتے ہیں۔

2. PQRS $//^m$ کا احاطہ 18 cm ہے اگر ایک ضلع دوسرے سے دوگنا ہو تو ضلع کی مقدار بتائیں۔

3. ABCD $//^m$ پس متقابلہ زاویوں کے ایک جوڑے کا مجموعہ 130° ہے تو متوازی الاضلاع کے ہر زاویے کی مقدار بتائیے۔

4. WXYZ $//^m$ میں اگر $\angle X$ زاویہ $\angle W$ کی بہ نسبت دوگنا ہو تو ہر زاویہ کی مقدار الگ الگ بتائیں۔

5. ABCD $m//$ میں وتر $\overline{AC}$، وتر $\overline{BD}$ کا دوگنا ہے۔ اگر دونوں وتروں کی مقدار کا مجموعہ 9 سم ہو تو ہر وتر کی لمبائی معلوم کریں۔ اگر وتر نقطہ P پر تنصیف کریں تو $m\ \overline{PA} : m\ \overline{PB}$ معلوم کیجئے۔

6. مندرجہ ذیل اصطلاحات کی تعریف کیجئے اور شکل بنا کر ہر ایک کی تشریح کیجئے۔

(i) متوازی الاضلاع **(ii)** منظّم مخمس **(iii)** منظّم مثمن

(iv) وتر **(v)** قاطع **(vi)** قطاع دائرہ **(vii)** مماس

(viii) ہم دائرہ نقاط **(ix)** ہم مرکز دائرے **(x)** قطر

7. ایک دائرہ (جس کا مرکز O ہے) کا قطر 6 سم ہے اسی مستوی میں تین نقاط P، Q اور R اس طرح واقع ہیں کہ ان کا فاصلہ مرکز O سے بالترتیب 2.5 سم، 4 سم اور 3 سم ہے تو تینوں نقاط کا محل وقوع دائرہ کی مناسبت سے بتائیے۔

8. مندرجہ ذیل بیانات میں سے "درست" بیان کی نشان دہی کیجئے اور غلط بیانات کو درست کر کے لکھئے۔

(i) ایک ایسا قطر جو دائرہ کے مرکز سے گزرتا ہو اسے وتر کہتے ہیں۔

(ii) دائروی علاقہ کا ایک ایسا حصہ یا جز جو دو رداسی قطعات اور ایک قطاع دائرہ سے گھرا ہوا ہو قوس کہلاتا ہے۔

(iii) قاطع ایک ایسا قطعہ خط ہے جو دائرہ کو کسی دو نقاط پر قطع کرتا ہے۔

(iv) اگر کسی نقطہ کا دائرے سے فاصلہ دائرے کے رداس سے زیادہ ہو تو نقطہ دائرہ کے بیرونے میں واقع ہوتا ہے۔

(v) تین یا چار نقاط کو ہم دائرہ نقاط کہتے ہیں اگر ان تمام نقاط سے ایک دائرہ گزر سکتا ہے۔

(vi) کسی بھی متوازی الاضلاع کے راسی نقاط ہم دائرہ ہوتے ہیں۔

(vii) اگر چار نقاط ہم دائرہ ہوں تو ان سے بننے والے ذوار بعتہ الاضلاع کے متقابلہ زاویے کمپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

(viii) کسی دائرہ کا قوس اسی دائرے کا تحتی سیٹ نہیں ہوتا۔

(ix) کسی دائرہ کا رداس اس کے قطر کا دوگنا ہوتا ہے۔

(x) نقطہ مماس سے گزرنے والا خط جو کہ مماس کے متوازی ہو دائرہ کے مرکز سے گزرتا ہے۔

جائزہ مشق 7

1. ذیل میں دی گئی خالی جگہیں مناسب الفاظ میں پُر کیجیے۔

(i) دو ________ خطوط اگر ایک دوسرے کو قطع نہ کریں تو متوازی خطوط کہلاتے ہیں۔

(ii) دو خطوط جو کسی ایک ہی خط کے متوازی ہو آپس میں ________ ہوتے ہیں۔

(iii) کسی مثلث کے ایک ضلع کے ________ سے گزرنے والا خط جو دوسرے ضلع کے متوازی ہو ________ ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔

(iv) اگر ایک خط قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہے تو ان سے وجود میں آنے والے زاویوں کے جوڑے یہ ہوتے ہیں (الف) تناظرہ زاویے (ب) ________ اندرونی زاویے اور ایسے ________ زاویے جو خط ________ کے ایک ہی ________ ہوں۔

(v) جب ایک خط قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرے تو ________ اور ________ زاویوں کے جوڑے متماثل ہوتے ہیں اور ________ زاویوں کے جوڑے جو خط قاطع کے ایک ہی ________ ہوں ________ ہوتے ہیں۔

(vi) کثیر الاضلاع کسی ________ میں واقع ایک ایسی بند شکل ہے جو ________ یا ________ اضلاع سے گھری ہوتی ہے۔

(vii) متوازی الاضلاع ایک ایسا ذو اربعتہ الاضلاع ہے جس کے متقابلہ اضلاع ________ اور ________ ہوتے ہیں۔

(viii) ایسا ذو اربعتہ الاضلاع جس کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کریں ________ ہوتا ہے۔

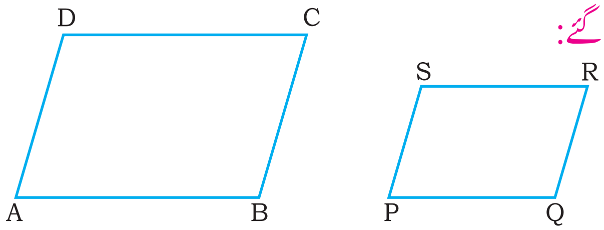
(ix) کسی متوازی الاضلاع کے ہر ضلع کے سرے پر بننے والے ________ زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں

(x) ایسا کثیر الاضلاع جس کے تمام اضلاع متماثل ہوں ________ کہلاتے ہیں۔

(xi) ________ نقاط کا ایسا سیٹ ہے جس کے تمام نقاط ایک مقررہ مرکزی نقطے سے ہم فاصلہ ہوتے ہیں۔

(xii) دائرے کے کسی دو نقاط کو ملانے والے قطعہ خط کو ________ کہتے ہیں۔

2. ذیل میں دیئے گئے:

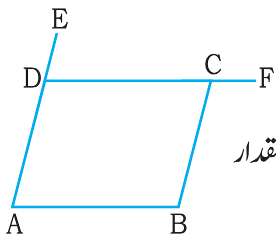


متوازی الاضلاع میں $\overline{PS} // \overline{AD}$ اور $\overline{RS} // \overline{CD}$، $m\ \overline{PS} = 3$ cm, $m\ \overline{RS} = 4$ cm اور

$m\angle P = 70^\circ$ آپ $//^m$ PQRS کے باقی زاویوں کی مقدار بتائیں۔ اگر $//^m$ ABCD کے

اضلاع $//^m$ PQRS کے اضلاع کا ڈیڑھ گنا ہوں تو $//^m$ ABCD کے اضلاع اور زاویوں کی مقدار

بتائیں۔ کیا $m\angle A = \frac{3}{2}\ m\angle P$؟



3. $//^m$ ABCD میں ضلع $\overline{AD}$ کو E تک بڑھایا گیا ہے اور ضلع $\overline{DC}$ کو F تک بڑھایا گیا ہے اور $m\angle CDE = 60^\circ$ تو باقی زاویوں کی مقدار بتائیں اور ذیل میں دیئے گئے زاویوں کے تمام جوڑے بتائیں:

(i) متناظرہ زاویے　　**(ii)** متبادلہ زاویے　　**(iii)** سپلیمنٹری زاویوں کے تمام جوڑے

4. مندرجہ ذیل اصطلاحات کی تعریف کیجیے۔

(i) خطوط متوازی　　**(ii)** متوازی الاضلاع　　**(iii)** قوس　　**(iv)** قاطع

(v) مماس　　**(vi)** ہم دائرہ نقاط　　**(vii)** ہم مرکز دائرے

5. مندرجہ ذیل کثیر الاضلاع کی تعریف کیجیے اور اُن کے اندرونی زاویے کی مقدار بتائیے۔

(الف) منظم مخمس　　(ب) منظم مسدس　　(ج) منظم مثمن

6. مندرجہ ذیل سوالات کے جواب دیجیے۔

(i) کسی دائرہ کے رداس کی لمبائی 4 سم ہے۔ اس کے قطر کی لمبائی بتائیے۔

(ii) تین ہم مرکز دائرہ کا مرکز O ہے۔ ان دائروں کے قطر بالترتیب 5 سم، 7 سم اور 10 سم ہیں ہر دائرہ کا رداس بتائیے۔

(iii) کتنے دائرے گزر سکتے ہیں (الف) تین غیر ہم نقاط سے؟ (ب) چار ہم دائرہ نقاط سے؟

خلاصہ

- دو ہم مستوی خطوط جو ایک دوسرے کو قطع نہ کریں خطوط متوازی کہلاتے ہیں۔
- ایسے دو خطوط جو کسی ایک خط کے متوازی ہوں آپس میں متوازی ہوتے ہیں۔
- اگر تین متوازی خطوط ایک خط قاطع پر متماثل قطعات قطع کریں تو وہ کسی دوسرے خطِ قاطع پر بھی متماثل قطعات قطع کریں گے۔
- مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے گزرنے والا خط جو دوسرے ضلع کے متوازی ہو تیسرے ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔
- جب ایک خطِ قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہے تو:

  (i) متناظرہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

  (ii) متبادلہ اندرونی زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

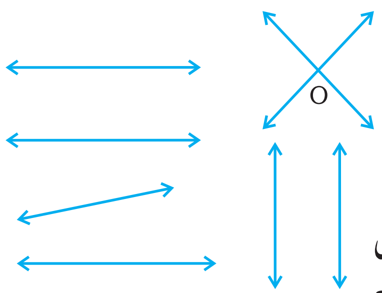
  (iii) خطِ قاطع کے ایک ہی جانب والے اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔
- متوازی الاضلاع ایک ایسا ذو اربعۃ الاضلاع ہے جس کے متقابلہ ضلعے متوازی ہوتے ہیں۔
- کثیر الاضلاع ایک بند مستوی شکل ہے جو تین یا زائد قطعات سے گھرا ہوتا ہے۔
- منظّم کثیر الاضلاع کے تمام اضلاع اور زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
- دائرہ کسی مستوی میں نقاط کا ایسا سیٹ ہے جن کا فاصلہ ایک مقررہ نقطہ سے باہم مساوی ہوتا ہے۔
- وتر ایک قطعہ خط ہے جس کے سرے دائرے پر ہوتے ہیں۔
- قاطع ایک خط ہے جو دائرہ کو دو نقاط پر قطع کرتا ہے۔
- قطاع دائرہ، دائروی علاقے کا وہ حصہ ہے جو دو رداسی قطعات اور ایک قوس سے گھرا ہوا ہو۔
- چار یا زائد نقاط جو کسی ایک دائرہ پر واقع ہوں ہم دائرہ نقاط کہلاتے ہیں۔
- دو یا زائد دائرے جن کا مرکز مشترک ہو مگر ان کے رداس مختلف ہوں، ہم مرکز دائرے کہلاتے ہیں۔
- کسی خط (شعاع یا قطعہ خط) کو مماس کہتے ہیں اگر وہ دائرے کو ایک اور صرف ایک نقطہ پر قطع کرے۔

یونٹ 8

عملی جیومیٹری

8.1 چوکور کی تشکیل

8.1.1 متلاقی (غیر متوازی) خطوط کی تعریف و توضیح نیز متلاقی خطوط کو بڑھائے بغیر درمیانی زاویہ کی مقدار معلوم کرنا

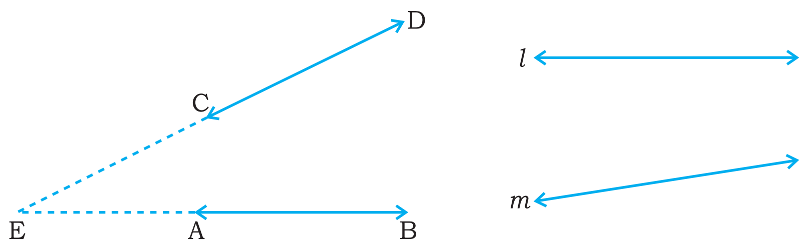


جب ہم کسی مستوی میں دو خطوط کھینچتے ہیں تو وہ خطوط

(i) کسی نقطہ پر متقاطع ہونگے

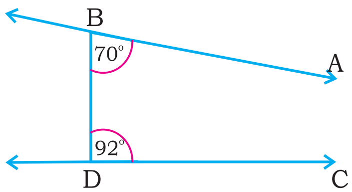
یا (ii) متوازی ہوں گے

یا (iii) نہ ہی متقاطع اور نہ ہی متوازی بلکہ ایسی حالت میں کہ جب بڑھائے جائیں تو ایک دوسرے کو قطع کریں۔ ایسے خطوط کو متلاقی خطوط کہتے ہیں۔



تعریف: کسی مستوی میں دو ایسے خطوط (یا قطعات) جو کہ نہ ہی متقاطع ہوں اور نہ ہی متوازی بلکہ اس حالت میں ہوں کہ جب بڑھائے جائیں تو قطع کریں تو انہیں متلاقی خطوط (Converging lines) کہتے ہیں۔
مذکورہ بالا شکل میں $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ متلاقی خطوط ہیں کیونکہ جب $\overrightarrow{BA}$ اور $\overrightarrow{DC}$ کو بڑھایا جائے تو وہ کسی نقطہ (بالفرض E) پر قطع کریں گی اور $\angle AEC$ بنے گا۔ اس کیفیت کو نقطہ دار خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔
اسی طرح خطوط l اور m متلاقی جانب بڑھائے جانے پر قطع کریں گی۔ یاد رہے کہ متلاقی خطوط ایک جانب متلاقی (نزدیک سے نزدیک تر) ہوتے جاتے ہیں، جبکہ دوسری جانب انحرافی (diverging) یعنی دور سے دور تر ہوتے جاتے ہیں۔ مذکورہ بالا خطوط میں A اور C متلاقی جانب جبکہ نقاط B اور D انحرافی جانب ہیں۔

دو متلاقی خطوط بڑھائے بغیر درمیانی زاویہ کی مقدار معلوم کرنا



معلوم: $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ دو متلاقی خطوط ہیں۔

مطلوب: $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ کو بڑھائے بغیر درمیانی زاویہ معلوم کرنا۔

مراحل تشکیل:

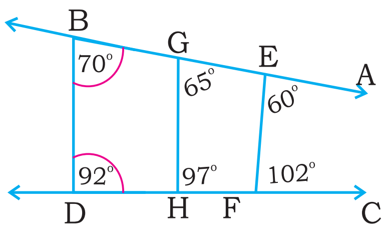
1. انحرافی جانب والے نقاط B اور D ملائیں۔
2. زاویہ پیما کی مدد سے $\angle ABD$ کی پیمائش کریں۔

فرض کریں $m\angle ABD = 70^\circ$

3. اسی طرح $\angle CDB$ کی پیمائش کریں۔

فرض کریں $m\angle CDB = 92^\circ$

4. پس مطلوبہ زاویہ (بالفرض x) کی مقدار ہے۔

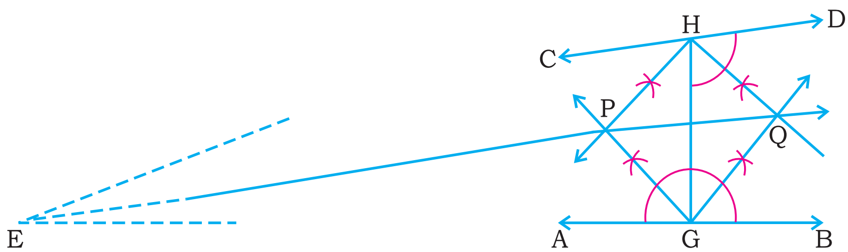


$$\begin{aligned} m\angle x &= 180^\circ - (m\angle AGH + m\angle AEF) \\ &= 180^\circ - (65^\circ + 97^\circ) \\ &= 180^\circ - 162^\circ \\ &= 18^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\angle x &= 180^\circ - (m\angle ABD + m\angle CDB) \\ &= 180^\circ - (70^\circ + 92^\circ) \\ &= 180^\circ - 162^\circ \\ &= 18^\circ \end{aligned}$$

نوٹ: انحرافی جانب جس طرح بھی دو نقاط ملائیں دونوں زاویوں کا مجموعہ یکساں آئے گا ملاحظہ ہو $\overline{EF}$ اور $\overline{GH}$ ۔

8.1.2 متلاقی خطوط کو بڑھائے بغیر ان کے درمیانی زاویہ کی تنصیف



معلوم: $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ دو متلاقی خطوط ہیں۔

مطلوب: $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ کو بڑھائے بغیر ان کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرنا۔

مراحلِ تشکیل:

1. کسی مناسب جگہ پر ایک خطِ قاطع کھینچیے جو $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ کو بالترتیب G اور H پر قطع کرے۔
2. $\angle AGH$ اور $\angle CHG$ کے ناصف کھینچیے جو ایک دوسرے کو نقطہ P پر قطع کرتے ہیں۔
3. $\angle BGH$ اور $\angle DHG$ کے ناصف کھینچیے جو ایک دوسرے کو نقطہ Q پر قطع کرتے ہیں۔
4. $\overline{QP}$ کھینچیں اور کسی نقطہ E تک بڑھائیں۔ پس $\overrightarrow{QP}$ مطلوبہ ناصف ہے جو درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے۔ فہوالمطلوب

8.1.3 مربع تشکیل کرنا جبکہ

(i) اس کا وتر معلوم ہو۔

(ii) وتر اور ایک ضلع کا فرق معلوم ہو۔

(iii) وتر اور ایک ضلع کا مجموعہ معلوم ہو۔

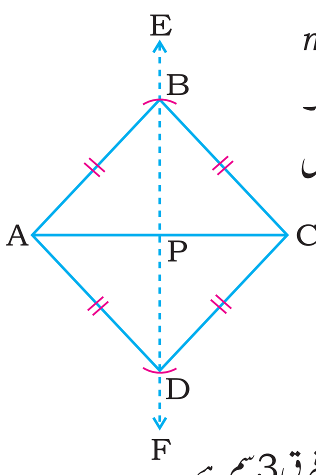
(i) مربع تشکیل کرنا جبکہ اس کا وتر معلوم ہو۔

مثال 1. ایک مربع ABCD بنائیے جس کے وتر کی لمبائی 6 سم ہے۔

معلوم: مربع ABCD میں $m\,\overline{AC} = 6\text{ cm}$

مطلوب: مربع ABCD دی ہوئی معلومات کے مطابق بنانا ہے۔

مراحلِ تشکیل:

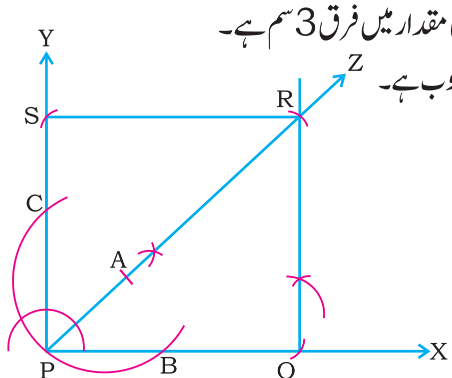


1. قطعۂ خط AC کھینچیے جس کی لمبائی 6 سم ہو یعنی $m\,\overline{AC} = 6\text{ cm}$
2. $\overline{AC}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{EF}$ کھینچیے جو $\overline{AC}$ کو نقطہ P پر قطع کرتا ہے۔
3. نقطہ P کو مرکز لے کر $m\,\overline{PA}$ کے رداس سے $\overline{AC}$ کے دونوں جانب قوس بنائیے جو $\overleftrightarrow{EF}$ کو نقاط B اور D پر قطع کرے۔
4. $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$ اور $\overline{DA}$ کھینچیے

پس ABCD مطلوبہ مربع ہے۔ فہوالمطلوب

(ii) مربع بنانا جبکہ اس کے وتر اور ایک ضلع کا فرق معلوم ہو۔

مثال 2. مربع PQRS بنائیے جس کے وتر اور ایک ضلع کی لمبائی میں فرق 3 سم ہے۔



معلوم: مربع PQRS میں اس کے وتر اور ایک ضلع کی مقدار میں فرق 3 سم ہے۔

مطلوب: دی ہوئی معلومات کے مطابق مربع PQRS بنانا مطلوب ہے۔

مراحلِ تشکیل:

1. شعاع $\overrightarrow{PX}$ کھینچیے۔
2. نقطہ P پر $\overrightarrow{PY} \perp \overrightarrow{PX}$ کھینچیے۔
3. $\angle XPY$ کا ناصف $\overrightarrow{PZ}$ کھینچیے۔
4. $\overrightarrow{PZ}$ میں سے $m\,\overline{PA}$ مساوی 3 سم قطع کیجیے۔
5. نقطہ A بطور مرکز اور رداس 3 سم لیکر ایک قوس لگائیے جو $\overrightarrow{PX}$ کو نقطہ B پر اور $\overrightarrow{PY}$ کو نقطہ C پر قطع کرے۔
6. نقاط B اور C کو مرکز لیکر اسی رداس سے قوس لگائیے جو $\overrightarrow{PX}$ اور $\overrightarrow{PY}$ کو بالترتیب نقاط Q اور S پر قطع کرتے ہیں۔
7. نقاط Q اور S بطور مرکز اور رداس $m\,\overline{PQ}$ (یا $m\,\overline{PS}$) لیکر قوس لگائیے جو $\overline{PZ}$ کو نقطہ R پر قطع کریں۔
8. $\overline{QR}$ اور $\overline{SR}$ کھینچیے، پس PQRS مطلوبہ مربع ہے۔ فہوالمطلوب

نوٹ: وتر $\overline{PR}$ میں $m\,\overline{AR} = m\,\overline{PQ}$ (یا $m\,\overline{PS}$) یعنی مربع کے ضلع کے مساوی ہے اور $m\,\overline{AP}$ کی لمبائی 3 سم ہے جو کہ وتر اور ضلع کا فرق ہے۔

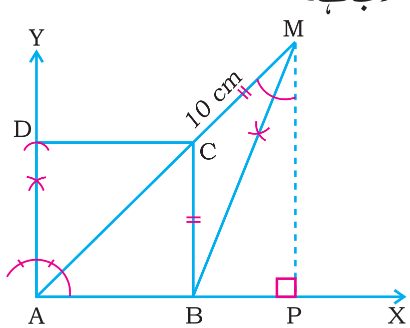
[مربع کی تشکیل مکمل ہونے پر اس کے وتر اور ضلعوں کی پیمائش کر کے تصدیق کیجیے]

(iii) مربع تشکیل کرنا جبکہ اس کے وتر اور ایک ضلع کا مجموعہ معلوم ہو

مثال: مربع ABCD بنائیں جبکہ اس کے وتر اور ایک ضلع کی مقداروں کا مجموعہ 10 سم ہے۔

معلوم: مربع ABCD میں وتر اور اس کے ایک ضلع کا مجموعہ 10 سم ہے۔

مطلوب: دی ہوئی معلومات کے مطابق مربع ABCD بنانا مطلوب ہے۔



مراحلِ تشکیل

1. ایک شعاع $\overrightarrow{AX}$ کھینچیے۔
2. $\overrightarrow{AY} \perp \overrightarrow{AX}$ بنائیے۔
3. $\angle XAY$ کا ناصف $\overrightarrow{AM}$ کھینچیے اور $\overline{AM}$ کو 10 سم بنائیے۔
4. $\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{AX}$ کھینچیے۔
5. $\angle AMP$ کا ناصف $\overline{MB}$ کھینچیے جو $\overrightarrow{AP}$ کو نقطہ B پر قطع کرے۔

6. نقطہ B سے گزرتا ہوا خط $\overline{BC}$ متوازی $\overline{MP}$ کھینچیے جو $\overline{AM}$ کو نقطہ C پر قطع کرے۔
7. $\overrightarrow{AY}$ میں سے $\overline{AD}$ متماثل $\overline{BC}$ بنائیں۔
8. C کو D سے ملائیں اور $\overline{CD}$ بنائیں۔

اب چوکور ABCD مطلوبہ مربع ہے۔ فہوالمطلوب

نوٹ: 10 سم (جو کہ وتر اور ایک ضلع کا مجموعہ ہے) ان کو دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔
(i) وتر $\overline{AC}$ اور (ii) $m\,\overline{MC} = m\,\overline{BC}$ (مربع کا ضلع)

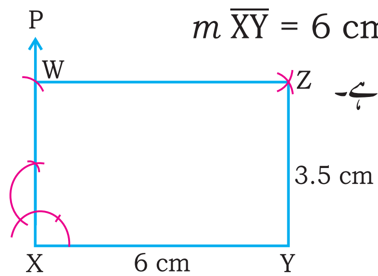
8.1.4 مستطیل کی تشکیل

(i) مستطیل کی تشکیل دیں، جبکہ دو اضلاع معلوم ہوں

مثال: مستطیل WXYZ بنائیے جس میں $m\,\overline{XY} = 6$ cm اور $m\,\overline{YZ} = 3.5$ cm

معلوم: مستطیل WXYZ میں $m\,\overline{XY} = 6$ cm, $m\,\overline{YZ} = 3.5$ cm

مطلوب: دی ہوئی معلومات کے مطابق مستطیل WXYZ بنانا مطلوب ہے۔



مراحل تشکیل:

1. قطعہ خط XY، 6 سم لمبا بنائیے۔
2. نقطہ X پر $\overrightarrow{XP} \perp \overline{XY}$ بنائیے۔
3. نقطہ X کو مرکز لے کر 3.5 سم رداس سے ایک قوس لگائیں جو $\overrightarrow{XP}$ کو نقطہ W پر قطع کرے۔
4. نقطہ W کو مرکز لے کر رداس $m\,\overline{XY}$ سے ایک قوس بنائیں۔
5. نقطہ Y کو مرکز لے کر $m\,\overline{XW}$ رداس سے ایک دوسرا قوس بنائیں جو پہلے قوس کو نقطہ Z پر قطع کرے۔
6. $\overline{WZ}$ اور $\overline{YZ}$ کھینچیں۔

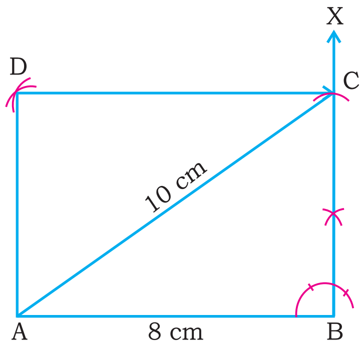
پس WXYZ مطلوبہ مستطیل ہے۔ فہوالمطلوب

(ii) مستطیل کی تشکیل دیں، جبکہ وتر اور ایک ضلع معلوم ہو:

مثال: مستطیل ABCD بنائیں جس میں $m\,\overline{AC} = 10$ cm اور $m\,\overline{AB} = 8$ cm

معلوم: مستطیل ABCD میں $m\,\overline{AB} = 8$ cm اور $m\,\overline{AC} = 10$ cm

مطلوب: دی ہوئی معلومات کے مطابق مستطیل ABCD بنانا مطلوب ہے۔



مراحل تشکیل:

1. قطعہ خط AB، 8 سم لمبا کھینچئے۔
2. نقطہ B پر $\overline{AB} \perp \overrightarrow{BX}$ بنائیں۔
3. نقطہ A کو مرکز لے کر اور رداس 10 # ایک قوس لگائیں جو $\overrightarrow{BX}$ کو نقطہ C پر قطع کرے۔
4. نقطہ A کو C سے ملائیں اور $\overline{AC}$ بنائیں۔
5. نقطہ A کو مرکز لے کر اور رداس $m\,\overline{BC}$ سے ایک قوس لگائیں۔
6. نقطہ C کو مرکز لے کر اور رداس $m\,\overline{AB}$ سے ایک دوسرا قوس لگائیں جو پہلے قوس کو نقطہ D پر قطع کرے۔
7. $\overline{AD}$ اور $\overline{CD}$ کھینچیے۔

پس مستطیل ABCD مطلوبہ مستطیل ہے۔ فہوالمطلوب

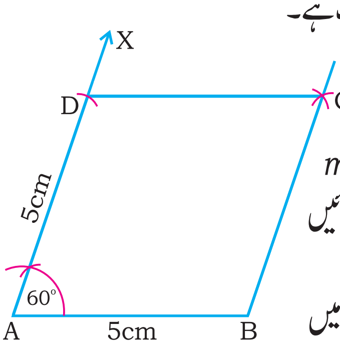
8.1.5 معیّن (Rhombus) کی تشکیل

(i) معیّن کی تشکیل دیں، جبکہ ایک ضلع اور قاعدہ کا ایک زاویہ معلوم ہو۔

مثال: معیّن ABCD بنائیں جس کا ایک ضلع 5 سم اور قاعدہ پر ایک زاویہ 60° ہے۔

معلوم: معیّن ABCD میں $m\,\overline{AB} = 5$ cm اور $m\angle A = 60^\circ$

مطلوب: دی ہوئی معلومات کے مطابق معین ABCD بنانا مطلوب ہے۔



مراحل تشکیل:

1. قطعہ خط AB، 5 سم لمبا کھینچیں۔
2. نقطہ A پر $\angle BAX$ اس طرح بنائیں کہ $m\angle BAX = 60^\circ$
3. نقطہ A کو مرکز لے کر اور رداس $m\,\overline{AB}$ کے ساتھ ایک قوس لگائیں جو $\overrightarrow{AX}$ کو نقطہ D پر قطع کرے۔
4. نقاط B اور D کو مرکز لیکر اُسی رداس سے قوس لگائیں جو آپس میں نقطہ C پر قطع کریں۔
5. قطعات $\overline{BC}$ اور $\overline{DC}$ کھینچیں۔

پس ABCD مطلوبہ معین ہے۔ فہوالمطلوب

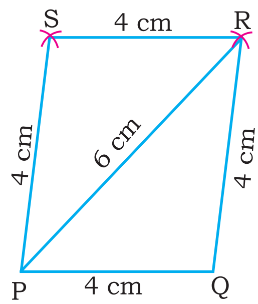
(ii) معیّن کی تشکیل دیں، جبکہ ایک ضلع اور وتر معلوم ہو۔

مثال: معین PQRS بنائیں جبکہ $m\,\overline{PQ} = 4$ cm اور $m\,\overline{PR} = 6$ cm

معلوم: معیّن PQRS میں $m\overline{PQ} = 4\text{ cm}$ اور $m\overline{PR} = 6\text{ cm}$

مطلوب: دی ہوئی معلومات کے مطابق معیّن PQRS بنانا مطلوب ہے۔

مراحل تشکیل:



1. قطعہ خط PQ، 4 سم لمبا کھینچیے۔
2. نقطہ P کو مرکز لے کر اور رداس 6 سم سے ایک قوس لگائیے۔
3. نقطہ Q کو مرکز لیکر اور رداس $m\overline{PQ}$ سے ایک دوسرا قوس لگائیں جو پہلے قوس کو نقطہ R پر قطع کرے۔
4. نقطہ P سے R کو اور نقطہ Q سے R کو ملائیں $\overline{PR}$، $\overline{QR}$ اور بنائیں۔
5. نقطہ P اور R کو مراکز لے کر اور رداس $m\overline{PQ}$ سے دو قوس لگائیں جو آپس میں نقطہ S پر قطع کریں۔
6. نقطہ S کو P اور R سے ملائیں اور $\overline{PS}$، $\overline{RS}$ اور بنائیں۔ پس چوکور PQRS مطلوبہ معیّن ہے۔ فہوالمطلوب

8.1.6 متوازی الاضلاع کی تشکیل

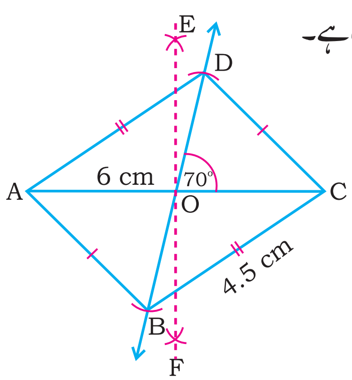
(i) متوازی الاضلاع کی تشکیل دیں، جبکہ دونوں وتر اور ان کا درمیانی زاویہ معلوم ہو۔

مثال: متوازی الاضلاع ABCD بنائیں جس میں $m\overline{AC} = 6\text{ cm}$، $m\overline{BC} = 4.5\text{ cm}$ اور $m\angle COD = 70^\circ$

معلوم: ABCD $||^m$ میں $m\overline{AC} = 6\text{ cm}$، $m\overline{BC} = 4.5\text{ cm}$ اور $m\angle COD = 70^\circ$

مطلوب: دی گئی معلومات کے مطابق ABCD $||^m$ بنانا مطلوب ہے۔

مراحلِ تشکیل:



1. 6 سم لمبا قطعہ خط AC کھینچیے۔
2. AC کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{EF}$ بنایئے جو $\overline{AC}$ کو نقطہ O پر قطع کرے۔
3. زاویہ پیما کی مدد سے نقطہ O پر 70° کا $\angle COD$ بنایئے۔
4. نقطہ O کو مرکز لے کر اور رداس 2.25 cm (یعنی $\frac{4.5}{2}$) سے دونوں جانب قوس لگائیں جو $\overrightarrow{OD}$ کو نقاط D اور B پر قطع کرے۔

5. قطعات $\overline{AB}$، $\overline{AD}$، $\overline{BC}$ اور $\overline{CD}$ کھینچیے۔
پس چوکور ABCD مطلوبہ متوازی الاضلاع ہے۔ فہوالمطلوب

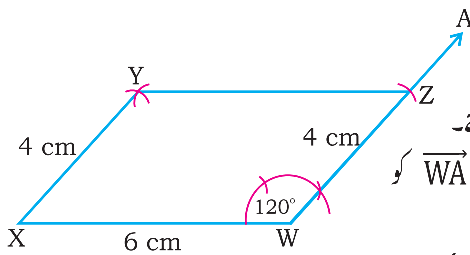
(iii) متوازی الاضلاع کی تشکیل دیں، جبکہ متصلہ اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ معلوم ہو۔

مثال: $\|^m$ WXYZ بنائیے جس میں $m\overline{WX} = 6\text{ cm}$، $m\overline{WZ} = 4\text{ cm}$ اور $m\angle XWZ = 120^\circ$

معلوم: $\|^m$ WXYZ میں $m\overline{WX} = 6\text{ cm}$، $m\overline{WZ} = 4\text{ cm}$ اور $m\angle XWZ = 120^\circ$

مطلوب: دی گئی معلومات کے مطابق $\|^m$ WXYZ بنانا

مراحلِ تشکیل:



1. قطعہ خط $\overline{WX}$ 6 سم لمبا کھینچیے۔
2. زاویہ پیما کی مدد سے نقطہ W پر زاویہ XWA، 120° کا بنائیے۔
3. نقطہ W کو مرکز لے کر 4 سم رداس کا ایک قوس لگائیں جو $\overrightarrow{WA}$ کو نقطہ Z پر قطع کرے۔
4. نقطہ X کو مرکز لے کر 4 سم رداس سے ایک قوس لگائیں۔
5. نقطہ Z کو مرکز لیکر 6 سم رداس سے ایک دوسرا قوس لگائیں جو پہلے قوس کو نقطہ Y پر قطع کرے۔
6. نقطہ Z کو W اور Y سے ملائیں اور $\overline{WZ}$ اور $\overline{YZ}$ بنائیں۔ پس چوکور WXYZ مطلوبہ متوازی الاضلاع ہے۔ فہوالمطلوب

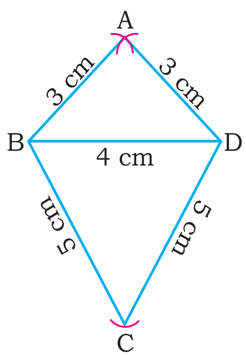
8.1.7 پتنگ کی تشکیل جبکہ دو غیر مساوی الاضلاع اور وتر معلوم ہو۔

مثال: پتنگ ABCD بنائیے جبکہ $m\overline{AB} = 3\text{ cm}$، $m\overline{BC} = 5\text{ cm}$ اور $m\overline{BD} = 4\text{ cm}$

معلوم: پتنگ ABCD میں $m\overline{AB} = 3\text{ cm}$، $m\overline{BC} = 5\text{ cm}$ اور $m\overline{BD} = 4\text{ cm}$

مطلوب: دی گئی معلومات کے مطابق پتنگ ABCD بنانا مطلوب ہے۔

مراحلِ تشکیل:



1. 4 سم لمبا قطعہ خط BD کھینچیے۔
2. نقاط B اور D کو مرکز لیکر 3 سم رداس سے دو قوس لگائیے جو آپس میں نقطہ A پر قطع کریں۔
3. دوبارہ نقاط B اور D کو مرکز لیکر 5 سم رداس سے دو اور قوس $\overline{BD}$ کے دوسری سمت میں لگائیں جو آپس میں نقطہ C پر قطع کریں۔
4. قطعات $\overline{AB}$، $\overline{AD}$، $\overline{BC}$، اور $\overline{DC}$ بنائیں۔ پس چوکور ABCD مطلوبہ پتنگ ہے۔ فہوالمطلوب

8.1.8 منظّم مخمس کی تشکیل جبکہ ایک ضلع کی لمبائی معلوم ہو

مثال: ایک منظّم مخمس ABCDE بنائیں جس کا ہر ضلع 4 سم ہے۔

معلوم: منظّم مخمس ABCDE میں اور $m\overline{AB} = 4$ cm اور

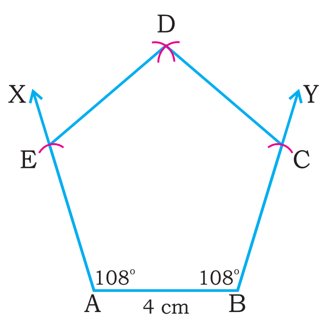
[ملاحظہ ہو یونٹ 7]

$$m\angle A = m\angle B = \left(\frac{2(5)-4}{5}\right) rt\angle s$$

$$= \left(\frac{10-4}{5}\right)\times 90^\circ = \frac{6}{\cancel{5}}\times \cancelto{18}{90} = 108^\circ$$

مطلوب: دی گئی معلومات کے مطابق منظّم مخمس ABCDE بنانا مطلوب ہے۔

مراحل تشکیل:



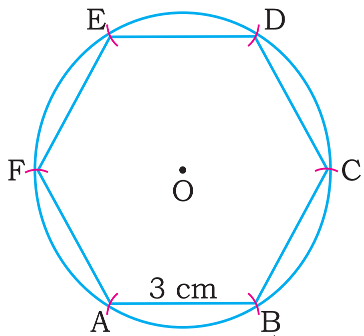
1. 4 سم لمبا قطعہ خط AB کھینچیے۔
2. نقاط A اور B پر زاویہ پیما کی مدد سے $\angle BAX$ اور $\angle ABY$ ہر ایک 108° کا بنائیں۔
3. نقاط A اور B مرکز لیکر اور رداس $m\overline{AB}$ سے دو قوس لگائیں جو $\overrightarrow{AX}$ کو نقطہ E پر اور $\overrightarrow{BY}$ کو نقطہ C پر قطع کرے۔
4. نقاط C اور E کو مرکز لے کر اور اسی رداس سے دو قوس لگائیں جو آپس میں نقطہ D پر کاٹیں۔
5. $\overline{CD}$ اور $\overline{ED}$ کھینچیے۔

پس کثیر الاضلاع ABCDE مطلوبہ منظّم مخمس ہے۔ فہوالمطلوب

8.1.9 منظّم مسدس کی تشکیل جبکہ اس کا ایک ضلع معلوم ہو

مثال: ایک منظّم مسدس ABCDEF میں $m\overline{AB} = 3$ cm

مطلوب: دی ہوئی معلومات کے مطابق منظّم مسدس ABCDEF بنانا۔



مراحل تشکیل:

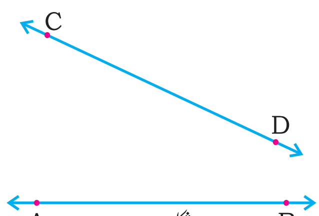
1. کسی مناسب جگہ پر نقطہ O مرکز لیکر 3 سم رداس کا ایک دائرہ بنائیے۔
2. دائرہ پر کسی بھی جگہ نقطہ A لیجئے۔
3. نقطہ A کو مرکز لیکر اور اسی سابقہ رداس سے ایک قوس لگائیے جو دائرہ کو نقطہ B پر قطع کرے۔
4. پھر نقطہ B کو مرکز لیکر اسی رداس سے ایک اور قوس لگائیے جو دائرہ کو نقطہ C پر قطعہ کرے۔
5. اب نقطہ C کو مرکز لیکر اسی رداس سے ایک اور قوس لگائیے جو دائرہ کو نقطہ D پر قطع کرے مزید براں نقطہ D اور E کو مرکز لیکر یہی عمل دہرائیے جس سے دائرہ نقاط E اور F پر قطع ہو۔
6. $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$، $\overline{DE}$، $\overline{EF}$ اور $\overline{FA}$ کھینچئے۔

پس کثیر الاضلاع ABCDEF مطلوبہ منظّم مسدس ہے۔ فہوالمطلوب

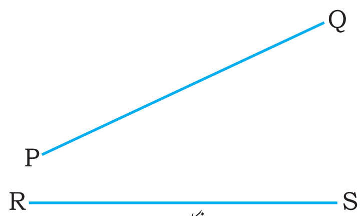
مشق 8.1

1. ذیل میں دی گئی اشکال سے مشابہ متلاقی خطوط کھینچئے اور خطوط بڑھائے بغیر

(i) متلاقی خطوط سے بننے والے زاویہ کا ناصف کھینچئے اور (ii) زاویہ کی مقدار بتائیے



شکل (ii)



شکل (i)

2. (الف) مربع ABCD بنائیے جس میں وتر مندرجہ ذیل ہوں۔

(i) $m\,\overline{AC} = 6$ cm (ii) $m\,\overline{BD} = 7$ cm (iii) $m\,\overline{AC} = 8$ cm

(ب) مربع PQRS بنائیے جس کے وتر اور ایک ضلع کا فرق مندرجہ ذیل ہو:

(i) 2.5 cm (ii) 3 cm (iii) 3.5 cm (iv) 4.5 cm

(ج) مربع **WXYZ** بنائیں جبکہ اس کے وتر اور ایک ضلع کا مجموعہ مندرجہ ذیل ہے:

(i) 10 cm (ii) 12 cm (iii) 11 cm

3. (الف) مستطیل **PQRS** بنائیں جبکہ اس کے دو اضلاع مندرجہ ذیل ہیں:

(i) $m\,\overline{PQ} = 6$ cm, $m\,\overline{QR} = 4$ cm (ii) $m\,\overline{PQ} = 4$ cm, $m\,\overline{QR} = 7$ cm

(ب) مستطیل **ABCD** بنائیں جبکہ اس کا وتر اور ایک ضلع مندرجہ ذیل ہیں:

(i) $m\,\overline{AC} = 6$ cm, $m\,\overline{AB} = 4$ cm (ii) $m\,\overline{BD} = 7$ cm, $m\,\overline{AB} = 5$ cm

4. (الف) معیّن **ABCD** بنائیں جبکہ ایک ضلع اور زاویہ مندرجہ ذیل دیا گیا ہے:

(i) $m\,\overline{PQ} = 4$cm, $m\,\angle A = 120^\circ$ (ii) $m\,\overline{AB} = 5$cm, $m\,\angle A = 60^\circ$

(ب) معیّن **PQRS** بنائیں جبکہ ایک ضلع اور وتر کی مقدار مندرجہ ذیل دی گئی ہے:

(i) $m\,\overline{PQ} = 5$cm, $m\,\overline{QS} = 4$cm (ii) $m\,\overline{PQ} = 4.5$cm, $m\,\overline{PR} = 7$cm

5. (الف) متوازی الاضلاع **PQRS** بنائیں جبکہ دونوں وتر اور درمیانی زاویہ مندرجہ ذیل دیا گیا ہے:

(i) $m\,\overline{QR} = 8$cm, $m\,\overline{QS} = 6$cm, $m\,\angle QOR = 60^\circ$

(ii) $m\,\overline{PR} = 6$cm, $m\,\overline{QS} = 8$cm, $m\,\angle QOR = 120^\circ$

(ب) متوازی الاضلاع **ABCD** بنایئے جبکہ متصلہ اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ مندرجہ ذیل دیا گیا ہے:

(i) $m\,\overline{AB} = 6$cm, $m\,\overline{BC} = 4$cm, $m\,\angle B = 70^\circ$

(ii) $m\,\overline{AB} = 4$cm, $m\,\overline{AD} = 5$cm, $m\,\angle A = 100^\circ$

6. پتنگ **ABCD** بنایئے جبکہ غیر مساوی اضلاع اور وتر مندرجہ ذیل دیا گیا ہے:

(i) $m\,\overline{AB} = 4$cm, $m\,\overline{BC} = 7$cm, $m\,\overline{AC} = 9$ cm

(ii) $m\,\overline{AB} = 4$cm, $m\,\overline{BC} = 6$cm, $m\,\overline{BD} = 4$ cm

7. منظّم مخمس **ABCDE** بنایئے جبکہ ہر ضلع کی لمبائی مندرجہ ذیل دی گئی ہے:

(i) 3.5 cm (ii) 4 cm (iii) 4.5 cm (iv) 5 cm

8. منظّم مسدس **ABCDEF** بنایئے جبکہ ہر ضلع کی لمبائی درج ذیل ہے:

(i) 3 cm (ii) 3.5 cm (iii) 2.5 cm (iv) 4 cm

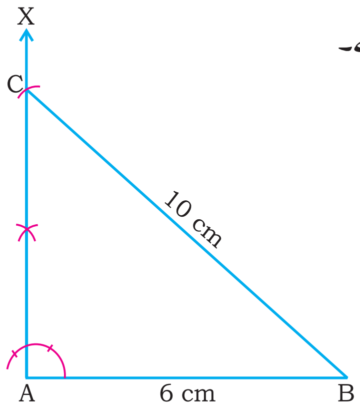
8.2 قائمۃالزاویہ مثلث کی تشکیل:

8.2.1 قائمۃالزاویہ مثلث کی تشکیل دیں، جبکہ وتر اور ایک ضلع معلوم ہو۔

مثال 1: قائمۃالزاویہ مثلث ABC بنائیے جس میں وتر $m\,\overline{BC} = 10\text{cm}$ اور $m\,\overline{AB} = 6\text{cm}$

معلوم: قائمۃالزاویہ مثلث ABC میں $m\,\overline{BC} = 10\text{cm}$، $m\,\overline{AB} = 6\text{cm}$، $m\,\angle A = 90^\circ$

مطلوب: دی ہوئی معلومات کے مطابق ΔABC بنانا مطلوب ہے۔



مراحل تشکیل:

1. 6 سم لمبا قطعہ $\overline{AB}$ بنائیے۔
2. نقطہ A پر $\overrightarrow{AX} \perp \overline{AB}$ بنائیے۔
3. نقطہ B کو مرکز لیکر اور 10 سم رداس سے ایک قوس لگائیے جو $\overrightarrow{AX}$ کو نقطہ C پر قطع کرے۔
4. نقاط B کو C سے ملائیے اور $\overline{BC}$ بنائیے۔

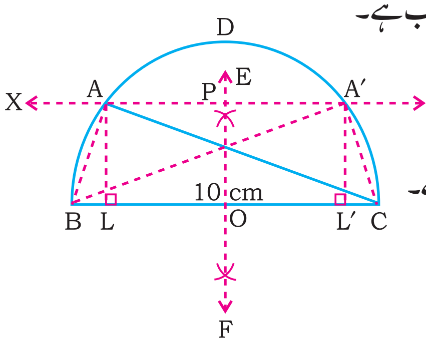
پس ΔABC مطلوبہ قائمۃالزاویہ مثلث ہے۔ فہوالمطلوب

8.2.2 قائمۃالزاویہ مثلث کی تشکیل دیں، جبکہ وتر اور اسی نقطہ سے وتر تک کا ارتفاع (Vertical height) معلوم ہو۔

مثال 2: قائمۃالزاویہ مثلث ABC بنائیے جس میں وتر $\overline{BC}$، 6 سم ہے اور نقطہ A سے $\overline{BC}$ تک کا ارتفاع 3.8 سم ہے۔

معلوم: قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں $m\angle A = 90^\circ$، $m\overline{BC} = 10\text{cm}$،
$m\overline{AL} = 3.8\text{cm}$ $(\overline{AL} \perp \overline{BC})$

مطلوب: دی گئی معلومات کے مطابق ΔABC بنانا مطلوب ہے۔



مراحلِ تشکیل:

1. 10 سم لمبا قطعہ خط BC کھینچیے۔
2. $\overline{BC}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{EF}$ کھینچیے جو $\overline{BC}$ کو نقطہ O پر قطع کرے۔
3. نقطہ O کو مرکز لے کر اور رداس $m\,\overline{OB}$ یا $m\,\overline{OC}$ $(\frac{10}{2} = 5\text{cm})$ سے نصف دائرہ BDC بنائیے۔

4. $\overrightarrow{OE}$ پر نقطہ P اس طرح لیں کہ $m\ \overline{OP} = 3.8\ cm$ ہو۔

5. نقطہ P سے گزرتا ہوا خط $\overleftrightarrow{XY}$ متوازی $\overline{BC}$ کے لیجئے (یعنی $\overleftrightarrow{XY} \perp \overline{OP}$ بنائیے) جو دائرہ کو نقطہ A اور A′ پر قطع کرے۔

6. قطعات خط $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ بنائیے ($\overline{A'B}$ اور $\overline{A'C}$ بھی بنائیے)۔

پس ΔABC (اور $\Delta A'BC$) مطلوبہ مثلث ہیں جس میں $m\ \overline{AL} = m\ \overline{A'L'} = 3.8\ cm$ ۔ فہوالمطلوب

نوٹ: نصف دائرہ کا محصور زاویہ، زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

مشق 8.2

1. مندرجہ قائمۃ الزاویہ مثلث بنائیے جبکہ

(الف) وتر = 10 سم اور ایک ضلع = 8 سم (ب) وتر = 13 سم اور ایک ضلع = 8 سم

2. مندرجہ ذیل قائمۃ الزاویہ مثلث بنائیے جبکہ

(الف) وتر = 10 سم اور رداس سے وتر کا ارتفاع 3 سم ہے

(ب) وتر = 12 سم اور رداس سے وتر تک ارتفاع 4 سم ہے

(ج) ارتفاع $\overline{PM}$ = 3 سم اور ارتفاع = 3 سم

(د) ارتفاع $\overline{PM}$ = 2.5 سم، ارتفاع $\overline{SN}$ = 3 سم

3. مندرجہ ذیل قائمۃ الزاویہ مثلث ABC اور DBC وتر $\overline{BC}$ = 10 سم کے مخالف جانب بنائیے جس میں

(الف) ارتفاع $m\ \overline{AL} = 3.5cm$ اور $m\ \overline{DC} = 5cm$

(ب) ارتفاع $m\ \overline{AL} = 3cm$ اور $m\ \overline{DB} = 6cm$

جائزہ مشق 8

1. ذیل میں نامکمل بیان کی تکمیل کیلئے چار ممکنہ جوابات دیئے گئے ہیں اس میں سے درست جواب کو (✓) لگائیے۔

(i) دو متلاقی خطوط (کو بڑھائے بغیر) کا درمیانی زاویہ مساوی ہے ______________

(a) انحرافی جانب کے سروں کو ملانے سے بننے والے زاویوں کا فرق کے

(b) انحرافی جانب کے سروں کو ملانے سے بننے والے زاویوں کے مجموعہ اور 180° کے فرق کے

(c) 180° نفی (دونوں متلاقی خطوط کو کہیں بھی اور کسی جگہ بھی قطع کرنے والے کسی بھی خط قاطع سے بننے والے زاویوں کا مجموعہ)

(d) مذکورہ بالا میں سے کوئی بھی نہیں۔

(ii) ایک ایسا کثیر الاضلاع جس کے تمام اندرونی زاویوں کا مجموعہ چار زاویہ قائمہ ہوا سے _____ کہتے ہیں۔

(a) مثلث (b) چوکور (c) مخمس (d) مسدس

(iii) ایک ایسا کثیر الاضلاع جس کے تمام اندرونی زاویوں کا مجموعہ دو زاویہ قائمہ ہوا سے ____ کہتے ہیں۔

(a) مثلث (b) چوکور (c) مخمس (d) مسدس

(iv) ایک ایسا کثیر الاضلاع جس کے تمام اندرونی زاویوں کا مجموعہ آٹھ زاویہ قائمہ ہوا سے ____ کہتے ہیں۔

(a) مثلث (b) چوکور (c) مخمس (d) مسدس

(v) ایک ایسا کثیر الاضلاع جس کے تمام اندرونی زاویوں کا مجموعہ چھ زاویہ قائمہ ہوا سے _____ کہتے ہیں۔

(a) مثلث (b) چوکور (c) مخمس (d) مسدس

(vi) کسی مستطیل کے وتر ______________

(a) ایک دوسرے کی عمودی تنصیف کرتے ہیں (b) ایک دوسرے پر عمود کرتے ہیں

(c) ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں (d) مذکورہ بالا میں سے کوئی بھی نہیں

(vii) مربع ایک __________ ہے۔

(a) مستطیل (b) منتظم کثیر الاضلاع

(c) غیر مساوی اضلاع والا چوکور (d) مذکورہ بالا میں سے کوئی بھی نہیں

(viii) منتظم مسدس کے ہر اندرونی زاویہ کی مقدار __________ ہے۔

(a) 180° (b) 120° (c) 140° (d) مذکورہ بالا میں سے کوئی بھی نہیں

2. مندرجہ ذیل اشکال بنائیے:

(i) مربع PQRS جس میں $m\ \overline{QS} = 6cm$

(ii) مربع WXYZ جس کے وتر اور ایک ضلع کا فرق 2.5 سم ہے۔

(iii) مربع ABCD بنائیے جس کے وتر اور ایک ضلع کا مجموعہ 12 سم ہے۔

(iv) مستطیل ABCD بنائیے جبکہ $m\ \overline{AB} = 4cm$ ، $m\ \overline{BC} = 6cm$

(v) معیّن PQRS بنائیے جبکہ $m\ \overline{PQ} = 5cm$ ، $m\ \angle P = 110^{\circ}$

(vi) معیّن ABCD بنائیے جبکہ $m\ \overline{BC} = 5cm$ ، $m\ \overline{BD} = 7cm$

(vii) WXYZ $//^{m}$ بنائیے جس کے وتر 6 سم اور 9 سم لمبے ہوں اور درمیانی زاویہ 70° ہو۔

(viii) پتنگ ABCD بنائیے جس میں $m\ \overline{AB} = 6cm$، $m\ \overline{BC} = 3cm$، $m\ \overline{BD} = 4cm$

(ix) منظّم مخمس PQRST بنائیے جس میں $m\ \overline{PQ} = 4cm$

(x) منظّم مسدس ABCDEF بنائیے جس کا ضلع $m\ \overline{AB} = 3.5cm$

3. دو متلاقی قطعات $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ کھینچیے اور انہیں بڑھائے بغیر ان کے درمیانی زاویہ کا ناصف کھینچیے۔

4. دو متلاقی قطعات $\overline{PQ}$ اور $\overline{PS}$ کھینچیے جو Q اور S کے جانب متلاقی ہوں اور انہیں بڑھائے بغیر

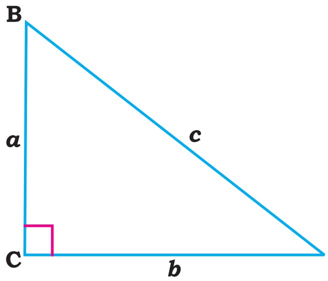
(a) ان کے درمیانی زاویہ کی مقدار معلوم کریں (b) درمیانی زاویہ کا ناصف بنائیں

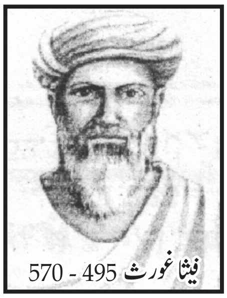
خلاصہ

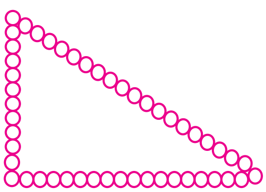
- متلاقی خطوط ایسے غیر متوازی خطوط یا قطعات ہیں جنہیں اگر بڑھایا جائے تو ایک دوسرے کو قطع کریں۔
- متلاقی خطوط کو بڑھائے بغیر ان کا درمیانی زاویہ معلوم کرنے کیلئے 180° میں سے اُن دو زاویوں کے مجموعہ کو منفی کرتے ہیں جو انحرافی جانب کے سروں کو ملانے سے بنتے ہیں۔
- متلاقی خطوط کے بڑھائے جانے پر وجود میں آنے والے مثلث کے محصور مرکز (In centre) اور جانبی مرکز (Ex-centre) کو ملانے والا خط اُن متلاقی خطوط کے درمیانی زاویہ کا ناصف ہوتا ہے (بغیر اُن خطوط کو بڑھائے ہوئے) کیونکہ مثلث کے زاویوں کے ناصف ہم نقاط (Concurrent) ہوتے ہیں۔

یونٹ 9

رقبہ اور حجم







9.1 مسئلہ فیثا غورث

قائمۃ الزاویہ مثلث کے تینوں اضلاع ایک دوسرے کے ساتھ ایک خاص تعلق رکھتے ہیں۔

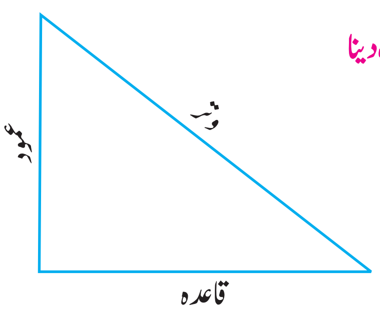
اس تعلق کو سب سے پہلے یونانی ریاضی دان فیثا غورث (570-495 قبل مسیح) نے تقریباً 2500 سال قبل معلوم کیا تھا۔ اس لئے اس کا نام مسئلہ فیثا غورث ہے۔

اُس زمانے میں مصری، دریائے نیل کی چوڑائی معلوم کرنے کا ایک طریقہ استعمال کرتے تھے۔ وہ ایک زنجیر کی مدد سے دریائے نیل کی چوڑائی معلوم کرنے کا ایک طریقہ استعمال کرتے تھے جس کے اضلاع میں 3:4:5 کی نسبت تھی۔

فیثا غورث نے اُس طریقہ کار پر غور کیا اور اس مسئلہ کو دریافت کیا۔ جیومیٹری میں مسئلہ فیثا غورث خاص اہمیت کا حامل ہے۔

مسئلہ فیثا غورث ریاضی کی تقریباً ہر کتاب میں موجود ہوتا ہے اور جس کی وجہ سے فیثا غورث دنیا سائنس میں بہت مشہور ہے۔

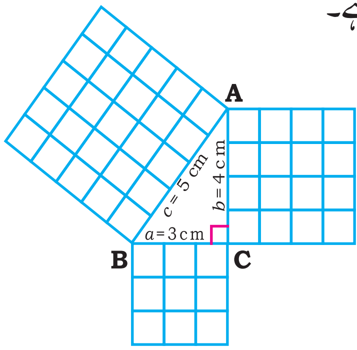
9.1.1 مسئلہ فیثا غورث بیان کرنا اور اس کا غیر رسمی ثبوت دینا



کسی بھی قائمۃ الزاویہ مثلث میں کسی بھی دو اضلاع کے مربعے کا مجموعہ وتر کے مربعے کے برابر ہوتا ہے۔ جیسے قاعدہ اور عمود کے مربعے کا مجموعہ وتر کے مربعے کے برابر ہے۔

$$(\text{وتر})^2 = (\text{عمود})^2 + (\text{قاعدہ})^2$$

غیر رسمی ثبوت



قائمۃالزاویہ مثلث ABC بنائیں۔ جس میں $\angle C$ قائمہ زاویہ ہے۔

$m\overline{BC} = 3\text{cm} = a,\ m\overline{AC} = 4\text{ cm} = b$

اور $m\overline{AB} = 5\text{ cm} = c$

مسئلہ فیثا غورث کے مطابق ہمیں ثابت کرنا ہے کہ

$$(m\overline{AB})^2 = (m\overline{BC})^2 + (m\overline{AC})^2$$

یا $$c^2 = a^2 + b^2$$

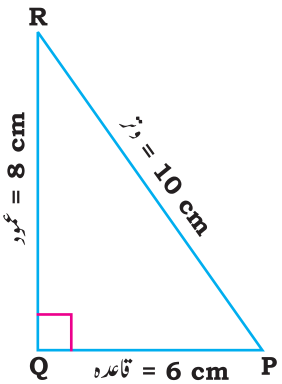
مربعے کی ایک طرف $m\overline{BC} = 3\text{cm}$ کو بطور مربعے کا ایک ضلع لیں۔ مربع کو مکمل کریں اور اس مربعے میں 9 چھوٹے مربعے بنائیں پھر اس کی دوسری طرف $m\overline{AC} = 4\text{ cm}$ لیں اس پر 4 cm کا دوسرا مربع بنائیں اور اس میں 16 چھوٹے مربعے بنائیں ہر چھوٹا مربع 1 سینٹی میٹر لمبا ہو۔ آخر میں $m\overline{AB} = 5\text{ cm}$ لیں اور $\overline{AB}$ پر 5 سینٹی میٹر کا مربعے بنائیں اور اس میں 25 چھوٹے مربع بنائیں اس طرح کہ ہر چھوٹے مربع کی لمبائی 1 سینٹی میٹر ہو۔

لہٰذا عمود پر ایک سینٹی میٹر کے چھوٹے مربعوں کا مجموعہ اور قاعدہ پر ایک سینٹی میٹر کے چھوٹے مربعوں کا مجموعہ $= 9 + 16 = 25$ جو کہ وتر پر ایک سینٹی میٹر کے چھوٹے مربعوں کے برابر ہے۔

پس ہر قائمۃالزاویہ مثلث میں: $\quad (\text{وتر})^2 = (\text{عمود})^2 + (\text{قاعدہ})^2$

فرض کریں کہ وتر، عمود اور قاعدہ کی پیمائش بالترتیب H، P اور B ہے تو $\mathbf{H^2 = P^2 + B^2}$

مسئلہ فیثا غورث کو قائمۃالزاویہ مثلث کی مختلف پیمائش کی تین اضلاع کو لے کر ثابت کر سکتے ہیں۔



سرگرمی: ایک قائمۃ الزاویہ مثلث PQR ہے جس میں

$\angle Q = 90^\circ$ ، $m\overline{PQ} = 6\text{cm}$ ، $m\overline{QR} = 8\text{cm}$ اور

$m\overline{PR} = 12\text{cm}$

اوپر دیئے گئے مواد کی مدد سے مسئلہ فیثاغورث ثابت کریں۔

ثبوت: دیئے گئے قائمۃ الزاویہ مثلث میں

عمود $\overline{QR}$ کی پیمائش 8 سینٹی میٹر ہے اس لئے $64 = 8^2 = (\text{عمود})^2$

قاعدہ $\overline{PQ}$ کی پیمائش 6 سینٹی میٹر ہے اس لئے $36 = 6^2 = (\text{قاعدہ})^2$

وتر $\overline{PR}$ کی پیمائش 6 سینٹی میٹر ہے اس لئے $100 = 10^2 = (\text{وتر})^2$

یہ مشاہدہ کیا گیا ہے کہ: $100 = 64 + 36$

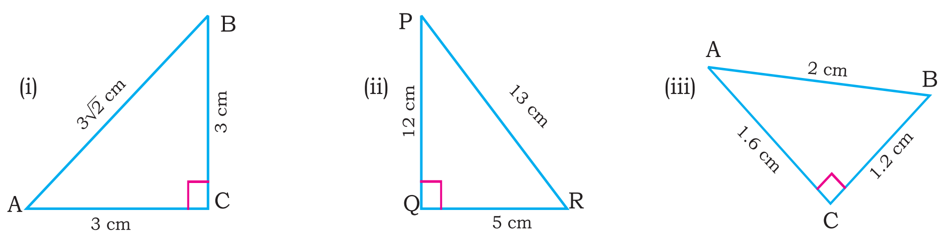
یا $(10)^2 = (8)^2 + (6)^2$

یا $(\text{وتر})^2 = (\text{عمود})^2 + (\text{قاعدہ})^2$

پس مسئلہ فیثاغورث ثابت ہوا۔

مشق 9.1

1. ذیل کے مثلثوں کے لئے مسئلہ فیثاغورث ثابت کریں۔



2. ذیل کے مواد کی مدد سے مسئلہ فیثاغورث ثابت کریں۔

(i) LMN ایک قائمۃ الزاویہ مثلث جس میں $m\angle M = 90^\circ$ ، $m\overline{LN} = 15\text{ cm}$ ،
$m\overline{LM} = 9\text{ cm}$ اور $m\overline{MN} = 12\text{ cm}$

(ii) PQR ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے جس میں $m\angle Q = 90^{\circ}$

$m\overline{QR} = 12\text{ cm}$ ، $m\overline{PQ} = 16\text{ cm}$ اور $m\overline{PR} = 20\text{ cm}$

(iii) XYZ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے جس میں $m\angle Y = 90^{\circ}$

$m\overline{YZ} = 20\text{ cm}$ ، $m\overline{XY} = 15\text{ cm}$ اور $m\overline{XZ} = 25\text{ cm}$

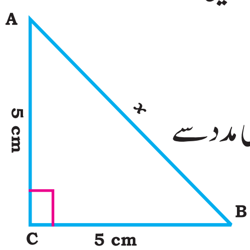
9.1.2 مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے قائمۃ الزاویہ مثلث حل کریں۔

ہم مثلث کی تین اضلاع میں سے کسی ایک ضلع کی پیمائش معلوم کر سکتے ہیں جیسے وتر، عمود یا قاعدہ کی، اگر کسی دو اضلاع کی پیمائش دی گئی ہو، جیسے

(i) $H^2 = P^2 + B^2$ (ii) $B^2 = H^2 - P^2$ (iii) $P^2 = H^2 - B^2$

مثال 1. قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں نامعلوم اضلاع کی پیمائش معلوم کریں:

(i)



مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

حل یہاں $m\overline{AC} = 5\text{ cm}$

$m\overline{BC} = 5\text{ cm}, m\overline{AB} = ?$

مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$H^2 = P^2 + B^2$

یا $(m\overline{AB})^2 = (m\overline{AC})^2 + (m\overline{BC})^2$

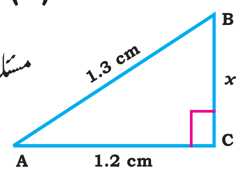
یعنی $x^2 = (5)^2 + (5)^2 = 25 + 25 = 50$

$\Rightarrow x^2 = 50 \quad \Rightarrow x = \sqrt{50} = \sqrt{5\times5\times2}$

$\Rightarrow x = 5\sqrt{2}\text{ cm.}$

پس نامعلوم ضلع کی پیمائش $5\sqrt{2}\text{ cm}$ ہے۔

(ii)



مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

حل یہاں $m\overline{AC} = 1.2\text{ cm}$

$m\overline{BC} = x = ?, m\overline{AB} = 1.3\text{ cm}$

مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$H^2 = P^2 + B^2$

یا $(m\overline{AB})^2 = (m\overline{AC})^2 + (m\overline{BC})^2$

یعنی $(1.3)^2 = (1.2)^2 + x^2$

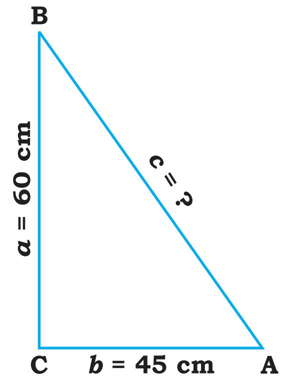
$\Rightarrow 1.69 = 1.44 + x^2$

$\Rightarrow 1.69 - 1.44 = x^2 \Rightarrow x^2 = 0.25$

$\Rightarrow x = \sqrt{0.5\times0.5} = 0.5\text{ cm.}$

پس نامعلوم ضلع کی پیمائش 0.5 cm ہے۔

مثال 2. ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کے عمود کی پیمائش 60 سینٹی میٹر ہے اور اس کے قاعدہ 45 سینٹی میٹر کا ہے تو وتر کی پیمائش معلوم کریں۔



حل: مسئلہ فیثا غورث کی مدد سے ہم معلوم کر سکتے ہیں

$$(\text{وتر})^2 = (\text{عمود})^2 + (\text{قاعدہ})^2$$

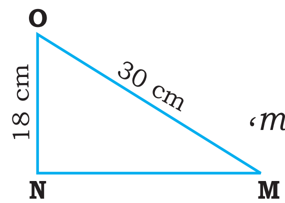
یا $(m\overline{AB})^2 = (m\overline{BC})^2 + (m\overline{AC})^2$ یا $c^2 = a^2 + b^2$

$$\Rightarrow c^2 = (60)^2 + (45)^2 = 3600 + 2025 = 5625$$

اس لئے $\Rightarrow c = \sqrt{5625} = 75 \quad \Rightarrow c = 75\text{ cm}$

لہٰذا وتر کی پیمائش 75 سینٹی میٹر ہے۔

یاد رکھیں: قائمۃ الزاویہ مثلث کو حل کرنے کا مقصد ہے مسئلہ فیثا غورث کی مدد سے اس کے تمام اضلاع کی پیمائش معلوم کرنا۔



مثال 3. قائمۃ الزاویہ مثلث MNO حل کریں جس میں $m\angle N = 90^\circ$، $m\overline{MO} = 30\text{ cm}$ اور $m\overline{NO} = 18\text{ cm}$

حل: مسئلہ فیثا غورث ہے کہ،

$$(\text{وتر})^2 = (\text{عمود})^2 + (\text{قاعدہ})^2$$

شکل سے یہ بات واضح ہے کہ $m\overline{MO} = 30$ سینٹی میٹر = وتر اور

$m\overline{NO} = 18$ سینٹی میٹر = عمود

دیئے گئے قائمۃ الزاویہ کے قاعدے کی پیمائش معلوم کرنے کے لئے ہمیں لازمی مسئلہ فیثا غورث استعمال کرنا ہوگا۔

$$(\text{قاعدہ})^2 = (\text{وتر})^2 - (\text{عمود})^2$$

$$= (30)^2 - (18)^2$$

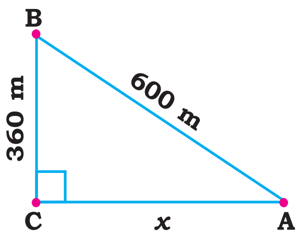
$$= 900 - 324 = 576$$

$$\text{قاعدہ} = \sqrt{576} = \sqrt{(24)^2} = 24\text{ cm}$$

لہٰذا $\text{قاعدہ} = 24\text{ cm}$

مثال 4. ایک ضعیف عورت اپنے گھر A سے ٹاور B تک $\overline{AB}$ کے ساتھ ایک مختصر راستہ اختیار کرتی ہے۔ مارکیٹ ٹاور تک پہنچنے میں اس کو اور کتنا اضافی فاصلہ طے کرنا پڑیگا اگر وہ پہلے A سے C تک اور پھر C سے B تک جائے؟

حل: جب بوڑھی عورت اپنے گھر A سے مارکیٹ ٹاور B تک کا مختصر راستہ $\overline{AB}$ اختیار کرتی ہے تو وہ 600 میٹر کا فاصلہ طے کرتی ہے۔ پھر وہ متبادل راستہ اختیار کرتی ہے تو جو فاصلہ وہ طے کرتی وہ ہے،



$m\overline{AC} + m\overline{CB} = (x + 360)$ میٹر

یہاں ACB ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے جس کا وتر:

$m\overline{AB} = 600$ میٹر

اس لئے $(\text{وتر})^2 = (\text{عمود})^2 + (\text{قاعدہ})^2$

مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

یا $(600)^2 = (360)^2 + x^2$

$360000 = 129600 + x^2$

اس لئے $\Rightarrow x^2 = 360000 - 1296000 = 230400$

یا $x = \sqrt{230400} = 480$ میٹر

	480
4	$\overline{23}\,\overline{04}\,\overline{00}$
+4	−16
88	704
+8	−704
960	000
+0	−000
960	0

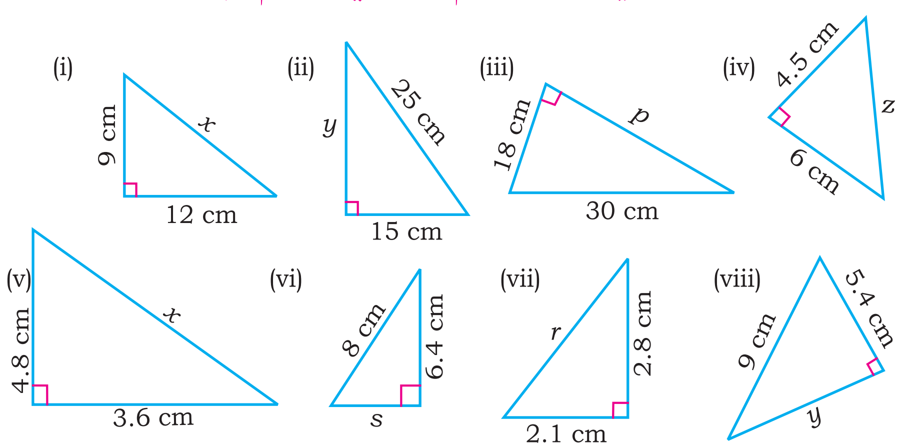
متبادل راستے کی کل لمبائی ہے $840 = 360 + 480$ میٹر

لہٰذا اضافی فاصلہ میٹر $= (840 - 600)$ میٹر

$= 240$ میٹر

مشق 9.2

1. ذیل میں دیئے گئے ہر قائمۃ الزاویہ مثلث کے نامعلوم اضلاع کی پیمائش معلوم کریں۔



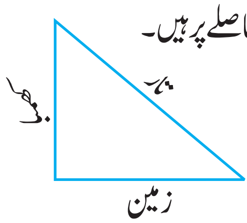
2. فرض کریں l، m اور n مثلث LMN کے اضلاع ہیں تو فیصلہ کریں کہ کون سا مثلث قائمۃ الزاویہ مثلث نہیں ہے جبکہ کوئی بھی زاویہ $\angle L$، $\angle M$ اور $\angle LNM$ قائمۃ الزاویہ ہو سکتا ہے۔

(i) $l = 9$, $m = 12$ and $n = 15$ (ii) $l = 7$, $m = 8$ and $n = 9$
(iii) $l = 6$, $m = 8$ and $n = 10$ (iv) $l = 12$, $m = 16$ and $n = 20$
(v) $l = 2$, $m = 4$ and $n = 6$ (vi) $l = 1.5$, $m = 2$ and $n = 2.5$

3. ذیل کے مثلث مساوی الساقین قائمۃ الزاویہ مثلث ہیں۔ جب کہ وتر کا مربع دیا گیا ہے تو ایک جیسے اضلاع کی پیمائش معلوم کریں۔

(i) $H^2 = 50\ cm^2$ (ii) $H^2 = 72\ cm^2$ (iii) $H^2 = 98\ cm^2$
(iv) $H^2 = 128\ cm^2$ (v) $H^2 = 2.42\ cm^2$ (vi) $H^2 = 9.68\ cm^2$
(vii) $H^2 = 4.5\ cm^2$ (viii) $H^2 = 60.5\ cm^2$ (ix) $H^2 = 112\ .\ 5cm^2$

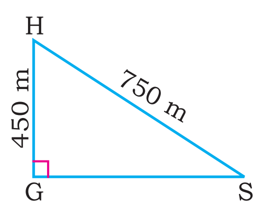
4. ایک 6.5 میٹر لمبائی سیڑھی دیوار کے ساتھ لگائی گئی ہے۔ اگر اس کے اوپر والا سرا دیوار کے ساتھ 5.2 میٹر کی اونچائی پر ہے تو معلوم کریں کہ سیڑھی کے پائے دیوار سے کتنے فاصلے پر ہیں۔



5. 12 میٹر لمبا، بجلی کا کھمبا ایک 20 میٹر تار سے بندھا ہوا ہے۔ کھمبے کے نچلے سرے اور زمین پر تار کے سرے کے درمیان کا فاصلہ معلوم کریں۔

6. ذیل میں دیئے گئے مستطیل کے وتر معلوم کریں، جب کہ ان کی لمبائیاں اور چوڑائیاں نیچے دی گئی ہیں۔

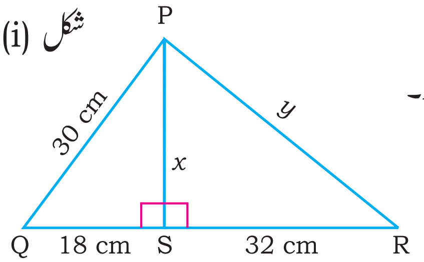
(i) لمبائی = 6 سینٹی میٹر اور چوڑائی = 6 سینٹی میٹر
(ii) لمبائی = 4.4 سینٹی میٹر اور چوڑائی = 33 سینٹی میٹر
(iii) لمبائی = 5.6 سینٹی میٹر اور چوڑائی = 4.2 سینٹی میٹر
(iv) لمبائی = 6.4 سینٹی میٹر اور چوڑائی = 4.5 سینٹی میٹر



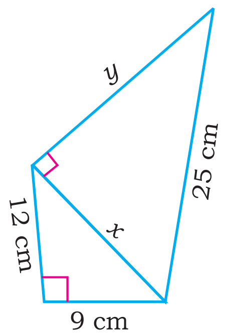
7. ایک طالب علم اپنے گھر (H) سے اسکول (S) تک مختصر راستہ $(\overline{HS})$ اختیار کرتا ہے۔ طالب علم کتنا زیادہ فاصلہ طے کرے گا اگر وہ، گھر (H) سے باغ (B) اور پھر اسکول (S) جائے تو۔

8. ایک مستطیلی میدان کا رقبہ معلوم کریں اگر اس کی چوڑائی 48 میٹر اور اس کے وتر کی لمبائی 80 میٹر ہو۔

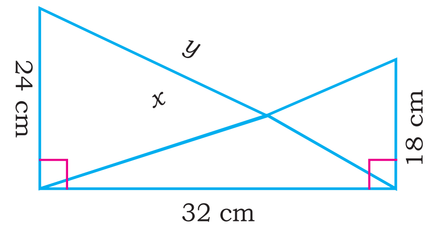
9. اشکال کو غور سے دیکھیں اور نامعلوم x اور y کی پیمائش معلوم کریں۔



شکل (i)



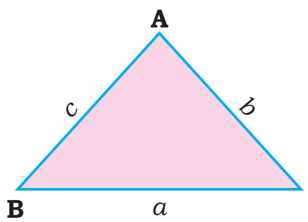
شکل (ii)



شکل (iii)

9.2 ہیرو کا کلیہ

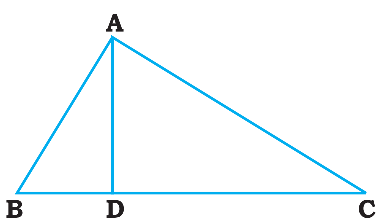
مثلث کے تینوں اضلاع سے گھیری ہوئی جگہ مثلثی علاقہ کا رقبہ کہلاتی ہے۔ یہاں مثلث کے تین اضلاع کے درمیان سایہ دار حصہ مثلثی علاقہ ABC ہے۔ مثلثی علاقے کا رقبہ معلوم کرنے کے بہت سے طریقے ہیں پچھلی جماعتوں میں ہم مثلثی علاقے کا رقبہ بذریعہ کلیہ معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں جب ان کے ارتفاع اور قاعدہ دیئے گئے ہیں۔



مثلثی علاقے کا رقبہ = $\triangle ABC$ (ارتفاع×قاعدہ) $\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2}\,(m\overline{BC}) \times (m\overline{AD}) = \frac{1}{2}\, x \times y$$

جب کہ $x = m\overline{BC}$ اور $y = m\overline{AD}$



یہاں اب ہم مثلثی علاقے کا رقبہ معلوم کرنا سیکھیں گے جب کہ تینوں اضلاع کی پیمائش دی گئی ہو۔

فرض کریں a، b اور c مثلث کے اضلاع کو ظاہر کرتے ہیں تو

مثلث ABC کا رقبہ $= \triangle ABC = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

یہاں $S = \triangle ABC$ کا نصف احاطہ، یہ ہیرو کے کلیہ کے نام سے جانا جاتا ہے

اس لئے $S = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}$ (تینوں اضلاع کا مجموعہ)

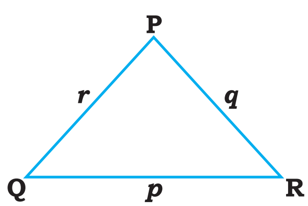
یا $S = \frac{a+b+c}{2}$

اس کلیہ کو یونانی ریاضی دان سکندریہ کے 'ہیرو' نے متعارف کروایا تھا اور اسے ہیرو کا کلیہ کے نام سے جانا جاتا ہے۔ اوپر دیا گیا یہ کلیہ سمجھنے کے لحاظ سے بہت آسان ہے۔ اس کلیہ کے ذریعے ہم مثلثی علاقے، مثلثی کمرے، مثلثی شیٹ، صحن یا کھیت وغیرہ کا رقبہ معلوم کرنے کے قابل ہو جائینگے۔ خاص طور پر دیہاتی علاقوں میں زرعی زمین کی پیمائش کے لئے ہمیں کسی تپیدار وغیرہ کی مدد لینی نہیں پڑے گی۔

9.2.1 چوکور اور مثلثی علاقوں کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے ہیرو کے کلیے کا اطلاق کریں اور اس کو بیان کریں۔

(A) ہیرو کے کلیے کا بیان

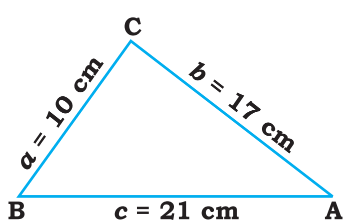
اگر p, q اور r مثلث PQR کی لمبائیاں ہیں تو مثلث PQR کے رقبہ کو $\triangle$ سے ظاہر کرتے ہیں جیسے



$$\triangle PQR = \sqrt{S(S-p)(S-q)(S-r)}$$

$$S = \frac{p+q+r}{2}$$

مثال 1. ہیرو کے کلیے کی مدد سے مثلث ABC کا رقبہ معلوم کریں جب کہ اُس کے اضلاع کی لمبائیاں 10 سم، 17 سم اور 21 سم ہیں۔



حل: شکل کو غور سے دیکھیں یہاں a کو $\angle A$ کے مخالف ضلع، b کو $\angle B$ کے مخالف ضلع اور c کو $\angle C$ کے مخالف ضلع سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ہم پہلے معلوم کرتے ہیں:

اس لئے S = 24 سینٹی میٹر $S = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{10+17+21}{2} = \dfrac{48}{2} = 24\text{ cm}$

a، b، c اور S کی قیمتیں کلیے میں رکھنے سے

کا رقبہ $\Delta ABC = \triangle ABC = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

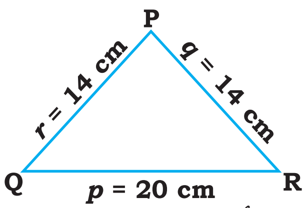
$\triangle ABC = \sqrt{24 \times (24-10) \times (24-17) \times (24-21)}$

$= \sqrt{24 \times 14 \times 7 \times 3} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 7 \times 7 \times 3}$

$= \sqrt{\underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{7 \times 7}} = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$

لہٰذا دیئے گئے مثلث Δ ABC کا رقبہ 84 مربع سینٹی میٹر ہے۔

مثال 2. ہیرو کے کلیہ کی مدد سے مساوی الساقین مثلث PQR کا رقبہ معلوم کریں جس میں



$m\overline{PQ} = m\overline{PR} = 14$ سینٹی میٹر اور $m\overline{QR} = 20$ سینٹی میٹر

حل: فرض کریں p، q اور r زاویے P، Q اور R کے بالترتیب مخالف اضلاع ہیں۔

تو $m\,\overline{QR} = p = 20\text{ cm}$ ، $m\,\overline{PR} = q = 14\text{ cm}$ اور $m\,\overline{PQ} = r = 14\text{ cm}$

اب $S = \dfrac{p+q+r}{2} = \dfrac{20+14+14}{2} = \dfrac{48}{2} = 24\text{ cm}$

$\triangle PQR = \sqrt{S(S-p)(S-q)(S-r)}$

$= \sqrt{24(24-20)(24-14)(24-14)}$

$= \sqrt{24 \times 4 \times 10 \times 10} = \sqrt{6 \times \underline{4 \times 4} \times \underline{10 \times 10}}$

$= 4 \times 10\sqrt{6} = 40\sqrt{6}\text{ cm}^2$

$= 40 \times (2.45) = 98\text{ cm}^2$

لہٰذا دیئے گئے مساوی الساقین مثلث کا رقبہ 98 مربع سینٹی میٹر ہے۔

مثال 3. ہیرو کے کلیے کی مدد سے نامعلوم عنصر معلوم کریں۔

$a = 10$ cm, $b = 12$ cm, S = 18 cm, c = ______, $\triangle$ABC = ______

حل: ہیرو کا کلیہ

$\triangle ABC = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$ جہاں $S = \dfrac{a+b+c}{2}$

$S = \dfrac{a+b+c}{2}$ سے ہم تیسرے ضلع 'c' کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں

S، a اور b کی قیمت رکھنے سے $18 = \dfrac{10+12+c}{2}$ ضرب چلیپائی کی مدد سے

$$36 = 22 + c$$

$$c = 36 - 22 = 14 \text{ cm}$$

اب $\triangle ABC = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

S، a، b اور c کی قیمت رکھنے سے

$$\triangle ABC = \sqrt{18 \times (18-10) \times (18-12) \times (18-14)}$$

$$= \sqrt{18 \times 8 \times 6 \times 4}$$

$$= \sqrt{\underline{3 \times 3} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 2 \times 3 \times \underline{2 \times 2}}$$

$$= 3 \times 2 \times 2 \times 2\sqrt{6} = 24\sqrt{6} \text{ cm}^2 = 24 \times 2.45 \text{ cm}^2 = 58.8 \text{ cm}^2$$

پس نامعلوم عنصر ہیں c = 14 سینٹی میٹر اور $\triangle$ABC = 58.8 مربع سینٹی میٹر

مشق 9.3

1. ہیرو کے کلیے کی مدد سے ذیل کے مثلثوں کا رقبہ معلوم کریں جبکہ ان کے اضلاع کی لمبائیاں دی گئی ہیں:

(i) مثلث ABC جس میں $a = 16$ سینٹی میٹر، $b = 20$ سینٹی میٹر اور $c = 16$ سینٹی میٹر

(ii) مثلث DEF جس میں $d = 10$ سینٹی میٹر، $c = 17$ سینٹی میٹر اور $f = 21$ سینٹی میٹر

(iii) مثلث LMN جس میں $l = 6$ سینٹی میٹر، $m = 8$ سینٹی میٹر اور $n = 10$ سینٹی میٹر

(iv) مثلث PQR جس میں $p = 20$ سینٹی میٹر، $q = 24$ سینٹی میٹر اور $r = 18$ سینٹی میٹر

(v) مثلث XYZ جس میں $x = 15$ سینٹی میٹر، $y = 21$ سینٹی میٹر اور $z = 14$ سینٹی میٹر

2. ہیرو کے کلیہ کی مدد سے مساوی الساقین مثلث کا رقبہ معلوم کریں جب کہ اضلاع کی لمبائیاں دی گئی ہیں:

(i) $\triangle$ ABC جس میں $a = 10$ سینٹی میٹر، $b = 10$ سینٹی میٹر اور $c = 12$ سینٹی میٹر

(ii) $\triangle$ DCE جس میں $d = 12$ سینٹی میٹر، $c = 12$ سینٹی میٹر اور $e = 16$ سینٹی میٹر

(iii) $\triangle$ LMN جس میں $l = 9$ سینٹی میٹر، $m = 9$ سینٹی میٹر اور $n = 12$ سینٹی میٹر

(iv) $\triangle$ PQR جس میں $p = 24$ سینٹی میٹر، $q = 24$ سینٹی میٹر اور $r = 40$ سینٹی میٹر

3. ہیرو کے کلیہ کی مدد سے مساوی اضلاع مثلث کا رقبہ معلوم کریں جس کی ایک ضلع کی لمبائی a سینٹی میٹر ہے۔

4. مثلث کے نامعلوم ضلع کی لمبائی معلوم کریں اور ہیرو کے کلیے کی مدد سے مثلث کا رقبہ بھی معلوم کریں۔

(i) $a = 13$ cm, b = 15 cm, S = 20 cm, $c =$ ____ اور $\triangle$ABC = ____

(ii) $d = 3.6$ cm, e = 4.5 cm, S = 6.0 cm, $f =$ ____ اور $\triangle$DEF = ____

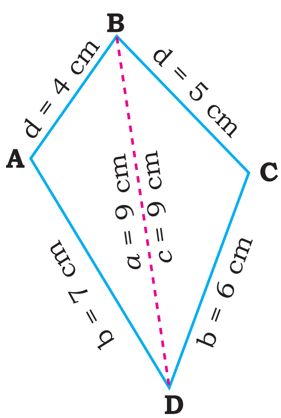
(iii) $l = 7.2$ cm, m = 6.4 cm, S = 10.0 cm, $n =$ ____ اور $\triangle$LMN = ____

(iv) $p = 4.5$ cm, q = 4.5 cm, S = 7.0 cm, $r =$ ____ اور $\triangle$PQR = ____

B. چوکور علاقے کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے ہیرو کے کلیے کا اطلاق کریں اور اس کو بیان کریں۔

پچھلے عنوان میں ہم ہیرو کے کلیے کی مدد سے مثلثی علاقے کا رقبہ معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں اب ہیرو کے کلیے کی مدد سے چوکور علاقے کا رقبہ معلوم کرنا سیکھیں گے۔

آئیں اس مثال پر غور کریں۔



مثال 1. ہیرو کے کلیے کی مدد سے چوکور **ABCD** کا رقبہ معلوم کریں

حل: آئیں چوکور ABCD بنائیں۔ دونوں مخالف راسوں B اور D کو آپس میں ملائیں۔ اس طرح ہمیں دو مثلث Δ ABD اور Δ BCD ملیں گے اب ہم ان دونوں مثلثوں Δ ABD اور Δ BCD کا رقبہ ہیرو کے کلیے سے درج ذیل طریقے کے معلوم کر سکتے ہیں۔

(i) $\triangle ABD: a = 9\text{ cm}, b_1 = 7\text{ cm}, d_1 = 4\text{ cm}$

$$S_1 = \frac{a + b_1 + d_1}{2} = \frac{9 + 7 + 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

ہیرو کے کلیے کی مدد سے

$$\triangle ABD = \sqrt{S_1\ (S_1 - a)\ (S_1 - b_1)\ (S_1 - d_1)}$$
$$= \sqrt{10 \times (10-9) \times (10-7) \times (10-4)}$$
$$= \sqrt{10 \times 1 \times 3 \times 6} = \sqrt{5 \times 2 \times 1 \times 3 \times 3 \times 2}$$
$$= 2 \times 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$
$$= 6 \times 2.4 = 13.44\text{ cm}^2$$

(ii) $\triangle BCD: b_2 = 6\text{ cm}, c = 9\text{ cm}, d_2 = 5\text{ cm}$

$$S_2 = \frac{6 + 9 + 5}{2} = \frac{20}{2} = 10\text{ cm}$$

ہیرو کے کلیے کی مدد سے

$$\triangle BCD = \sqrt{S_2\ (S_2 - b_2)\ (S_2 - c)\ (S_2 - d_2)}$$
$$= \sqrt{10 \times (10-6) \times (10-9) \times (10-5)}$$
$$= \sqrt{10 \times 4 \times 1 \times 5}$$
$$= \sqrt{2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 5}$$
$$= \sqrt{2 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2}$$
$$= 5 \times 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

$= 10 \times 1.41$ (جذر المربع کو دو نقطہ اعشاریہ درست کریں)

$= 14.1$ مربع سینٹی میٹر

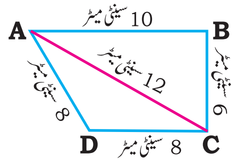
دونوں نتائج کو جمع کرنے سے ہمیں چوکور ABCD کا مطلوبہ رقبہ حاصل ہوتا ہے۔

لہٰذا چوکور ABCD کا کل رقبہ $= \triangle ABD + \triangle BCD$

$= 13.44 + 14.1$

$= 27.54$ مربع سینٹی میٹر

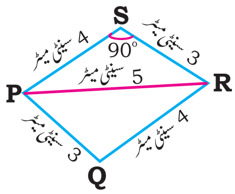
مشق 9.4



1. چوکور علاقہ ABCD کا رقبہ معلوم کریں جب کہ

$m\overline{AB} = 10$ سینٹی میٹر، $m\overline{CD} = 8$ سینٹی میٹر

$m\overline{AC} = 12$ سینٹی میٹر، $m\overline{AD} = 4$ سینٹی میٹر اور $m\overline{BC} = 6$ سینٹی میٹر



2. چوکور PQRS کا رقبہ معلوم کریں جب کہ

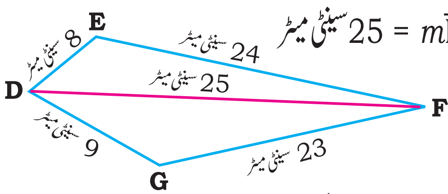
$m\overline{QR} = m\overline{PS} = 4$ سینٹی میٹر

$m\overline{PR} = 5$ سینٹی میٹر اور $m\overline{SR} = m\overline{PQ} = 3$ سینٹی میٹر

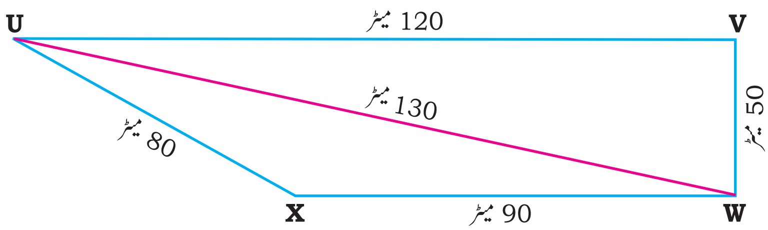
3. چوکور DEFG کا رقبہ معلوم کریں جب کہ

$m\overline{DE} = 8$ سینٹی میٹر، $m\overline{EF} = 24$ سینٹی میٹر، $m\overline{DF} = 25$ سینٹی میٹر

$m\overline{DG} = 9$ سینٹی میٹر اور $m\overline{GF} = 23$ سینٹی میٹر



4. چوکور علاقے کا رقبہ معلوم کریں جس کے اضلاع کی پیمائش نیچے دی گئی ہیں



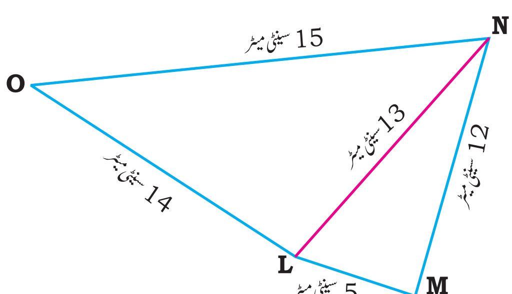
5. چوکور علاقے LMNO کا رقبہ معلوم کریں جب کہ $m\overline{LM} = 5$ سینٹی میٹر

$m\overline{MN} = 12$ سینٹی میٹر،

$m\overline{LN} = 13$ سینٹی میٹر،

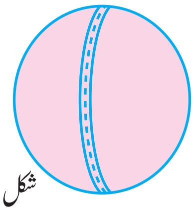
$m\overline{LO} = 14$ سینٹی میٹر

اور $m\overline{NO} = 15$ سینٹی میٹر



9.3 کرے کا سطحی رقبہ اور حجم

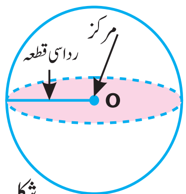
کرہ:



شکل (i)

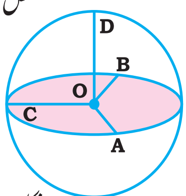
کرکٹ کی گیند، ہاکی کی گیند، والی بال، فٹ بال اور لوہے کا گولا وغیرہ کرے کی مثالیں ہیں۔ شکل (i) ملاحظہ ہو

لہٰذا کرہ ایک ٹھوس شے ہوتی ہے یا ایک منحنی سطح سے گھیرا ہوا ہے جس کی باہر کی سطح کے تمام نقاط ایک نقطے سے برابر فاصلے پر ہوتے ہیں۔



شکل (ii)

کرے کی دی گئی شکل (ii) میں نقطہ O اس کا مرکز ہے۔ مرکز سے کرے کی باہر کی سطح کا فاصلہ اس کا رداس کہلاتا ہے۔ شکل (iii) میں



شکل (iii)

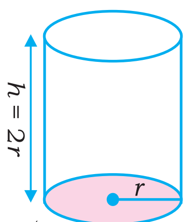
$\overline{OA}$، $\overline{OB}$، $\overline{OC}$، $\overline{OD}$ اس کے رداس ہیں اور

$$m\overline{OB} = m\overline{OC} = m\overline{OA} = m\overline{OB} = r$$

کیوں کہ نقاط A، B، C اور D اس کے باہر کی سطح پر واقع ہیں۔

9.3.1 کرے کی سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کرنا

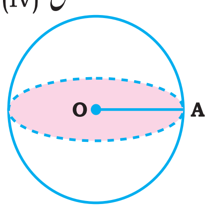
(A) کرے کی سطح کا رقبہ



شکل (iv)

مشہور سائنس دان ارشمیدس نے دریافت کیا کہ کرے کی سطح کا رقبہ، اس بیلن کی منحنی سطح کے رقبے کے برابر ہوتا ہے جس کا رداس کرے کے رداس کے برابر اور اونچائی کرے کے قطر کے برابر ہوتی ہے، جیسے

$$h = 2r$$



شکل (v)

شکل (v) پر غور کریں اور فرض کریں کہ کرے کا رداس $= r$

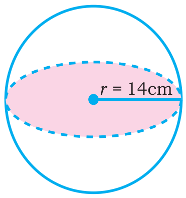
شکل (iv) پر غور کریں بیلن کا رداس بھی r کے برابر ہے۔ بیلن کی اونچائی $h = 2r$ ہے

ہم پہلے ہی پچھلی جماعتوں میں سیکھ چکے ہیں کہ بیلن کی منحنی سطح کا رقبہ $= 2\pi r^2$

اب کرے کی سطح کا رقبہ $= 2\pi r\,(2r) = 4\pi r^2 \quad (\because h = 2r)$

$$\boxed{\text{پس کرے کی سطح کا رقبہ} = 4\pi r^2}$$

مثال 1. کرے کی سطح کا رقبہ معلوم کریں جب کہ اُس کا رداس = 14 سینٹی میٹر اور $\pi = \frac{22}{7}$



حل: کرے کی سطح کا رقبہ = $A = 4\pi r^2$

$$A = 4\times\frac{22}{7}\times(14)^2 = 4\times\frac{22}{\cancel{7}_1}\times\overset{2}{\cancel{14}}\times 14$$
$$= 8\times 22\times 14 = 176\times 14 = 2464\ cm^2$$

پس دیئے گئے کرے کی سطح کا رقبہ 2464 مربع سینٹی میٹر ہے۔

مثال 2. کرے کا رداس معلوم کریں اگر اس کی سطح کا رقبہ 5544 مربع سینٹی میٹر ہو۔

حل: کرے کی سطح کا رقبہ = $A = 4\pi r^2$ ، یا $r^2 = \frac{A}{4\pi}$

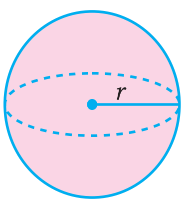
یا $r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$

کرے کا رداس = $r = \sqrt{\frac{5544\times 7}{4\times 22}}$ $\quad \sqrt{\frac{\overset{\overset{63}{\cancel{693}}}{\cancel{1386}}\hspace{-2em}\cancel{5544}\times 7}{\underset{1}{\cancel{4}}\times\underset{11}{\cancel{22}}}}$

$$\therefore r = \sqrt{63\times 7} \Rightarrow r = \sqrt{\underline{3\times 3}\times\underline{7\times 7}} \Rightarrow r = 3\times 7 = 21cm$$

لہٰذا دیئے گئے کرے کا رداس 21 سینٹی میٹر ہے۔

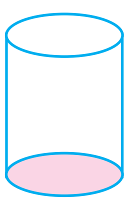
(B) کرے کا حجم



فرض کریں کرے کا رداس r ہے اور بیلن کا رداس r اور اونچائی $2r = h$

بہت سے تجربات کے بعد یہ معلوم ہوا کہ کرے کا حجم = V = بیلن کے حجم کا دو تہائی ہوتا ہے

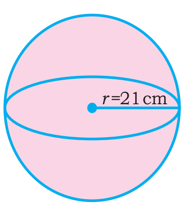
$$V = \frac{2}{3}\times\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^2(2r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$



پس کرے کا حجم $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

مثال 1. کرے کا حجم معلوم کریں اگر اس کا رداس ہے: (i) $r = 7$ cm (ii) $r = 2.1$ m

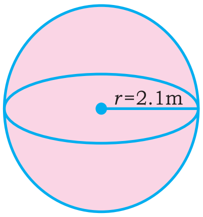
حل: کرے کا حجم = $\frac{4}{3}\pi r^3$



$$V = \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(7)^3 = \frac{4\times 22\times\overset{1}{\cancel{7}}\times 7\times 7}{3\times\cancel{7}_1}$$
$$= \left(\frac{4}{3}\times 22\times 1\times 7\times 7\right)cm^3 = \frac{4312}{3}\ cm^3 = 1437.33cm^3$$

پس کرے کا حجم 1437.33 مکعب سینٹی میٹر ہے۔

حل (ii): کرے کا حجم $= V = \frac{4}{3}\pi r^3$



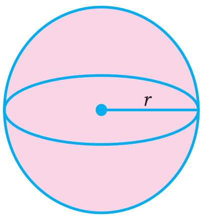
$$V = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (2.1)^3 m^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{21}{10}\right)^3$$

$$= \frac{4}{\cancel{3}_1} \times \frac{22}{\cancel{7}} \times \frac{\cancel{21}^{\,1\,\cancel{7}}}{10} \times \frac{21}{10} \times \frac{21}{10}$$

$$= \frac{4 \times 22 \times 21 \times 21}{10 \times 10 \times 10} = \frac{38808}{1000} m^3 = 38.808 \ m^3$$

اس لئے دیئے گئے کرے کا حجم 38.808 مکعب میٹر ہے۔

مثال 2. کرے کا حجم معلوم کریں جس کی سطح کا رقبہ 5544 مربع سینٹی میٹر ہے۔



حل: فرض کریں r کرے کا رداس ہے۔

اس لئے $A = 4\pi r^2 = 5544$

یا $r^2 = \frac{5544}{4\pi} = \frac{5544}{4 \times \frac{22}{7}} = \frac{5544 \times 7}{4 \times 22}$

یا $r^2 = \frac{\cancel{5544}^{\,63\ \cancel{693}\ \cancel{1386}} \times 7}{\cancel{4}_1 \times \cancel{22}_{\cancel{11}_1}} = 63 \times 7 = 3 \times 3 \times 7 \times 7 = 3^2 \times 7^2$

$$r = \sqrt{3^2 \times 7^2} = 3 \times 7 = 21 \text{ cm} = \frac{21}{100} \text{m} = 0.2\ 1\text{m}$$

اس لئے $r = 0.21$ m

ہم جانتے ہیں کہ کرے کا حجم $= V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\therefore \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \left[\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (0.21)^3\right]$$

یا $V = \left[\frac{4 \times 22 \times \cancel{0.21}^{\,0.1\ \cancel{0.7}} \times 0.21 \times 0.21}{\cancel{3} \times \cancel{7}_1}\right]$

یا $V = (88 \times 0.1 \times 0.21 \times 0.21) m^3 = 0.038808 \ m^3$

نوٹ: ہم جانتے ہیں 1 مکعب میٹر = 1000 لیٹر

اس لئے دیئے گئے کرے کی گنجائش (حجم) = 0.038808 مکعب میٹر

= (0.038808 × 1000) لیٹر = 38.808 لیٹر

پس کرے کی گنجائش 38.808 لیٹر ہے۔

مشق 9.5

1. ذیل میں ہر کرے کی سطح کا رقبہ معلوم کریں جس کے رداس نیچے دیئے گئے ہیں۔

(i) 35 سم (ii) 56 سم (iii) 0.42 سم (iv) 0.63 سم (v) 0.98 سم

2. ذیل میں دیئے گئے ہر کرے کا رداس معلوم کریں جس کی سطح کا رقبہ نیچے دیا گیا ہے۔

(i) 616 مربع سم (ii) 2464 مربع سم (iii) 88704 مربع سم

(iv) 985.6 مربع میٹر (v) 154 مربع میٹر

3. ذیل میں دیئے گئے ہر ایک کرے کا حجم معلوم کریں جس کے رداس ہیں۔

(i) 21 سم (ii) 49 سم (iii) 2.8 میٹر (iv) 77 سم (v) 3.5 میٹر

4. ایک کرے میں کتنا لیٹر پانی آئے گا جس کا رداس نیچے دیا گیا ہے۔

(i) 70 سم (ii) 105 سم (iii) 2.8 میٹر (iv) 175 سم (v) 2.45 میٹر

5. کرے کا حجم اور اس میں گنجائش لیٹر میں معلوم کریں جس کا رقبہ نیچے دیا گیا ہے۔

(i) 2464 مربع میٹر (ii) 9856 مربع میٹر (iii) 29.8144 مربع میٹر

(iv) 43.12 مربع میٹر (v) 13.68 مربع میٹر

6. اگر کرے کا رداس دُگنا کر دیا جائے تو (a) سطح کا رقبہ اور (b) حجم میں تبدیلی معلوم کریں۔

7. کرہ A کا رداس کرہ B کے مقابلے میں تین گنا ہے تو معلوم کریں۔

(i) ان کے سطحی رقبوں میں نسبت (ii) ان کے حجم میں نسبت

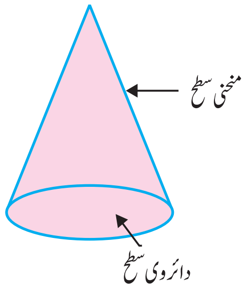
8. لوہے کے کرے کا سطحی رقبہ 77000 مربع سینٹی میٹر ہے تو اُس کا حجم کیا ہوگا۔ اگر اس کو پگھلایا جائے تو اس سے ایک سینٹی میٹر رداس کے کتنے کرے بنائے جا سکتے ہیں۔

9. 7 سینٹی میٹر ٹھوس تانبے (Copper) کے کرے کو پگھلایا جاتا ہے اور اس سے 0.7 سینٹی میٹر قطر کی تار بنائی جاتی ہے تو تار کی لمبائی معلوم کریں۔

10. 12 سینٹی میٹر رداس کی فٹ بال کا حجم معلوم کریں۔

9.3.2 مخروط کی سطح اور حجم معلوم کرنا

تعریف: دی گئی شکل مخروط کی شکل ہے۔



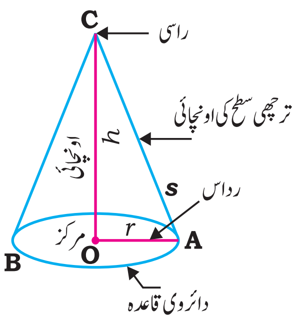
آئیں مخروط کی شکل کو غور سے دیکھیں:

ایک ٹھوس مخروط کے دو حصے ہوتے ہیں۔

(i) منحنی سطح: یہ راس سے شروع ہوتی ہے اور دائروی علاقے پر ختم ہوتی ہے۔

(ii) دائروی سطح: یہ مخروط کا قاعدہ ہوتا ہے۔ یہ دائروی سطحی علاقہ ہوتا ہے۔

پس ایک مخروط کے پانچ مختلف عناصر ہوتے ہیں جیسا کہ ذیل کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔



1. نقطہ C مخروط کا راس ہے۔

2. مخروط کے دائروی قاعدہ کا مرکز نقطہ O ہے۔

3. مخروط کے دائروی قاعدہ کا رداس ہے: $m\overline{OA} = r$

4. اونچائی: یہ مخروط کے راس C اور مرکز O کو ملانے والے خط $\overline{CO}$ کی پیمائش ہے اور یہ رداسی قطعہ پر عمود بھی ہوتا ہے۔

5. مخروط کی ترچھی سطح کی اونچائی ہے: $m\overline{AC}$ یا $m\overline{BC}$

(A) مخروط کی سطح کا رقبہ معلوم کرنا

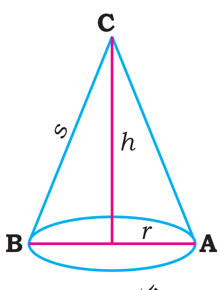
آئیں مخروط کی سطح کا رقبہ معلوم کرنے کا کلیہ اخذ کرتے ہیں۔

مخروط کی سطح کا رقبہ، دائروی علاقے اور مخروط کی منحنی سطح کے رقبے پر مشتمل ہوتا ہے، جیسے

مخروط کی سطح کا رقبہ = دائروی علاقے کا رقبہ + منحنی سطح کا رقبہ

ہم پہلے ہی سیکھ چکے ہیں کہ دائروی علاقے کا رقبہ = πr^2 جہاں r اس کا رداس ہے

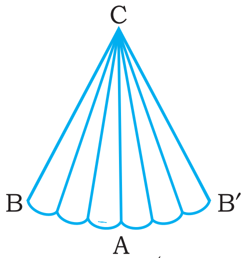
اب ہم منحنی سطح کا رقبہ معلوم کرتے ہیں



شکل (i)

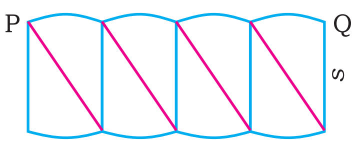
فرض کریں مخروط کی اونچائی اور ترچھی سطح کی اونچائی بالترتیب h اور s ہیں

اگر ہم مخروط کو راس C سے لے کر سیدھا نقطہ B تک قینچی سے کاٹیں اور اُسے پھیلائیں تو ہمیں قطعہ 'CBB ملے گا۔
پھر اگر ہم مخروط کو راس C سے سیدھا نقطہ B تک قینچی سے کاٹیں اور پھیلائیں تو ہمیں قطعہ 'CBAB مرکز C پر ملیں گے اور رداس ترچھی اونچائی کے برابر ہو گی جیسا کہ شکل (ii) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل (ii)

اب اگر قطعہ کے قوس کو چھوٹے چھوٹے حصوں میں تقسیم کیا جائے اور پھر ان کو نقطہ C کے ساتھ جوڑیں تو ہم دیکھیں گے کہ قطعہ کا رقبہ چھوٹے چھوٹے مثلثی علاقوں پر مشتمل ہو گا۔ جن کو ان کے رداسی قطعہ کے ساتھ اوپر نیچے جوڑا گیا ہے۔ پس ہمیں ایک مستطیلی شکل ملے گی جیسا کہ شکل (ii) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل (iii)

آئیں اب ان اشکال کو غور سے دیکھیں اور پھر نتائج کو لکھیں جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے

شکل (i) میں مخروط کے دائروی قاعدے کا محیط $= 2\pi r$

شکل (ii) میں قطعہ کے قوس کی لمبائی $= 2\pi r$

شکل (iii) مستطیلی علاقے کے ضلع $m\overline{OA}$ کی لمبائی $= \frac{1}{2}(2\pi r) = \pi r$

مستطیل کی چوڑائی $= s$

مستطیل کا رقبہ = لمبائی × چوڑائی

$= s \times m\overline{PQ}$

$= s \times \pi r = \pi r s$

پس مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ = ترچھی سطح کی لمبائی × قاعدے کا رداس × $\pi = \pi r s$

دائروی علاقے کا رقبہ $= \pi r^2$

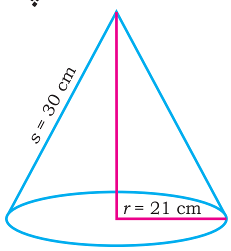
پس مخروط کا کل سطحی رقبہ = مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ + دائروی علاقے کا رقبہ

$= \pi r s + \pi r^2 = \pi r(S + r)$

$$\boxed{\text{مخروط کا کل سطحی رقبہ} = \pi r(r + S)}$$

علامتوں کا مطلب اوپر بیان کیا جا چکا ہے

مثال 1. مخروط کے دائروی قاعدے کا رداس 21 سینٹی میٹر ہے اور اس کی ترچھی سطح کی اونچائی 30 سینٹی میٹر ہے۔ تو اس کی منحنی سطح کا رقبہ معلوم کریں۔



حل: مخروط کے قاعدے کا رداس $= r = 21$ سینٹی میٹر

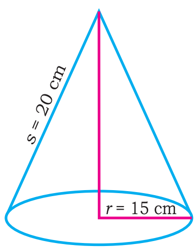
ترچھی سطح کی اونچائی $= s = 30$ سینٹی میٹر

منحنی سطح کا رقبہ $= A = \pi rs$

$$= \frac{22}{7} \times 21 \times 30 = \frac{22}{\cancel{7}_1} \times \cancel{21}^3 \times 30$$

$= 22 \times 3 \times 30 = 1980$ پس دیئے ہوئے مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ 1980 سینٹی میٹر ہے۔

مثال 2. مخروط کے قاعدے کا رداس 15 سینٹی میٹر ہے اور ترچھی سطح کی اونچائی 20 سینٹی میٹر ہے، تو اس کا کل سطحی رقبہ معلوم کریں۔



حل: مخروط کے قاعدے کا رداس $= r = 15$ سینٹی میٹر

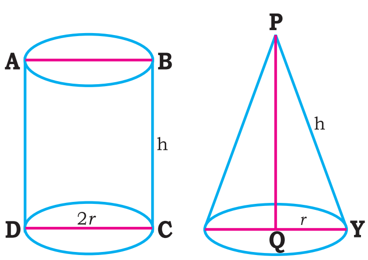
ترچھی سطح کی اونچائی $= s = 20$ سینٹی میٹر

کل سطحی رقبہ $= \pi r\,(r + s)$

$$= \frac{22}{7} \quad 15\,(15 + 20) = \frac{22 \times 15}{\cancel{7}_1} \times \cancel{35}^5$$

$= 22 \times 75 = 1650$ پس دیئے ہوئے مخروط کا کل سطحی رقبہ 1650 مربع سینٹی میٹر ہے۔

(B) مخروط کا حجم معلوم کرنا



مخروط کا حجم معلوم کرنے کے لئے کلیہ سرگرمی کے ذریعے اخذ کرنا

سرگرمی: خالی اور ایک طرف سے کھلا ہوا بیلن اور مخروط لیں

مخروط اور بیلن کے قاعدوں کی لمبائیاں برابر اور دونوں کی عمودی لمبائیاں (اونچائی) بھی ایک جیسی ہونی چاہیے۔

مخروط اور بیلن کی اشکال کو غور سے دیکھیں۔

یہ مشاہدہ کیا گیا ہے کہ $2r = m\overline{CD} = m\overline{XY}$ جہاں r مخروط اور بیلن کے دائروی سطح کے رداس کو ظاہر کرتی ہے اور h دونوں کی اونچائی کو ظاہر کرتا ہے۔ اب مخروط پانی یا ریت سے بھریں اور بیلن میں انڈیل دیں۔ اس عمل کو دوسری اور تیسری مرتبہ دہرائیں اور مشاہدہ کریں کہ بیلن پانی کی یا ریت سے مکمل بھر گیا ہے اس سے یہ نتیجہ اخذ کیا جاتا ہے کہ بیلن میں پانی یا ریت کی مقدار مخروط کے مقابلے میں تین گنا ہے۔ تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ مخروط کا حجم بیلن کے حجم کا ایک تہائی ہوتا ہے اگر ان کے رداس اور اونچائیاں ایک جیسی ہو۔

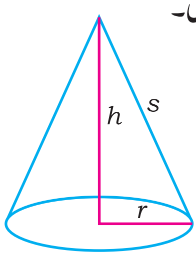
پس مخروط کا حجم = (بیلن کا حجم) $\frac{1}{3}$ [جب کہ اونچائیاں اور قاعدوں کے رداس ایک جیسے ہوں۔]

ہم جانتے ہیں کہ بیلن کا حجم = $\pi r^2 h$

پس مخروط کا حجم = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

جبکہ r مخروط اور بیلن کے دائروی سطح کے رداس کو ظاہر کرتی ہے اور h دونوں کی اونچائی کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال 1. مخروط کا رداس 2.7 میٹر اور اونچائی 3.5 میٹر ہے۔ مخروط کا حجم معلوم کریں۔



حل: مخروط کے دائروی علاقے کا رداس = r = 2.7 میٹر

مخروط کی اونچائی = h = 3.5 میٹر

اب مخروط کا حجم = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (2.7)^2 \times (3.5)$$

$$= \frac{1 \times 22 \times \overset{0.9}{\cancel{2.7}} \times 2.7 \times \overset{0.5}{\cancel{3.5}}}{{}_1\cancel{3} \times \cancel{7}_1}$$

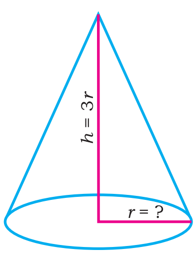
$$= 22 \times 0.9 \times 2.7 \times 0.5 = 26.73\ \text{m}^3$$

پس دیئے گئے مخروط کا حجم 26.73 مکعب میٹر ہے

مثال 2. مخروط کے قاعدے کا رقبہ 154 مربع سینٹی میٹر ہے اگر اس کی اونچائی قاعدے کے رداس کے تین گنا ہے تو حجم معلوم کریں۔

حل: مخروط کے قاعدے کا رقبہ معلوم کرنے کا کلیہ $A = \pi r^2$ ہے۔

یہاں قاعدے کا رقبہ 154 مربع سینٹی میٹر دیا گیا ہے۔



لہٰذا $A = \pi r^2$ یا $154 = \frac{22}{7} r^2$

یا $r^2 = 154 \times \frac{7}{22}$

یا $r^2 = \frac{154 \times 7}{22}$ یا $r^2 = \frac{\overset{7}{\cancel{\overset{77}{\cancel{154}}}} \times 7}{\cancel{22}_1} = 49$

یا $r^2 = 7 \times 7$ یا $r^2 = 7^2$

یا $r = 7\text{cm}$

لہٰذا $r = 7$ سینٹی میٹر اور $h = 3r = 3 \times 7 = 21$ سینٹی میٹر

مخروط کا حجم: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $(r = 7\text{ cm},\ h = 21\text{ cm})$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7^2 \times 21 = \frac{1 \times 22 \times 7 \times 7 \times \cancel{21}^{\cancel{7}^{1}}}{{}_1\cancel{3} \times \cancel{7}_1}$$

$$= 22 \times 49 = 1078\text{ cm}^3.$$

پس دیئے گئے مخروط کا حجم 1078 مکعب میٹر ہے۔

مشق 9.6

1. نیچے دیئے گئے جدول میں مخروط کے نامعلوم عنصر معلوم کریں۔

نمبر شمار	رداس r	اونچائی h	ترچھی اونچائی $s = \sqrt{h^2 + r^2}$	مخروط کے قاعدے کا رقبہ $A_1 = \pi r^2$	مخروط کے منحنی سطح کا رقبہ $A_2 = \pi rs$	مخروط کی سطح کا کل رقبہ $A = \pi rs(r+s)$
(i)	24 سینٹی میٹر	28 سینٹی میٹر				
(ii)		56 سینٹی میٹر	70 سینٹی میٹر			
(iii)			32 سینٹی میٹر			
(iv)		84 سینٹی میٹر				
(v)	84 سینٹی میٹر					33264 مربع سینٹی میٹر

2. نیچے دی گئی جدول میں نامعلوم مقداریں معلوم کریں:

نمبر شمار	مخروط کا رداس $r =$	مخروط کی اونچائی $h =$	مخروط کی ترچھی سطح کی اونچائی $s = \sqrt{h^2 + r^2}$	مخروط کا حجم $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
(i)	3 سینٹی میٹر	h = سینٹی میٹر		
(ii)	3.5 سینٹی میٹر	h = 6 سینٹی میٹر		
(iii)		28 سینٹی میٹر	35 سینٹی میٹر	
(iv)		14 سینٹی میٹر		154 مکعب سینٹی میٹر
(v)	6.3 سینٹی میٹر		105 سینٹی میٹر	

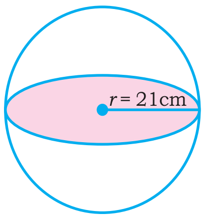
3. مخروط کے قاعدہ کا رقبہ 2464 مربع سینٹی میٹر ہے اگر اس کی اونچائی قاعدے کے رداس کا تین گنا ہے تو اس کا حجم معلوم کریں۔

4. مخروط کا حجم 352 مکعب سینٹی میٹر ہے اگر اس کا رداس 4 سینٹی میٹر ہے تو مخروط کی اونچائی معلوم کریں۔

5. اگر مخروط کا رداس 3.5 میٹر ہے اور اونچائی 6 میٹر ہو تو اس کا حجم معلوم کریں۔

9.3.3 کرے اور مخروط کے سطحی رقبہ اور حجم پر مشتمل روزمرہ زندگی کے مسائل حل کرنا

مثال 1. 21 سینٹی میٹر رداس کے تانبہ کے کرے کو پگھلایا جاتا ہے اور اُس سے 0.42 قطر کا تانبہ تار بنایا جاتا ہے تو تار کی لمبائی معلوم کریں۔



حل: 21 سینٹی میٹر رداس کے تانبہ کے کرے کو پگھلایا جائے تو کرے کا حجم ہو گا۔

کرے کا حجم: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$، جبکہ $r = 21$ سینٹی میٹر

$$V = \frac{4}{\cancel{3}_1} \times \frac{22}{\cancel{7}_1} \times \cancel{21}^{1} \times 21 \times 21 = 88 \times 441 = 38,808\ \text{cm}^3$$

اب تار کا رقبہ $A = 4\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$

$$A = 4 \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{0.42}{2}\right)^2 = \frac{\cancel{4}^{2} \times 22 \times 0.42 \times 0.\cancel{42}^{0.06}}{\cancel{7}_1 \times \cancel{2}_1 \times \cancel{2}_1}$$

$$= 22 \times 0.42 \times 0.06 = 0.5544\ \text{cm}^2$$

$$\text{تار کی لمبائی} = \frac{\text{تانبہ کے کرے کا حجم}}{\text{تار کے دائروی حصے کا سطحی رقبہ}}$$

$$= \frac{38808}{0.5544} = 70000\ \text{cm} = (\quad 1\text{m} = 100\ \text{cm})$$

$$= \left(\frac{70000}{100}\right)\text{m} = 700\ \text{m}$$

پس تار کی مطلوبہ لمبائی 700 میٹر ہے

مثال 2. ایک مخروط نما خیمہ 14 میٹر اونچا ہے اور اُس کا قاعدہ 10.5 میٹر رداس کا ہے تو خیمے میں استعمال ہونے والے کپڑے کا رقبہ معلوم کریں اور خیمے کا حجم بھی معلوم کریں۔

حل: مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ $A = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$

$$A = \left(\frac{22}{7} \times (10.5) \times \sqrt{(14)^2 + (10.5)^2}\right)$$

$$= \left(\frac{22}{7} \times 10.5 \times \sqrt{196 + 110.25}\right)$$

$$= \left(\frac{22}{7} \times 10.5 \times \sqrt{306.25}\right) m^2 = \left(\frac{22}{7} \times 10.5 \times 17.5\right)$$

$$= \left(\frac{22 \times \cancel{10.5}^{1.5} \times 17.5}{\cancel{7}_1}\right) m^2 = (33 \times 17.5) m^2 = 577.5\ m^2$$

اب مخروط کا حجم $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \left(\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (10.5)^2 \times 14\right) m^3$

$$= \left(\frac{1 \times 22 \times \cancel{10.5}^{\cancel{3.5}\ 0.5} \times 10.5 \times 14}{\cancel{3}_1 \times \cancel{7}_1}\right) m^3$$

$$= \left[(22 \times 0.5) \times (10.5 \times 14)\right] m^3 = (11 \times 147)\ m^3 = 1617\ m^3$$

پس خیمے میں استعمال ہونے والے مطلوبہ کپڑے کا رقبہ 577.5 مربع میٹر ہے اور خیمے کا حجم 1617 مکعب میٹر ہے۔

مشق 9.7

1. کرے کا حجم کیا ہو گا اگر اُس کا رداس 7 سینٹی میٹر ہو۔

2. ایک مخروطی کپ آئس کریم سے بھرا ہوا ہے۔ آئس کریم کی مقدار کیا ہو گی اگر مخروط کا رداس اور لمبائی بالترتیب 6 سینٹی میٹر اور 10.5 سینٹی میٹر ہوں؟

3. ایک مخروطی خیمے کی اونچائی 4.2 میٹر اور اُس کے قاعدے کا رداس 5.6 میٹر ہے تو اُس کا حجم معلوم کریں۔

4. ایک مخروطی کنٹینر میں کتنی شکر آسکتی ہے جس کی اونچائی 7 میٹر اور رداس 6 میٹر ہے جب 1 مکعب میٹر جگہ میں 100 کلو گرام شکر آسکتی ہے۔

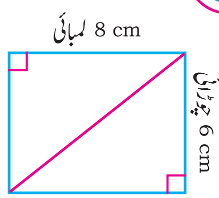
5. ایک مخروطی شکل کا پانی کا ٹینک اس طرح لگایا گیا ہے کہ اُس کا دائروی علاقہ زمین پر رکھا ہوا ہے۔ ٹینک کی گہرائی 7 میٹر اور دائروی علاقے کا رداس 3 میٹر ہے۔ تو کتنا لیٹر پانی ٹینک میں بھرا جائے گا؟

6. ایک مخروطی پانی کے ٹینک کی اونچائی 6.3 میٹر اور اُس کا قاعدہ کا رداس 8.4 میٹر ہے۔ پانی کے ٹینک کا حجم کیا ہے؟

7. غبارے کی سطح کا رداس کیا ہو گا جبکہ اس کا حجم $\frac{9\pi}{16}$ مکعب سینٹی میٹر ہے؟

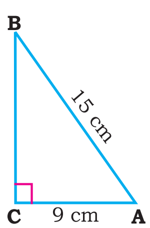
جائزہ مشق 9

درست جواب کا انتخاب کریں:



1. مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی بالترتیب 8 سینٹی میٹر اور 6 سینٹی میٹر ہے، اُس کے وتر کی لمبائی ہو گی

(i) 12 سینٹی میٹر (ii) 16 سینٹی میٹر (iii) 10 سینٹی میٹر (iv) 14 سینٹی میٹر



2. دی گئی شکل قائمۃ الزاویہ مثلث ABCD ہے تو عمود کی لمبائی ________ ہے۔

(i) 10 سینٹی میٹر (ii) 12 سینٹی میٹر (iii) 14 سینٹی میٹر (iv) 16 سینٹی میٹر

3. ہیرو کے کلیہ کا بیان ہے:

(i) $\triangle = \sqrt{S(S+a)(S+b)(S+c)}$ (ii) $\triangle = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

(iii) $\triangle = \sqrt{S+(S-a)+(S-b)+(S-c)}$ (iv) $\triangle = \sqrt{S(S-a-b-c)}$

4. ہیرو کے کلیہ میں S کی قیمت ہے:

(i) $S = \dfrac{a-b-c}{2}$ (ii) $S = \dfrac{a+b-c}{2}$ (iii) $S = \dfrac{a+b+c}{2}$ (iv) $S = \dfrac{a+b+c}{3}$

5. کرے کی سطحی رقبہ معلوم کرنے کا کلیہ جب رداس r ہو

(i) $A = \pi r^2$ (ii) $A = 3\pi r^2$ (iii) $A = 2\pi r^2$ (iv) $A = 4\pi r^2$

6. کرے کا حجم معلوم کرنے کا کلیہ جب رداس r ہو

(i) $V = \dfrac{2}{3}\pi r^2$ (ii) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^2$ (iii) $V = \dfrac{3}{4}\pi r^3$ (iv) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

7. مرکب کسر میں π کی قیمت ہے

(i) $3\dfrac{1}{7}$ (ii) $3\dfrac{2}{7}$ (iii) $3\dfrac{3}{7}$ (iv) $3\dfrac{4}{7}$

8. مخروط میں $r = 1$ اور $h = 3$ میٹر تو اس کا حجم ہے

(i) $\pi\, m^3$ (ii) $\pi\, m^2$ (iii) $\pi\, m$ (iv) π

9. مخروط کے قاعدہ کا رداس 1 میٹر ہے تو اُس کے قاعدہ کا رقبہ ہے

(i) $\pi\, m$ (ii) $\pi\, m^2$ (iii) $\pi\, m^3$ (iv) π

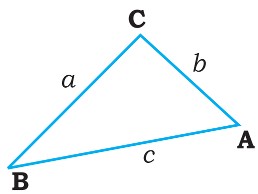
10. فرض کریں مخروط کی ترچھی اونچائی 5 میٹر ہے اور اُس کا رداس 2 میٹر ہے تو مخروط کا کل سطحی رقبہ ہوگا

(i) 11 مربع میٹر (ii) 22 مربع میٹر (iii) 33 مربع میٹر (iv) 44 مربع میٹر

خلاصہ

- مسئلہ فیثاغورث کے مطابق کسی قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی کا مربع باقی دو اضلاع (عمود اور قاعدہ) کی لمبائیوں کے مربعے کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

جیسے $(\text{قاعدہ})^2 + (\text{عمود})^2 = (\text{وتر})^2$



- مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے تیسرے ضلع کی لمبائی معلوم کی جاسکتی ہے جب دوسرے دو اضلاع کی لمبائیاں معلوم ہو:

(i) $H^2 = P^2 + B^2$ (ii) $P^2 = H^2 - B^2$ (iii) $B^2 = H^2 - P^2$

- اگر کسی مثلث کے تین اضلاع a، b، c ہو تو ہیرو کے کلیہ کے ذریعے مثلث کا رقبہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

$\triangle ABC = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$ $\quad S = \dfrac{a+b+c}{2}$

- چوکور کا رقبہ بھی ہیرو کے کلیے کی مدد سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔
- کرے کی سطحی رقبہ کلیے سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

$A = 4\pi r^2$ یہاں r کرے کا رداس ہے۔

- کرے کا حجم کلیے کی مدد سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔
- $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ یہاں r کرے کا رداس ہے۔
- مخروط کے دو حصے ہوتے ہیں: (i) دائروی قاعدہ (ii) منحنی سطح
- مخروط کے قاعدے کا رقبہ πr^2 ہوتا ہے۔
- مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ πrs ہوتا ہے یہاں r رداس اور s ترچھی اونچائی ہے۔
- مخروط کی سطح کا کل رقبہ = قاعدے کا رقبہ + منحنی سطح کا رقبہ

$= \pi rs + \pi r^2 = \pi r(r+s)$

- مخروط کا حجم $= \dfrac{1}{3} \times (\text{مخروط کا رقبہ}) \times (\text{مخروط کی اونچائی})$

پس $V = \dfrac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$ یا $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

یونٹ 10

اثباتی جیومیٹری (علم ہندسہ)

10.1 اثباتی جیومیٹری

(i) اثباتی جیومیٹری کی تعریف:

'اثباتی جیومیٹری' علم ریاضی کی ایک شاخ ہے جس میں جیومیٹریائی اشکال (یعنی مسائل اثباتی) کو منطقی استدلال سے ثابت کیا جاتا ہے۔

لفظ 'Demonstrate' لاطینی لفظ 'Demonstratum' سے مشتق ہے جس سے مراد 'تیقّن کے ساتھ ثبوت' دینا ہے (To prove with certainty)

10.1.1 استدلال:

استدلال کی بنیادی خصوصیات

سوچنے سمجھنے یا غور وخوص کرنے کے اس منطقی عمل کو استدلال کہتے ہیں جس سے کسی اہم نتیجہ یا فیصلہ پر پہنچا جاتا ہے۔ استدلال استقرائی (Inductive) یا استخراجی (Deductive) دو طرح کے ہو سکتے ہیں۔

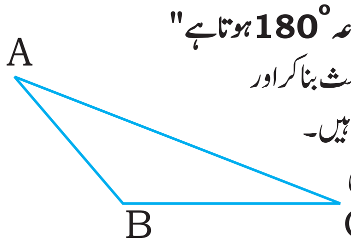
روزمرہ زندگی میں اکثر و بیشتر ایسے مواقع آتے ہیں کہ ہم مشاہدہ کی بنیاد پر نتائج اخذ کرتے ہیں۔ مثلاً ہم کسی نئے ملک کی سیاحت کو گئے اور دیکھا کہ یہاں پیلے رنگ کی بسیں چل رہی ہیں۔ اور واپسی پر اپنے ملک میں ایک حتمی رائے کا اظہار کر دیا کہ

"مذکورہ ملک میں تمام بسیں پیلے رنگ کی ہیں"

اس طرح کسی عمومی نتیجہ پر پہنچنا استقرائی طریقہ استدلال (Inductive Reasoning) کہلاتا ہے۔
لیکن اس طریقہ استدلال کے ساتھ مسئلہ یہ ہے کہ تمام احتیاطوں کے باوجود استقرائی طریقہ سے حاصل شدہ نتیجے کے صحیح ہونے کا یقین نہیں کیا جا سکتا جیسا کہ مذکورہ بالا مثال میں ہو سکتا ہے کہ کسی مخصوص وقت پر یا کسی مخصوص علاقے میں سرخ رنگ کی بسیں چل رہی ہوں جن تک ہماری رسائی نہ ہو سکی کیونکہ ہمارا دورہ محدود وقت کیلئے تھا۔

اب درج ذیل بیانیے پر غور کیجئے:

"کسی بھی مثلث کے تینوں زاویوں کی مقدار کا مجموعہ 180° ہوتا ہے"



مذکورہ بیان کی صحت کو ثابت کرنے کیلئے ہم مختلف قسم اور سائز کے مثلث بنا کر اور ہر مثلث کے تینوں زاویوں کی پیمائش کر کے ان کا مجموعہ معلوم کر سکتے ہیں۔

سرگرمی: اس کلاس کا ہر طالب علم سامنے دیئے گئے مثلث کے تینوں زاویوں کی پیمائش کرے اور ان کا مجموعہ معلوم کرے:

$m\angle A$ = _____, $m\angle B$ = _____, $m\angle C$ = _____, مجموعہ = _____

طلباء کے جوابات سے ظاہر ہوتا ہے کہ چند طلباء نے زاویوں کا مجموعہ 179° نکالا ہے جبکہ اکثر کے مجموعہ 181° ہے۔ بہت تھوڑے سے طلباء نے زاویوں کا مجموعہ 180° نکالا ہے یہاں تک کہ ایک یا دو طلباء نے مجموعہ 178° یا 182° بھی نکالا ہے۔

پس اس سر گرمی سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ استقرائی طریقہ استدلال اکثر اوقات قابل اعتماد نہیں ہوتے اور اس طرح کے استدلال کو استعمال کرنے کیلیئے بہت احتیاط کی ضرورت ہوتی ہے۔ مزید یہ کہ یہ طریقہ استدلال کافی وقت طلب بھی ہے۔ اس کے بر عکس استخراجی طریقہ استدلال (Deductive Reasoning) میں ہم عمومی نتائج سے خصوصی نتائج اخذ کرتے ہیں۔ مثلاً ہمارے علم میں ہے کہ "ہر شخص فانی ہے"
اس حقیقت سے ہم مخصوص افراد کے بارے میں نتائج اخذ کر سکتے ہیں۔

جمیل ایک آدمی ہے　　　اس لئے جمیل فانی ہے
صغیر ایک آدمی ہے　　　اس لئے صغیر فانی ہے

استخراجی طریقہ استدلال میں یقین کا عنصر ہمیشہ موجود ہوتا ہے۔ ہم ایک بیان کو اس لئے صحیح مانتے ہیں کیونکہ یہ اُن بیانات سے ماخوذ ہوتا ہے جو پہلے ہی صحیح تسلیم کیے جا چکے ہوتے ہیں اسی لئے ہم جیو میٹری کو استخراجی طریقہ استدلال کے تحت مطالعہ کرتے ہیں کیونکہ اس کے مطابق کسی بیان سے نئے بیانیے یقین کے ساتھ اخذ کیے جا سکتے ہیں۔
علم کی کوئی بھی شاخ جو استخراجی طریقے سے متعلق ہو مندرجہ ذیل اوصاف رکھتی ہے جنہیں استدلال کی بنیادی خصوصیات (Basics of Reasoning) کہتے ہیں جو کہ درج ذیل ہیں۔

1. غیر تعریف شدہ اصطلاحات: کچھ تصورات کو بغیر تعریف کے قبول کر لیے جاتے ہیں جنہیں "عدَ تعریف شدہ اصطلاحات" (Undefined Terms) کہتے ہیں۔ جیو میٹری میں نقطہ، خط، مستوی اور مکان (Space) غیر تعریف شدہ اصطلاحات ہیں۔

2. تعریف شدہ اصطلاحات: غیر تعریف شدہ اصطلاحات کی مدد سے دیگر جیو میٹریائی اصطلاحات کی تعریف کی جاتی ہے مثلاً قطعہ خط، شعاع، زاویہ، مثلث، عمود وغیرہ تعریف شدہ اصطلاحات ہیں ان میں سے اکثر کی تعریف گزشتہ جماعتوں میں کیا جا چکا ہے۔

3. مفروضے (یا بنیادی مفروضے) Assumptions or Fundamental Agreements
ریاضی میں کچھ بیانات کو بغیر ثبوت دیئے اختیار کر لیتے ہیں اس طرح کے بیانات کو مفروضے یا بنیادی مفروضے کہتے ہیں۔ مثلاً "دو نقاط ایک خط کا تعین کرتے ہیں" شق 10.1.2 میں ہم دو طرح کے مفروضوں کو متعارف کرائیں گے اور ایسے مفروضوں کی فہرست بھی دیں گے جنہیں آگے چل کر اس یونٹ میں استعمال کیا جائے گا۔

4. مسئلہ مجوّزہ: غیر تعریف شدہ اصطلاحات، تعریف شدہ اصطلاحات اور بنیادی مفروضوں کی مدد سے کچھ نئے بیانات متعارف کرائے جاتے ہیں اور استنباط کے ذریعہ ثابت کیے جاتے ہیں ایسے بیانات کو مسئلہ مجوّزہ (Proposition) کہا جاتا ہے۔ ایسے بیانات کو بذریعہ استنباط منطق ثابت یا رد کیا جاسکتا ہے جیومیٹری سے متعلق کسی ایسے بیان کو جسے ثابت کر دیا جائے مسئلہ اثباتی (Theorem) کہتے ہیں۔

10.1.2 'اصول متعارفہ' اصول موضوعہ اور مسائل اثباتی:

بنیادی مفروضوں کی اقسام:

بنیادی مفروضے دو طرح کے ہوتے ہیں

1. اصول متعارفہ: ایسے بنیادی مفروضے جو اعداد سے متعلق ہوں، انہیں اصول متعارفہ (Axioms) کہتے ہیں۔ درج ذیل اصول متعارفہ اس یونٹ میں آگے استعمال میں آئیں گے۔

اصول متعارفہ 1. ہر عدد اپنے آپ سے مساوی ہوتا ہے۔

(عکسی مساواتیت Reflexive Property of Equation) مثلاً

$$x = x \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

$$\angle A \cong \angle A \qquad \text{یا (ذاتی متماثلیت)}$$

نوٹ: علامت $\forall$ سے مراد "ہر ایک" "For Every" یا "تمام" "For All" ہے۔

اصول متعارفہ 2. مساوات کی تشاکلی خاصیت (Symmetric Property of Equation)

مثلاً

$$x = y \Rightarrow y = x \qquad \forall x,\ y \in \mathbb{R}$$

اصول متعارفہ 3. مساوات کی خاصیت متعدیت (Transitive Property) مثلاً

$$x = y \wedge y = z \ \Rightarrow\ x = z \qquad \forall\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$$

اصول متعارفہ 4. مساوی مقداروں میں اگر مساوی مقدار جمع کر دی جائیں تو ان کے مجموعے بھی باہم مساوی ہوتے ہیں (مساوات کی خاصیت جمع) مثلاً

$$x = y \Rightarrow x + z = y + z \qquad \forall\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$$

اصول متعارفہ 5. دو برابر مقداروں میں سے اگر برابر مقداریں منہا کر دی جائیں تو ان کے فرق باہم مساوی ہوتے ہیں (مساوات کی خاصیت تفریق) مثلاً

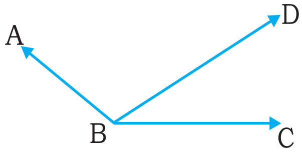
$$x = y \Rightarrow x - z = y - z \qquad \forall\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$$

اصول متعارفہ 6. مساوی مقداروں کو اگر مساوی مقدار سے ضرب دی جائے تو حاصل ضرب باہم مساوی ہوتے ہیں (مساوات کی خاصیت ضربی) مثلاً

$$x = y \Rightarrow xy = yz \qquad \forall\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$$

اصول متعارفہ 7. دو مساوی مقداروں کو اگر کسی غیر صفر عدد سے تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت باہم مساوی ہوتے ہیں۔ مثلاً

$$x = y\ ,\ z \neq 0 \ \Rightarrow\ \frac{x}{z} = \frac{y}{z}\ ,\qquad \forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$$



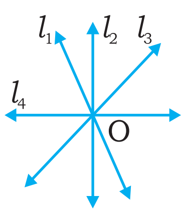
اصول متعارفہ 8. سالم شے اپنے جز سے بڑی ہوتی ہے۔ مثلاً

سامنے شکل میں:

$$m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle CBD$$
$$\Rightarrow m\angle ABC > m\angle ABD,\ m\angle ABC > m\angle CBD$$

2. اصول موضوعہ (Postulate): وہ بنیادی مفروضے جن کا تعلق جیومیٹری اشکال سے ہو انہیں اصول موضوعہ (Postulate) کہتے ہیں۔ اس یونٹ میں درج ذیل اصول موضوعہ استعمال میں آئیں گے۔

اصول موضوعہ 1. دو مختلف نقاط سے ایک اور صرف ایک خط گزر سکتا ہے یا "دو نقاط ایک خط کا تعین کرتے ہیں"



اصول موضوعہ 2. ایک نقطہ سے لاتعداد خطوط گزر سکتے ہیں۔ مثلاً

نقطہ O سے لاتعداد خطوط l_1، l_2، l_3 ... l_n گزر رہے ہیں۔

اصول موضوعہ 3. تین غیر ہم خط نقاط سے ایک اور صرف ایک مستوی گزر سکتا ہے۔

اصول موضوعہ 4. "اگر کسی خط کے دو نقاط ایک مستوی پر واقع ہوں تو وہ پورا خط اس مستوی پر ہوگا"

[اس اصول موضوعہ سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ مستوی ایک ہموار شے ہے اور ہر جانب لا متناہی ہے]

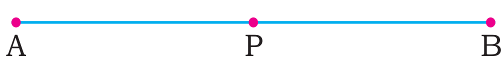
اصول موضوعہ 5. (فاصلے کا موضوعہ) اگر کسی مستوی میں A اور B دو نقاط ہیں تو ان نقاط کا درمیانی فاصلہ

(الف) 0 یعنی صفر ہوگا، اگر A واقع ہے B پر یعنی $A = B$ [جسے پڑھتے ہیں A منطبق ہے B پر]

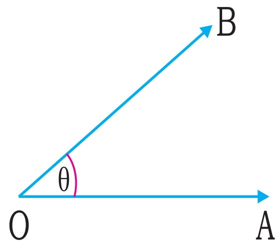
(ب) ایک مثبت حقیقی عدد ہوگا اگر A اور B دو مختلف نقاط ہیں۔

A سے B تک کے فاصلے کو $|\overline{AB}|$ یا $m\overline{AB}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے (m لفظ measure کا ابتدائی حرف ہے جس سے مراد پیمائش ہے) یاد رہے کہ $m\,\overline{AB} = m\,\overline{BA}$ یا $|\overline{AB}| = |\overline{BA}|$

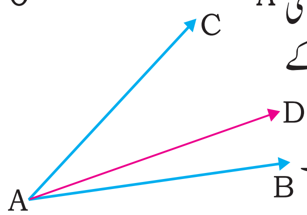
اصول موضوعہ 6. "کسی قطعہ خط کا ناصف ایک اور صرف ایک نقطہ ہو سکتا ہے"



[اس اصول کی رو سے کسی قطعہ خط AB پر ایک اور صرف ایک نقطہ (مثلاً P) ہے، اس طرح کہ $m\overline{AP} = m\overline{BP}$]



اصول موضوعہ 7. (تشکیلِ زاویہ کا موضوعہ) "اگر کسی زاویہ کا ایک بازو معلوم ہے تو اس بازو کے ایک جانب ایک اور صرف ایک شعاع θ (Theta) مقدار کا زاویہ بناتے ہوئے کھینچی جاسکتی ہے جبکہ θ، صفر اور 180 کے درمیان کوئی حقیقی عدد ہے یعنی $0^\circ < \theta < 180^\circ$

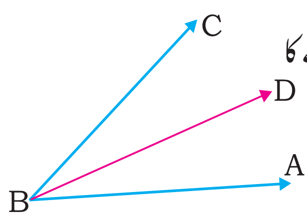


اصول موضوعہ 8. (زاویوں کی جمع کا موضوعہ) "دو متصلہ زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ ان کے غیر مشترک بازوؤں سے بننے والے زاویے کے مساوی ہوتا ہے"

اس سامنے والی شکل میں $\angle BAD$ اور $\angle CAD$ دو متصلہ زاویے ہیں۔

اس لئے: $m\angle BAD + m\angle CAD = m\angle BAC$

(یا $m\angle CAB$)



اصول موضوعہ 9. (زاویے کے یکتا ناصف کا موضوعہ) "کسی زاویے کا ایک اور صرف ایک ناصف کھینچا جاسکتا ہے"

سامنے شکل میں $\overrightarrow{BD}$، $\angle ABD$ کا ناصف ہے۔

اس لئے: $m\angle ABD = m\angle CBD = \frac{1}{2}\, m\angle ABC$

اصول موضوعہ 10. کسی خط میں دیئے ہوئے نقطہ سے دیئے ہوئے خط پر ایک اور صرف ایک عمود کھینچا جاسکتا ہے۔

اصول موضوعہ 11. ایسی تمام جیومیٹری کی اشکال جو ایک دوسرے پر منطبق کی جاسکیں آپس میں متماثل ہوتی ہیں۔

اصول موضوعہ 12. جیومیٹری کی کوئی بھی شکل اگر اس کی صورت اور سائز میں تبدیلی واقع نہ ہو تو ایک جگہ سے دوسری جگہ پر لے جائی جاسکتی ہے۔

اصول موضوعہ 13. (پلے فیئر کا موضوعہ Playfair's Axiom) "کسی خط کے باہر دیئے ہوئے نقطہ سے اُس خط کے متوازی ایک اور صرف ایک خط کھینچا جاسکتا ہے" اس موضوعہ کو اکثر اوقات اس طرح بھی لکھا جاتا ہے: "دو متقاطع خطوط کسی تیسرے خط کے متوازی نہیں ہو سکتے"

10.3 مسائل مجوّزہ:

جیومیٹری سے متعلق جب کوئی بیان بحث کے لئے تجویز کرتے ہیں تو اس بیان کو مسائل مجوّزہ (Proposition) کہتے ہیں۔ مسائل مجوّزہ یا تو مسائل اثباتی (Theorems) ہوتی ہیں یا پھر مسائل اثباتی سے متعلق کوئی ذیلی سوال جسے رائیڈر (Rider) کہتے ہیں۔

کوئی بھی مسئلہ اثباتی یا رائیڈر دو حصوں پر مشتمل ہوتا ہے۔

(1) قیاس (Hypothesis) یا شرط جسے درست فرض کیا جاتا ہے (سمجھا جاتا ہے)
(2) نتیجہ (Conclusion) جسے ثابت کرنا ہوتا ہے (دی ہوئی شرائط کے مطابق)

10.3.1 مسائل اثباتی:

مسئلہ اثباتی ایک ایسا مسئلہ مجوّزہ ہے جس میں جیومیٹری کی کسی حقیقت یا حقائق کو بیان کیا جاتا ہے۔ مسئلہ اثباتی کے عمومی بیان کو دعویٰ عام (Enunciation) کہتے ہیں مثلاً

"اگر دو خطوط قطع کریں تو متقابل راسی زاویے آپس میں متماثل ہوتے ہیں"

اس مسئلہ میں قیاس یا شرط ہے "اگر دو خطوط قطع کریں"

اور نتیجہ ہے "تو متقابل راسی زاویے آپس میں متماثل ہوتے ہیں"

عام طور پر قیاس یا شرط لفظ "اگر" سے شروع ہوتا ہے اور 'نتیجہ' کی ابتدا "تو" سے ہوتی ہے لیکن بعض اوقات یہ دونوں چیزیں ایک سادہ مفرد جملے میں بیان کر دیئے جاتے ہیں۔ مثلاً **"مثلث کے تینوں زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے"**۔ اس مسئلہ میں پہلا حصہ یعنی شرط ہے "اگر زاویے مثلث کے تین زاویے ہیں" اور نتیجہ ہے "تو اُن زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 180° ہے"

10.3.2 نتیجہ صریح:

نتیجہ صریح ایک ایسی حقیقت ہے جو ثابت کیے گئے مسئلہ اثباتی کا فوری اور ظاہری نتیجہ ہوتا ہے اور مسئلہ اثباتی کو ثابت کر لینے کے بعد یہ بیانات اتنے واضح ہوتے ہیں کہ انہیں علیحدہ مسئلہ بنانا ضروری نہیں ہوتا۔

10.3.3 مسئلہ اثباتی کا عکس:

کسی مسئلہ اثباتی کو دوسرے مسئلہ اثباتی کا عکس (Converse) کہا جاتا ہے اگر ایک مسئلہ کا قیاس یا شرط (Hypothesis) دوسرے مسئلہ اثباتی کا نتیجہ (Conclusion) ہو۔ اس یونٹ میں مسائل اثباتی 1 اور 2 ایک دوسرے مسئلہ کا عکس ہیں اسی طرح مسائل اثباتی 7 اور 8 بھی ایک دوسرے کے عکس ہیں۔

مسائل کے ثبوت کے مراحل: مسائل اثباتی (نتیجہ صریح یا رائیڈر) کے ثبوت کے لئے مندرجہ ذیل چھ مراحل ہیں جنہیں ثبوت کے حصے کہا جاتا ہے۔

1. شکل: مسئلے کے دعویٰ عام کی روشنی میں ایسی شکل بنائی جاتی ہے جو نقاط، خطوط اور زاویوں وغیرہ کو اس طرح اُجاگر کرے کہ شرائط اور نتیجہ واضح ہو جائے۔

2. معلوم: بنائی گئی شکل کے اعتبار سے دعویٰ کے پہلے حصّے یعنی قیام کو بطور معلوم لکھ لیا جاتا ہے یعنی یہ کہ "کون کون سی معلومات ہمارے علم میں ہے" جن کی بنیاد پر مسئلہ کو ثابت کیا جائے گا۔

3. مطلوب: بنائی گئی شکل کے اعتبار سے دعویٰ کے دوسرے حصّے یعنی نتیجہ کو بطور "مطلوب" لکھ لیا جائے یعنی اس بات کو نشان دہی کی جاتی ہے کہ اس مسئلہ میں ثابت کیا کرنا ہے۔

4. عمل تشکیل: کبھی کبھی مسئلہ کو ثابت کرنے کیلئے شکل میں کچھ اضافہ کیا جاتا ہے مثلاً کسی زاویہ یا ضلع کی تنصیف، دو نقاط کو ملانا، یا کسی ضلع کو بڑھانا وغیرہ اسے بناوٹ یا عمل تشکیل کہتے ہیں اس اضافی عمل کی وجہ سے مسئلہ کو ثابت کرنے میں مدد ملتی ہے۔

5. ثبوت: یہ کسی مسئلہ کے "ثبوت" کا آخری حصہ ہوتا ہے جسے خود بھی 'ثبوت' ہی کہتے ہیں۔ اس میں تعریفات، بنیادی مفروضے (یعنی اصول موضوعہ یا متعارفہ)، دی ہوئی معلومات یا ایسے مسئلہ اثباتی جنھیں پہلے ثابت کیا جاچکا ہے، کی مدد سے منطقی ثبوت دیا جاتا ہے اور طریقہ کار یہ ہوتا ہے کہ ایک کالم میں 'بیانات' اور دوسرے کالم میں ہر بیان کے سامنے اس بیان کی وجہ بطور "استدلال" لکھتے ہیں۔

6. فہوالمطلوب (Q.E.D) روایت ہے کہ ثبوت کے اختتام پر "فہوالمطلوب" یا Q.E.D لکھتے ہیں جو کہ Quod Erat Demonstrandum کا مخفف ہے اور جس کا مطلب ہے "یہی ثابت کرنا تھا"

مشق 10.1

1. موزوں الفاظ سے خالی جگہ پر کیجئے:

(الف) اثباتی جیومیٹری علم ریاضی کی ایک ______ ہے جس میں جیومیٹریائی اشکال یعنی مسائل اثباتی کو ______ سے ثابت کیا جاتا ہے۔

(ب) طریقہ استدلال ______ یا ______ ہوسکتا ہے۔

(ج) ______ طریقہ استدلال میں ہم مشاہدہ کی بنیاد پر نتائج اخذ کرتے ہیں۔

(د) ______ طریقہ استدلال میں ہم عمومی نتائج سے خصوصی نتائج اخذ کرتے ہیں۔

(ہ) بنیادی مفروضے وہ بیانات ہیں جنہیں ہم ______ کے تسلیم کرتے ہیں۔

(و) بنیادی مفروضے دو قسم کے ہوتے ہیں جو یہ ہیں (1) ______ اور (2) ______

(ز) بنیادی مفروضے جن کا تعلق جیومیٹری اشکال سے ہو ______ کہلاتے ہیں۔

(ح) استدلال کی چار بنیادی خصوصیات درج ذیل ہیں:

(1) ______ (2) ______ (3) ______ (4) ______

2. ہر بیان کے آگے "درست" یا "غلط" لکھیے۔

(الف) تین مختلف نقاط سے ایک اور صرف ایک خط گزر سکتا ہے۔

(ب) اگر P اور Q نقاط ایک دوسرے پر منطبق ہوں تو علامتی طور پر ہم لکھتے ہیں $P = Q$۔

(ج) دو نقاط ایک خط کا تعین نہیں کرتے۔

(د) اصول موضوعہ 4 سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ ایک ہموار شے ہے اور ہر جانب لامتناہی ہے۔

(ہ) x^{o} مقدار کے زاویے کا کمپلیمنٹ $(90-x)^{o}$ ہے۔

(و) "اگر دو مقداریں ایک ہی مقدار کے مساوی ہوں تو وہ آپس میں بھی مساوی ہوتی ہیں" اس سے مراد "مساوات کی خاصیت متعدیت" ہے۔

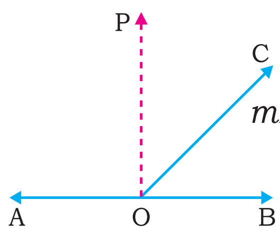
3. مسئلہ اثباتی یا مسئلہ مجوّزہ کے دو حصے کون سے ہوتے ہیں؟ بیان کیجیے۔

10.2 مسائل اثباتی

اب اس یونٹ کے مقصد اول کی روشنی میں قومی نصابی کمیشن 2006 کے منظور کردہ مسائل اثباتی مع نتائج صریح کے ثبوت پیش کیے جا رہے ہیں اس کے علاوہ ان مسائل اثباتی پر دارومدار رکھنے والے رائیڈروں کے حل کرنے کے طریقے پر بھی بحث کی جائے گی۔

مسئلہ اثباتی 1

اگر ایک خط کسی دوسرے خط پر واقع ہو تو اس سے وجود میں آنے والے دونوں متصلہ زاویوں کا مجموعہ دو زاویہ قائمہ کے مساوی ہوتا ہے۔



معلوم: $\overrightarrow{OC}$، خط AB کے نقطہ O پر واقع ہے۔

مطلوب: $m\angle AOC + m\angle BOC =$ دو زاویہ قائمہ (یا 180^{o})

عمل: نقطہ O سے $\overleftrightarrow{AB}$ پر عمود $\overrightarrow{OP}$ کھینچیے۔

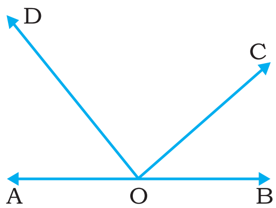
یعنی $m\angle AOP =$ ایک زاویہ قائمہ $= m\angle BOP$

ثبوت:

بیانات	استدلال
1. $m\angle AOC = m\angle AOP + m\angle POC$	i. زاویوں کے جمع کے موضوعہ کے مطابق
2. $m\angle BOC = m\angle BOP - m\angle POC$	ii. چونکہ $m\angle BOC + m\angle POC = m\angle BOP$
3. اس لئے $\therefore m\angle AOC + m\angle BOC = \angle AOP + m\angle BOP$ = ایک زاویہ قائمہ + ایک زاویہ قائمہ = دو زاویہ قائمہ (یا 180^{o}) =	iii. مساوات (1) اور (2) جمع کرنے پر حاصل ہوا یعنی $m\angle POC - m\angle POC =$ صفر

فہو المطلوب

نتیجہ صریح 1. کسی خط میں دیئے گئے کسی نقطہ پر بننے والے تمام زاویوں کا مجموعہ دو زاویہ قائمہ کے مساوی ہوتا ہے۔



معلوم: $\overrightarrow{OC}$ اور $\overrightarrow{OD}$، خط $\overleftrightarrow{AB}$ کے ایک جانب نقطہ O پر واقع ہیں اور اس طرح $\angle AOD$، $\angle DOC$ اور $\angle BOC$ بنتے ہیں۔

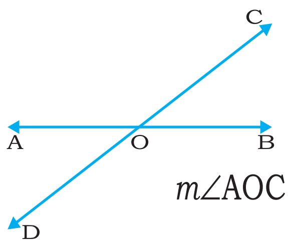
مطلوب: $m\angle AOD + m\angle DOC + m\angle BOC = 180^\circ$

ثبوت:

بیانات	استدلال
1. $m\angle AOC + m\angle BOC = 180^\circ$	i. مسئلہ اثباتی 1 کی رو سے۔
2. $m\angle AOC = m\angle AOD + m\angle DOC$	ii. زاویوں کی جمع کا موضوعہ۔
3. $\therefore m\angle AOD+m\angle DOC+m\angle BOC= 180^\circ$	iii. مساوات (1) میں $m\angle AOC$ کی قیمت رکھنے۔

فہوالمطلوب

نتیجہ صریح 2. اگر دو خطوط آپس میں قطع کریں تو اس طرح بننے والے چاروں زاویوں کا مجموعہ 360° ہوگا۔



معلوم: دو خطوط $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔

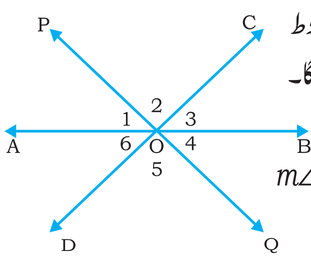
مطلوب: $m\angle AOC + m\angle BOC + m\angle BOD + m\angle AOD = 360^\circ$

ثبوت:

بیانات	استدلال
1. $m\angle AOC + m\angle BOC = 180^\circ$	i. مسئلہ اثباتی 1 کی رو سے۔
2. $m\angle BOD + m\angle AOD = 180^\circ$	ii. مسئلہ اثباتی 1 کی رو سے۔
3. $\therefore\ m\angle AOC+m\angle BOC+m\angle BOD$ $+ m\angle AOD = 360^\circ$	iii. مساوات (1) اور (2) جمع کرنے پر۔

فہوالمطلوب

نتیجہ صریح 3: اگر لا تعداد خطوط کسی ایک نقطہ سے گزرتے ہیں تو ان خطوط سے بننے والے تمام زاویوں کا مجموعہ 360° یعنی چار زاویہ قائمہ کے مساوی ہوگا۔



معلوم: خطوط $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{CD}$ اور $\overleftrightarrow{PQ}$ نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔

مطلوب: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 = 360^\circ$

$= 360^\circ$ چار زاویہ قائمہ

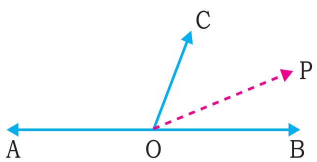
ثبوت:

استدلال	بیانات
i. مسئلہ اثباتی 1 نتیجہ صریح 1 کے مطابق۔	1. $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$
ii. دلیل 1 کے مطابق۔	2. $m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 = 180^\circ$
iii. مساوات (1) اور (2) جمع کرنے پر۔	3. $\therefore\ m\angle 1+m\angle 2+m\angle 3+ m\angle 4$ $+m\angle 5 + m\angle 6 = 360^\circ =$ چار زاویہ قائمہ

فہوالمطلوب

مسئلہ اثباتی 2

اگر دو متصلہ زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ دو زاویہ قائمہ کے مساوی ہو تو زاویوں کے بیرونی بازو ایک ہی خط مستقیم ہوتے ہیں۔



معلوم: دو متصلہ زاویے $\angle AOC$ اور $\angle BOC$ اس طرح کہ
دو زاویہ قائمہ $= m\angle AOC + m\angle BOC = 180^\circ$

مطلوب: $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ ایک ہی خط پر واقع ہیں۔

عمل: اگر $\overrightarrow{OB}$ ، $\overrightarrow{OA}$ والے خط پر واقع نہیں ہے تو $\overrightarrow{AO}$ کو نقطہ P تک بڑھایا جائے (یعنی AOP ایک خط ہے)

ثبوت:

استدلال	بیانات
i. AOP ایک خط ہے جس پر $\overrightarrow{OC}$ واقع ہے (عمل اور مفروضہ)	1. $m\angle AOC + m\angle POC = 180^\circ$
	لیکن:
ii. معلوم (مسئلہ اثباتی 1 کے مطابق)	2. $m\angle AOC + m\angle BOC = 180^\circ$
	اس لئے:
iii. اصول متعارفہ 3 کی رو سے۔	3. $m\angle AOC+m\angle POC=m\angle AOC+m\angle BOC$
	یا
iv. دونوں اطراف سے $m\angle AOC$ منہا کرنے پر۔	4. $m\angle POC = m\angle BOC$
v. پس عمل میں کیا گیا مفروضہ غلط ثابت ہوا کیونکہ پہلے سے معلوم حقائق ہمیشہ درست ہوتے ہیں۔	5. لیکن یہ اس وقت تک ناممکن ہے جب تک کہ $\overrightarrow{OP}$ اور $\overrightarrow{OB}$ ایک دوسرے پر منطبق نہ ہوں۔ اس لئے $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ ایک ہی خط مستقیم ہیں

فہوالمطلوب

نوٹ: مذکورہ بالا ثبوت میں جو طریقہ استعمال ہوا ہے اسے "طریقہ برہان الخلف" (Reduction Ad Absurducm Method) کہتے ہیں۔

مشق 10.2

.1 مسئلہ اثباتی 1 کی شکل میں:

(i) $\angle BOC$ کے سپلیمنٹ زاویے کا نام بتائیے۔

(ii) $\angle BOC$ کے کمپلیمنٹ زاویے کا نام بتائیے۔

(iii) اگر $m\angle BOC = 50^\circ$ تو اس کے کمپلیمنٹ اور سپلیمنٹ زاویے کی مقدار بتائیں۔

.2 مسئلہ 1 نتیجہ صریح 1 میں اگر $m\angle BOC = 45^\circ$ ، $m\angle AOD = 2x$ اور $m\angle COD = 3x$ تو $\angle AOC$ اور $\angle COD$ کی مقدار بتائیے۔

[اشارہ برائے حل: $2x + 3x + 45 = 180$ میں x کی قیمت معلوم کریں]

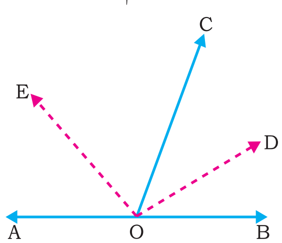
.3 مسئلہ اثباتی 1 نتیجہ صریح 2 کی شکل میں:

(الف) فرض کریں $m\angle BOC = x = 40^\circ$، تو باقی دوسرے زاویوں کی مقدار بتائیے۔

[اشارہ: فرض کریں $m\angle AOC = y$ ، $m\angle AOD = z$، $m\angle BOD = w$ اور درج ذیل مساوات حل کریں $w + 40^\circ = 180^\circ$، $y + 40^\circ = 180^\circ$، بعد ازاں $z + 140^\circ = 180^\circ$ کیوں؟]

(ب) فرض کریں $m\angle BOC = x = 45^\circ$ تو باقی دوسرے زاویوں کی مقدار معلوم کیجئے۔

.4 دو متصلہ سپلیمنٹری زاویوں کے ناصف ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔



معلوم: $\overrightarrow{OD}$ اور $\overrightarrow{OE}$ دو متصلہ سپلیمنٹری زاویوں

BOC اور AOC کے ناصف ہیں۔

مطلوب: $\overrightarrow{OE} \perp \overrightarrow{OD}$

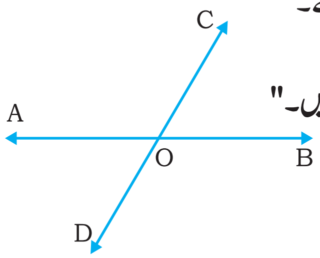
ثبوت:

بیانات	استدلال
.1 $m\angle AOC + m\angle BOC = 180^\circ$	.i معلوم (دو متصلہ سپلیمنٹری زاویے)
.2 $\frac{1}{2}\, m\angle AOC + \frac{1}{2} m\angle BOC = \frac{1}{2}\,(180^\circ)$	.ii مساوات کے دونوں اطراف $\frac{1}{2}$ سے ضرب دینے پر۔
.3 $m\angle AOC + m\angle COD = 90^\circ$ یا	.iii $\frac{1}{2}\, m\angle AOC = m\angle COE$، $\frac{1}{2}\, m\angle BOC = m\angle COD$
.4 $m\angle EOD = 90^\circ$ یا	.iv زاویوں کی جمع کا موضوعہ۔
.5 $\overrightarrow{OE} \perp \overrightarrow{OD}$ یا	.v قائمۃ الزاویہ بنانے والی شعاعیں ایک دوسرے پر عمود ہوتی ہیں۔

فہو المطلوب

5. اگر دو متصلہ زاویوں کے ناصف ایک دوسرے پر عمود ہوں تو زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں (مذکورہ بالا سوال 4 کا عکس) [اشارہ برائے حل: چونکہ یہ سوال 4 کا عکس ہے اس لئے اگر ہم مذکورہ بالا دیئے گئے حل کے آخر سے ابتدا کریں اور اختتام پہلے نمبر پر کریں تو حل واضح ہے بشرطیکہ کہ مناسب جگہ پر کچھ تبدیلیاں کریں مثلاً مرحلہ 3 پر 2 سے ضرب دینا ہو گا نہ کہ 2 سے تقسیم]

6. اوپر دیئے سوال 4 کی شکل میں تمام کمپلیمنٹری زاویوں کے نام بتایئے۔



مسئلہ اثباتی 3

"اگر دو خطوط آپس میں قطع کریں تو متقابلہ راسی زاویے متماثل ہوتے ہیں۔"

معلوم: دو خطوط $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔

مطلوب: (i) $\angle BOC \cong \angle AOD$ (ii) $\angle AOC \cong \angle BOD$

ثبوت:

بیانات	استدلال
1. $m\angle AOC + m\angle BOC = 180^\circ$	i. مسئلہ اثباتی 1 کی رو سے۔
2. $m\angle AOD + m\angle AOC = 180^\circ$	ii. مسئلہ اثباتی 1 کی رو سے۔
3. $\therefore m\angle AOC + m\angle BOC = m\angle AOD + m\angle AOC$	iii. مساوات کی خاصیت متعدیت۔
4. اس لئے $m\angle BOC = m\angle AOD$ یا	iv. مساوات کے دونوں اطراف سے $m\angle AOC$ منہا کرنے پر۔
5. $\therefore \angle BOC \cong \angle AOD$	v. اگر دو زاویے مقدار میں مساوی ہوں تو متماثل ہوتے ہیں۔
6. اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ $\angle AOC \cong \angle BOD$	vi. مذکورہ بالا اقدام کی رو سے۔
فہو المطلوب	

مشق 10.3

1. مسئلہ اثباتی 3 کی شکل میں اگر $m\angle BOC = 70^\circ$ تو بقیہ دوسرے زاویوں کی مقدار معلوم کیجیے۔

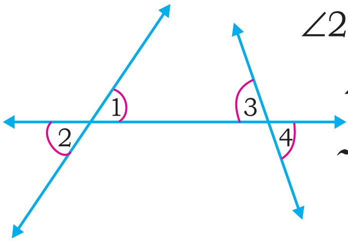
[تبصرہ: گذشتہ مشق میں ہم نے باقی دوسرے زاویے مسئلہ اثباتی 1 کی مدد سے معلوم کیے تھے کیونکہ اس وقت تک ہم نے مسئلہ اثباتی 3 کا مطالعہ نہیں کیا تھا لیکن اب ہم مسئلہ 3 کے ساتھ ساتھ مسئلہ 1 بھی استعمال کر سکتے ہیں۔]

حل: $m\angle AOD = m\angle BOC = 70^\circ$ (مسئلہ اثباتی 3 کی رو سے) اور $m\angle AOC$ چونکہ $m\angle BOC$ کا سپلیمنٹ ہے اس لئے

$$m\angle AOC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$ (مسئلہ اثباتی 1 کی رو سے)

اور $$m\angle BOD = 110^\circ$$ (مسئلہ اثباتی 3 کی رو سے)

2. دو متقاطع خطوط 30° زاویہ پر کھینچیے اور باقی دوسرے زاویوں کی مقدار معلوم کیجیے جیسا کہ اوپر حل کیا گیا ہے۔

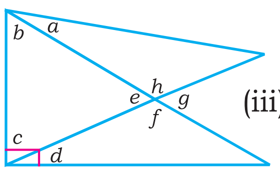


3. سامنے دی گئی شکل میں $\angle 1 \cong \angle 3$ تو ثابت کیجیے $\angle 2 \cong \angle 4$

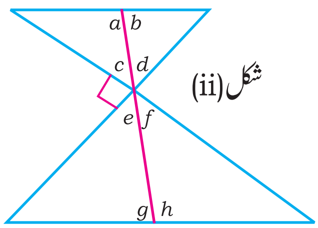
[مشورہ: پہلے مسئلہ 3 کی رو سے $\angle 2 \cong \angle 1$ اور $\angle 4 \cong \angle 3$ ثابت کیجیے پھر اصول متعارفہ 3 کے مطابق مطلوبہ نتیجہ اخذ کیجیے کیونکہ $\angle 1 \cong \angle 3$ معلوم ہے]

4. اگر ایک ہی راس پر بنے ہوئے دو متماثل زاویوں کے ناصف دو مخالف شعاعیں ہوں تو ان زاویوں کے ضلعے (یعنی بازو) دو متقاطع خطوط ہوں گے۔

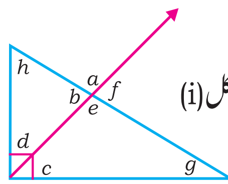
5. درج ذیل شکلوں میں کمپلیمنٹری زاویے، سپلیمنٹری زاویے اور راسی متقابلہ زاویوں کے نام بتائیے:



شکل (iii)

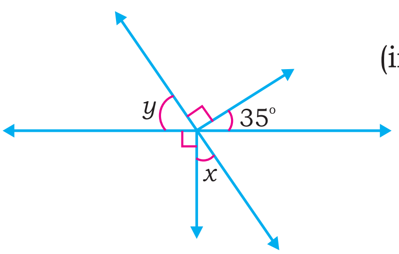


شکل (ii)

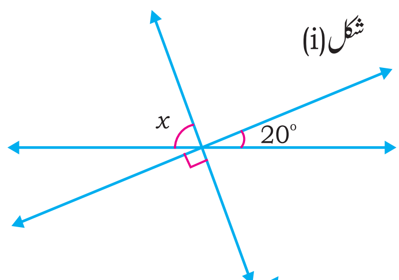


شکل (i)

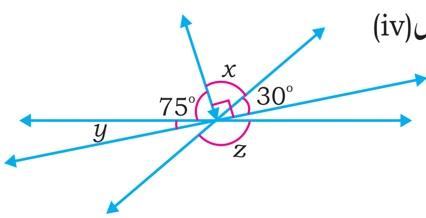
6. x، y اور z زاویوں کی مقدار ڈگری میں بتائیے:



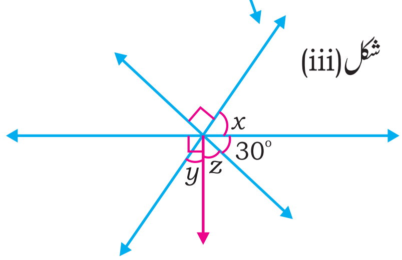
شکل (ii)



شکل (i)



شکل (iv)



شکل (iii)

10.3.3 دو مثلثوں میں ایک - ایک مطابقت

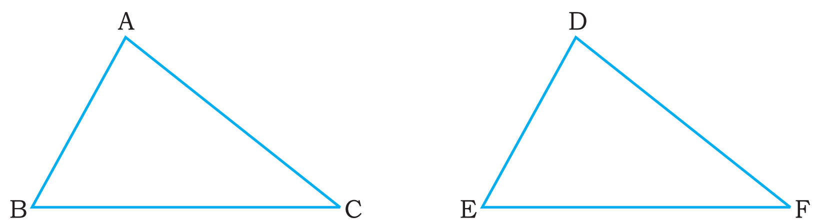
ہر مثلث کے تین اضلاع، تین راس اور تین زاویے ہوتے ہیں اس لئے یہ ہمیشہ ممکن ہے کہ ان کے اضلاع، زاویوں اور راسوں میں ایک۔ ایک مطابقت قائم کی جائے ، علامت '$\leftrightarrow$' ایک۔ ایک مطابقت کے لئے استعمال ہوتی ہے۔ '$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$' جسے پڑھتے ہیں " ΔABC بمطابق ΔDEF " کا مطلب ہے $A \leftrightarrow D$ (نقطہ A، نقطہ D سے مطابقت رکھتا ہے) $B \leftrightarrow E$ اور $C \leftrightarrow F$

اسی طرح $\angle A \leftrightarrow \angle D$ (زاویہ A، زاویہ D سے مطابقت رکھتا ہے)

$\angle B \leftrightarrow \angle E$ اور $\angle C \leftrightarrow \angle F$

اسی طرح $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{DE}$ (ضلع $\overline{AB}$ ، ضلع $\overline{DE}$ سے مطابقت رکھتا ہے)

$\overline{BC} \leftrightarrow \overline{EF}$ اور $\overline{AC} \leftrightarrow \overline{DF}$



نوٹ: "$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta EDF$" اور "$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$" دو الگ مطابقتیں ہیں کیونکہ اس مطابقت میں $A \leftrightarrow E$ اور $B \leftrightarrow D$ جبکہ مذکورہ بالا مطابقت میں ایسا نہیں ہے۔

مثلثوں کا تماثل (Congruence of Triangles)

دو مثلث متماثل کہلاتے ہیں اگر ان سے متناظرہ ضلعے اور زاویے متماثل ہوں اس کے برعکس اگر دو مثلث متماثل ہوں تو ان کے متناظرہ ضلعے اور زاویے متماثل ہوں گے۔ متماثل کی علامت $\cong$ ہے۔

نوٹ 1. اگر دو مثلث کسی ایک مطابقت میں متماثل ہوں تو ضروری نہیں کہ ان کی دیگر مطابقتیں بھی متماثل ہوں۔

نوٹ 2. ہر مثلث اپنے آپ کے متماثل ہوتا ہے۔ اسے ذاتی تماثل کہتے ہیں مثلاً

$\Delta ABC \cong \Delta ABC$ (ذاتی متماثلیت)

نوٹ 3. تماثل تشاکلی:

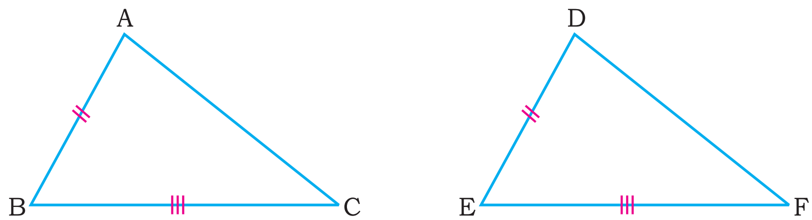
$\Delta ABC \cong \Delta DEF \Rightarrow \Delta DEF \cong \Delta ABC$ (تشاکلی متماثلیت)

نوٹ 4. تماثل کی خاصیت متعدیت یعنی اگر

$\Delta ABC \cong \Delta DEF \wedge \Delta DEF \cong \Delta PQR \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta PQR$ (متعدی متماثلیت)

مسئلہ اثباتی 4

دو مثلثوں کی کسی مطابقت میں اگر ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ، ان کے مطابق دوسرے مثلث کے دو اضلاع اور ان کے درمیانی زاویے کے متماثل ہوں تو دونوں مثلثیں متماثل ہونگے۔



معلوم: $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ میں:

(i) $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ (ii) $\angle B \cong \angle E$ (iii) $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

مطلوب: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

ثبوت:

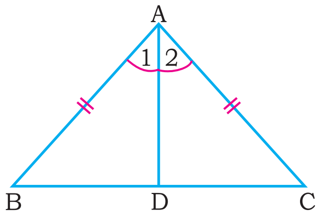
بیانات	استدلال
1. ΔABC کو مثلث DEF پر اس طرح رکھیں کہ نقطہ B نقطہ E پر ہو اور ضلع $\overline{BC}$ ، ضلع $\overline{EF}$ پر ہو۔	i. اصول موضوعہ 12
2. چونکہ $\overline{BC} \cong \overline{EF}$	ii. معلوم (دیا ہوا ہے)
3. اس لئے نقطہ C ، نقطہ F پر منطبق ہوگا۔	iii. تماثل کی تعریف کی رو سے۔
4. چونکہ $\angle B \cong \angle E$	iv. معلوم
5. لہٰذا ضلع $\overline{BA}$ ، ضلع $\overline{ED}$ پر آئے گا۔	v. تشکیل زاویہ موضوعہ کے مطابق۔
6. چونکہ $\overline{AB} \cong \overline{DE}$	vi. معلوم
7. لہٰذا نقطہ A، نقطہ D پر منطبق ہوگا۔	vii. تماثل کی تعریف کی رو سے۔
8. پس ΔABC منطبق ہو چکا ہے ΔDEF پر۔	viii. جیسا کہ مذکورہ بالا تمام بیانات سے ظاہر ہے۔
9. اس لئے $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	ix. اصول موضوعہ 11 کے مطابق۔

فہوالمطلوب

نوٹ: مذکورہ بالا مسئلہ اثباتی کو مختصراً $S.A.S \cong S.A.S$ کہتے ہیں۔

مسئلہ اثباتی 5

اگر کسی مثلث کے دو اضلاع متماثل ہوں تو ان اضلاع کے متقابل زاویے بھی متماثل ہوتے ہیں۔



معلوم: مثلث ABC میں $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

مطلوب: $\angle B \cong \angle C$

عمل: زاویہ A کا ناصف $\overline{AD}$ کھینچیے جو $\overline{BC}$ کو نقطہ D پر قطع کرے۔

ثبوت:

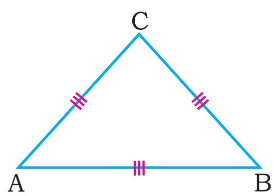
بیانات	استدلال
1. $\Delta ABD \leftrightarrow \Delta ACD$ میں:	i.
(i) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	(i) معلوم
(ii) $\angle 1 \cong \angle 2$	(ii) عمل کی رو سے۔
(iii) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	(iii) مشترک (ذاتی متماثلیت)
2. $\Delta ABD \cong \Delta ACD$	ii. S.A.S ≅ S.A.S
3. $\therefore\ \angle B \cong \angle C$	iii. مثلثان کے تماثل کی رو سے۔

فہوالمطلوب

نوٹ: مسئلہ اثباتی 5 اس طرح بھی بیان کیا جا سکتا ہے

"مثلث مساوی الساقین میں، قاعدے پر کے زاویے متماثل ہوتے ہیں"

نتیجہ صریح 1: مثلث مساوی الاضلاع مساوی الزاویہ ہوتا ہے



معلوم: ΔABC میں $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$

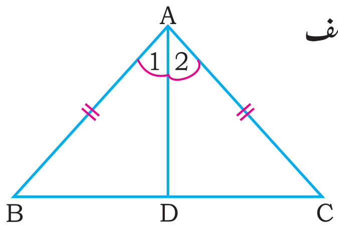
مطلوب: $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$

ثبوت:

بیانات	استدلال
1. ΔABC میں $\overline{BC} \cong \overline{AC}$	i. معلوم
2. اس لئے $\angle A \cong \angle B$	ii. مسئلہ اثباتی 5 کی رو سے۔
3. اسی طرح $\angle B \cong \angle C$	iii. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
4. اس لئے $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$	iv. مساوات (2) اور (3) یکجا کرنے پر۔

فہوالمطلوب

نتیجہ صریح 2. مثلث مساوی الساقین میں راسی زاویے کا ناصف قاعدے کا عمودی ناصف ہوتا ہے۔



معلوم: مثلث ABC میں $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ اور $\overline{AD}$ راسی زاویہ A کا ناصف ہے جو $\overline{BC}$ سے نقطہ D پر ملتا ہے۔

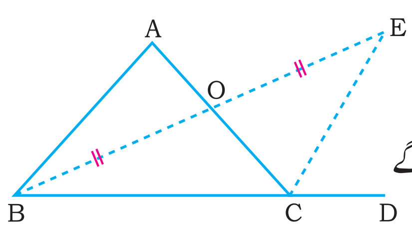
مطلوب: $\overline{BD} \cong \overline{CD}$ اور $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

ثبوت:

بیانات	استدلال
1. $\Delta ABD \leftrightarrow \Delta ACD$	i.
(i) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	(i) معلوم
(ii) $\angle 1 \cong \angle 2$	(ii) عمل کی رو سے۔
(iii) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	(iii) مشترک (ذاتی متماثلیت)
2. $\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$	ii. S.A.S ≅ S.A.S
3. $\therefore \overline{BD} \cong \overline{CD} \wedge \angle ADB \cong \angle ADC$	iii. مثلثان کے تماثل کی رو سے۔
4. لیکن $m\angle ADB + m\angle ADC = 180^\circ$ ∴	iv. مسئلہ نمبر 1 کی رو سے
5. $\therefore m\angle ADB = 90^\circ = m\angle ADC$	v. قائمہ زاویہ کی تعریف کے مطابق۔
6. $\therefore \overline{AD} \perp \overline{BC}$	vi. زاویہ قائمہ بنانے والے بازو عمود ہوتے ہیں۔
7. اس لئے $\overline{AD}$ عمودی ناصف ہے $\overline{BC}$ کا	vii. چونکہ $\overline{AD}$ عمود ہے اور ناصف بھی ہے۔
فہوالمطلوب	

مسئلہ اثباتی 6

مثلث کا بیرونی زاویہ پیائش میں متقابلہ اندرونی زاویوں میں سے ہر ایک سے بڑا ہوتا ہے۔



معلوم: مثلث ABC بمع بیرونی زاویہ ACD

مطلوب: $m\angle ACD > m\angle A$ اور $m\angle ACD > m\angle B$

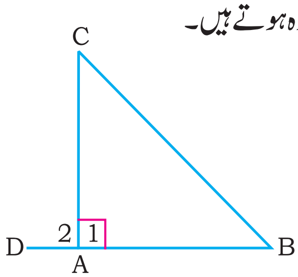
عمل: فرض کیا $\overline{AC}$ کا نقطہ وسط O ہے۔ $\overline{BO}$ کو ملائیں اور آگے اتنا بڑھائیں کہ $m\overline{BO} = m\overline{OE}$، نقاط C اور E کو ملائیں اور $\overline{CE}$ کھینچیے۔

ثبوت:

بیانات	استدلال
1. $\Delta AOB \leftrightarrow \Delta COE$	i. مثلثان کی مطابقت
(i) $\overline{BO} \cong \overline{EO}$	(i) عمل
(ii) $\angle AOB \cong \angle COE$	(ii) راسی متقابلہ زاویے ہیں۔
(iii) $\overline{AO} \cong \overline{CO}$	(iii) عمل
2. $\therefore \Delta AOB \cong \Delta COE$	ii. S.A.S ≅ S.A.S
3. $\therefore \quad m\angle A \cong m\angle ACE$	iii. مثلثان کے تماثل کی رو سے۔
4. $\therefore m\angle ACD = m\angle ACE + m\angle ECD$	iv. زاویوں کی جمع کا موضوعہ
5. $\therefore m\angle ACD > m\angle ACE$	v. مکمل شے اپنے جز سے بڑی ہوتی ہے۔
6. $\therefore m\angle ACD > m\angle A$	vi. $m\angle A = m\angle ACE$ (اوپر ثابت کیا گیا)
7. اسی طرح $\therefore m\angle ACD > m\angle B$	vii. مذکورہ بالا اقدام کرنے پر۔

فہوالمطلوب

نتیجہ صریح 1. اگر کسی مثلث کا ایک زاویہ، زاویہ قائمہ ہو تو باقی زاویے حادہ ہوتے ہیں۔



معلوم: مثلث ABC نقطہ A پر قائمہ مثلث ہے۔

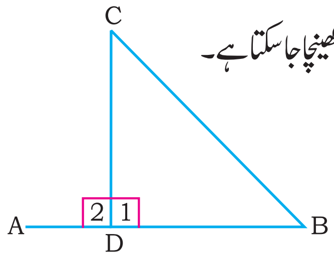
مطلوب: $m\angle B < 90^\circ$ اور $m\angle C < 90^\circ$

عمل: $\overline{BA}$ کو کسی نقطہ D تک بڑھایئے۔

ثبوت:

بیانات	استدلال
1. $m\angle 2 = 90^\circ$	i. $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$ اور $m\angle 1 = 90^\circ$
2. لیکن $\angle 2$، مثلث ABC کا بیرونی زاویہ ہے۔	ii. بیرونی زاویہ کی تعریف کی رو سے۔
3. $\therefore m\angle B < m\angle 2 \Rightarrow m\angle B < 90^\circ$	iii. مسئلہ اثباتی 6 کے مطابق۔
4. اسی طرح $m\angle C < 90^\circ$	iv. مذکورہ بالا استدلال کے مطابق۔

فہوالمطلوب



نتیجہ صریح 2. کسی بیرونی نقطہ سے کسی خط پر ایک اور صرف ایک عمود کھینچا جا سکتا ہے۔

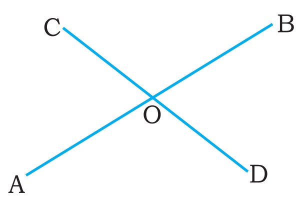
معلوم: $\overleftrightarrow{AB}$ سے باہر C کوئی نقطہ ہے اور $\overline{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

مطلوب: $\overline{CD}$ اور صرف $\overline{CD}$ ہی عمود ہے۔

ثبوت:

بیانات	استدلال
1. اگر صرف $\overline{CD}$ ہی عمود نہیں ہے تو فرض کیا $\overline{CB}$ بھی $\overleftrightarrow{AB}$ پر عمود ہے	i. مفروضہ
2. لیکن مثلث DBC میں $m\angle B < m\angle 2$	ii. مسئلہ اثباتی 6 کے مطابق۔
3. اس لئے $m\angle B < 90°$	iii. $m\angle 2 = 90°$
4. اس لئے $\overline{CB}$ عمود نہیں ہے $\overleftrightarrow{AB}$ پر	iv. ہمارا مفروضہ درست نہیں ہے۔
5. پس $\overline{CD}$ اور صرف $\overline{CD}$ ہی $\overleftrightarrow{AB}$ پر عمود ہے۔	v. جیسا کہ اوپر ثابت ہو چکا ہے۔
فہو المطلوب	

مشق 10.4

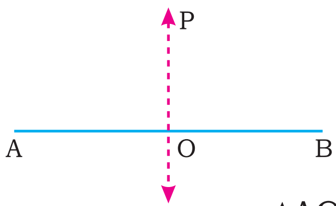


1. متصل شکل میں نقطہ O قطعات $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ کا نقطہ وسط ہے،
تو ثابت کیجئے کہ $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ ۔
[مشورہ: نقاط A اور C نیز B اور D کو ملایئے یعنی $\overline{BD}$ کھینچیے اور ثابت کیجئے۔
$\Delta AOC \cong \Delta BOD$ بذریعہ $S.A.S \cong S.A.S$]

2. دو قطعات خطوط ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔ ثابت کیجئے کہ ان قطعات کے سرے ملانے والے قطعات خط متماثل ہیں۔ [تبصرہ: یہ سوال 1 کا دعویٰ عام ہے]

3. ثابت کیجئے کہ مستطیل کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔
[مشورہ: فرض کیجئے $\overline{CD}$ اور $\overline{BD}$ مستطیل ABCD کے وتر ہیں S.A.S مسئلہ کے مطابق ثابت کیجئے $\Delta ABC \cong \Delta BAD$]

4. مثلث مساوی الساقین میں راسی زاویہ کا ناصف قاعدے کا عمودی ناصف ہوتا ہے۔ ثابت کیجئے۔

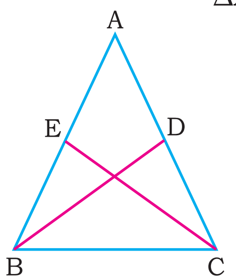


5. کسی قطعہ خط کے عمودی ناصف کا ہر نقطہ قطعہ خط کے سروں سے مساوی فاصلے پر ہوتا ہے۔

[یہاں $\overleftrightarrow{OP}$ عمودی ناصف ہے $\overline{AB}$ کا اور ثابت کرنا ہے کہ

$\overline{AP} \cong \overline{BP}$ اس لئے $\overline{AP}$ اور $\overline{BP}$ ملانے کے بعد ثابت کریں ΔAOP

$\cong \Delta BOP$ بذریعہ $S.A.S \cong S.A.S$]



6. متماثل اضلاع پر کھینچے گئے وسطانیے متماثل ہوتے ہیں۔

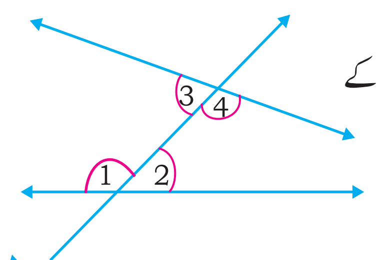
معلوم: مثلث ABC میں $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ اور $\overline{BD}$، $\overline{CE}$ وسطانیے (Median) ہیں۔

مطلوب: $\overline{BD} \cong \overline{CE}$

ثبوت:

بیانات	استدلال
1. $\Delta ABD \leftrightarrow \Delta ACE$	i. مثلثان کی مطابقت
(i) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	(i) معلوم
(ii) $\angle A \cong \angle A$	(ii) مشترک
(iii) $\overline{AD} \cong \overline{AE}$	(iii) متماثل اضلاع کے نصف متماثل ہیں۔
2. $\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACE$	ii. $S.A.S \cong S.A.S$
3. $\therefore \overline{BD} \cong \overline{CE}$	iii. مثلثان کے تماثل کی رو سے۔
	فہوالمطلوب

7. کسی بیرونی نقطہ سے کسی خط پر ایک اور صرف ایک عمود کھینچا جا سکتا ہے۔



8. ذیل میں دی گئی شکل زیر غور لائیں اور مندرجہ ذیل سوالات / بیانات پر اپنے ہم جماعتوں کے ساتھ بحث کیجئے اور ان سوالات کے جواب معلوم کرنے کی کوشش کیجئے۔

(i) زاویے 1، 2 اور 3، 4 کے جوڑوں کے درمیان آپ کی دانست میں کیا تعلق ہو سکتا ہے

(ii) کیا $\angle 1$ اور $\angle 4$ متماثل ہیں؟ کیا $\angle 3$ اور $\angle 2$ متماثل ہیں؟ اگر نہیں، تو کسی شرط پر متماثل ہو سکتے ہیں۔

(iii) اگر زاویے $\angle 2$ اور $\angle 3$ متماثل ہوں تو دونوں متلاقی خطوط پر کیا اثر ہو سکتا ہے۔

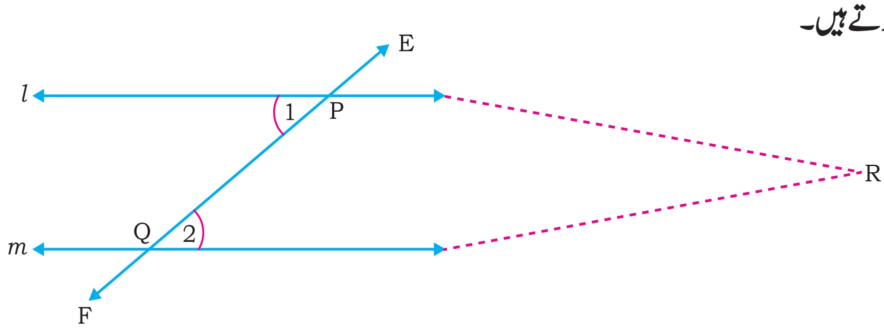
(iv) زاویے $\angle 1$، $\angle 2$ اور $\angle 3$، $\angle 4$ سپلیمنٹری زاویے ہیں۔ کیا آپ اس سے اتفاق کرتے ہیں؟ استدلال کے ساتھ جواب دیں۔ کیا $\angle 1$، $\angle 3$ اور $\angle 2$، $\angle 4$ بھی سپلیمنٹری ہیں؟ اگر نہیں تو وہ شرط بتائیں جس پر یہ زاویے بھی سپلیمنٹری ہوں۔

(v) کس صورت میں قاطع کے ایک ہی جانب واقع اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں؟

(vi) اگر متلاقی (غیر متوازی) خطوط بڑھائے جائیں تو وہ کسی نہ کسی مقام پر قطع کریں گے۔ اس صورت میں خط قاطع کے ساتھ ملکر کس قسم کی شکل وجود میں آئے گی؟ چار اندرونی زاویوں میں سے کون سے زاویے مثلث کے بیرونی زاویے بن جائیں گے، کونسا بیرونی زاویہ $m\angle 2$ سے بڑا ہے اور کون سے بیرونی زاویہ $m\angle 4$ سے بڑا ہے؟ مذکورہ سوالات میں سے کئی کے جواب ہم مسئلہ اثباتی 7 اور 8 کا مطالعہ کرنے کے بعد واضح طور پر حاصل کر لیں گے اس لئے جب آپ ان دونوں مسائل کا مطالعہ کریں تو ان سوالات پر دوبارہ غور کریں۔

مسئلہ اثباتی 7

اگر دو ہم مستوی خطوط کو ایک خطِ قاطع قطع کرے اور متبادلہ اندرونی زاویے متماثل ہوں تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔



معلوم: l اور m دو ہم مستوی خطوط ہیں جن کو خطِ قاطع $\overleftrightarrow{EF}$ بالترتیب نقاط P اور Q پر قطع کرتا ہے اس طرح کہ
$\angle 1 \cong \angle 2$ (متبادلہ زاویے)

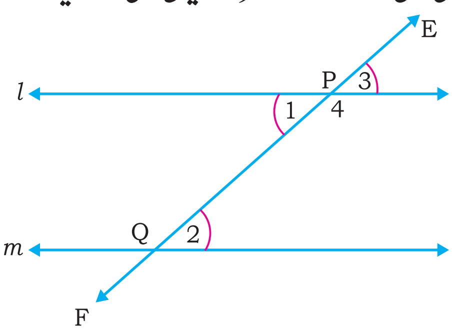
مطلوب: $l \,//\, m$

ثبوت: اگر l اور m متوازی نہیں ہیں تو ہم مستوی ہونے کے باعث یہ دونوں خطوط کسی نقطہ (مثلاً R) پر ملیں گے اور PQR ایک مثلث ہوگا۔

ثبوت:

بیانات	استدلال
1. ΔPQR میں $\angle 1$ مثلث کا بیرونی متقابل زاویہ ہے جبکہ $\angle 2$ اندرونی مقابل زاویہ ہے۔	i. تعریفات کی رو سے۔
2. اس لئے $m\angle 1 > m\angle 2$	ii. مسئلہ اثباتی 6 کے مطابق۔
3. لیکن $m\angle 1 = m\angle 2$	iii. معلوم (دیا ہوا ہے)
4. پس بیانات (2) اور (3) بیک وقت درست نہیں ہو سکتے۔	iv. اعداد کی خاصیت ثلاثی۔
5. لٰہذا $m\angle 1 = m\angle 2$ درست ہے اور l، m قطع نہیں کرتے۔	v. مفروضہ غلط ہے جبکہ دی ہوئی حقیقت درست ہے۔
6. پس $l \parallel m$	vi. دو ہم مستوی خطوط اگر قطع نہ کریں تو متوازی ہوتے ہیں۔
فہو المطلوب	

نتیجہ صریح 1. اگر ہم دو مستوی خطوط کو ایک خط قاطع قطع کرے اور متناظرہ زاویوں میں سے ایک جوڑا متماثل ہوں تو دونوں خطوط متوازی ہوتے ہیں۔



معلوم: دو ہم مستوی خطوط l اور m کو خط قاطع $\overleftrightarrow{EF}$ بالترتیب نقاط P اور Q پر قطع کرتا ہے اور
$\angle 3 \cong \angle 2$ (متناظرہ زاویوں کا جوڑا)

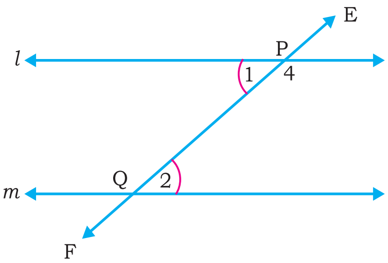
مطلوب: $l \parallel m$

ثبوت:

بیانات	استدلال
1. $\angle 1 \cong \angle 3$	i. مسئلہ اثباتی 3 کی رو سے۔
2. لیکن $\angle 3 \cong \angle 2$	ii. معلوم
3. $\therefore \angle 1 \cong \angle 2$	iii. مساوات کی خاصیت متعدیت۔
4. لیکن یہ متبادلہ زاویے ہیں اس لئے $l \parallel m$	iv. مسئلہ اثباتی 7 کی رو سے۔
فہو المطلوب	

نتیجہ صریح 2. اگر دو ہم مستوی خطوط کو ایک خط قاطع قطع کرے اور قاطع کے ایک ہی جانب واقع اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوں تو وہ دونوں خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

معلوم: l اور m دو ہم مستوی خطوط ہیں جنہیں خط قاطع $\overleftrightarrow{EF}$ بالترتیب نقاط P اور Q پر قطع کرتا ہے اس طرح کہ (سپلیمنٹری زاویوں کا جوڑا)



$$m\angle 2 + m\angle 4 = 180^\circ$$

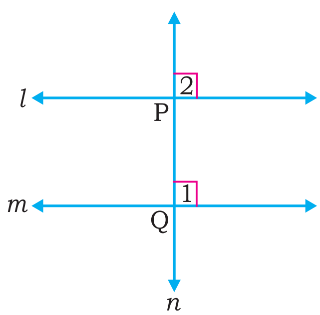
مطلوب: $l \parallel m$

ثبوت:

استدلال	بیانات
i. مسئلہ اثباتی 1 کی رو سے۔	1. $\angle 1$ زاویہ $\angle 4$ کا سپلیمنٹ ہے۔
ii. معلوم	2. لیکن $\angle 2$ زاویہ $\angle 4$ کا بھی سپلیمنٹ ہے۔
iii. ایک زاویہ کے سپلیمنٹ متماثل ہوتے ہیں۔	3. اس لئے $m\angle 1 = m\angle 2$
iv. مسئلہ اثباتی 7 کی رو سے۔	4. لیکن یہ متبادلہ زاویے ہیں اس لئے $l \parallel m$
فہوالمطلوب	

نتیجہ صریح 3. اگر کسی مستوی میں کوئی خط دیگر دو خطوط میں سے ہر ایک پر عمود ہو تو دونوں خطوط متوازی خطوط ہوتے ہیں۔

معلوم: خطِ قاطع n دو ہم مستوی خطوط l اور m کو بالترتیب نقاط P اور Q پر قطع کرتا ہے اور



$$m\angle 1 = 90^\circ = m\angle 2$$

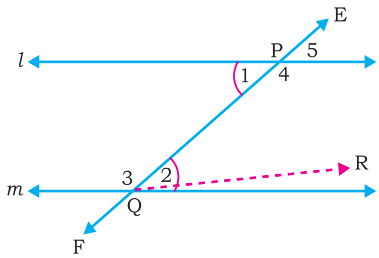
مطلوب: $l \parallel m$

ثبوت:

استدلال	بیانات
i. ہر زاویہ قائمہ ہے (معلوم)	1. $m\angle 1 = m\angle 2$
ii. مسئلہ اثباتی 7 نتیجہ صریح 1 کے مطابق۔	2. لیکن یہ متبادلہ زاویے ہیں اس لئے $l \parallel m$
فہوالمطلوب	

مسئلہ اثباتی 8

اگر ایک خط قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرے تو ان سے بننے والے متبادلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔



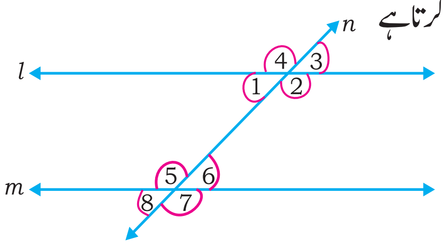
معلوم: خط قاطع $\overleftrightarrow{EF}$ دو متوازی خطوط l اور m کو بالترتیب نقاط P اور Q پر قطع کرتا ہے۔

مطلوب: $\angle 2 \cong \angle 1$ اور $\angle 4 \cong \angle 3$

ثبوت: اگر $\angle 1$ اور زاویہ $\angle 2$ متماثل نہیں ہیں تو فرض کیا $\angle PQR \cong \angle 1$ جبکہ $\overrightarrow{QR}$ خط m پر واقع نہیں ہے۔

بیانات	استدلال
1. چونکہ $\angle PQR \cong \angle 1$	i. مفروضے کی رو سے۔
2. اس لئے $\overrightarrow{QR} \parallel l$	ii. مسئلہ اثباتی 7 کی رو سے۔
3. اس طرح خط l دو متقاطع خطوط m اور $\overrightarrow{QR}$ کے متوازی ہے جو کہ ناممکن ہے۔	iii. پلے فیئر (Axiom) کی رو سے۔
4. اس لئے $\angle 2 \cong \angle 1$	iv. ہمارا مفروضہ ناممکن نتیجہ پر منتج ہوتا ہے۔
5. اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ $\angle 4 \cong \angle 3$	v. مذکورہ بالا اقدام کی رو سے۔
فہو المطلوب	

نتیجہ صریح 1. اگر ایک خطِ قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہے تو متناظرہ زاویوں کا ہر جوڑا متماثل ہوتا ہے۔



معلوم: خطِ قاطع n دو متوازی خطوط l اور m کو قطع کرتا ہے (ملاحظہ ہو سامنے شکل میں)

مطلوب: $\angle 4 \cong \angle 5$، $\angle 3 \cong \angle 6$، $\angle 2 \cong \angle 7$، $\angle 8 \cong \angle 1$

(متناظرہ زاویوں کی جوڑے)

ثبوت:

استدلال	بیانات
i. معلوم	1. $l \parallel m$
ii. متبادلہ زاویے (مسئلہ 8)	2. اس لئے $\angle 1 \cong \angle 6$
iii. متقابلہ راسی زاویے۔	3. لیکن $\angle 1 \cong \angle 3$
iv. متعدی تماثلیت۔	4. اس لئے $\angle 6 \cong \angle 3$
v. مذکورہ بالا بیانات واستدلال کے مطابق۔	5. اسی طرح $\angle 1 \cong \angle 8$، $\angle 2 \cong \angle 7$ اور $\angle 4 \cong \angle 5$
فہوالمطلوب	

نتیجہ صریح 2. اگر ایک خطِ قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہے تو خطِ قاطع کے ایک ہی جانب کے اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

معلوم: $m \parallel l$ اور خطِ قاطع n انہیں قطع کرتا ہے اور آٹھ زاویے $\angle 1$ یا $\angle 8$ تک وجود میں آتے ہیں (ملاحظہ ہو شکل نتیجہ صریح 1)

مطلوب: $m\angle 2 + m\angle 6 = 180^\circ$ اور $m\angle 1 + m\angle 5 = 180^\circ$

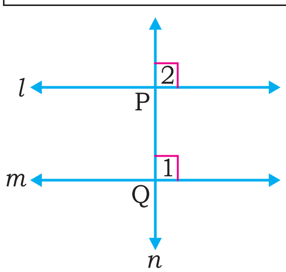
ثبوت:

استدلال	بیانات
i. معلوم	1. $l \parallel m$
ii. متبادلہ زاویے (مسئلہ 8)	2. اس لئے $\angle 6 \cong \angle 1$
iii. دونوں اطراف $m\angle 2$ جمع کرنے پر۔	3. یا $m\angle 6 + m\angle 2 = m\angle 1 + m\angle 2$
iv. کیونکہ $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$ (مسئلہ 1)	4. اس لئے $m\angle 6 + m\angle 2 = 180^\circ$
v. مذکورہ بالا اقدام کے مطابق۔	5. اسی طرح $m\angle 1 + m\angle 5 = 180^\circ$
فہوالمطلوب	

نتیجہ صریح 3. کسی مستوی میں اگر ایک خط، خطوط متوازی میں سے کسی ایک پر عمود ہو تو وہ دوسرے خط پر بھی عمود ہوتا ہے۔

معلوم: $l \parallel m$ اور n عمود ہے خط m پر۔

مطلوب: خط n، خط l پر بھی عمود ہے۔

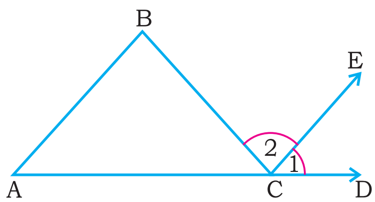


ثبوت:

بیانات	استدلال
1. $l \parallel m$	i. معلوم
2. اس لئے $\angle 1 \cong \angle 2$ جس سے مراد ہے کہ $\angle 2$ زاویہ قائمہ ہے۔	ii. مسئلہ اثباتی 8 نتیجہ صریح 1 (متناظرہ زاویے)
3. خط n، خط l پر بھی عمود ہے۔	iii. $\angle 2$ زاویہ قائمہ ہے (ثابت ہو چکا ہے)
فہوالمطلوب	

مسئلہ اثباتی 9

"مثلث کے تینوں زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے"



معلوم: مثلث ABC

مطلوب: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$

عمل: $\overline{AC}$ کو کسی نقطہ D تک بڑھایئے اور $\overrightarrow{CE}$ ضلع $\overline{AB}$ کے متوازی کھینچیے۔

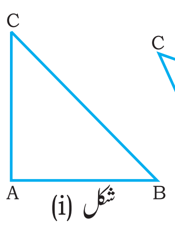
ثبوت:

بیانات	استدلال
1. $\overline{AB}$، شعاع $\overrightarrow{CE}$ کے متوازی ہے اور $\overrightarrow{AD}$ قاطع ہے	i. عمل
2. اس لئے $m\angle A = m\angle 1$	2. متناظرہ زاویے
3. $\overline{AB}$، شعاع $\overrightarrow{CE}$ کے متوازی ہے اور $\overline{BC}$ خطِ قاطع ہے۔	3. عمل
4. اس لئے $m\angle B = m\angle 2$	4. متبادلہ زاویے
5. اور $m\angle A + m\angle B = m\angle 1 + m\angle 2$ $= m\angle BCD$	5. مساوات (2) اور (4) جمع کرنے پر مزید بر آں زاویوں کی جمع کا موضوعہ۔
6. مساوات 5 کے دونوں اطراف $m\angle ACB$ جمع کرنے پر۔ $m\angle A + m\angle B + m\angle ACB = m\angle BCD + m\angle ACB$	6. مساوات کی خاصیت جمع۔
7. یا $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$	7. $m\angle BCD + m\angle ACB = 180^\circ$
فہوالمطلوب	

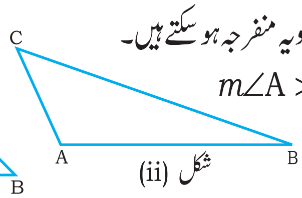
نتیجہ صریح 1. کسی مثلث میں صرف ایک زاویہ قائمہ یا ایک زاویہ منفرجہ ہو سکتے ہیں۔

معلوم: ΔABC جس میں $m\angle A = 90^\circ$ یا $m\angle A > 90^\circ$

مطلوب: ΔABC میں صرف ایک زاویہ قائمہ ہے یا صرف ایک زاویہ منفرجہ ہے۔



شکل (i)



شکل (ii)

ثبوت:

بیانات	استدلال
1. شکل (i) میں $m\angle A = 90^\circ$	i. معلوم
2. اس لئے $m\angle B + m\angle C = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ یعنی $\angle B$ اور $\angle C$ کمپلیمنٹری زاویے ہیں۔	ii. مسئلہ اثباتی 9 کی رو سے کمپلیمنٹری زاویوں کی تعریف کے مطابق۔
3. اس لئے $\angle B$ اور $\angle C$ میں سے ہر زاویہ 90° سے کم ہے یعنی ΔABC میں صرف ایک زاویہ قائمہ ہے۔	iii. کیونکہ دونوں زاویے ملکر 90° کے برابر ہوتے ہیں۔
4. شکل (ii) میں $m\angle A > 90^\circ$	iv. معلوم
5. اس لئے $m\angle B + m\angle C < 90^\circ$	v. تینوں زاویوں کا مجموعہ 180° ہے۔
6. اس لئے B اور $\angle C$ میں سے ہر زاویہ 90° سے کم ہے یعنی ΔABC میں صرف ایک زاویہ منفرجہ ہے۔	vi. کیوں کہ دونوں زاویے ملکر بھی 90° سے کم ہیں۔

فہوالمطلوب

نتیجہ صریح 2. ہر مثلث میں کم از کم دو زاویے حادہ ہوتے ہیں۔

معلوم: ΔABC (مذکورہ بالا دی گئی شکل ملاحظہ کریں)

مطلوب: ΔABC میں کم از کم دو زاویے حادہ ہیں۔

ثبوت:

بیانات	استدلال
1. اگر ΔABC میں ایک زاویہ قائمہ یا ایک زاویہ منفرجہ ہو تو اس میں دو زاویے حادہ ہیں۔	i. مسئلہ اثباتی 9 نتیجہ صریح 1
2. اگر ΔABC میں نہ کوئی زاویہ قائمہ ہو نہ ہی منفرجہ ہو تو اس میں تمام تینوں زاویے حادہ ہیں۔	ii. ہر مثلث میں تین زاویے ہوتے ہیں۔
3. پس ہر مثلث میں کم از کم دو زاویے حادہ ہوتے ہیں۔	iii. جیسا کہ اوپر ثابت کیا جا چکا ہے۔

فہوالمطلوب

نتیجہ صریح 3. قائمۃ الزاویہ مثلث میں حادہ زاویے کمپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

[مشورہ: ثبوت کیلئے نتیجہ صریح 1 کے ثبوت میں سے پہلے دو بیانات لیجئے]

نتیجہ صریح 4. کسی بیرونی نقطہ سے دیئے ہوئے خط پر ایک اور صرف ایک عمود کھینچا جا سکتا ہے۔

[ثبوت کیلئے ملاحظہ ہو مسئلہ اثباتی 6 نتیجہ صریح 2]

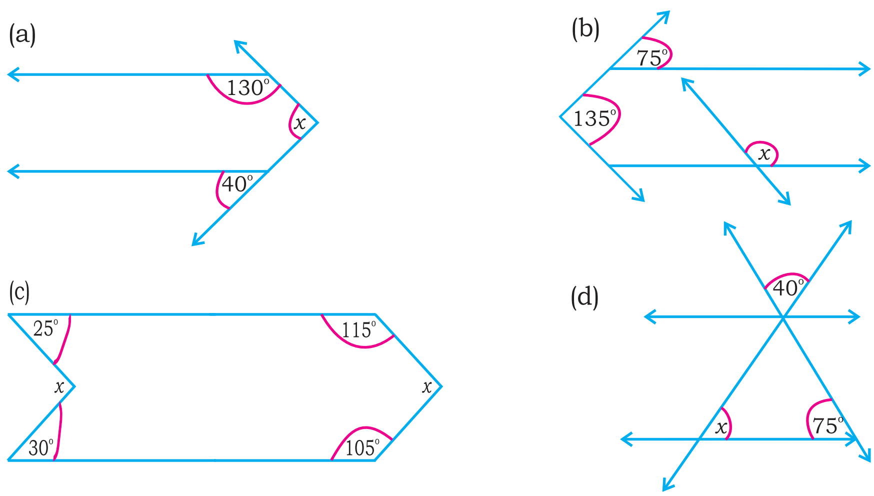
نتیجہ صریح 5. مثلث کے کسی بیرونی زاویے کی مقدار مثلث کے غیر متصلہ اندرونی زاویوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

[مشورہ برائے ثبوت: مسئلہ اثباتی 9 کی شکل بنائیے اور نتیجہ صریح کے مطابق "معلوم، مطلوب" لکھئے اور ثبوت میں سے پہلے پانچ بیانات نوٹ کیجئے ثبوت پورا ہوا]

نتیجہ صریح 6. اگر کسی مثلث کے دو زاویے کسی دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے متماثل ہوں، تو دونوں مثلثان کے تیسرے زاویے بھی آپس میں متماثل ہوں گے۔ [طلباء خود حل کریں]

مشق 10.5

1. مندرجہ ذیل ہر شکل میں زاویہ x کی مقدار معلوم کریں۔

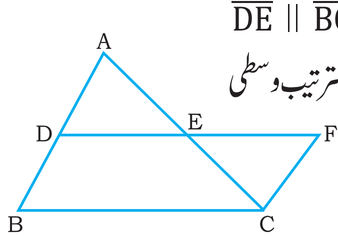


[مشورہ: (a) سے (c) زاویہ x (یا 135°) کے راسی نقطہ سے گزرنے والی ایک خط باقی دو خطوط کے متوازی کھینچیے]

2. اگر دو قطعات خط $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ نقطہ O پر قطع کریں تو ثابت کیجیے $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ اور $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

[اس طرح کا سوال پہلے بھی حل کیا جا چکا ہے۔ اس میں دو مثلثوں کو متماثل ثابت کرنے کے بعد مسئلہ اثباتی 7 کی رو سے متبادلہ زاویوں کی مدد سے خطوط کو متوازی ثابت کیجیے]

3. ΔABC میں نقاط D اور E اضلاع $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ کے بالترتیب وسطی نقاط ہیں $\overline{DE}$ کو نقطہ F تک بڑھایا گیا ہے اس طرح کہ $\overline{EF} \cong \overline{DE}$ تو ثابت کیجیے کہ $\overline{CF} \parallel \overline{AB}$ اور $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$



معلوم: مثلث ΔABC میں نقاط D اور E اضلاع $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ کے بالترتیب وسطی نقاط ہیں $\overline{DE}$ کو نقطہ F تک بڑھایا گیا ہے اس طرح کہ $\overline{EF} \cong \overline{DE}$

مطلوب: $\overline{CF} \parallel \overline{AB}$ اور $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

ثبوت:

استدلال	بیانات
i. مثلثان کی مطابقت	1. $\Delta ADE \leftrightarrow \Delta CEF$ میں
(i) معلوم (E نقطہ وسط ہے)	(i) $\overline{AE} \cong \overline{CE}$
(ii) راسی متقابلہ زاویے۔	(ii) $\angle AED \cong \angle CEF$
(iii) معلوم	(iii) $\overline{DE} \cong \overline{EF}$
ii. $S.A.S \cong S.A.S$	2. $\Delta AED \cong \Delta CEF$
iii. مثلثان کے تماثل کی رو سے۔	3. اس لئے
	$\overline{CF} \cong \overline{AD} \cong \overline{BD}$ اور $\angle A \cong \angle ECF$
iv. مسئلہ اثباتی 7 کی رو سے۔	4. لیکن $\angle A$ اور $\angle ECF$ متبادلہ زاویے ہیں اس لئے
	$\overline{CF} \parallel \overline{BD}$ اور $\overline{CF} \parallel \overline{AB}$
v. اوپر ثابت ہو چکا ہے۔	5. $\overline{CF} \parallel \overline{BD}$ اور $\overline{CF} \parallel \overline{BD}$
vi. کسی چوکور کے متقابلہ اضلاع کا ایک جوڑا متماثل اور متوازی ہو تو وہ متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔	6. اس لئے BCFD متوازی الاضلاع ہے۔
vii. متوازی الاضلاع کے متقابلہ ضلعے متماثل ہوتے ہیں۔	7. اس لئے $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$ یا $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$
viii. اوپر ثابت ہو چکا ہے۔	8. پس $\overline{CF} \parallel \overline{AB}$ اور $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$
فہوالمطلوب	

4. ثابت کیجئے کہ متوازی الاضلاع کے متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

[مشورہ: مسئلہ اثباتی 8 نتیجہ صریح 2 استعمال کریں یعنی $m\angle A + m\angle B = 180^{\circ}$]

5. مثلث مساوی الاضلاع کے ایک زاویہ کتنے ڈگری کا ہوتا ہے۔

6. کسی مثلث کا ایک زاویہ باقی دو زاویوں کی جمع کے مساوی کس صورت میں ہو سکتا ہے۔

7. چوکور کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ چار زاویہ قائمہ کے مساوی ہوتا ہے۔

[مشورہ: کوئی سا ایک وتر کھینچیں اور مسئلہ اثباتی 9 کو استعمال میں لائیں یعنی ثابت کریں کہ

چار زاویہ قائمہ = دو زاویہ قائمہ + دو زاویہ قائمہ]

جائزہ مشق 10

1. 'اثباتی جیومیٹری' علم ریاضی کی ایک شاخ ہے۔اس شاخ کا اہم کام کیا ہے؟

2. درج ذیل اصطلاحات کے بارے میں آپ کیا جانتے ہیں۔

(الف) غیر تعریف شدہ اصطلاحات (ب) بنیادی مفروضے

(ج) مسئلہ مجوّزہ یا مسئلہ اثباتی (د) اصول موضوعہ

(ہ) اصول متعارفہ (و) نتائج صریح

3. استدلال (Reasoning) کی چار بنیادی خصوصیات بیان کیجیے۔

4. (الف) مسئلہ اثباتی 1 کا دعویٰ عام لکھیے اور اسے ثابت کیجیے۔

(ب) خط کے کسی ایک نقطہ پر خط کے ایک ہی جانب بننے والے تمام زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 180° (دوزاویہ قائمہ) ہوتا ہے۔ثابت کیجیے۔

5. (الف) اگر دو خطوط قطع کریں تو راسی متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

(ب) مساوی الاضلاع مثلث، مساوی الزاویہ (Equiangular) مثلث بھی ہوتا ہے۔

6. (الف) کسی بیرونی نقطے سے کسی خط پر ایک اور صرف ایک عمود کھینچا جاسکتا ہے۔

(ب) اگر ایک خط قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرے تو متبادلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

7. (الف) مثلث کے کسی بیرونی زاویے کی مقدار مثلث کے غیر متصلہ اندرونی زاویوں کے مجموعہ کی مقدار کے مساوی ہوتا ہے۔

(ب) مسئلہ اثباتی 5 کا دعویٰ عام لکھیے اور اسے ثابت کیجیے۔

8. (الف) ہر بیان کے آگے 'درست / غلط' لکھیے۔

(i) اگر دو خطوط قطع کریں تو راسی متصلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

(ii) کسی بیرونی نقطہ سے خط کے متوازی ایک اور صرف ایک خط کھینچا جاسکتا ہے۔

(iii) مثلث کے تینوں زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 180° ہوسکتا ہے۔

(iv) اگر خط کے کسی ایک نقطے سے ایک شعاع کھینچیں تو اس طرح وجود میں آنے والے دونوں متصلہ زاویے کمپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

(v) مثلث قائمۃ الزاویہ میں حادہ زاویے کمپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

(ب) موزوں الفاظ سے خالی جگہ پُر کیجیے:

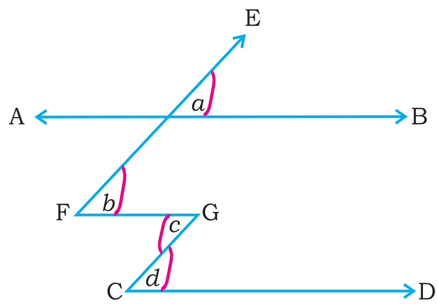
(i) تین غیر ہم خط نقاط ایک __________ کا تعیّن کرتے ہیں۔

(ii) دو مختلف نقاط ایک __________ کا تعیّن کرتے ہیں۔

(iii) کسی بیرونی نقطہ سے کسی خط پر ایک اور صرف ایک __________ کھینچا جاسکتا ہے۔

(iv) اگر ایک خطِ قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرے تو __________ زاویوں کے ہر جوڑے اور __________ زاویوں کے ہر جوڑے متماثل ہوتے ہیں۔

(v) مثلث کا بیرونی زاویہ مثلث کے غیر متصلہ اندرونی زاویوں کے ________ کے مساوی ہوتا ہے۔

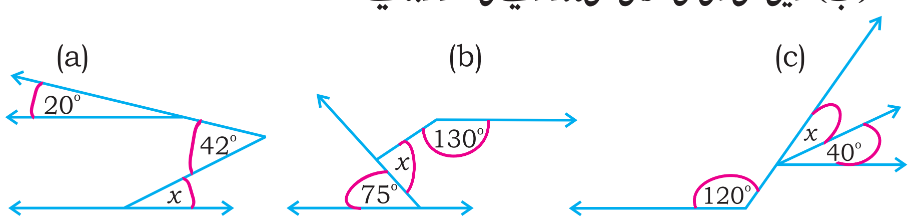


9. (الف) سامنے شکل میں

$m\angle a = m\angle b = m\angle c = m\angle d$

تو متوازی خطوط کے چار جوڑوں کے نام لکھیے۔

(ب) ذیل میں دی گئی اشکال میں x زاویے کی مقدار بتائیے۔



خلاصہ

- اثباتی جیومیٹری، علم ریاضی کی ایک شاخ ہے جس میں جیومیٹریائی اشکال (یعنی مسائل اثباتی کو منطقی استدلال سے ثابت کیا جاتا ہے۔
- غور و خوض کرنے کے اس منطقی عمل کو استدلال کہتے ہیں جس سے کسی اہم نتیجہ یا فیصلہ پر پہنچا جاتا ہے۔

- استقرائی طریقہ استدلال میں ہم مشاہدہ کی بنیاد پر عمومی نتائج اخذ کرتے ہیں۔
- استخراجی طریقہ استدلال (Deductive Reasoning) میں ہم عمومی نتائج سے خصوصی نتائج اخذ کرتے ہیں۔
- استخراجی طریقہ استدلال کی بنیاد وہ چار اوصاف ہیں جنہیں استدلال کی بنیادی خصوصیات کہتے ہیں۔ جو یہ ہیں
  (1) غیر تعریف شدہ اصطلاحات (2) تعریف شدہ اصطلاحات
  (3) بنیادی مفروضے (4) مسائل مجوّزہ
- بنیادی مفروضے دو قسم کے ہوتے ہیں۔
- اصول متعارفہ وہ بنیادی مفروضے ہیں جو اعداد سے تعلق رکھتے ہیں جبکہ اصول موضوعہ وہ بنیادی مفروضے ہیں جن کا تعلق جیومیٹری کی اشکال سے ہے۔
- مسائل مجوّزہ وہ مسائل ہیں جنہیں بحث کیلئے تجویز کیا جاتا ہے۔ مسائل مجوّزہ یا تو مسائل اثباتی ہوتے یا ان پر منحصر دیگر مسائل جنہیں رائیڈر کہتے ہیں۔
- مسائل مجوّزہ (یعنی مسائل اثباتی یا رائیڈر) دو حصوں پر مشتمل ہوتا ہے
  1. قیاس یا شرط 2. نتیجہ
- نتیجہ صریح ایک ایسی حقیقت ہے جو مسئلہ اثباتی کا فوری یا ظاہر نتیجہ ہوتا ہے۔
- ایک مسئلہ اثباتی کو دوسرے کا عکس کہا جاتا ہے اگر ایک مسئلہ کا قیاس دوسرے کا نتیجہ ہو۔
- مسئلہ اثباتی کا وہ بیان جسے ہم ثابت کرتے ہیں مسئلہ اثباتی کا دعویٰ عام کہلاتا ہے۔
- معلوم (یا data) وہ کوائف خاص ہیں جو "شرط" سے تعلق رکھتے ہیں اور شکل کے مطابق بیان کیے جاتے ہیں۔
- مطلوب، نتیجہ سے متعلق وہ خاص بیان ہے جو شکل کے مطابق لکھا جاتا ہے اور ثابت کیا جاتا ہے۔
- عمل تشکیل ثبوت کا وہ حصہ ہے جسے بعض اوقات دی ہو شکل میں اضافہ کیا جاتا ہے۔
- ثبوت، مسئلہ اثباتی کے ثبوت کا آخری حصہ ہے۔ ہر مسئلہ منطقی انداز میں ثابت کیا جاتا ہے۔ ایک کالم میں یکے بعد دیگرے بیانات لکھے جاتے ہیں اور دوسرے کالم میں اُن بیانات کی وجہ بتائی جاتی ہے جسے دلیل یا استدلال کہتے ہیں۔

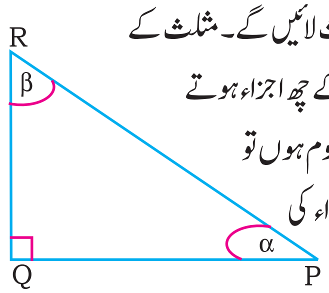
تکونیات

11.1 تکونیات

11.1.1 تکونیات کی تعریف

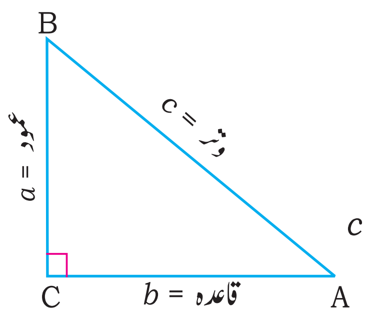
لفظ "تکونیات Trigonometry" سے مراد مثلثوں کی پیمائش ہے۔ تکونیات "Trigonometry" ریاضی کی ایک اہم شاخ ہے۔ لفظ "Trigonometry" یونانی زبان کا لفظ ہے جس سے مراد زاویوں کی پیمائش ہے۔

ریاضی کی اس اہم شاخ میں مسلمان ریاضی دانوں نے نمایاں خدمات سرانجام دی ہیں۔ یہ شاخ الیکٹرانکس، برقی انجنیئرنگ اور طبعیاتی سائنس کی بہت سی شاخوں، جہازرانی اور نقشہ سازی وغیرہ میں اہم کردار ادا کرتی ہے۔



اس یونٹ میں ہم صرف قائمۃ الزاویہ مثلث (یا قائمہ مثلث) زیر بحث لائیں گے۔ مثلث کے تینوں زاویے اور تینوں اضلاع مثلث کے اجزاء کہلاتے ہیں لہٰذا مثلث کے چھ اجزاء ہوتے ہیں۔ اگر ان میں سے تین اجزاء جن میں کم از کم ایک ضلع کی مقدار معلوم ہوں تو دیگر اجزاء کی مقداریں معلوم کی جاسکتی ہیں۔ مثلث کے نامعلوم اجزاء کی مقداریں معلوم کرنے کیلئے ہمیں علم تکونیات کی ضرورت پڑتی ہے۔

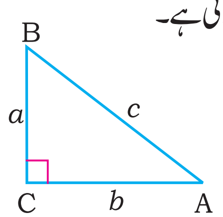
11.1.2 حادہ زاویوں کی تکونیاتی نسبتیں



سامنے کی شکل میں ABC ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے جس میں زاویہ C قائمۃ الزاویہ ہے۔

$\angle A$، $\angle B$ اور $\angle C$ کے متقابلہ اضلاع کی مقداریں بالترتیب a، b اور c سے ظاہر کی گئی ہیں یعنی $m\overline{BC} = a,\ m\overline{CA} = b,\ m\overline{AB} = c.$

کسی قائمہ مثلث کے حادہ زاویوں کے لئے کوئی سے دو اضلاع کی نسبت تکونیاتی نسبت کہلاتی ہے۔



حادہ زاویے کیلئے تین اضلاع کی مدد سے چھ ممکنہ نسبتیں بن سکتی ہیں جو مندرجہ ذیل ہیں:

قائمہ مثلث ACB کے زاویہ حادہ A زیر غور لائیں۔

(i) Sine of $m\angle A$ = Sin $(m\angle A) = \dfrac{\text{زاویہ A کے متقابلہ ضلع کی مقدار}}{\text{وتر کی مقدار}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{AB}} = \dfrac{a}{c}$

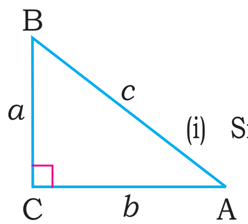
(ii) Cosine of $m\angle A$ = Cos $(m\angle A) = \dfrac{\text{زاویہ A کے متصلہ ضلع کی مقدار}}{\text{وتر کی مقدار}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}} = \dfrac{b}{c}$

(iii) Tangent of $m\angle A$ = Tan $(m\angle A) = \dfrac{\text{زاویہ A کے متقابلہ ضلع کی مقدار}}{\text{زاویہ A کے متصلہ ضلع کی مقدار}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{AC}} = \dfrac{a}{b}$

(iv) Cotangent of $m\angle A$ = Cot $(m\angle A) = \dfrac{\text{زاویہ A کے متصلہ ضلع کی مقدار}}{\text{زاویہ A کے متقابلہ ضلع کی مقدار}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{BC}} = \dfrac{b}{a}$

(v) Secant of $m\angle A$ = Sec $(m\angle A) = \dfrac{\text{وتر کی مقدار}}{\text{زاویہ A کے متصلہ ضلع کی مقدار}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}} = \dfrac{c}{b}$

(vi) Cosecant of $m\angle A$ = Cosec $m\angle A = \dfrac{\text{وتر کی مقدار}}{\text{زاویہ A کے متقابلہ ضلع کی مقدار}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}} = \dfrac{c}{a}$



سرگرمی: اسی طرح ہم حادہ زاویہ B کی تکونیاتی نسبتیں معلوم کر سکتے ہیں۔

(i) Sine of $m\angle B$ = Sin $(m\angle B) = \dfrac{\text{زاویہ B کے متقابلہ ضلع کی مقدار}}{\text{وتر کی مقدار}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}} = \underline{\qquad}$

(ii) Cosine of $m\angle B$ = Cos $(m\angle B) = \dfrac{\text{زاویہ B کے متصلہ ضلع کی مقدار}}{\text{وتر کی مقدار}} = \underline{\qquad} = \dfrac{a}{c}$

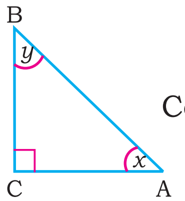
(iii) Tangent of $m\angle B$ = Tan $(m\angle B) = \dfrac{\text{زاویہ B کے متقابلہ ضلع کی مقدار}}{\underline{\qquad}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{BC}} = \dfrac{b}{a}$

(iv) Cotangent of $m\angle B$ = Cot $(m\angle B) = \dfrac{\underline{\qquad}}{\text{زاویہ B کے متقابلہ ضلع کی مقدار}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{AC}} = \underline{\qquad}$

(v) Secant of $m\angle B$ = Sec $(m\angle B) = \underline{\qquad} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}} = \dfrac{c}{a}$

(vi) Cosecant of $m\angle B$ = Cosec $(m\angle B) = \dfrac{\text{وتر کی مقدار}}{\text{زاویہ B کے متقابلہ ضلع کی مقدار}} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

نوٹ: Cosec θ کو Csc θ سے بھی ظاہر کیا جاسکتا ہے۔



مذکورہ بالا نسبتوں کا جائزہ لیں تو معلوم ہوتا ہے کہ

(i) $\text{Sin } m\angle A = \dfrac{1}{\text{Cosec } m\angle A}$ اور $\text{Cosec } m\angle B = \dfrac{1}{\text{Sin } m\angle B}$

(ii) $\text{Cos } m\angle A = \dfrac{1}{\text{Sec } m\angle A}$ اور $\text{Sec } m\angle B = \dfrac{1}{\text{Cos } m\angle B}$

(iii) $\text{Tan } m\angle A = \dfrac{1}{\text{Cot } m\angle A}$ اور $\text{Cot } m\angle B = \dfrac{1}{\text{Tan } m\angle B}$

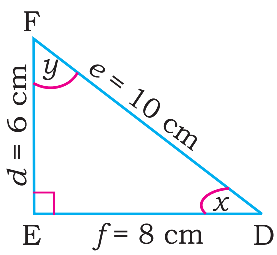
مزید برآں:

(a) $\dfrac{\text{Sin } m\angle A}{\text{Cos } m\angle A} = \text{Tan } m\angle A$ یا $\dfrac{\text{Sin } x}{\text{Cos } x} = \text{Tan } x$

(b) $\dfrac{\text{Cos } m\angle B}{\text{Sin } m\angle B} = \text{Cot } m\angle B$ یا $\dfrac{\text{Cos } y}{\text{Sin } y} = \text{Cot } y$

مذکورہ بالا نتائج کی روشنی میں معلوم ہوتا ہے کہ:

(iv) $\text{Sin } m\angle A \ \text{Cosec } m\angle A = 1$	یا	$\text{Sin } x \ \text{Cosec } x = 1$
(v) $\text{Cos } m\angle A \ \text{Sec } m\angle A = 1$	یا	$\text{Cos } x \ \text{Sec } x = 1$
(vi) $\text{Tan } m\angle A \ \text{Cot } m\angle A = 1$	یا	$\text{Tan } x \ \text{Cot } x = 1$



مثال 1. قائمہ مثلث DEF میں $m\angle D = x$ اور $m\angle F = y$ شکل میں دی گئی معلومات کے مطابق x اور y دونوں حادہ زاویوں کی تکونیاتی نسبتیں بتائیے۔

حل:

(i) $\text{Sin } x = \dfrac{\angle x \text{ کے متقابلہ ضلع}}{\text{وتر}} = \dfrac{m\overline{EF}}{m\overline{DF}} = \dfrac{d}{e} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

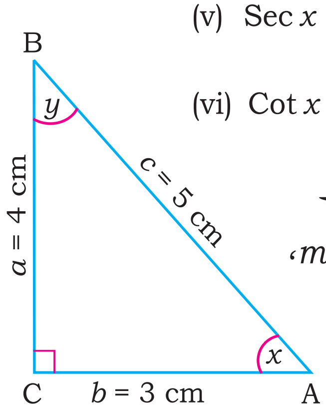
(ii) $\text{Cos } x = \dfrac{\angle x \text{ کے متصلہ ضلع}}{\text{وتر}} = \dfrac{m\overline{DE}}{m\overline{DF}} = \dfrac{f}{e} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

(iii) $\text{Tan } x = \dfrac{\angle x \text{ کے متقابلہ ضلع}}{\angle x \text{ کے متصلہ ضلع}} = \dfrac{m\overline{EF}}{m\overline{DE}} = \dfrac{d}{f} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

(iv) $\text{Cosec } x = \dfrac{1}{\text{Sin } x} = \dfrac{e}{d} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$

(v) $\text{Sec } x = \dfrac{1}{\text{Cos } x} = \dfrac{e}{f} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$

(vi) $\text{Cot } x = \dfrac{1}{\text{Tan } x} = \dfrac{f}{d} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$



نوٹ: طلبہ کو چاہیے کہ y کے لیے تمام تکونیاتی نسبتیں خود معلوم کریں۔

مثال 2. قائمہ مثلث ABC میں $m\angle C = 90^\circ$، $m\angle A = x$،
$m\angle B = y$، $m\overline{BC} = 4\text{ cm}$، $m\overline{AC} = 3\text{ cm}$,
اور $m\overline{AB} = 5\text{ cm}$

تو تکونیاتی نسبتوں کی مدد سے مندرجہ ذیل کی تصدیق کیجیے۔

(i) $\dfrac{\text{Cos } x}{\text{Sin } x} = \text{Cot } x$ **(ii)** $\dfrac{\text{Sin } y}{\text{Cos } y} = \text{Tan } y$ **(iii)** $\text{Tan } x \text{ Cot } x = 1$

حل: **(i)** $\dfrac{\text{Cos } x}{\text{Sin } x} = \text{Cot } x$

پہلے بائیں جانب کی قیمت:

$$\text{L.H.S} = \frac{\text{Cos } x}{\text{Sin } x} = \frac{\text{وتر}/\angle x \text{ کے متصلہ ضلع}}{\text{وتر}/\angle x \text{ کے متقابلہ ضلع}} = \frac{(m\overline{AC}/m\overline{AB})}{(m\overline{BC}/m\overline{AB})}$$

$$= \frac{b/c}{a/c} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{\cancel{5}_1} \times \frac{\cancel{5}^1}{4} = \frac{3}{4} \qquad \text{....I}$$

اور اب دائیں جانب کی قیمت:

$$\text{R.H.S} = \text{Cot } x = \frac{\angle x \text{ کے متصلہ ضلع}}{\angle x \text{ کے متقابلہ ضلع}} = \frac{m\,\overline{AC}}{m\,\overline{BC}} = \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \qquad \text{....II}$$

I اور II کا موازنہ کرنے پر $\text{L.H.S} = \text{R.H.S} \Rightarrow \dfrac{\text{Cos } x}{\text{Sin } x} = \text{Cot } x$

(ii) $\dfrac{\text{Sin } y}{\text{Cos } y} = \text{Tan } y$

$$\text{L.H.S} = \frac{\text{Sin } y}{\text{Cos } y} = \frac{\text{وتر}/\angle y \text{ کے متقابلہ ضلع}}{\text{وتر}/\angle y \text{ کے متصلہ ضلع}} = \frac{(m\overline{AC}/m\overline{AB})}{(m\overline{BC}/m\overline{AB})}$$

$$= \frac{b/c}{a/c} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{\cancel{5}_1} \times \frac{\cancel{5}^1}{4} = \frac{3}{4} \qquad \text{...III}$$

$$\text{R.H.S} = \text{Tan}\, y = \frac{\angle y \text{ کے متقابلہ ضلع}}{\angle y \text{ کے متصلہ ضلع}} = \frac{m\,\overline{AC}}{m\,\overline{BC}} = \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \qquad \text{....IV}$$

III اور IV کا موازنہ کرنے پر معلوم ہوا کہ $\text{L.H.S.} = \text{R.H.S} \Rightarrow \dfrac{\text{Sin}\, y}{\text{Cos}\, y} = \text{Tan}\, y$

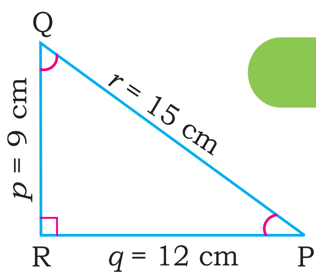
(iii) $\text{Tan}\, x \,\text{Cot}\, x = 1$

$$\text{L.H.S} = \text{Tan}\, x \;\text{Cot}\, x = \frac{\angle x \text{ کے متقابلہ ضلع}}{\angle x \text{ کے متصلہ ضلع}} \times \frac{\angle x \text{ کے متصلہ ضلع}}{\angle x \text{ کے متقابلہ ضلع}}$$

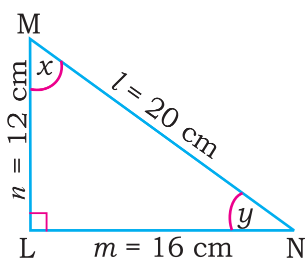
$$= \frac{m\overline{BC}}{m\overline{AC}} \times \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{4}} = \frac{1}{1} = 1$$

پس: $\text{L.H.S} = \text{R.H.S.} \Rightarrow \text{Tan}\, x . \text{Cot}\, x = 1$

مشق 11.1



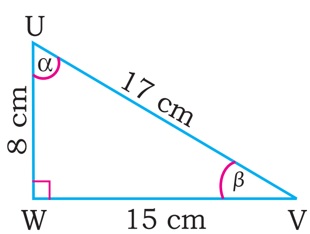
1. قائمۃ الزاویہ مثلث PQR میں، $m\angle P$ اور $m\angle Q$ حادہ زاویوں کی تمام تکونیاتی نسبتیں معلوم کیجیے۔



2. قائمہ مثلث LMN میں زاویہ L قائمہ ہے۔
$m\angle M = x$ اور $m\angle N = y$ تو مندرجہ ذیل تکونیاتی نسبتیں معلوم کیجیے۔

(i) Sin x	(ii) Cos y	(iii) Tan x
(iv) Cosec y	(v) Sec x	(vi) Cot y
(vii) Cos x	(viii) Sin y	(ix) Cot x
(x) Sec y	(xi) Cosec x	(xii) Tan y

ان میں سے کون سی نسبتیں مساوی ہیں۔



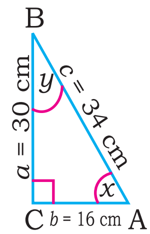
3. قائمہ مثلث UVW میں (بیٹا) $m\angle V = \beta$،
(الفا) $m\angle U = \alpha$، $m\angle W = 90°$ تو
مندرجہ ذیل مساوات کی تصدیق کیجیے۔

(i) Sin α. Cosec α = 1 (ii) Sec β. Cosβ = 1 (iii) Tan α. Cot α = 1

(iv) $\frac{\text{Sin } \beta}{\text{Cos } \beta} = \text{Tan } \beta$ (v) $\frac{\text{Cos } \alpha}{\text{Sin } \alpha} = \text{Cot } \alpha$ (vi) $\text{Cos } \alpha . \text{ Cosec } \alpha = \text{Cot } \alpha$

(vii) $\frac{\text{Sec } \beta}{\text{Cosec } \beta} = \text{Tan } \beta$ (viii) $\frac{\text{Tan } \alpha}{\text{Cot } \beta} = 1$

4. قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں زاویہ C قائمہ ہے اگر $m\angle A = x$ اور $m\angle B = y$
تو ثابت کیجئے کہ:

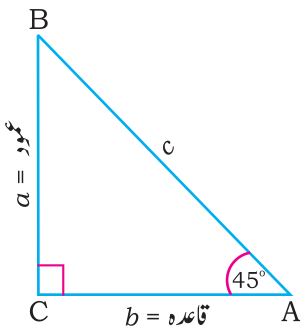


(i) $\text{Sin } x = \text{Cos } y$ (ii) $\text{Tan } y = \text{Cot } x$
(iii) $\text{Sec } x = \text{Cosec } y$ (iv) $\text{Cos } x = \text{Sin } y$
(v) $\text{Cot } y = \text{Tan } x$ (vi) $\text{Cosec } x = \text{Sec } y$

11.2 حادہ زاویہ کی تکونیاتی نسبتیں

11.2.1 حادہ زاویوں 30°، 45° اور 60° کی تکونیاتی نسبتیں معلوم کرنا

(الف) 45° کے زاویہ کی تکونیاتی نسبتیں



قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں جس کا زاویہ C قائمہ ہے فرض کیا کہ $m\angle A = 45^\circ$ ہمیں معلوم ہے کہ قائمہ مثلث میں حادہ زاویے کمپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

$$m\angle B = 90^\circ - m\angle A = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

مزید برآں ہم جانتے ہیں کہ کسی مثلث میں اگر دو زاویے متماثل ہوں تو ان کے متقابلہ ضلع بھی متماثل ہوتے ہیں یعنی

$$m\angle A = m\angle B = 45^\circ \Rightarrow m\overline{BC} = m\overline{AC}$$

یا $a = b$

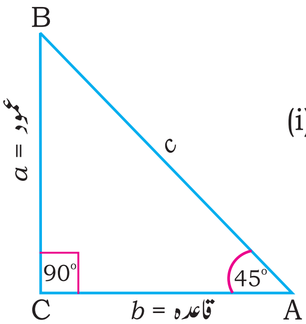
مسئلہ اثباتی فیثا غورث کے مطابق: $(\text{عمود})^2 + (\text{قاعدہ})^2 = (\text{وتر})^2$

یا $c^2 = a^2 + b^2$

یا $c^2 = b^2 + b^2 = 2b^2 \quad (\because a = b)$

$(c)^2 = (\sqrt{2b})^2$, i.e., $c = \sqrt{2}\ b$.

قائمہ مثلث میں مذکورہ بالا مقداروں کی روشنی میں ہم 45° کی تکونیاتی نسبتیں مندرجہ ذیل انداز میں لکھ سکتے ہیں۔



(i) $\text{Sin } 45^\circ = \text{Sin } m\angle A = \dfrac{\angle A \text{ کے متقابلہ ضلع}}{\text{وتر}} = \dfrac{a}{c}$

$= \dfrac{b}{\sqrt{2}\,b} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

یا $\text{Sin } 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\text{Cos } 45^\circ = \text{Cos } m\angle A = \dfrac{\angle A \text{ کے متصلہ ضلع}}{\text{وتر}} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{b}{\sqrt{2}\,b} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

یا $\text{Cos } 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(iii) $\text{Tan } 45^\circ = \text{Tan } m\angle A = \dfrac{\angle A \text{ کے متقابلہ ضلع}}{\angle A \text{ کے متصلہ ضلع}} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{b} = 1$ یا $\text{Tan } 45^\circ = 1$

(iv) $\text{Cot } 45^\circ = \text{Cot } m\angle A = \dfrac{\angle A \text{ کے متصلہ ضلع}}{\angle A \text{ کے متقابلہ ضلع}} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{b}{b} = 1$ یا $\text{Cot } 45^\circ = 1$

(v) $\text{Sec } 45^\circ = \text{Sec } m\angle A = \dfrac{\text{وتر}}{\angle A \text{ کے متصلہ ضلع}} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\sqrt{2}\,b}{b} = \sqrt{2}$

یا $\text{Sec } 45^\circ = \sqrt{2}$

(vi) $\text{Cosec } m\angle A = \dfrac{\text{وتر}}{\angle A \text{ کے متقابلہ ضلع}} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\sqrt{2}\,b}{b} = \sqrt{2}$

یا $\text{Cosec } 45^\circ = \sqrt{2}$

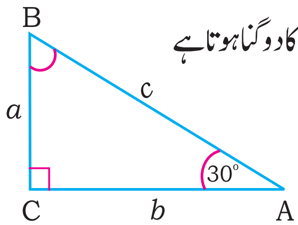
پس:

Sin 45°	Cos 45°	Tan 45°	Cot 45°	Sec 45°	Cosec 45°
$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

(ب) 30° مقدار کی حادہ زاویہ کی تکونیاتی نسبتیں

قائمہ مثلث ABC میں جو نقطہ C پر قائمہ ہے فرض کیا کہ $m\angle A = 30^\circ$ چونکہ قائمہ مثلث کے حادہ زاویے کمپلیمنٹری ہوتے ہیں۔اس لئے:

$$m\angle B = 90^\circ - m\angle A = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$



مزید برآں ہمیں یہ بھی علم ہے کہ قائمہ مثلث کا وتر، 30° کے متقابلہ ضلع کا دوگنا ہوتا ہے

یعنی $c = 2a$

مسئلہ اثباتی فیثا غورث کے مطابق

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$c = 2a$ لگانے پر

$$(2a)^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow 4a^2 - a^2 = b^2 \quad \Rightarrow 3a^2 = b^2 \quad \Rightarrow b = \sqrt{3}\,a$$

(i) $\text{Sin } 30^\circ = \dfrac{\angle 30^\circ \text{ کے متقابلہ ضلع}}{\text{وتر}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{AB}} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

(ii) $\text{Cos } 30^\circ = \dfrac{\angle 30^\circ \text{ کے متصل ضلع}}{\text{وتر}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\sqrt{3}\,a}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(iii) $\text{Tan } 30^\circ = \dfrac{\angle 30^\circ \text{ کے متقابلہ ضلع}}{\angle 30^\circ \text{ کے متصل ضلع}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{AC}} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{\sqrt{3}\,a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

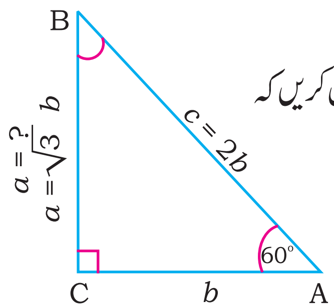
(iv) $\text{Cot } 30^\circ = \dfrac{\angle 30^\circ \text{ کے متصل ضلع}}{\angle 30^\circ \text{ کے متقابلہ ضلع}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{BC}} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\sqrt{3}\,a}{a} = \sqrt{3}$

(v) $\text{Sec } 30^\circ = \dfrac{\text{وتر}}{\angle 30^\circ \text{ کے متصل ضلع}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{2\,a}{\sqrt{3}\,a} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(vi) $\text{Cosec } 30^\circ = \dfrac{\text{وتر}}{\angle 30^\circ \text{ کے متقابلہ ضلع}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\,a}{a} = 2$

پس:

Sin 30°	Cos 30°	Tan 30°	Cot 30°	Sec 30°	Cosec 30°
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2



(ج) 60° مقدار کے حادہ زاویے کی تکونیاتی نسبتیں

قائمۃ الزاویہ مثلث ABC جس کا زاویہ قائمہ نقطہ C پر ہے میں فرض کریں کہ

$$m\angle A = 60^\circ$$

$$m\angle B = 90^\circ - m\angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

پس:

$$m\angle A = 60^\circ\ ,\ m\angle B = 30^\circ\ ,\ m\angle C = 90^\circ$$

چونکہ مثلث کا وتر 30° کے متقابلہ ضلع سے دوگنا ہے یعنی $c = 2b$

اور مسئلہ اثباتی فیثا غورث

$$(\text{وتر})^2 = (\text{قاعدہ})^2 + (\text{عمود})^2$$

$$c^2 = b^2 + a^2$$

$$(2b)^2 = b^2 + a^2 \quad (c = 2b\ \text{رکھنے پر})$$

یا $$4\ b^2 - b^2 = a^2$$

یا $$3\ b^2 = a^2$$

یا $$\sqrt{3b^2} = \sqrt{a^2}$$

یا $$a = \sqrt{3}\ b$$

(i) $\text{Sin } m\angle A = \text{Sin } 60^\circ = \dfrac{\angle 60^\circ\ \text{کے متقابلہ ضلع}}{\text{وتر}} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\sqrt{3}\ b}{2b} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(ii) $\text{Cos } m\angle A = \text{Cos } 60^\circ = \dfrac{\angle 60^\circ\ \text{کے متصلہ ضلع}}{\text{وتر}} = \dfrac{b}{2b} = \dfrac{1}{2}$

(iii) $\text{Tan } m\angle A = \text{Tan } 60^\circ = \dfrac{\angle 60^\circ\ \text{کے متقابلہ ضلع}}{\angle 60^\circ\ \text{کے متصلہ ضلع}} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{3}\ b}{b} = \sqrt{3}$

(iv) $\text{Cot } m\angle A = \text{Cot } 60^\circ = \dfrac{\angle 60^\circ\ \text{کے متصلہ ضلع}}{\angle 60^\circ\ \text{کے متقابلہ ضلع}} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{b}{\sqrt{3}\ b} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(v) $\text{Sec } m\angle A = \text{Sec } 60^\circ = \dfrac{\text{وتر}}{\angle 60^\circ\ \text{کے متصلہ ضلع}} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{2\text{b}}{\text{b}} = 2$

(vi) $\text{Cosec } m\angle A = \text{Cosec } 60^\circ = \dfrac{\text{وتر}}{\angle 60^\circ\ \text{کے متقابلہ ضلع}} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\ b}{\sqrt{3}\ b} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

پس 60° کی تکونیاتی نسبتیں مندرجہ ذیل ہیں

Sin 60°	Cos 60°	Tan 60°	Cot 60°	Sec 60°	Cosec 60°
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

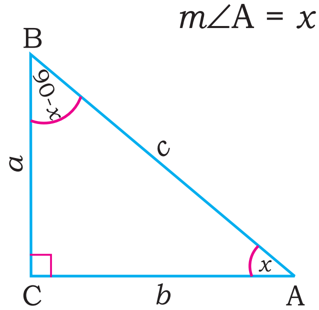
نوٹ: قائمہ مثلث میں اضلاع کی مقدار کچھ بھی ہو حادہ زاویہ کی تکونیاتی نسبتیں ہمیشہ مندرجہ ذیل ہوتی ہیں

زاویہ θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	Sec θ	Cosec θ
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

11.2.4 کمپلیمنٹری زاویوں کی تکونیاتی نسبتیں

ہمیں پہلے ہی علم ہے کہ قائمہ مثلث میں حادہ زاویے کمپلیمنٹری ہوتے ہیں۔اس لئے قائمہ مثلث ABC میں $m\angle C = 90^\circ$ جبکہ $m\angle A + m\angle B = 90^\circ$ اگر $m\angle A = x$

تو $m\angle B = 90^\circ - m\angle A = 90^\circ - x$



اب قائمہ مثلث پر غور کریں:

اگر $x = 30^\circ$ تو $m\angle B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

حادہ زاویہ $\angle A$ اور $\angle B$ کی تمام تکونیاتی نسبتیں معلوم کرتے ہیں۔

اس لئے:

$$\text{(i) } \sin x = \frac{a}{c} = \cos(90 - x) \Rightarrow \sin x = \cos(90 - x)$$

(ii) $\text{Cos } x = \frac{b}{c} = \text{Sin } (90 - x) \Rightarrow \text{Cos } x = \text{Sin } (90 - x)$

مزید برآں مذکورہ بالا جدول کے مطابق:

$$\text{Sin } 30^\circ = \frac{1}{2} = \text{Cos } (90 - 30)^\circ \Rightarrow \text{Sin } 30^\circ = \text{Cos } 60^\circ$$

اور

$$\text{Cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{Sin } (90 - 30)^\circ \Rightarrow \text{Cos } 30^\circ = \text{Sin } 60^\circ$$

مذکورہ بالا مثالوں سے ہم مندرجہ ذیل نتیجہ اخذ کرتے ہیں::

(الف) کمپلیمنٹری زاویوں کی Sin اور Cos آپس میں مساوی ہوتی ہیں۔

(ب) کمپلیمنٹری زاویوں کی Tan اور Cot بھی آپس میں مساوی ہوتی ہیں۔

مثلاً:

$$\text{Tan } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{Cot } (90—30)^\circ \Rightarrow \text{Tan } 30^\circ = \text{Cot } 60^\circ$$

$$\text{Cot } 30^\circ = \sqrt{3} = \text{Tan } (90—30)^\circ \Rightarrow \text{Cot } 30^\circ = \text{Tan } 60^\circ.$$

(ج) اسی طرح کمپلیمنٹری زاویوں کی Sec اور Cosec بھی آپس میں مساوی ہوتی ہیں۔ مثلاً

$$\text{Sec } x = \text{Cosec } (90—x) \text{ and } \text{Cosec } x = \text{Sec } (90—x).$$

$$\text{Sec } 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \text{Cosec } (90—30)^\circ \Rightarrow \text{Sec } 30^\circ = \text{Cosec } 60^\circ.$$

$$\text{Sec } 60^\circ = 2 = \text{Cosec } (90—60)^\circ \Rightarrow \text{Sec } 60^\circ = \text{Cosec } 30^\circ.$$

پس:

$\text{Sin } 30^\circ = \frac{1}{2} = \text{Cos } 60^\circ$

$\text{Cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{Sin } 60^\circ$

$\text{Tan } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{Cot } 60^\circ$

$\text{Cot } 30^\circ = \sqrt{3} = \text{Tan } 60^\circ$

$\text{Sec } 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \text{Cosec } 60^\circ$

$\text{Cosec } 30^\circ = 2 = \text{Sec } 60^\circ$

اسی طرح

$\text{Sin } 40^\circ = \text{Cos } 50^\circ$

$\text{Cos } 70^\circ = \text{Sin } 20^\circ$

$\text{Tan } 10^\circ = \text{Cot } 80^\circ$

$\text{Cot } 20^\circ = \text{Tan } 70^\circ$

$\text{Sec } 50^\circ = \text{Cosec } 40^\circ$

$\text{Cosec } 20^\circ = \text{Sec } 70^\circ$

مثال 1. مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے

(i) $\text{Sin } 30^\circ \times \text{Cos } 45^\circ + \text{Cos } 60^\circ \times \text{Sin } 45^\circ$

(ii) Tan 30° × Cot 60° + Cot 30° × Tan 60°

(iii) Sec 30° × Cosec 45° + Sec 45° × Cosec 60°

حل:

(i) Sin 30° × Cos 45° + Cos 60° × Sin 45°

مذکورہ بالا جدول سے درکار تکونیاتی نسبتی قیمتیں رکھنے پر

Sin 30° × Cos 45° + Cos 60° × Sin 45°

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\cancel{2}}{\underset{1}{\cancel{2}}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(ii) Tan 30° × Cot 60° + Cot 30° × Tan 60°

درج ذیل قیمتیں رکھنے پر

$$\text{Tan } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ Tan } 60^\circ = \sqrt{3}, \text{ Cot } 30^\circ = \sqrt{3}\ , \ \text{Cot } 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3 \times 3}} + \sqrt{3 \times 3}$$

پس ہمیں حاصل ہوا:

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{1} = \frac{1+9}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} = 3.333$$

(iii) Sec 30° × Cosec 45° + Sec 45° × Cosec 60°

چونکہ:

$$\text{Sec } 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \text{Cosec } 60^\circ\ , \ \text{Cosec } 45^\circ = \sqrt{2} = \text{Sec } 45^\circ.$$

اس لئے: Sec 30° × Cosec 45° + Sec 45° × Cosec 60°

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{1} = \frac{2 \times 2}{\sqrt{3 \times 3}} + \frac{\sqrt{2 \times 2}}{1}$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{2}{1} = \frac{4+6}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} = 3.333$$

مثال 2. معلوم کریں (الف) x کی قیمت جبکہ $\text{Sin } x = \frac{1}{2}$

(ب) y کی قیمت جبکہ $\text{Tan } y = 1$

حل: ہمیں معلوم ہے کہ: $\text{Sin } 30^\circ = \frac{1}{2}$ [جدول کے مطابق]

لیکن $\text{Sin } x = \frac{1}{2}$ [سوال میں دی گئی معلومات کے مطابق]

اس لئے $\text{Sin } x = \text{Sin } 30^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$

(ب) ہم جانتے ہیں کہ $\text{Tan } 45^\circ = 1$ [جدول کے مطابق]

اور $\text{Tan } y = 1 \Rightarrow \text{Tan } y = \text{Tan } 45^\circ \Rightarrow y = 45^\circ$ [دیا ہوا ہے]

مشق 11.2

1. x کی قیمت معلوم کریں جبکہ $\text{Cos } x$ کی قیمت درج ذیل ہے:

(i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{1}{2}$

2. y کی قیمت معلوم کریں جبکہ $\text{Tan } y$ کی قیمت درج ذیل ہے:

(i) $\sqrt{3}$ (ii) 1 (iii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. $\angle A$ کی مقدار معلوم کیجیے جبکہ $\text{Cosec } m\angle A$ کی قیمت درج ذیل ہے:

(i) $\frac{2}{1}$ (ii) $\sqrt{2}$ (iii) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

4. مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے:

(i) $\text{Sin } 30^\circ \times \text{Sin } 60^\circ + \text{Cos } 30^\circ \times \text{Cos } 60^\circ$

(ii) $\text{Sec } 30^\circ \times \text{Cosec } 60^\circ + \text{Tan } 60^\circ \times \text{Cot } 30^\circ$

(iii) $\text{Cos } 30^\circ \times \text{Sin } 30^\circ + \text{Cosec } 30^\circ \times \text{Sec } 30^\circ$

(iv) $\text{Sin } 60^\circ \times \text{Sin } 45^\circ - \text{Cos } 30^\circ \times \text{Cos } 45^\circ$

(v) $\text{Tan } 30^\circ \times \text{Cot } 60^\circ - \text{Sin } 45^\circ \times \text{Cos } 45^\circ$

(vi) $\text{Sec } 45^\circ \times \text{Cosec } 45^\circ + \text{Sec } 30^\circ \times \text{Cosec } 60^\circ$

(vii) $\text{Cot } 60^\circ \times \text{Sec } 30^\circ - \text{Cosec } 60^\circ \times \text{Tan } 30^\circ$

5. مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک میں x کی قیمت بتائیں:

(i) $\text{Sin } 30^\circ = \text{Cos } x$ (ii) $\text{Tan } 60^\circ = \text{Cot } x$ (iii) $\text{Sec } x = \text{Cosec } 45^\circ$

(iv) $\text{Cos } x = \text{Sin } 70^\circ$ (v) $\text{Sec } 40^\circ = \text{Cosec } x$ (vi) $\text{Cot } x = \text{Tan } 55^\circ$

(vii) $\text{Cosec } 10^\circ = \text{Sec } x$ (viii) $\text{Tan } x = \text{Cot } 65^\circ$ (ix) $\text{Sin } x = \text{Cos } 35^\circ$

6. خالی جگہ پُر کیجیے:

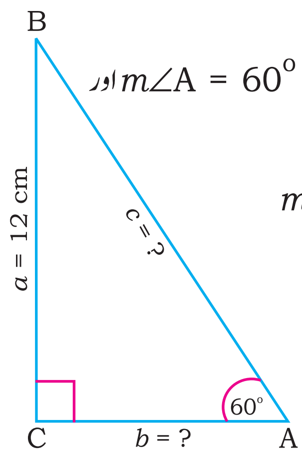
(i) $\text{Sin } 35^\circ = \text{Cos}$ ____ (ii) $\text{Tan } 65^\circ = \text{Cot}$ ____ (iii) $\text{Sec } 20^\circ = \text{Cosec}$ ____

(iv) $\text{Cot } 53^\circ = \text{Tan}$ ____ (v) $\text{Cos } 56^\circ = \text{Sin}$ ____ (vi) $\text{Cosec } 75^\circ = \text{Sec}$ ____

11.2.5 تکونیاتی نسبتوں کی مدد سے قائمہ مثلثوں کا حل

مثلث کے چھ اجزاء میں سے اگر تین اجزاء کا علم ہو جن میں سے کم از کم ایک ضلع ہو تو مثلث کے بقیہ تین اجزاء کی مقداریں معلوم کی جاسکتی ہیں۔ قائمہ مثلث کے نامعلوم اجزاء کے دریافت کرنے کے اس عمل کو 'مثلث کا حل' کہا جاتا ہے۔

پہلی صورت: جبکہ ایک ضلع اور ایک حادہ زاویہ معلوم ہو۔



مثال 1. قائمہ مثلث ABC حل کیجئے جس میں $m\angle C = 90^\circ$، $m\angle A = 60^\circ$ اور زاویہ A کے متقابلہ ضلع کی لمبائی 12 سم ہے۔

حل: اس سوال میں معلوم اجزاء ہیں $m\angle C = 90^\circ$، $m\angle A = 60^\circ$

اور $a = 12$ cm

اور ہمیں دریافت کرنا ہے: $m\angle B = ?$، $b = ?$

اور $c = ?$

چونکہ قائمہ مثلث میں حادہ زاویے کمپلیمنٹری ہوتے ہیں۔ اس لئے

$$m\angle B = 90^\circ - m\angle A\ 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

مزید برآں:

$$\text{Tan } m\angle A = \text{Tan } 60^\circ = \frac{\text{کے متقابلہ ضلع } \angle A}{\text{کے متصلہ ضلع } \angle A} = \frac{a}{b} = \frac{12}{b}$$

یا

$$\sqrt{3} = \frac{12}{b} \Rightarrow b = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow b = 4 \quad 3 = 4 \times 1.732 = 6.928 = 6.9 \text{ cm}$$

مزید برآں

$$\text{Sin m } \angle A = \text{Sin } 60^\circ = \frac{a}{c} = \frac{12}{c}$$

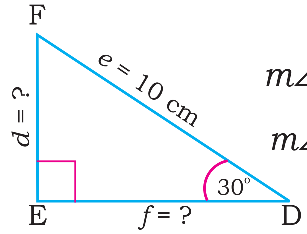
یعنی:

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12}{c} \quad \Rightarrow c\sqrt{3} = 12 \times 2$$

$$\Rightarrow c = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{24 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3} = 8 \times 1.732 = 13.856 = 13.8$$

پس $m\angle B = 60^\circ$, $m\,\overline{AC} = 6.9$ cm, $m\,AB = 13.8$ cm

دوسری صورت: جبکہ وتر اور ایک زاویہ حادہ معلوم ہو:



مثال 2. مثلث قائمۃ الزاویہ DEF حل کریں جبکہ

$m\angle E = 90^{o}$ ،$m\angle D = 30^{o}$،$m\overline{DF}$ (وتر) $= 10$ cm

حل: قائمہ مثلث DEF میں $m\angle D = 30^{o}$،$m\angle E = 90^{o}$

اور وتر $m\overline{DF} = 10$ cm

اب ہمیں معلوم کرنا ہے کہ $m\angle F = ?,\ m\overline{DF} = ?,\ m\overline{EF} = ?$

ہمیں معلوم ہے کہ: $\text{Sin } m\angle D = \text{Sin } 30^{\circ} = \dfrac{\angle D \text{ کے متقابلہ ضلع}}{\text{وتر}} = \dfrac{d}{e} = \dfrac{d}{10}$

$$\text{Sin } 30^{\circ} = \frac{d}{10}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{d}{10} \quad \Rightarrow d = 5 \text{ cm}$$

مزید برآں $\dfrac{f}{e} = \text{Cos } m\angle D \Rightarrow \dfrac{f}{e} = \text{Cos } 30^{\circ}$

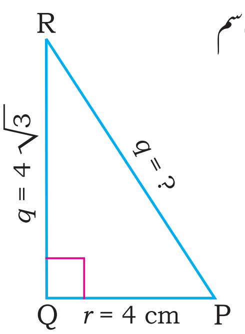
یا $\Rightarrow \dfrac{f}{10} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow f = \dfrac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} = 5 \times 1.732 = 8.660$ cm

(کمپلیمنٹری زاویے) $m\angle D + m\angle F = 90^{\circ}$

اس لئے $m\angle F = 90^{\circ} - m\angle D = 90^{\circ} - 30^{\circ} = 60^{\circ}$

پس مکمل حل درج ذیل ہے $m\angle F = 60^{\circ},\ m\overline{DE} = 8.7$ cm , $m\overline{EF} = 5$ cm

تیسری صورت: جبکہ دو اضلاع معلوم ہوں۔



مثال 3. قائمہ مثلث PQR حل کیجئے جبکہ $m\angle Q = 90^{o}$، عمود $4\sqrt{3}$ سم اور قاعدہ 4 سم ہے۔

حل: قائمہ مثلث PQR میں، $m\angle Q = 90^{o}$

$m\overline{PQ} = 4 \text{ cm},\ m\overline{QR} = 4\sqrt{3}$

اب ہمیں معلوم کرنا ہے کہ

$m\angle P = ?,\ m\angle R = ?,\ m\overline{PR} = ?$

مسئلہ اثباتی فیثاغورث کے مطابق:

$$(\text{وتر})^2 = (\text{قاعدہ})^2 + (\text{عمود})^2$$

$$q^2 = r^2 + p^2$$

$$(q)^2 = (4)^2 + (4\sqrt{3})^2$$

$$= 16 + 48 = 64$$

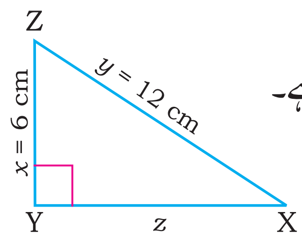
$$\text{وتر} = q = \sqrt{64} = 8\text{cm.} \quad \Rightarrow \; m\overline{PR} = 8 \text{ cm.}$$

$$\text{Tan } m\angle P = \frac{\angle P \text{ کے متقابلہ ضلع}}{\angle P \text{ کے متصلہ ضلع}} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\,.$$

$$\therefore \; m\angle P = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \; m\angle R = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

چوتھی صورت: جبکہ وتر اور ایک ضلع معلوم ہو۔



مثال 4. قائمہ مثلث XYZ حل کیجئے جبکہ وتر 12 سم اور عمود 6 سم ہے۔

حل:

اب ہمیں معلوم کرنا ہے کہ

$$m\angle X = ?,\; m\overline{YZ} = ?,\; m\angle Z = ?\;,\; m\overline{XY} = ?$$

چونکہ

$$\text{Sin } m\angle X = \frac{\angle X \text{ کے متقابلہ ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{m\overline{YZ}}{m\overline{XZ}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Sin } m\angle X = \frac{1}{2} \Rightarrow \; m\angle X = 30^\circ.$$

$$m\angle Y = 90^\circ - m\angle X = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

مزید برآں:

$$\frac{z}{y} = \text{Cos } m\angle X \quad \Rightarrow \frac{z}{12} = \text{Cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow z = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}$$

پس حل درجہ ذیل ہے:

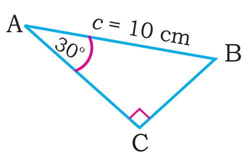
$$m\angle X = 30^\circ,\; m\angle Z = 60^\circ\;,\; m\overline{XY} = 6\sqrt{3} \text{ cm}\,.$$

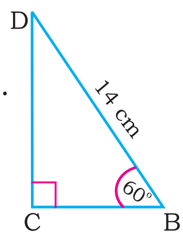
مشق 11.3

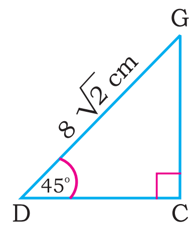
A. مندرجہ ذیل قائمہ مثلث حل کیجئے۔

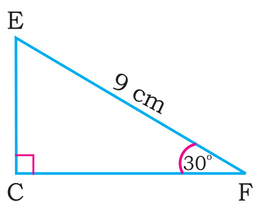
1. $\Delta ABC,\ m\angle C = 90^\circ,\ m\angle A = 30^\circ,\ m\overline{BC} = 3\text{cm}$ (عمود)
2. $\Delta DEF,\ m\angle E = 90^\circ,\ m\angle D = 60^\circ,\ m\overline{DE} = 4\text{cm}$ (قاعدہ)
3. $\Delta LMN,\ m\angle M = 90^\circ,\ m\angle N = 45^\circ,\ m\overline{ML} = 8\text{cm}$ (عمود)

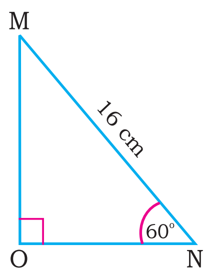
B. درج ذیل قائمہ مثلثوں میں نامعلوم مقداریں دریافت کیجئے۔

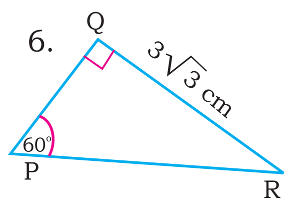
1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

C. مندرجہ ذیل قائمہ مثلث حل کیجئے۔

1. $\Delta LMN,\ m\angle M=90^\circ,\ l = 4\text{ cm},\ n = 4\sqrt{3}$
2. $\Delta PQR,\ m\angle Q=90^\circ,\ p = 6\sqrt{3}\text{ cm},\ r = 6\text{ cm}$
3. $\Delta XYZ,\ m\angle Y=90^\circ,\ x = z = 7\text{ cm}.$

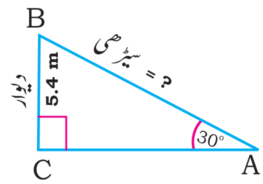
D. مندرجہ ذیل قائمہ مثلث حل کیجئے۔

1. $\Delta ACB,\ m\angle C = 90^\circ,\ a = 5\text{ cm},\ c = 10\text{ cm}$
2. $\Delta DEF,\ m\angle F = 90^\circ,\ d = 7\sqrt{3}\text{ cm},\ f = 14\text{ cm}$
3. $\Delta LMN,\ m\angle L = 90^\circ,\ m = 8\text{ cm},\ l = 8\sqrt{2}\text{ cm}$

11.2.6 تکونیاتی نسبتوں کے استعمال سے حقیقی زندگی میں بلندیاں اور فاصلے معلوم کرنا

حقیقی زندگی میں اشیاء کی بلندیاں اور فاصلے معلوم کرنا ایسا ہی ہے جیسا کہ قائمۃ الزاویہ مثلثوں کا حل کرنا۔
ہمیں چاہیے کہ سوال میں دی گئی معلومات کے مطابق قائمہ مثلث بنائیں اور پوچھی گئی بلندی یا فاصلے کو مثلث حل کرنے کے طریقے پر دریافت کریں۔

مثال 1. کھڑکیوں کی صفائی کرنے والا اپنی سیڑھی اس طرح کھڑی کرتا ہے کہ وہ فرش کے ساتھ 30° کا زاویہ بناتی ہے اور سیڑھی کا اوپر کا سرا دیوار کی 5.4 میٹر بلندی پر ٹکا ہوا ہے۔ سیڑھی کی لمبائی بتائیے۔



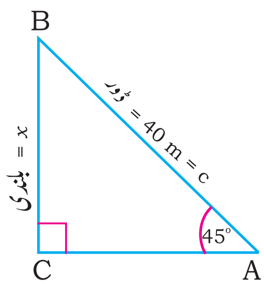
حل: سب سے پہلے اس کیفیت کو قائمہ مثلث سے ظاہر کرتے ہیں۔

مزید برآں

$$\text{Sin } m\angle A \Rightarrow \frac{5.4}{c} = \text{Sin } 30^\circ \Rightarrow \frac{5.4}{c} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c \times 1 = 2 \times 5.4 \quad \Rightarrow \quad c = 10.8\text{m}$$

پس سیڑھی کی لمبائی 10.8 میٹر ہے۔



مثال 2. ایک لڑکا 40 میٹر لمبی ڈور سے پتنگ اڑا رہا ہے۔ اگر ڈور اور زمین کے درمیان زاویہ کی مقدار 45° ہے تو زمین سے پتنگ کی بلندی معلوم کیجئے۔

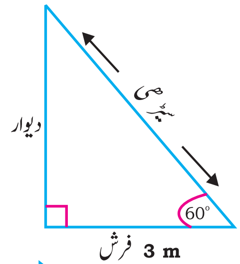
حل: قائمہ مثلث میں فرض کیا پتنگ کی بلندی x میٹر ہے تو

$$\frac{x}{c} = \frac{\angle 45^\circ \text{ کے متقابلہ ضلع}}{\text{وتر}} \Rightarrow \frac{x}{c} = \text{Sin } 45^\circ \Rightarrow \frac{x}{40} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

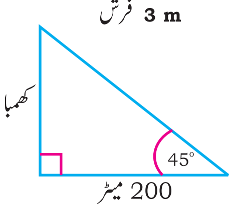
$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 40 = 0.707 \times 40 \Rightarrow x = 28.28 = 28.3 \text{ (تقریباً)}$$

پس پتنگ کی بلندی 28.3 میٹر ہے۔

مشق 11.4

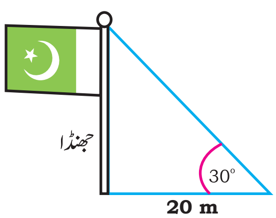


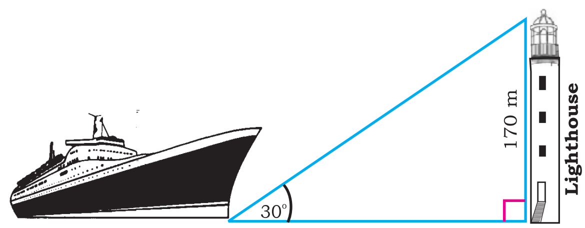
1. ایک سیڑھی دیوار کے ساتھ کھڑی ہے۔ اس کا فرش سے زاویہ 60° ہے۔ اگر سیڑھی کا پاؤں دیوار سے 3 میٹر کے فاصلہ پر ہوں تو سیڑھی کی لمبائی بتائیے۔



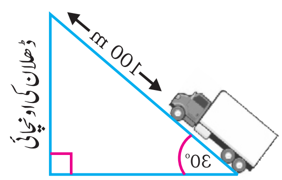
2. ایک کھمبے کا پایا زمین پر ایک مخصوص نقطہ سے 200 میٹر فاصلہ پر ہے (سامنے شکل ملاحظہ ہو) کھمبے کی چوٹی اگر زمین والے مخصوص نقطے سے 45° کا زاویہ بنائے تو کھمبے کی بلندی معلوم کیجئے۔

3. سمندر کے کنارے ایستادہ 170 میٹر بلند روشنی کا مینار سمندر میں کھڑے ایک بحری جہاز سے 30° کا زاویہ بناتا ہے (ملاحظہ ہو شکل) بتائیے جہاز کا مینار کے پائے سے کتنا فاصلہ ہے؟

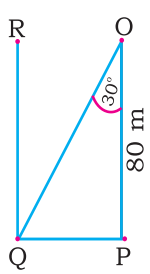




4. شکل میں دی گئی معلومات کے مطابق جھنڈے کی بلندی بتائیے۔



5. ایک ٹرک 100 میٹر لمبی ڈھلان پر اوپر کی جانب جا رہا ہے۔ اگر ڈھلان زمین سے 30° کا زاویہ بناتی ہے تو ڈھلان کی اونچائی بتائیے۔



6. P اور Q نام کے دو درخت ایک سڑک کے مخالف کناروں پر واقع ہیں۔ درخت P کے پائے سے نقطہ O تک عموداً لمبائی 80 میٹر ہے اور $m\angle POQ = 30^{\circ}$ (ملاحظہ ہو شکل) بتائیے درختوں کے درمیان فاصلہ کیا ہے۔

جائزہ مشق 11

1. تصدیق کیجئے کہ مندرجہ ذیل مساوات درست ہیں۔

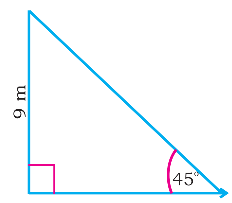
(i) $2\ \text{Sin}\ 45^\circ + \frac{1}{2}\ \text{Cosec}\ 45^\circ = \frac{3}{\sqrt{2}}$

(ii) $\text{Cos}\ 60^\circ.\ \text{Cos}\ 30^\circ - \text{Sin}\ 60^\circ\ \text{Sin}\ 30^\circ = 0$

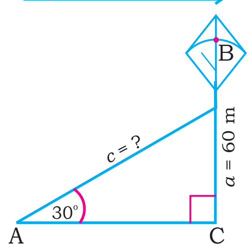
(iii) $\text{Sin}\ 60^\circ\ \text{Cos}\ 30^\circ - \text{Cos}\ 60^\circ\ \text{Sin}\ 30^\circ = \frac{1}{2}$

(iv) $(\text{Cos}\ 30^\circ - \text{Sin}\ 30^\circ) \times (\text{Cos}\ 30^\circ + \text{Sin}\ 30^\circ) = \frac{1}{2}$

(v) $\text{Sin}\ 45^\circ \times \text{Cos}\ 45^\circ + \text{Sin}\ 30^\circ \times \text{Cos}\ 60^\circ = \frac{3}{4}$



2. 9 میٹر بلند ایک درخت نہر کے مخالف کنارے پر ایستادہ ہے دوسرا کنارہ درخت کی چوٹی سے 45° کا زاویہ بناتا ہے۔ نہر کی چوڑائی بتایئے۔



3. ایک لڑکا پتنگ اُڑا رہا ہے۔ پتنگ کی ڈور زمین سے 30° کا زاویہ بناتی ہے۔ اگر پتنگ 60 میٹر کی بلندی پر ہو تو ڈور کی لمبائی معلوم کیجئے۔

4. خالی جگہ پُر کیجئے۔

(i) $\text{Cosec}\ 30^\circ =$ ________

(ii) $\text{Cot}\ 60^\circ =$ ________

(iii) $\text{Cos}\ 45^\circ =$ _____

(iv) $\text{Sec}\ 30^\circ =$ _______

(v) کی معکوس نسبت $\text{Tan}\ m\angle C =$ ________

(vi) $\text{Sin}\ m\angle A = \text{Cos}$ _____

(vii) $\text{Cos}\ (90^\circ - m\angle A) = \text{Sin}$ ________

(viii) $\text{Tan}\ 30^\circ = \text{Cot}$ ________

(ix) $\text{Cosec}\ 10^\circ = \text{Sec}$ _______

(x) $\text{Sec}\ (90^\circ - \theta) = \text{Cosec}$ _______

5. درست جواب پر دائرہ بنائیے۔

(i) $\text{Cos } 60^\circ =$ ______

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\text{Cos } 30^\circ =$ ______

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) 1 (c) $\sqrt{3}$

(iii) $\text{Tan } 45^\circ =$ ______

(a) 2 (b) $\sqrt{2}$ (c) 1

(iv) $\text{Cos}^2\, 30^\circ =$ ______

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(v) $\text{Cosec } 60^\circ =$ ______

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{1}{2}$

(vi) $\text{Sin}^2\, 45^\circ =$ ______

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) 2 (c) $\frac{1}{2}$

(vii) $\text{Cosec}^2\, 60^\circ =$ ______

(a) 2 (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

6. درست کیلئے T اور غلط کیلئے F لکھئے۔

(i) $\text{Cos } \theta = \frac{1}{\text{Sin } \theta}$ (ii) $\text{Cosec } \theta = \frac{1}{\text{Sec } \theta}$ (iii) $\text{Sec } \beta = \frac{1}{\text{Cosec } \beta}$

(iv) $\text{Tan } \theta . \text{Cot } \theta = 1$ (v) $\text{Tan } x . \text{Cot } x = 1$ (vi) $\frac{\angle A \text{ کے متصل ضلع}}{\text{وتر}} = \text{Sin } m\angle A$

(vii) $\text{Cot } x = \frac{\text{Cos } x}{\text{Sin } x}$ (viii) $\text{Sin } 20^\circ = \text{Cosec } 70^\circ$

(ix) $\text{Sin } x$ کی معکوس نسبت $= \text{Cosec } x$ (x) $\text{Cos } (90^\circ - 30^\circ) = \text{Sec } 60^\circ$

خلاصہ

- تکونیات (Trigonometry) سے مراد مثلثوں کی پیمائش ہے۔
- چھ تکونیاتی نسبتیں درج ذیل ہیں:

Sine, Cosine, Tangent, Cotangent, Secant and Cosecant.

- قائمہ مثلث کے ہر دو اضلاع کی نسبت کو مذکورہ بالا نسبتوں میں سے کسی ایک نام سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- عام طور پر جانی جانے والی تین تکونیاتی نسبتیں مندرجہ ذیل ہیں۔

(i) $\text{Sin}\ \theta = \dfrac{\angle\theta \text{ کے متقابلہ ضلع}}{\text{وتر}}$

(ii) $\text{Cos}\ \theta = \dfrac{\angle\theta \text{ کے متصلہ ضلع}}{\text{وتر}}$

(iii) $\text{Tan}\ \theta = \dfrac{\angle\theta \text{ کے متقابلہ ضلع}}{\angle\theta \text{ کے متصلہ ضلع}}$

- تین معکوس نسبتیں درج ذیل ہیں:

$$\text{Sin}\ \theta = \frac{1}{\text{Cosec}\ \theta}\ ,\quad \text{Cos}\ \theta = \frac{1}{\text{Sec}\ \theta}\ ,\ \text{Tan}\ \theta = \frac{1}{\text{Cot}\ \theta}$$

- کمپلیمنٹری زاویوں کی نسبتیں درج ذیل ہیں:

  - $\text{Sin}\ (90^\circ - \theta) = \text{Cos}\ \theta\ ,\ \text{Cos}\ (90^\circ - \theta) = \text{Sin}\ \theta$
  - $\text{Tan}\ (90^\circ - \theta) = \text{Cot}\ \theta,\ \text{Cot}\ (90^\circ - \theta) = \text{Tan}\ \theta$
  - $\text{Sec}\ (90^\circ - \theta) = \text{Cosec}\ \theta\ ,\ \text{Cosec}\ (90^\circ - \theta) = \text{Sec}\ \theta$

θ	Sin	Cos	Tan	Cot	Sec	Cosec
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

یونٹ 12

معلومات داری

معلومات داری علم 'شماریات' کا اہم جز ہے جبکہ 'شماریات' علم 'ریاضی' کی ایک شاخ ہے۔ جس کا تعلق مواد (Data) کی جماعت بندی، تجزیہ اور نتائج اخذ کرنے سے ہے۔ پچھلی جماعتوں میں ہم بار گراف، تعدد، جماعتی حدود، حقیقی جماعتی حدود، زد اور جماعتی وقفہ کے بارے میں پڑھ چکے ہیں اب ہم اس سلسلے میں مزید تصورات کا مطالعہ کریں گے لیکن اس سے پہلے ہم گذشتہ پڑھے ہوئے معلومات کا اعادہ کرتے ہیں۔

اعادہ مشق 12

سوال 1. درج ذیل جدول سے جماعتی تعدد، جماعتی حدود، جماعتی حدود حقیقی، جماعتی وقفہ بالائی جماعتی حدیں اور جماعت کی جسامت معلوم کریں۔

حاصل شدہ نمبر	24-28	29-33	38-34	39-43	44-48
طلباء کی تعداد	03	16	12	23	16

سوال 2. جماعت کے 30 طلباء نے ریاضی کے ایک ٹیسٹ میں 10 میں سے درج ذیل نمبر حاصل کیے تو دی گئی معلومات کے مطابق

4	3	3	0	2	2	4	3	3	5
2	2	4	3	5	1	0	3	5	4
3	4	4	0	3	2	3	6	0	1

(i) تعددی تقسیم کی جدول بنائیے؟ (ii) زد (Range) معلوم کیجئے۔؟

(iii) سب سے زیادہ طلباء نے کتنے نمبر حاصل کیے؟

(iv) سب سے کم طلباء نے کتنے نمبر حاصل کیے؟

سوال 3. کسی دفتر کے ارکان سے پوچھا گیا "کیا آپ اپنے بچوں کے ساتھ کتنا وقت گزارتے ہیں؟" جواب، جو کہ گھنٹوں کی شکل میں دیئے گئے درج ذیل ہے۔

4	3	1	6	2	2	3	1	4
5	3	4	1	2	5	3	2	2
3	2	2	3	1	1	4	2	3

(i) توتعددی (Frequency) جدول بنائیے؟
(ii) اس معلوماتی جائزے (Survey) میں شرکاء کی کل تعداد کتنی ہے؟
(iii) کتنے اشخاص نے اپنے بچوں کے ساتھ سب سے زیادہ وقت گزارا؟
(iv) سب سے زیادہ اشخاص نے بچوں کے ساتھ کتنا وقت گزارا؟

4. 150 اشخاص پر مشتمل ایک ادارے میں 10 نمبروں کا ٹیسٹ منعقد کیا گیا۔ جس کا نتیجہ درج ذیل جدول میں دیا گیا ہے۔ بتائیے۔

حاصل شدہ نمبر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
تعدد	6	12	15	21	35	24	20	10	6	1

(i) سب سے زیادہ نمبر (دس میں سے دس) لینے والے اشخاص کی تعداد کیا ہے؟
(ii) سب سے کم نمبر لینے والے اشخاص کی تعداد کیا ہے؟
(iii) زیادہ سے زیادہ وہ اشخاص نے کتنے نمبر حاصل کیے؟

12.1 تعددی تقسیم (Frequency Distribution)

12.1.1 تعدد اور تعددی تقسیم کی تعریف:

(الف) تعدد: ابتدائی مواد میں بعض مشاہدات (عددی قیمتیں) بار بار نظر آتے ہیں عددی قیمتوں کے ان تعداد کو تعدد (Frequency) کہتے ہیں جسے علامت 'f' سے ظاہر کرتے ہیں۔

(ب) تعددی تقسیم: ابتدائی مواد کو اکثر جماعت یا گروہ میں تقسیم کرنا سود مند ہوتا ہے۔ ہر گروہ میں موجود مواد کی تعداد کو جماعتی تعدد کہتے ہیں اور ان جماعتوں اور ان کے تعدد کو جدولی شکل میں پیش کرنے کو تعددی تقسیم یا تعددی جدول کہتے ہیں۔

12.1.3 تعددی جدول کی تشکیل:

تعددی تشکیل کے اقدامات یہ ہیں:

پہلا قدم: زد (Range) معلوم کیجئے اور درج ذیل اصول کے مطابق جماعتی وقفہ کی جسامت متعین کیجئے۔

$$\text{جماعتی وقفہ کی جسامت} = \frac{(\text{سب سے بڑی قیمت} - \text{سب سے چھوٹی قیمت})}{\text{جماعتوں کی تعداد}}$$

دوسرا قدم: مساوی جسامت کے جماعتی وقفے لکھئے۔

تیسرا قدم: مندرجہ ذیل کالم پر مشتمل جدول بنائیے۔

1. جماعتی وقفہ 2. ٹیلی نشانات 3. تعدد

جماعتی وقفے	ٹیلی نشانات	تعدد
45 - 51		
52 - 58		
59 - 65		
66 - 72		

چوتھا قدم: ٹیلی طریقہ کار کی مدد سے تعدد معلوم کیجئے۔

ٹیلی طریقہ کار: مواد کے ارکان کو یکے بعد دیگرے Tick (✓) کرتے ہیں اور ہر (✓) کے بدلے ایک ٹیلی نشان (|) یعنی اُفقی قطعہ خط نشان زد کرتے ہیں، اُس جماعتی وقفہ کے سامنے جس سے مذکورہ رکن تعلق رکھتا ہو (صفحہ 235 پر مثال 1 میں اس عمل کی وضاحت کی گئی ہے)

جماعتی وقفے	ٹیلی نشانات	تعدد
45 - 51	~~||||~~ ||||	
52 - 58	||||	
59 - 65	~~||||~~ ||	
66 - 72	~~||||~~ ||	

مثال 1. ذیل میں دیئے گئے نمبر (100 میں سے) کسی ریاضی ٹیسٹ میں حاصل کردہ 27 طلباء کے ہیں۔
67، 45، 68، 56، 69، 50، 65، 51، 66، 51، 53، 54، 65، 53، 48، 54، 63، 62، 61، 59، 67، 45، 68، 50، 69، 50، 65۔ مساوی جماعت کی 4 جماعتی وقفہ رکھنے والی تعددی تقسیمی جدول بنایئے۔

حل: $\frac{69-45}{4} = \frac{23}{4} = 6$ = جماعتی وقفہ کی جماعت (تقریباً)

پس 4 جماعتی وقفے ہوئے 45-51، 52-58، 59-65 اور 66-72 اس کے بعد ہم ٹیلی (Tally) طریقہ کار کے مطابق تعدد معلوم کرتے ہیں جو کہ درج ذیل ہے:

ابتدائی مواد کا پہلا رکن '67' ہے ہم 67 پر Tick (✓) لگاتے ہیں اور اس کے بدلے ٹیلی نشان والے کالم میں ایک ٹیلی نشان (|) جماعتی وقفہ 65-72 والی سطر (Row) میں لگاتے ہیں کیونکہ 67 کا عدد اسی جماعتی وقفے میں آتا ہے۔

پھر ہم ابتدائی مواد کے دوسرے رکن '45' پر (✓) لگاتے ہیں اور اس کے بدلے 45-51 جماعتی وقفے کے سامنے ایک ٹیلی نشان لگاتے ہیں۔

اس کے بعد ہم مواد کے تیسرے رکن '68' کو (✓) لگاتے ہیں اور اس کے بدلے جماعتی وقفے 72-66 کے سامنے ٹیلی نشان لگاتے ہیں جیسا کہ مذکورہ بالا جدول سے ظاہر ہے | | اس طرح ہم یہ عمل دہراتے جاتے ہیں تاوقتیکہ مواد کا آخری عدد نہ آجائے۔ کسی بھی جماعتی وقفے میں چار ٹیلی نشان (| | | |) تک ہم عمودی قطعہ خط بناتے ہیں جبکہ اسی سطر میں پانچویں نشان کیلئے ایک وتری قطعہ خط لگاتے ہیں جو گذشتہ چار کو اس طرح (~~||||~~) قطع کرتا ہے | | نشانات کے اس گروہی عمل سے نشانات کو گننے میں آسانی ہوتی ہے۔
آخر میں نشانات کو گن کر جدول کو مکمل کرتے ہیں جو کہ حسب ذیل ہے۔

جماعتی وقفے	ٹیلی نشانات	تعدد
45 - 51	~~||||~~ ||||	9
52 - 58	||||	4
59 - 65	~~||||~~ ||	7
66 - 72	~~||||~~ ||	7
	میزان	27

12.1.3 تعددی جدول کے مطابق نقشے (Histogram) کی تشکیل:

تعددی جدول کے مطابق جو کالمی نقشہ بنایا جاتا ہے وہ متصلہ مستطیلوں کا ایک سیٹ ہوتا ہے۔ ہر مستطیل ایک جماعتی وقفے کی نمائندگی کرتا ہے جن کی چوڑائی مساوی ہوتی ہے جبکہ لمبائی جماعتی وقفہ کے تعدد کے مطابق ہوتی ہے۔

گروہی مواد سے کالمی نقشہ بنانے کیلئے درج ذیل اقدام کیے جاتے ہیں۔

(i) X-axis اور Y- axis کھینچیے۔

(ii) X-axis پر جماعتی حدود حقیقی نشان زد کیجئے۔

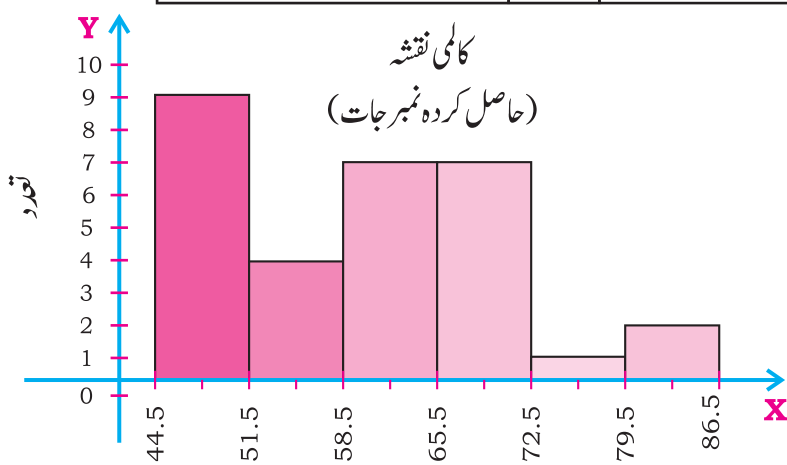
(iii) Y-axis پر تعدد نشان زد کیجئے۔

(iv) ہر وقفے کیلئے ایک مستطیل اس طرح بنایئے کہ اس کی لمبائی وقفے کی تعداد کے مطابق ہو۔

ملاحظہ ہو ذیل میں دی گئی جدول

67, 45, 68, 56, 69, 50, 65, 51, 66, 51, 53, 54, 65, 53, 48, 54, 63, 62, 61, 59, 75, 45, 68, 50, 69, 50 65, 76, 83, 83	

وسطی نقطہ (x)	f	جماعتی حدود حقیقی
48	9	44.5 - 51.5
55	4	51.5 - 58.5
62	7	58.5 - 65.5
69	7	65.5 - 72.5
76	1	72.5 - 79.5
83	2	79.5 - 86.5
--	**30**	میزان



مثال 2. کسی اسکول کے آٹھویں جماعت کے 26 طلباء نے 20 نمبر والے ریاضی کے ایک ٹیسٹ میں مندرجہ ذیل نمبر حاصل کیے۔

4	10	12	16	2	8	14	16	18	20	13	4	12
6	8	10	14	16	15	16	16	14	8	12	10	11

اگر حاصل کردہ نمبروں کا Grade درج ذیل ہو:

گریڈ A 16-20　　　گریڈ B 11-15

گریڈ C 06-10　　　گریڈ D 01-05

تو کالمی نقشہ بنائیے اور مندرجہ ذیل سوالات کے جواب دیجئے۔

(الف) کتنے طلباء نے گریڈ A حاصل کیا؟

(ب) کتنے طلباء نے گریڈ B حاصل کیا؟

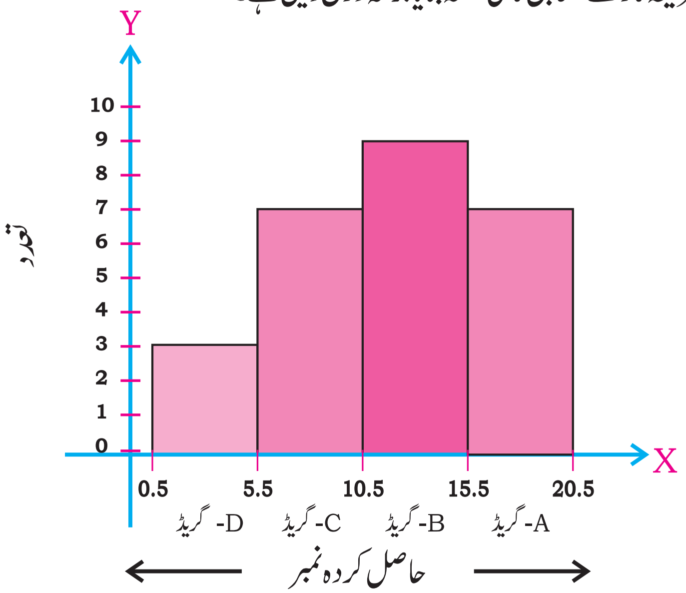
(ج) اکثر طلباء نے کون سا گریڈ حاصل کیا؟

حل: چونکہ مواد جماعت یا گروہ کی صورت میں نہیں ہے اس لئے ہمیں تعددی جدول بنانا ہوگی اور حقیقی جماعت حدود معلوم کرنا ہوگی (جماعتی وقفہ پہلے سے دیا ہوا ہے)

تعددی تقسیمی جدول

جماعتی وقفے	ٹیلی نشانات	تعداد	حقیقی جماعتی حدود
1 - 5	III	3	0.5 - 5.5
6 - 10	𝍸 II	7	5.5 - 10.5
11 - 15	𝍸 IIII	9	10.5 - 15.5
16 - 20	𝍸 II	7	15.5 - 20.5

دیئے گئے طریقہ کار کے مطابق کالمی نقشہ بنایا جو کہ درج ذیل ہے۔



مستطیل کی لمبائی سے ظاہر ہوتا ہے کہ (الف) 7 طلباء نے گریڈ A حاصل کیا(ب) 9 طلباء نے B گریڈ حاصل کیا(ج) اکثر طلباء نے گریڈ B حاصل کیا۔

نوٹ: کالمی نقشہ بار (Bar) گراف جیسا لگتا ہے لیکن اس سے قدرے مختلف ہے۔

بار گراف کے bar ایک دوسرے سے الگ ہوتے ہیں اور اس کی اونچائی متعلقہ شے کی قیمت ظاہر کرتی ہے جبکہ کالمی نقشہ میں مستطیل بار متصل ہوتے ہیں اور ان کی اونچائی ان کے تعدد ظاہر کرتے ہیں۔

مشق 12.1

.1 مختلف اسکولوں کے 30 طلباء بوائے اسکاؤٹ کے وزن بالترتیب یہ ہیں: 39، 40، 36، 32، 38، 40، 42، 35، 41، 29، 40، 42، 43، 39، 37، 35، 33، 31، 32، 34، 36، 42، 45، 43، 45، 47، 42، 44، 46، 40۔

ٹیلی نشانات کی مدد لیتے ہوئے تعددی تقسیمی جدول بنائیے جو مساوی جسامت والے 5 جماعتی وقفہ پر مشتمل ہو اور کالمی نقشہ بنائیے۔

2. کسی کالونی میں رہائش پذیر 25 گھرانوں کے بجلی استعمال کے یونٹ درج ذیل ہیں۔ مساوی جسامت والے 5 جماعتی وقفہ پر مشتمل تعددی جدول بنایئے اور کالمی نقشہ بنایئے۔

700، 720، 750، 740، 750، 730، 690، 695، 690، 695، 700، 710، 705، 690، 685، 695، 690، 705، 710، 700، 680، 677، 720، 725، 730.

3. آٹھویں جماعت کے 28 طلباء کے کسی ریاضی ٹیسٹ کے حاصل کردہ نمبر یہ ہیں:

60, 58, 62, 61, 59, 65, 67, 67, 64, 60, 63, 70, 67, 69, 70, 80, 79, 78, 71, 82, 50, 45, 55, 56, 52, 54, 59, 60.

اس کی تعددی جدول بنایئے جو مساوی جماعت والے 5 جماعتی وقفے پر مشتمل ہو اور کالمی نقشہ بنایئے۔

4. گزشتہ 25 سالوں کا بارش کا ریکارڈ (سینٹی میٹر میں) درج ذیل ہے۔ مساوی جسامت والے 4 جماعتی وقفے پر مشتمل تعددی جدول بنایئے اور پھر کالمی نقشہ بنایئے۔

15, 25, 16, 18, 9, 5, 7, 14, 21, 23, 4, 11, 22, 3, 5, 5, 12, 25, 13, 17, 5, 26, 7, 9, 24.

5. درج ذیل تعددی جدول میں کامرس کے طلباء کے حاصل کردہ نمبر دیئے گئے ہیں:

نمبر	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55
تعداد طلباء	05	17	13	24	15	14

مذکورہ بالا تقسیمی جدول سے کالمی نقشہ بنایئے۔

6. مزدوروں کی روزانہ اجرت (روپیوں میں) کی تقسیمی جدول درج ذیل ہے۔ کالمی نقشہ بنایئے۔

اجرت	501-600	601-700	701-800	801-900	901-1000	1001-1100
مزدوروں کی تعداد	10	15	20	25	30	35

12.2 مرکزی رجحان کے پیمانے

ہم دیکھ چکے ہیں کہ جب خام مواد کو تعددی تقسیم میں پیش کیا جاتا ہے تو معلومات کو سمجھنا آسان ہوتا ہے۔ مواد میں دی گئی معلومات کو طویل تعددی تقسیم کے بجائے صرف ایک نمائندہ قیمت پر مختصر کر سکتے ہیں، چونکہ یہ نمائندہ قیمت کم و بیش مرکزی قیمت ہوتی ہے جس کے گرد سارا مواد ہوتا ہے اس لئے اس کو مرکزی رجحان کا پیمانہ کہتے ہیں۔

12.2.1 مرکزی رجحان کے پیمانے کی اقسام:

عموماً استعمال میں آنے والے مرکزی رجحان کے پیمانے یہ ہیں:

(i) اوسط (ii) قدری اوسط (Weighted means) (iii) وسطانیہ (iv) عادہ

12.2.2 اوسط، قدری اوسط، وسطانیہ اور عادہ معلوم کرنا، جبکہ مواد غیر گروہی ہو

(الف) اوسط (یا حسابی اوسط) معلوم کرنا: اوسط یا حسابی اوسط سب سے زیادہ مستعمل مرکزی رجحان کا پیمانہ ہے۔ مثلاً کسی جگہ کے مئی کے مہینہ کا اوسط ٹمپریچر $39^{o}C$ کہنے کا مطلب یہ ہے کہ اس جگہ پر مئی کے مہینے میں پارہ $39^{o}C$ کے آس پاس (کبھی کچھ کم اور کبھی زیادہ) رہا ہے۔

اسی طرح اگر ہم کہیں کہ "کسی دور کی اوسط ماہانہ آمدنی 30 ہزار روپیہ ہے تو اس کا مطلب ہوا کہ اس کی روزانہ آمدنی 1000 روپے ہے، حالانکہ اس کی آمدنی کسی دن ہزار سے کم اور کسی دن ہزار روپیہ سے زیادہ ہوتی ہے۔

اوسط معلوم کرنے کا طریقہ یہ ہے کہ "غیر گروہی مواد کے تمام ارکان کے مجموعہ کو ارکان کی تعداد سے تقسیم کیا جائے"۔

یعنی:
$$\text{اوسط} = \frac{\text{مواد کے تمام ارکان کا مجموعہ}}{\text{ارکان کی تعداد}}$$

یا (x_i کے ارکان ہیں)
$$\overline{X} = \frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}$$

یا
$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

نوٹ: $\overline{X}$ اوسط کو اور $\sum$ مجموعہ کو ظاہر کرتے ہیں۔

چند مشاہدات:

(i) 9،7،5،3،1 کا اوسط 5 ہے۔

(ii) 14،12،10،8،6 کا اوسط 10 ہے (ہر رکن میں 5 جمع کرنے پر)

(iii) 8،6،4،2،0 جو اوسط 4 ہے (ہر رکن سے 1 نفی کرنے پر)

(iv) 45،35،25،15،5 کا اوسط 25 ہے (کیوں؟)

(v) 9،7،6،5،4،3،1 کا اوسط بھی 5 ہے۔

(iv) 8،6،5،4،2 کا اوسط 5 ہے (کیوں؟)

نوٹ: کسی دیئے ہوئے مواد کا اوسط یکتا (ایک اور صرف ایک) ہوتا ہے۔ لیکن وہی عدد کسی دوسرے یا مختلف مواد سیٹ کا بھی اوسط ہو سکتا ہے۔

مثال 1. ایک طالب علم نے 8 مختلف مضامین میں 84، 90، 72، 60، 74، 50، 40 اور 52 نمبر حاصل کیے، اس کے حاصل کردہ نمبروں کا اوسط معلوم کیجئے۔

حل: $\dfrac{\text{تمام مضامین کے نمبروں کا مجموعہ}}{\text{مضامین کی تعداد}} = \dfrac{\sum x_i}{n} =$ اوسط

نوٹ 1: اوسط عدد 64 دیئے ہوئے مواد میں موجود نہیں ہے۔ در حقیقت اوسط عدد کا مواد میں موجود ہونا ضروری نہیں ہوتا۔ بعض اوقات یہ مواد میں موجود بھی ہوتا ہے۔

نوٹ 2: مذکورہ بالا کلیہ میں تین ارکان $\bar{X}$، $\sum x$ اور n استعمال ہوئے ہیں۔ اگر ان میں سے دو ارکان معلوم ہوں تو تیسرا نامعلوم رکن معلوم کیا جاسکتا ہے۔

مثال 2 (الف): اگر اوسط = 2 اور $\sum x = 18$ ہو، تو n معلوم کیجئے۔

حل: چونکہ $\bar{X} = \dfrac{\sum x}{n}$ اس لئے: $n = \dfrac{\sum x}{\bar{X}}$

مثال 2 (ب): اگر $\bar{X} = 4$ اور $n = 5$ تو $\sum x$ معلوم کیجئے۔

حل: $\because \bar{X} = \dfrac{\sum x}{n} \Rightarrow \sum x = n\bar{X} = 5\ (4) = 20$

مثال 2 (ج). اگر $\bar{X} = 6$ ، $n = 4$ اور مواد کے تین ارکان 2، 8 اور 10 ہوں تو چوتھا رکن معلوم کیجئے۔

حل: ہمیں معلوم کرنا ہے کہ $\bar{X} = 6$ اور $n = 4$ اس لئے $\sum x = n\bar{X} = 4\ (6) = 24$

فرض کیا چوتھا عدد x ہے اس لئے

$$2 + 8 + 10 + x = 24 \Rightarrow 20 + x = 24 \Rightarrow x = 24 - 20 = 4$$

پس چوتھا عدد 4 ہے (جواب)

مثال 2 (د). آٹھویں جماعت طلباء کی اوسط عمر 13 سال ہے اگر ریاضی کے استاد کی عمر بھی جمع کر دی جائے تو اوسط عمر 14 سال ہو جاتی ہے۔ اگر جماعت میں طلباء کی تعداد 30 ہو تو استاد کی عمر بتائیے۔

حل: اس سوال میں: $\overline{X_s} = 13,\ n_s = 30$ اس لئے

طلباء کی عمر کا مجموعہ $= \sum x = n_s\overline{X_s} = 30\ (13) = 390$ سال

لیکن طلباء کی عمر کا مجموعہ + استاد کی عمر $= \sum x = n_{s+t}\ \overline{X}_{s+t} = 31\ (14) = 434$ سال

پس استاد کی عمر $= 434 - 390 = 44$ سال

(ب) قدری اوسط (Weighted Mean)

جب مواد کے ہر رکن کی اہمیت یکساں ہو تو ہم اوسط معلوم کرتے ہیں لیکن اگر مختلف ارکان کی اہمیت یا قدر (Value) مختلف ہو ان اقدار کو Weight کہتے ہیں۔ مثلاً (i) اگر ریاضی، تاریخ سے زیادہ اہم ہے اور انگلش، ریاضی سے زیادہ اہم ہے تو $W_{Eng} > W_{Maths} > W_{Hist}$

(ii) کسی کمیٹی کے چیئرمین یا صدر کا ووٹ کمیٹی کے ارکان سے اہم ہوتا ہے۔

نوٹ: قدری اوسط تبدیل ہو جائے گا اگر مواد کے ارکان کی قدر میں تبدیلی کر دیں۔ اگر x_1، x_2، x_3، ...، x_n کی اقدار یا قیمتیں ہیں تو

$$\bar{X}_w = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i} = \frac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots x_nw_n}{w_{1}+w_2+\ldots+w_n} = \text{قدری اوسط}$$

مثال 3. آٹھویں جماعت کے طلباء نے مختلف مضامین کی درج ذیل کتب خریدیں۔

معاشرتی علوم	اردو	انگریزی	سائنس	ریاضی	کتب کا عنوان
50	40	60	80	72	کتب کی قیمت
2	3	6	4	5	کتب کی تعداد

اگر کتب کی تعداد اہمیت کی حامل ہوں تو کتابوں کی قیمتوں کی قدری اوسط معلوم کریں۔

[مشورہ برائے حل: وسطی اوسط معلوم کیجئے۔]

حل: $\text{قدری اوسط} = \bar{X}_w = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i}$

$$= \frac{(72\times5)+(80\times4)+(60\times6)+(40\times3)+(50\times2)}{5+4+6+3+2}$$

$$= \frac{360+320+360+120+100}{20} = \frac{1260}{20} = 63$$

پس کتابوں کی اوسط قیمت 63 روپے ہے۔

(ج) وسطانیہ:

"وسطانیہ مواد کی وہ قیمت یا نمبر ہے جو مواد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہے، یعنی 50 فیصد ارکان وسطانیہ سے پہلے اور 50 فیصد ارکان وسطانیہ کے بعد ہوں گے۔ اس لئے وسطانیہ معلوم کرنے کیلئے سب سے پہلے ہمیں غیر گروہی مواد کو ترتیب (صعودی یا نزولی) میں لکھا جاتا ہے۔

(i) اگر (n) طاق عدد ہو تو وسطانیہ = مشاہدات کی $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ویں رقم یا قدر

(ii) اگر n جفت عدد ہو تو وسطانیہ = مشاہدات کی $\left(\frac{n}{2}\right)$ ویں اور $\left(\frac{n+2}{2}\right)$ ویں رقم کا اوسط

مثال 4. درج ذیل اعداد کا وسطانیہ معلوم کیجئے: 4،7،3،5،9،8،6،10،2

حل: دیئے ہوئے مواد کو ترتیب صعودی میں لکھنے پر 10،9،8،7، $\boxed{6}$ ،5،4،3،2

مواد 9 ارکان پر مشتمل ہے اور عدد 9 طاق عدد ہے اس لئے $\frac{9+1}{2} = \frac{10}{2} = 5$ واں

رکن وسطانیہ ہے یعنی 6 = وسطانیہ

مثال 5. 3،6،12،14،8،4،13،11،10،7 کا وسطانیہ معلوم کریں۔

حل: سب سے پہلے مواد کو ترتیب نزولی میں لکھنے پر 14،13،12،11، $\boxed{10\text{، }8}$ ،7،6،4،3

یہاں پر $n = 10$ اس لئے $\frac{n}{2}$ اور $\frac{n+2}{2}$ ویں ارکان کا اوسط وسطانیہ ہوگا۔

یعنی: وسطانیہ = [$\frac{10}{2}$ واں + $\frac{10+2}{2}$ واں] ارکان

= [$\frac{5}{2}$ واں + $\frac{6}{2}$ واں] ارکان

$= \frac{8+10}{2} = \frac{18}{2} = 9$

نوٹ: پس مذکورہ مواد کا وسطانیہ 9 ہے۔

چند مشاہدات:

(i) 3،5، $\boxed{7}$ ،10،15 کا وسطانیہ 7 ہے۔

(ii) 13،15، $\boxed{17}$ ،20،25 کا وسطانیہ 17 ہے (ہر رکن میں 10 جمع کرنے پر)

(iii) 1،3، $\boxed{5}$ ،8،13 کا وسطانیہ 5 ہے (کیوں؟ بتائیے)

(iv) 30،50، $\boxed{70}$ ،100،150 کا وسطانیہ 70 ہے (کیوں؟ بتائیے)

(v) 2،4، $\boxed{7}$ ،20،25 کا وسطانیہ بھی 7 ہے۔

(vi) 1،3،5، $\boxed{7}$ ،10،11،15 کا وسطانیہ بھی 7 ہے۔

نوٹ: کسی بھی دیئے ہوئے مواد کا وسطانیہ یکتا (ایک اور صرف ایک) عدد ہوتا ہے۔ لیکن وہی عدد کسی دوسرے مواد کا بھی وسطانیہ ہو سکتا ہے جیسا کہ مذکورہ بالا مثالوں سے ظاہر ہے۔ (i)،(v)،(vi)

(د) عادہ (Mode):

کسی مواد کے سیٹ میں متغیر کی وہ قیمت جو زیادہ سے زیادہ بار آئے عادہ کہلاتی ہے۔ یہ عام طور پر وہ رکن ہوتا ہے جس کا تعدد سب سے زیادہ ہوتا ہے۔ اگر کوئی رکن بھی دوبارہ نہ آئے تو مواد میں کوئی عادہ نہیں ہوگا۔ کسی مواد میں ایک سے زائد عادہ بھی ہو سکتے ہیں۔

مثال 6. 12 طلباء کے ایک ٹولے نے درج ذیل نمبر حاصل کیے ان کا عادہ معلوم کیجئے:

65،70،45،50،65،70،65،45،65،40،50،70.

حل: دیئے ہوئے مواد کو ترتیب صعودی میں لکھنے پر

$\underbrace{40,45,45}_{\text{2 بار}}, \underbrace{50,50}_{\text{2 بار}}, \underbrace{65,65,65,65}_{\text{4 بار}}, \underbrace{70,70,70}_{\text{3 بار}}$

مذکورہ بالا مواد میں سب سے زیادہ تعدد (4 بار) عدد 65 کا ہے۔

پس عادہ = 65

مثال 7. 11 کھلاڑیوں کا اسکور ہے: 13،18،12،17،13،12،16،12،13،13،12 ان کا عادہ معلوم کیجئے۔

حل: اسکور کو ترتیب نزولی میں لکھنے پر

$18,17,16, \underbrace{13,13,13,13}_{\text{4 بار}}, \underbrace{12,12,12,12}_{\text{4 بار}}$

اسکور کا جائزہ لینے پر معلوم ہوا کہ 12 اور 13 دونوں چار چار بار آئے ہیں۔

اس لئے اس مواد میں دو (2) عادہ ہیں یعنی عادہ = 12 اور 13

نوٹ 1: کسی بھی دیئے گئے مواد میں اوسط اور وسطانیہ یکتا (Unique) ہوتے ہیں۔

نوٹ 2: کسی بھی مواد میں عادہ کی تعداد ایک سے زائد ہو سکتی ہے۔ بعض مواد میں عادہ کا نہ ہونا بھی ممکن ہے۔

مثلاً $B = \{1, 2, 5\}$ کا کوئی عادہ نہیں

$C = [1, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 8, 8]$ میں عادہ کی تعداد 2 ہے یعنی 2 اور 5

D = (سادہ، ذہین، ذہین، غریب، ہوشیار) میں ایک عادہ ہے یعنی ذہین

نوٹ 3: غیر عددی مواد میں اوسط اور وسطانیہ نہیں ہوتے جبکہ عادہ ہو سکتے ہیں۔

مشق 12.2

1 (الف). مندرجہ ذیل ڈیٹا کا اوسط معلوم کیجئے۔

(i) 2،1،7،0،6،4،5،8،3

(ii) 5،3،1،9،7،15،13،11

(iii) 12،14،18،15،10،17،13،16،11

(iv) 36،24،28،20،12،40،8 ،32،16،4

(v) 8.7،7.5،6.3،5.1،4.8،3.6،2.4،1.2

1 (ب). نامعلوم ارکان کی قیمت معلوم کیجئے۔

(i) $\overline{X}=12, \Sigma x_i = 132, n = ?$ **(ii)** $n = 15, \Sigma x_i = 75, \overline{X} = ?$

(iii) $\Sigma x_i = 96, \overline{X} = 8, n = ?$ **(Iv)** $\overline{X}=13, n = 11, \Sigma x_i = ?$

2. دیئے ہوئے مواد سے قدری اوسط معلوم کیجئے۔

(i)

عدد (x)	10	20	30	40	50	60	70
قدری قیمت (w)	1	2	1	1	2	2	1

(ii)

عدد (x)	0	2	4	6	8	10	12
قدری قیمت (w)	1	2	3	4	5	3	2

(iii)

عدد (x)	1	3	5	7	9	11
قدری قیمت (w)	3	2	1	1	2	1

(iv)

عدد (x)	5	15	25	15	35	45
قدری قیمت (w)	2	1	2	1	2	2

3. مندرجہ ذیل کا وسطانیہ معلوم کیجئے۔

(i) 15 ،13،9،7،3،5،11،19،17
(ii) 30،25،10،40،35،20،15،5،45
(iii) 12،10،14،8،16،6،18،4،20،2،22
(iv) 99،81،63،55،33،27،45،77،49،21،35
(v) 89،79،99،29،19،105،104،75،91،78،39
(vi) 5.5 ،7.5،6.5،11.5،10.5،9.5،9.9،5.0،5.5،4.5،1.5،3.5،2.5

4 (الف). مندرجہ ذیل میں عادہ معلوم کیجئے۔

(i) 29،28،14،27،21،14
(ii) 39،38،24،37،31،24
(iii) 29،55،77،29،23،41،29،23
(iv) 26،52،74،26،20،38،26،20
(v) 71،51،93،81،71،57،51،71،81،51،71
(vi) 33 ،55،77،89،85،75،93
(vii) 330،550،770،890،850،750،930

4 (ب). خالی جگہ مناسب عدد لکھئے:

(i) 9،______،8،7،8،5،4،4،3،3 اگر عادہ 8 ہے۔
(ii) 15،______،20،10،8،5،4 اگر وسطانیہ 8 ہے۔
(iii) 4،______،10،7،9،6 اگر اوسط 8 ہے۔

5. کچھ اعداد کا مجموعہ اور اوسط بالترتیب 30 اور 5 ہے۔ اعداد کی تعداد بتایئے۔

6. اعداد 4 کا اوسط 45 ہے۔ پہلے دو اعداد 64 اور 36 ہیں اگر باقی دونوں اعداد میں سے ہر ایک کی قیمت x کے مساوی ہے تو x کی قیمت معلوم کیجئے۔

7. مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک میں غائب عدد معلوم کیجئے، اگر ان کا وسطانیہ 5 ہو۔

(i) 1، 2، 5، ____، 11 (ii) 2، ____، 5، 8، 11

(iii) 1، 2، 5، ____، 11، 20 (iv) 1، 2، 4، ____، 11، 20

8. غائب عدد معلوم کیجئے اگر عادہ 5 ہو۔

(i) 1، 2، 5، ____، 11 (ii) 2، ____، 5، 8، 11

(iii) 1، 2، 5، ____، 11، 20 (iv) 1، 2، 5، 5، ____، 11

(v) 1، 2، 2، 5، 5، ____، 11 [11، 2، 1 کے علاوہ کوئی جواب ہو سکتا ہے۔]

12.2.3 اوسط، قدری اوسط، وسطانیہ اور عادہ سے متعلق حقیقی زندگی میں مسائل

مثال 1. ایک تاجر نے آموں کے 125 کریٹ میر پور خاص سے کراچی روانہ کیے۔ ملاحظہ ہو ذیل میں دی گئی جدول۔ ہر کریٹ میں موجود گلے سڑے آموں کی قدری اوسط تعداد معلوم کیجئے (کریٹ کی تعداد کو بطور قدری قیمت استعمال کریں۔)

گلے سڑے آموں کی تعداد (x) فی کریٹ	0	1	2	3	4	5	6	7
کریٹوں کی تعداد (w)	14	25	29	28	20	15	5	2

حل: $\text{قدری اوسط} = \bar{X}_w = \dfrac{\sum x_i w_i}{\sum w_i}$

$$= \frac{0\times14+1\times25+2\times29+3\times28+4\times20+5\times15+6\times5+7\times2}{14+25+29+28+20+15+5+2}$$

$$= \frac{0+25+58+84+80+75+30+14}{138} = \frac{366}{138} = 2.65$$

پس فی کریٹ خراب آموں کی تعداد تقریباً 3 ہے۔

مثال 2. 20 طلباء کے وزن (کلو گرام میں) دیئے گئے ہیں:

60، 61، 67، 68، 59، 58، 55، 58، 59، 56، 60، 61، 66، 65، 64، 63، 60، 59، 58، 56.

تو (i) طلباء کا اوسط وزن (ii) طلباء کے وزن کا عادہ اور (iii) طلباء کے وزن کا وسطانیہ معلوم کیجئے۔

حل: سب سے پہلے ہم مواد کو ترتیب نزولی میں لکھتے ہیں

$$68,67,66,65,64,63,62,\ \underbrace{61,61}_{2\text{ بار}},\ \underbrace{\boxed{60,60,60}}_{3\text{ بار}},\ \underbrace{59,59,59}_{3\text{ بار}},\ \underbrace{58,58,58}_{3\text{ بار}},\ \underbrace{56,56}_{2\text{ بار}}$$

(i) مجموعہ $= 68+66+65+64+63+62+2(61)+3(60)+3(59)+3(58)+2(58) = 1220$

$$\therefore \quad \bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{1220}{20} = 61$$

پس طلباء کے وزن کا اوسط 61 کلو گرام ہے۔

(ii) عادہ $= 60,\ 59,\ 58$

دیئے ہوئے ڈیٹا میں تین عادہ ہیں یعنی 60 کلو گرام، 59 کلو گرام، 58 کلو گرام

(iii) وسطانیہ $= \frac{60+60}{2} = 60$

تشریح: مواد میں 20 ارکان ہیں اس لئے گیارہویں اور بارہویں ارکان کا اوسط، وسطانیہ ہوگا۔ چونکہ گیارہواں اور بارہواں دونوں عدد 60 ہے اس لئے مذکورہ بالا جواب یعنی وسطانیہ 60 کلو گرام ہے۔

مشق 12.3

1. ایک شخص نے مندرجہ ذیل سبزیاں خریدیں۔

نمبر شمار	سبزیاں	وزن (کلو گرام میں)	دام فی کلو (روپیوں میں)
1	آلو	12	25
2	پیاز	8	30
3	ٹماٹر	5	60
4	گاجر	3	40
5	بھنڈیاں	4	80

سبزیوں کا فی کلو گرام قدری اوسط معلوم کیجئے۔

2. آٹھویں جماعت کے 20 طلباء کے قد کی لمبائی (سینٹی میٹروں میں) درج ذیل ہیں۔

130، 135، 140، 145، 142، 141، 140، 135، 136، 137، 132،

134، 136، 138، 140، 142، 144، 143، 139، 138

مذکورہ بالا مواد کا اوسط، عادہ اور وسطانیہ معلوم کیجئے۔

کیا عادہ $\geq$ وسطانیہ $\geq$ اوسط؟

3. آموں کے 20 کریٹ حیدر آباد سے سکھر بھیجے گئے۔ ہر کریٹ میں خراب آموں کی تعداد حسب ذیل تھی۔

0، 2، 1، 0، 3، 2، 1، 0، 4، 1، 2، 3، 0، 2، 3، 4، 1، 2، 3، 3.

فی کریٹ خراب آموں کا اوسط، وسطانیہ اور عادہ معلوم کیجئے۔

کیا عادہ $\geq$ وسطانیہ $\geq$ اوسط

4. سائنس اور ریاضی کے ٹیسٹ میں 45 طلباء شریک ہوئے ان کے حاصل کردہ نمبر درج ذیل ہیں۔

حاصل کردہ نمبر	10	20	30	40	50	60	70	80	90
ریاضی کے طلباء کی تعداد	5	4	7	8	6	6	4	5	3
سائنس کے طلباء کی تعداد	4	4	8	8	5	3	2	7	4

ہر ایک مضمون کا قدری اوسط معلوم کیجئے۔ نشاندہی کیجئے کہ کس مضمون میں طلباء کی کارکردگی بہتر رہی؟

[طلباء کی تعداد کو بطور قدری قیمت استعمال کیجئے۔]

5. درج ذیل جدول 100 خاندانوں کی جسامت ظاہر کرتی ہے۔

خاندان کی جسامت (ارکان کی تعداد میں)	2	3	4	5	6	7	8	9	10
خاندان کی تعداد	24	32	20	10	5	4	2	2	1

خاندانوں کی جسامت کا قدرتی اوسط معلوم کیجئے۔ (خاندانوں کا تعداد قدری قیمت ہیں)

جائزہ مشق 12

1. درج ذیل ہر بیان سے متعلق درست جواب کے نمبر شمار پر دائرہ بنائیں۔

(i) 1،0،5،5،6،7 کا اوسط ________ ہے۔

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

(ii) 3،5،3،4،3،2 میں عادہ ________ ہے۔

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(iii) 10،5،4،3،2 میں وسطانیہ ________ ہے۔

(a) 4 (b) 3 (c) 2 (d) 5

(iv) 2،6،8،4،2،0 میں وسطانیہ ________ ہے۔

(a) 2 (b) 0 (c) 4 (d) 3

(v) 4،2،8،6،6،4،2 میں عادہ کی تعداد ________ ہے۔

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(vi) اوسط معلوم کرنے کا کلیہ ________ ہے۔

(a) $\bar{X} = \frac{\sum x}{n}$ (b) $\bar{X} = \frac{n}{\sum x}$ (c) $\bar{X} = \sum x.n$ (d) $n = \frac{\bar{X}}{\sum x}$

(vii) مواد میں کثرت سے آنے والے رکن کو ________ کہتے ہیں۔

(a) اوسط (b) وسطانیہ (c) تعددی تقسیم (d) عادہ

(viii) اگر $\bar{X} = 6$ اور $n = 5$ تو $\sum x =$ ________

(a) 5 (b) 6 (c) 30 (d) $\frac{5}{6}$

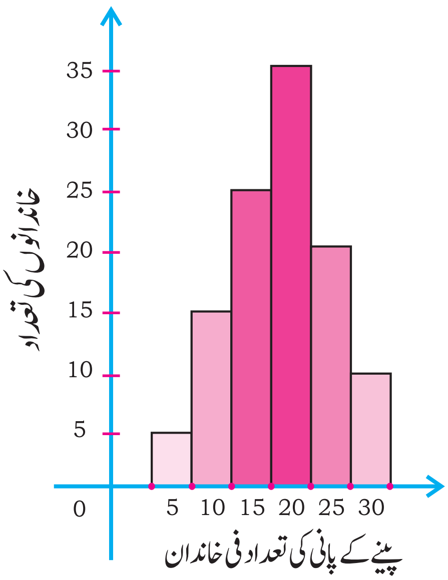
(ix) خام مواد کو گروہی مواد کی شکل میں ترتیب دینے اور مختصر کرنے کے طریقہ کار کو ________ کہتے ہیں۔

(a) تعددی تقسیم (b) اوسط (c) وسطانیہ (d) عادہ

(x) غیر عددی (یعنی توصیفی) مواد کیلئے مرکزی رجحان کا پیمانہ ________ ہے۔

(a) اوسط (b) قدری اوسط (c) عادہ (d) وسطانیہ

2. سامنے شکل میں کسی پلازہ میں رہائش پذیر 110 خاندانوں میں سے فی خاندان پینے کے پانی کو لیٹروں میں ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل کو دیکھ کر مندرجہ ذیل سوالات کے جواب دیجئے۔



(i) کتنے خاندانوں نے فی خاندان 25 تا 30 لیٹر پانی پینے کیلئے استعمال کیا؟

(ii) کتنے خاندانوں نے فی خاندان 5 تا 10 لیٹر پانی پینے کیلئے استعمال کیا؟

(iii) کتنے خاندانوں نے فی خاندان 15 تا 20 لیٹر پانی پینے کیلئے استعمال کیا؟

(iv) کتنے لیٹر پینے کا پانی فی خاندان زیادہ سے زیادہ خاندانوں کے استعمال میں آیا؟

(v) کتنے لیٹر پینے کا پانی فی خاندان کم سے کم خاندانوں کے استعمال میں آیا؟

3. کسی جماعت کے 30 طلباء ایک امتحان میں شریک ہوئے اور 40 نمبروں والے اس امتحان میں مندرجہ ذیل نمبر حاصل کیے۔

18	24	10	3	14	26	22	18	25	11	29	17	16	11	25
11	14	15	4	22	13	23	29	10	27	18	10	25	13	14

(i) دی ہوئی معلومات سے مساوی جسامت والے 5 جماعتی تعددی تقسیم کی جدول بنایئے۔

(ii) ہر جماعت کی جسامت بتایئے۔

(iii) امتحانی نتائج کا کالمی نقشہ بنایئے۔

4. ٹیلی طریقہ کار اور جدولی طریقہ کار استعمال کرتے ہوئے 27 طلباء کے حاصل کردہ مندرجہ ذیل نمبروں کی 4 مساوی جماعتی وقفہ والی تعددی تقسیمی جدول بنایئے اور کالمی نقشہ بنایئے۔

63،64،63،60،50،55،60،60،62،66،67،68،66،60،73،67،
65،70،72،69،59،59،50،60،70،69،70

خلاصہ

- معلومات داری 'شماریات' کا ایک حصہ ہے۔
- شماریات، ریاضی کی ایک شاخ ہے جس کا تعلق اعدادی حقائق کے اجتماع تقسیم اور تجزیہ کرنے سے ہے۔
- مواد کے مجتمع یا اکٹھا کرتے وقت مختلف مقداروں (یا متغیرات) کی تعداد کو ان مقداروں کا "تعدد" کہا جاتا ہے۔
- ابتدائی یا خام مواد کو اختصار کیلئے جماعت بندی کرنے کے عمل کو "تعددی تقسیم" کہتے ہیں۔
- کالمی نقشہ، تعددی تقسیم کا تصویری اظہار ہوتا ہے۔
- کالمی نقشہ ایک طرح کا افقی بار گراف ہے جس میں مستطیلی کالم ایک دوسرے کے متصل ہوتے ہیں یعنی درمیان میں خلاء نہیں ہوتا۔
- مرکزی رجحان کا پیمانہ ایک ایسا پیمانہ ہے جو پورے مواد کیلئے ایک واحد نمائندہ عدد کا تعین کرتا ہے۔
- عام طور پر چار قسم کے مرکزی رجحان کے پیمانے استعمال میں آتے ہیں، جو کہ اوسط، قدری اوسط، وسطانیہ اور عادہ ہیں۔
- اوسط معلوم کرنے کا کلیہ ہے: $\overline{X} = \dfrac{\sum x}{n}$

  (یعنی مواد کے تمام ارکان کے مجموعہ کی ارکان کی تعداد (n) سے تقسیم)
- عادہ، مواد میں موجود وہ مقدار ہے جو سب سے زیادہ مرتبہ نظر آتی ہے۔
- وسطانیہ وہ مقدار یا قیمت ہے جو مواد کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔
- وسطانیہ ایک یکتا مقدار ہے جو مواد میں موجود ہو سکتی ہے یا موجود نہیں ہوتی۔
- وسطانیہ معلوم کرنے کیلئے مواد کو بالترتیب نزولی یا صعودی میں لکھنا ہوتا ہے

  (i) اگر مواد کے ارکان کی تعداد طاق ہو تو وسطانیہ درمیانی رکن والی مقدار ہو گی۔

  (ii) اگر ارکان کی تعداد جفت ہو تو وسطانیہ دو درمیانی ارکان کا اوسط ہو گا۔

ریاضی میں استعمال ہونے والی علامات اور مخفف

∅ یا { }		Null set, Empty set یا void set = خالی سیٹ
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$		Set of Natural Numbers = قدرتی اعداد کا سیٹ
$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$		Set of Whole Numbers = مکمل اعداد کا سیٹ
$\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, ...\}$		Set of Integers = صحیح اعداد کا سیٹ
$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q}, p \wedge q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$		Set of Rational Numbers = ناطق اعداد کا سیٹ
$\mathbb{E} = \{0, \pm2, \pm4, \pm6, ...\}$		Set of Even Integers = صحیح جفت اعداد کا سیٹ
$\mathbb{O} = \{\pm1, \pm3, \pm5, ...\}$		Set of Odd Integers = صحیح طاق اعداد کا سیٹ
$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, ...\}$		Set of Prime Numbers = مفرد اعداد کا سیٹ
$\subseteq$	=	Contained in or Equal to = تحتی سیٹ کی نشانی ہے
$\subset$	=	Contained in, Properly Contained = واجب تحتی سیٹ کی نشانی ہے
P (A)	=	Power set of a set A, Set of all subsets of set A. = قوت سیٹ
$\cap$	=	Intersection = تقاطع
$\cup$	=	Union = اتصال
$\wedge$	=	And = اور
$\mathbb{U}$	=	Universal Set = کائناتی سیٹ
$A' = \mathbb{U} - A$	=	Complement of Set A = سیٹ A کا کمپلیمنٹ
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$	=	Set of Real Numbers = حقیقی اعداد کا سیٹ
$\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$	=	Set of Irrational Numbers = غیر ناطق اعداد کا سیٹ
$\sqrt{\ }$	=	Square Root = جذر المربع کی نشانی ہے
$\sqrt[3]{\ }$	=	Cube Root = جذر المکعب کی نشانی ہے
0 and 1	=	Binary Digits = ثنائی اعداد
0,1,2,3 and 4	=	Numerals of base 5 = خمسی اعداد
0,1,2,3,4,5,6 and 7	=	Numerals of base 8 or octal system = اساس 8 کے بنیادی ہندسے
0,1,2,3,4,5,6,7,8 and 9	=	Numerals of base 10, Decimal System = اعشاری نظام کے ہندسے
ATM	=	Automated Teller Machine = آٹومیٹڈ ٹیلر مشین
$	=	US Dollars = امریکی ڈالر
£	=	Pound Stierling = پاؤنڈ اسٹیرلنگ
ریال	=	Saudi Riyal = سعودی ریال
Rs	=	Rupees (Pakistani) = روپے پاکستانی
∈	=	Euro = یورو
¥	=	Yuan (Chinese) = یان (چین)
¥	=	Yen (Japanees) = یان (جاپان)
I = PRT	=	Profit = Principal × Rate × Time = منافع = اصل رقم × شرح × وقت
C.P	=	Cost Price = خریدی قیمت
S.P	=	Selling Price = قیمت فروخت
M.P	=	Marked Price = مقررہ قیمت

ریاضی میں استعمال ہونے والی علامات اور مخفف

$\overline{AB}$	=	Line Segment AB = AB قطعہ خط
$\overleftrightarrow{AB}$	=	Line AB = AB خط
$\perp$	=	Perpendicular =عمود
$\parallel$	=	Parallel =متوازی
m $\overline{AB}$	=	Measure (Length) of line segment AB =قطعہ خط AB کی پیمائش
m $\angle A$	=	Measure of angle A =زاویہ A کی پیمائش
$\parallel^{m}$	=	Parallelogram =متوازی الاضلاع
a, b, c; $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$		Sides of a $\triangle ABC$ =مثلث کے اضلاع
$\triangle$	=	Triangle =مثلث
$\blacktriangle$	=	Area of Triangle =مثلث کا رقبہ
S	=	Semi-perimeter of a Triangle =مثلث کا نصف احاطہ
s	=	Height of slant side of a cone =مخروط میں ترچھی سطح کی لمبائی
r	=	Raduis of a circle or sphere =کرے یا دائرے کا رداس
h	=	Height of a cylinder =بیلن کی اونچائی
V	=	Volume =حجم
π Pi	=	$\frac{22}{7}$ (approximately) =پائی
Q.E.D	=	Quod Erat Demonstrandum =فہوالمطلوب
		Meaning 'which was to be proved.' =یہی ثابت کرنا تھا
$\leftrightarrow$	=	One-One (or 1-1) correspondence =ایک–ایک مطابقت
$\cong$	=	Congruence =متماثل=تماثل
S.A.S	=	Side angle Side = ضلع، زاویہ، ضلع
Sin θ	=	Sine of the angle θ (Theta)
Cos θ	=	Cosine of the angle θ
Tan θ	=	Tangent of the angle θ
Cot θ	=	Cotangent of the angle θ
Sec θ	=	Secant of the angle θ
Cosec θ or Csc θ	=	Cosecant of the angle θ
f	=	Frequency =تعدد
$\overline{X}$	=	Mean =اوسط
Σx_i	=	Sum of measures or observations =مجموعہ وزن
n	=	Number of measures or observations =تعداد وزن
$\overline{X}_{\omega}$	=	Weighted Mean =وزنی اوسط
卌	=	Tally Marks , 5 =ٹیلی نشان

جوابات

اعادہ مشق I

1. (i) $A=\{1,2,3,4,5\}$, $A = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 5 \}$
(ii) $B=\{-1,0,1,2\}$, $B = \{ x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -2<x<3\}$
(iii) $C = \{11,13,17,19,23,29\}$,

2. متناہی سیٹ A اور C
لامتناہی سیٹ B,D اور E

مشق 1.1

1. (i) $A \subseteq B$ (ii) $C \subseteq D$ (iii) $S \subseteq T$

2. (i) $\{a\}, \{a,e\}, \{a,e,i\}$ (ii) $\{\ \}, \{x\}, \{y\}$

3. (i) واجب تحتی سیٹ: $\{2\}, \{4\}$,
غیر واجب تحتی سیٹ: $\{2,4\}$
(ii) واجب تحتی سیٹ: $\{2\}, \{3\}$;
غیر واجب تحتی سیٹ: $\{2,3\}$

4. (i) $\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\ \{1,2,3\}$
(ii) $\{\ \}, \{2\}$ (iii) $\{\ \}, \{3\}, \{5\}, \{3,5\}$
(iv) $\{\ \}, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1,0\}, \{-1,1\}, \{0,1\}, \{-1,0,1\}$
(v) $\{\ \}, \{2\}, \{4\}, \{0\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}, \{2,4,6\}$

5. (i) $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}\}$
(ii) $P(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$ (iii) $P(C) = \{\varnothing\}$

6. کوئی بھی سیٹ جس کو صرف ایک رکن ہو۔ وہ سیٹ جس کا صرف ایک واجب تحتی سیٹ ہو۔

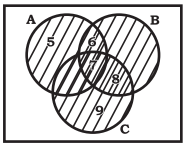
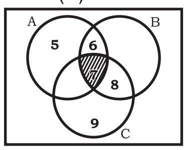
7. خالی سیٹ

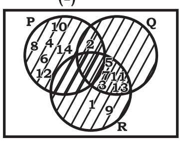
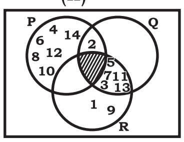
8. (i) $\{1,3,5,7\}$ (ii) $\{2,3,5,7,11\}$

9. (i) $A = \{20,30,40,50,60,80,100\}$
(ii) $B = \{40,80\}$
(iii) $C = \{30,50\}$ (iv) $D = \{50,100\}$

10. (i) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}$ (ii) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ (iii) $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$
(iv) $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{Z}$ (v) $\mathbb{O} \subseteq \mathbb{Q}$ (vi) $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{Q}$

مشق 1.3

1. (i)

(ii)


2. (i)

(ii)


3. اور **4.** طلباء خود وین اشکال بنائیں۔

جائزہ مشق 1

1. (i) (b) (ii) (c) (iii) (c)
(iv) (b)

2. $P(A) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{x,z\}, \{y,z\}, \{x,y,z\}\}$

5. (i) (b) (ii) (d) (iii) (c)

6. (iv), $\{x, y\}$; (vi) $\varnothing$

مشق 2.1

A. ناطق اعداد: 1,2,3,4,6,8,11
غیر ناطق اعداد: 5, 7, 9, 10, 12

B. مختتم اعداد: 3, 6, 8, 9, 11, 12
غیر مختتم اعداد: 1, 2, 4, 5, 7, 10

مشق 2.2

A. **1.** 25 **2.** 169. **3.** 361 **4.** 1521
5. 2025 **6.** 3364 **7.** 3969 **8.** 6241
9. 9409 **10.** 11664

B. **1.** 16, 25 **2.** 25, 36, 49
3. 49, 64 **4.** 81

C. **1.** $7^2 = 1+2+\ldots+7+6\ldots+1=49$
2. $9^2 = 1+2+\ldots+9+8\ldots+1=81$

جوابات

مشق 2.7

A. **1.** 1,000 **2.** 8,000 **3.** 2,7000
4. 64,000 **5.** 12,5000 **6.** 216,000
7. 512 **8.** 1,728 **9.** 3,375
10. 5,832 **11.** 13,824 **12.** 15,625

B. **1.** $\frac{1}{8}$ **2.** $\frac{8}{27}$ **3.** $\frac{27}{64}$
4. $\frac{64}{125}$ **5.** $2\frac{10}{27}$ **6.** $15\frac{5}{8}$
7. $1\frac{61}{64}$ **8.** $10\frac{37}{216}$ **9.** $1\frac{331}{1000}$
10. $9\frac{7507}{8000}$ **11.** $1\frac{271}{729}$ **12.** $37\frac{1}{27}$

C. **1.** 0.064 **2.** 0.729 **3.** 1.729
4. 4.096 **5.** 9.261 **6.** 15.625
7. 0.000001 **8.** 0.000008
9. 0.000125 **10.** 1.404928
11. 1.157625 **12.** 1.030301

D. **1.** yes **2.** yes **3.** yes **4.** yes
5. yes **6.** yes **7.** yes **8.** yes
9. yes **10.** yes **11.** yes **12.** yes

مشق 2.8

A. **1.** 4 **2.** 7 **3.** 11 **4.** 8
5. 9 **6.** 42 **7.** 15 **8.** 24
9. 25 **10.** 33 **11.** $\frac{1}{2}$ **12.** $1\frac{1}{3}$
13. $1\frac{1}{4}$ **14.** $1\frac{1}{5}$ **15.** $\frac{7}{9}$

جائزہ مشق 2

1. (i) (c) (ii) (c) (iii) (a) (iv) (b)
(v) (c) (vi) (a) (vii) (a) (viii) (c)
(ix) (a) (x) (c) (xi) (a) (xii) (c)

2. (i) 3 (ii) 3 (iii) 4

3. (i) $4\frac{3}{17}$ (ii) $5\frac{1}{3}$ (iii) $10\frac{1}{13}$

3. $15^2 = 1+2+...+15+14...+1=225$
4. $11^2 = 1+2+...+11+10+...+1=121$
5. $13^2 = 1+2+...+13+12+...+1=169$
6. $8^2 = 1+2+...7+8+7+...+1=64$
7. $12^2 = 1+2+...+12+11...+1=144$
8. $16^2 = 1+2+...+16+15...+1=256$
9. $20^2 = 1+2+...+20+19...+1=400$
10. $27^2 =1+2+...+27+26...+1=729$

مشق 2.3

A. **1.** 31 **2.** 36 **3.** 587 **4.** 904
5. $\frac{9}{11}$ **6.** $\frac{11}{14}$ **7.** $\frac{21}{44}$ **8.** $1\frac{4}{121}$
9. 15.8 **10.** 0.64 **11.** 54.6 **12.** 11.45

B. **1.** 32 **2.** 119 **3.** 998 **4.** 3214
5. $\frac{13}{17}$ **6.** $\frac{35}{53}$ **7.** $\frac{171}{236}$ **8.** $1\frac{1}{4}$
9. 25.47 **10.** 13.45 **11.** 26.98
12. 87.256

مشق 2.4

A. **1.** 1.41 **2.** 2.23 **3.** 3.60
4. 11.87 **5.** 13.41 **6.** 1.58
7. 12.36 **8.** 0.11 **9.** 4.80
10. 11.18

B. **1.** 2.449 **2.** 2.828 **3.** 3.316
4. 12.449 **5.** 14.317 **6.** 2.701
7. 11.215 **8.** 38.326 **9.** 359.232
10. 57.924

مشق 2.5

1. 2 **2.** 3 **3.** 3 **4.** 3
5. 3 **6.** 4 **7.** 4 **8.** 5
9. 4 **10.** 4 **11.** 5 **12.** 5

مشق 2.6

1. Rs 92 **2.** 104 m **3.** No. 40
4. 60 میٹر **5.** 2500 میٹر

جوابات

(iv) 0.231 (v) 0.452 (vi) 8.1

4. 402 m

5. (i) 15 (ii) 12 (iii) $\frac{7}{8}$ (iv) $1\frac{2}{9}$

مشق 3.1

1. (i) دو ہندسوں 0 اور 1 پر مشتمل نظام، اساس 2 کا نظام ہوتا ہے۔

$0_2, 1_2, 10_2, 11_2, 100_2, 101_2, 110_2, 111_2$

(ii) پانچ ہندسوں 0، 1، 2، 3 اور 4 پر مشتمل نظام، اساس 5 کا نظام یا خمسی نظام ہوتا ہے۔

$0_5, 1_5, 2_5, 3_5, 4_5, 10_5, 11_5, 12_5, 13_5, 14_5, 20_5, 21_5$

(iii) آٹھ ہندسوں 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6 اور 7 پر مشتمل نظام، اساس 8 کا نظام ہوتا ہے۔

$0_8, 1_8, 2_8, 3_8, 4_8, 5_8, 6_8, 7_8, 10_8, 11_8, 12_8, 13_8, 14_8, 15_8, 16_8, 17_8$

(iv) دس ہندسوں 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8 اور 9 پر مشتمل نظام، اساس 10 کا نظام یا اعشاری نظام ہوتا ہے۔

مثال: 34, 57, 63

2. (i) $1\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0$

(ii) $1\times2^3 + 1\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0$

(iii) $1\times2^4 + 0\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0$

(iv) $1\times2^4 + 1\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0$

(v) $1\times2^5 + 0\times2^4 + 0\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0$

(vi) $1\times2^5 + 1\times2^4 + 0\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2$ 1×2^0

(vii) $1\times2^5 + 1\times2^4 + 1\times2^3 + 1\times2^2 + 1\times2$ 1×2^0

3. (i) $2\times5^1 + 3\times5^0$ (ii) $4\times5^1 + 4\times5^0$

(iii) $1\times5^2 + 2\times5^1 + 4\times5^0$

(iv) $1\times5^2 + 4\times5 + 2\times5^0$

(v) $2\times5^2 + 1\times5^1 + 4\times5^0$

(vi) $3\times5^2 + 0\times5 + 3\times5^0$

(vii) $3\times5^2 + 4\times5 + 4\times5^0$

(viii) $4\times5^2 + 0\times5 + 4\times5^0$

4. (i) $3\times8^1 + 6\times8^0$ (ii) $7\times8^1 + 1\times8^0$

(iii) $1\times8^2 + 1\times8^1 + 6\times8^0$

(iv) $1\times8^2 + 4\times8 + 2\times8^0$

(v) $1\times8^2 + 6\times8 + 2\times8^0$

(vi) $3\times8^2 + 4\times8 + 1\times8^0$

(vii) $5\times8^2 + 2\times8 + 4\times8^0$

5. (i) $2\times10^2 + 0\times10^1 + 1\times10^0$

(ii) $3\times10^2 + 1\times10^1 + 9\times10^0$

(iii) $4\times10^3 + 0\times10^2 + 7\times10^1 + 5\times10^0$

(iv) $5\times10^4+6\times10^3+9\times10^2+7\times10^1+0\times10^0$

(v) $9\times10^5 + 8\times10^4 + 0\times10^3 + 7\times10^2 + 6\times10^1 + 2\times10^0$

مشق 3.2

A. **1.** 100100_2 **2.** 1001101_2 **3.** 1011001_2 **4.** 10011100_2 **5.** 100011000_2 **6.** 111101001_2 **7.** 1010001110_2 **8.** 1100010010_2 **9.** 1111100111_2 **10.** 11001000000_2 **11.** 11010101001_2 **12.** 11100010000_2 **13.** 10001001000_2 **14.** 11111010001_2 **15.** 11111100100_2

B. **1.** 322_5 **2.** 343_5 **3.** 1134_5 **4.** 1310_5 **5.** 2440_5 **6.** 3234_5 **7.** 10131_5 8. 13242_5 **9.** 31012_5 **10.** 101313_5 **11.** 130010_5 **12.** 130200_5 **13.** 130031_5 **14.** 134402_5 **15.** 134010_5

C. **1.** 770_8 **2.** 3345_8 **3.** 47175_8 **4.** 101575_8 **5.** 136350_8 **6.** 142657_8 **7.** 167536_8 **8.** 232416_8 **9.** 235755_8 **10.** 301433_8 **11.** 257631_8 **12.** 301301_8 **13.** 300715_8 **14.** 277421_8 **15.** 303237_8

مشق 3.3

A. **1.** 13 **2.** 27 **3.** 23 **4.** 53

جوابات

7. 334_5 **8.** 13123_5

C. **1.** 1000_5 **2.** 10111_5
3. 2000_5 **4.** 43124_5
5. 20324_5 **6.** 3144_5
7. 2334_5 **8.** 111_5

D. **1.** 302333_5 **2.** 242_5
3. 320042_5 **4.** 3204003_5
5. 203124_5 **6.** 220034_5
7. 114012_5 **8.** 2224222_5
9. 2312120_5 **10.** 431440_5
11. 10340220_5 **12.** 2243214_5

مشق 3.6

1. (i) 445_8 (ii) 13755_8
(iii) 73647_8 (iv) 156344_8
(v) 726447_8

2. (i) 25_8 (ii) 5_8
(iii) 352_8 (iv) 7673_8
(v) 63744_8

3. (i) 3763_8 (ii) 66075_8
(iii) 10323050_8 (iv) 11771530_8
(v) 377645061_8

مشق 3.7

1. (i) 111101_2 (ii) 10010010_2
(iii) 100000101_2 (iv) 1001000_2
(v) 1100111_2

2. (i) 33_5 (ii) 131_5
(iii) 34_5 (iv) 241_5
(v) 11200_5

3. (i) 202103_5 اور 1100110000000_2
(ii) 141244_5 اور 1011011000000_2
(iii) 214314200_5 اور $111000111010010010010 01_2$

4. 110000111010_2, 100010_5 اور 6072_8

5. 111101101101111_2, 2002344_5 اور 75557_8

5. 43 **6.** 119 **7.** 102 **8.** 103
9. 214 **10.** 253 **11.** 146 **12.** 197

B. **1.** 11 **2.** 15 **3.** 20 **4.** 7
5. 12 **6.** 41 **7.** 122 **8.** 67
9. 101 **10.** 115 **11.** 205 **12.** 611
13. 337 **14.** 508 **15.** 579

C. **1.** 39 **2.** 14 **3.** 32 **4.** 48
5. 56 **6.** 84 **7.** 162 **8.** 196
9. 296 **10.** 448 **11.** 1542 **12.** 556
13. 3456 **14.** 2309 **15.** 2595

مشق 3.4

A. **1.** 1001_2 **2.** 1111_2 **3.** 10101_2
4. 110100_2 **5.** 11011_2 **6.** 1010_2
7. 11100_2 **8.** 11001_2 **9.** 1010110_2
10. 110000_2 **11.** 110000_2 **12.** 1001011_2

B. **1.** 1010_2 **2.** 10_2 **3.** 1000_2
4. 10101_2 **5.** 101010_2 **6.** 1110_2
7. 111_2 **8.** 111_2 **9.** 10001_2 **10.** 10101_2

C. **1.** 1101_2 **2.** 10100_2 **3.** 1010_2
4. 0_2

D. **1.** 1111_2 **2.** 11110_2
3. 111100_2 **4.** 1001110_2
5. 100011_2 **6.** 11010010_2
7. 10010110_2 **8.** 101101_2
9. 111100_2 **10.** 110000001_2
11. 11010010_2 **12.** 100010100_2

مشق 3.5

A. **1.** 1121_5 **2.** 10203_5
3. 10231_5 **4.** 112_5
5. 113434_5 **6.** 241_5
7. 10001_5 **8.** 4402_5
9. 10341_5 **10.** 22333_5
11. 30230_5 **12.** 100122_5

B. **1.** 330_5 **2.** 133_5
3. 1311_5 **4.** 1014_5
5. 3032_5 **6.** 1422_5

جوابات

جائزہ مشق 3

1. (i) 486_{10} اور 746_8
(ii) 3092_{10} اور 6024_8
(iii) 16954_{10} اور 41072_8
2. (i) 65345 (ii) 9867
(iii) 369635 (iv) 230400
3. (i) 1000010111_2, 13241_5 اور 2057_8
(ii) 110001_2, 144_5 اور 61_8
(iii) 1110110100111100_2, 3420412_5 اور 166474_8
(iv) 1100101100100000_2, 1313000_5 اور 62620_8
4. (i) 130_5 اور 50_8 (ii) 312_5 اور 122_8
(iii) 42 اور 52_8 (iv) 50_{10} اور 200_5
(v) 453 اور 3303_5
5. (i) دس (ii) آٹھ (iii) پانچ
(iv) پانچ (v) آٹھ (vi) دس
6. (i) $4\times8^0=4\times1=4$ اور $4\times10^0=4\times1=4$
(ii) $3\times5^1=3\times5=15$ اور $3\times10^1=30$
(iii) $0\times8^2=0$ اور $0\times10^2=0$
(iv) $2\times5^3=250$ اور $2\times8^3=1024$
(v) $1\times5^4=625$ اور $1\times10^4=10000$

اعادہ مشق 4

1. (i) 8 (ii) 22 (iii) 9 (iv) 5.4
2. 33
3. 2,700 روپے
4. 52.6 میٹر
5. 122 دن
6. 84 منٹ
7. 60 میٹر
8. 150 آدمی
9. 15 دن
10. 40 شخص

مشق 4.1

1. 12 روپے
2. 9,000 آدمی
3. 18,864 روپے
4. 200 سائیکلیں
5. 40 دن
6. 4 گھنٹے
7. 15 شخص
8. 4,000 کلوگرام
9. 24 دن
10. 8 گھنٹے

مشق 4.2

1. 9,000 روپے، مریم کا منافع میں حصہ
12,000 روپے، عارفہ کا منافع میں حصہ
2. 16,800 روپے، اکرم کا منافع میں حصہ
7,200 روپے، اسلم کا منافع میں حصہ
4,800 روپے، اصغر کا منافع میں حصہ
3. 15,000 روپے، علی کا منافع
10,500 روپے، ذین کا منافع
12,000 روپے، صعاد کا منافع
4. (ii) 2:3 ; 24,000 روپے ; 36,000 روپے
(iii) 1:2 ; 20,000 روپے ; 40,000 روپے
(iv) 24,000 روپے ; 50,000 روپے ; 36,000 روپے
(v) 75,000 روپے ; 24,000 روپے ; 36,000 روپے
5. 180,000 روپے، ایک بیٹی کا حصہ
360,000 روپے، ایک بیٹے کا حصہ
6. 100,000 روپے، ہر ایک بیوہ کا حصہ
560,000 روپے، ہر ایک بیٹے کا حصہ
280,000 روپے، ہر ایک بیٹی کا حصہ
7. 240,000 روپے، ماں کا حصہ
180,000 روپے، بیوہ کا حصہ
204,000 روپے، بیٹے کا حصہ
102,000 روپے، بیٹی کا حصہ
8. 100,000 روپے، بیٹے کا حصہ
9. (ii) 320,000 روپے ; 160,000 روپے
(iii) 4; 4; 200,000 روپے ; 100,000 روپے
(iv) 1; 6; 200,000 روپے ; 100,000 روپے
(v) 4; 6; 160,000 روپے ; 80,000 روپے
(vi) 1; 6; 200,000 روپے ; 100,000 روپے

مشق 4.3

1. (i) 5,538.5 یان
(ii) 3,1250 انڈین روپے
(iii) 15,290 PKR (iv) 31,500 PKR

جوابات

668.20 روپے ; 2,004.70 روپے

(iii) 7,722 روپے ; 14,850 روپے ;

1,336.50 روپے ; 4009.50 روپے

2. 16,350 روپے **3.** 28,525 روپے

4. (ii) 9,000 روپے ; 8100 روپے ;

27,100 روپے

(iii) 12,000 روپے ; 10,800 روپے ;

9,720 روپے ; 32,520 روپے

(iv) 500,000 روپے ; 20,000 روپے ;

18,000 روپے ; 54,200 روپے

(v) 1,000 روپے ; 40,000 روپے ;

32,400 روپے ; 108,400 روپے

مشق 4.7

1. 29,500 روپے **2.** 1100 روپے

3. 1,251,900 روپے **4.** 222,000 روپے

5. 300,000 روپے **6.** 2,900,000 روپے

7. (ii) 2 ; 0 ; 40,000 روپے ;

80 ; 2% ; 1,600 روپے

(iii) 4 ; 750,000 روپے ;

50 ; 10% ; 29,500 روپے

(iv) 597,000 روپے; 4,000,000 روپے;

2,000 روپے ; 1,137,000 روپے

جائزہ مشق 4

1. (i) c (ii) d (iii) c

(iv) b (v) a (vi) c

(vii) c (viii) b (ix) d (x) d

2. 36,000 روپے B کو ملیں گے, 27,000 روپے A کو ملیں گے

کل منافع = 162,000 روپے

3. 25% ایک مرتبہ رعایت

4. 1,000,000 روپے **5.** 960,000 روپے

6. 3%

مشق 5.1

1.

نمبر شمار	مستقل	متغیر	عددی حروف
(i)	3, 1	x	x
(ii)	0	–	–

(v) 1500 ترکشی لیریا

2. 176,475 PKR **3.** 1,000 امریکی ڈالر

4. 30,000 انڈین روپے

5. 76,800 PKR

6. 74,220 روپے = امپورٹیڈ فریج کی قیمت

3,280 روپے = بچت

مشق 4.4

1. 15,000 روپے **2.** 8,000 روپے

3. 75,000 روپے **4.** 3%

5. 2.86 سال **6.** 5%

7. 12.5 سال

8. (i) 4,000 روپے (ii) 38,220 روپے

(iii) 10 سال (iv) 5,000 روپے

(v) 30%

9. (i) 1,666.60 روپے (ii) 60,000 روپے

10. 1,784,000 روپے

11. (i) 8,000 روپے ; 232,000 روپے

(ii) 7,333.30 روپے ; 216,000 روپے

(iii) 4,666.60 روپے ; 264,000 روپے

(iv) 6,000 روپے ; 224,000 روپے

مشق 4.5

1. (i) 105 روپے; 10% (ii) 1,998 روپے; 20%

(iii) 7,320 روپے; 1,320 روپے (iv) 1000,250

2. 8.33% منافع **3.** 10% منافع

4. 10% منافع

5. (i) 1,925 روپے ; 8,075 روپے ; 19.25%

(ii) 1,925 روپے ; 8,075 روپے ; 19.25%

(iii) 2,350 روپے ; 7,650 روپے ; 23.50%

(iv) 2,784 روپے ; 7,216 روپے ; 27.84%

6. 7,267.50 روپے **7.** 31.6%

8. 7,500 روپے

مشق 4.6

1. (i) Rs 4,950 ; Rs 2,574 ;

Rs 1,336.50 ; Rs 445.50

(ii) Rs 7,425 ; Rs 3,861 ;

(iv) $8y^2 + yz - 8z^2$

3. $12p^2 - 11pq + q^2$ **4.** $6a^3 + 3a + 7b$

5. (i) $-3x + 12y - 57xy$
(ii) $-7x - 2y + 9xy$
(iii) $x^3 + 6x^2y + 13xy^2 + 36y^3$
(iv) $x^4 + x^3y + xy^3 + y^4$

6. (i) $x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$ (ii) $x^6 + x^3y^3 + y^6$
(iii) $a^4 - 2a^3b + 2ab^3 - b^4$
(iv) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

7. (i) $x^2 - 2x + 4$ (ii) $2x^2 - 8x + 4$
(iii) $x - 2$ (iv) $3x - 4y$
(v) $a^2 - ab + b^2$ (vi) $a^4 + a^2b^2 + b^4$

8. $x^2 + xy - y^2$

9. 47 **10.** $\dfrac{12 - x}{2}$

جائزہ مشق 5

1. (i) سہ درجی الجبری اظہاریہ
مثال: $2x^3 + 6x^2 - 3x + 5$
(ii) غیر خالی سیٹ میں علامت جو ہر ایک رکن کو ظاہر کرتی ہے۔
$2x + 3y$ میں متغیر x اور y ہیں
(iii) a, b, c (iv) 2
(v) تمام رکن میں سب سے زیادہ ڈگری
$x^2 + 5x + 6$ میں الجبری اظہاریے کا درجہ 2 ہے۔

2. (i) d (ii) c (iii) a (iv) d (v) b
(vi) c (vii) d (viii) c (ix) d (x) a

3. (i) $-3a + 28b$ (ii) 10 (iii) 1
(iv) $\dfrac{910}{27}$ (v) 0

4. (i) $\dfrac{34x - 5y - 21z}{30}$ (ii) $x - y^2$
(iii) $x^2 - y^2 - 2y - 4$
(iv) $a^2 - 2a + 2$ (v) 1

5. -42

مشق 6.1

1. (i) 1157625 (ii) 9216
(iii) 3249 (iv) 2704
(v) 9984 (vi) 2491

(iii)	$2, \frac{1}{3}, -3, a$, b	–	a, b
(iv)	3, – 2, l, m	–	l, m
(v)	–2, 4, a, b, c	–	a, b, c
(vi)	p, q, r	x, y	p,q,r,x,y
(vii)	–5, 9, – 4	x, y	x, y
(viii)	$3^2, -2^2$, p, q	–	p , q
(ix)	1, – 1	y	y
(x)	$\sqrt{3}, \sqrt{5}$, –9, a,b	–	a, b
(xi)	7, – 2, 3	x	x
(xii)	– 8	–	–

2. (i), (iv), (v), (vi), (vii), (ix), (xi), اور (xii) الجبری اظہاریے ہیں

3. (i) 0 (ii) 1 (iii) 2 (iv) 4
(v) 7 (vi) 1 (vii) 5 (viii) 3
(ix) 6 (x) 4 (xi) 0 (xii) 4

4. (i) 3 (ii) $\sqrt{4}$ (iii) –1 (iv) 1, 1
(v) 5,9,1 (vi) $\sqrt{2}, -\sqrt{3}$ (vii) –2
(viii) $-\dfrac{3}{4}$

5. (i) 2 (ii) 3 (iii) 2 (iv) 2
(v) 2 (vi) 1 (vii) 0 (viii) 3

6. (i) یک رقمی (ii) یک رقمی (iii) دو رقمی
(iv) دو رقمی (v) سہ رقمی
(vi) چار رقمی (vii) سہ رقمی
(viii) چار رقمی (ix) سہ رقمی
(x) چار رقمی (xi) دو رقمی
(xii) چار رقمی

مشق 5.2

1. (i) $2x + z$
(ii) $5x + 8y^3 + 5xy - 2xy^3$
(iii) $x^2 - 4x - 1$
(iv) $-4ab + 2a^2 - 2b^2 - 1$

2. (i) $-6x - 3y + 2z$
(ii) $-7y^5 + y^4 + 6y^3 + 12y^2 + 8$
(iii) $x^2 + y^2 + z^2 - 15x + 15y - 9z$

11. $(a + b + p + q)(a + b - p - q)$
12. $(12 + y^2)(12 - y^2)$
13. $2(4a + 5b)(4a - 5b)$
14. $(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$
15. $(2a + b + 3c)(2a + b - 3c)$

D. **1.** $(x + y + z)(x + y - z)$
2. $(a - b + c)(a - b - c)$
3. $(8a + 3b + c)(8a + 3b - c)$
4. $(2p - 3q + 7r)(2p - 3q - 7r)$
5. $(x^2 + y^2 + 5z)(x^2 + y^2 - 5z)$
6. $(\frac{x}{2} - y + \frac{c}{6})(\frac{x}{2} - y - \frac{c}{6})$
7. $2(a + b + c)(a + b - c)$
8. $(9c + d + 4p)(9c + d - 4p)$
9. $(2x + 3 + 4y)(2x + 3 - 4y)$
10. $(6 + 5a - 7b)(6 - 5a + 7b)$

مشق 6.3

1. (i) $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$
(ii) $125x^3 - 75x^2 + 15x - 1$
(iii) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$
(iv) $8a^3 + 60a^2b + 150ab^2 + 125b^3$
(v) $x^3 + 21x^2z + 147xz^2 + 343z^3$
(vi) $\frac{x^3}{8} - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{2} - 1$
(vii) $125 + 225a + 135a^2 + 27a^3$
(viii) $125 - \frac{75a}{4} + \frac{15a^2}{16} - \frac{a^3}{64}$
(xi) $125a^3 - 225a^2b + 135ab^2 - 27b^3$
(x) $\frac{x^3}{27} + \frac{x^2y}{15} + \frac{xy^2}{25} + \frac{y^3}{125}$

2. (i) 5832 (ii) 2197
(iii) 1157625 (iv) 1030.301
(v) 0.941192 (vi) 11.390625

3. (i) 198 (ii) – 110
(vii) 9951 (viii) 9879

2. (i) 1.0609 (ii) 0.9801
(iii) 1.1025 (iv) 0.8281
(v) 0.9991 (vi) 24.9996

3. (i) 23 and 527 (ii) 14 and 194
(iii) 47 and 2207

4. (i) 11 and 119 (ii) 2.04 and 2.1616
(iii) 38 and 1442

مشق 6.2

A. **1.** $4(x+2z)$ **2.** $5(x+2y+6z)$
3. $2x(1-2y + 4z)$ **4.** $2a^2(1+5a-10a^2)$
5. $ab(3a + 7b - 8ab)$
6. $6abc(a+2b-6c)$
7. $(x+2y)(5+3z)$ **8.** $(c-d)(ab+x)$
9. $(x+5)(x+6y)$ **10.** $(x+2z)(7y-5a)$
11. $3(1 + 2z)(x^2 + 2y^2)$
12. $(x - z)(x - 7y)$

B. **1.** $(a+5)^2$ **2.** $(x+6y)^2$
3. $(2x + 3y)^2$ **4.** $(4a + 5b)^2$
5. $(b - c)^2$ **6.** $(7p-1)^2$
7. $(9c-2d)^2$ **8.** $(12x^2-3y^2)^2$
9. $3(a-b)^2$ **10.** $(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y)^2$

C. **1.** $(9x + 2y)(9x - 2y)$
2. $(13a + 10b)(13a - 10b)$
3. $3(a + 3b^2)(a - 3b^2)$
4. $2(p + 3q)(p - 3q)$
5. $5(x + 5y)(x - 5y)$
6. $(\frac{5}{x} + \frac{y}{4})(\frac{5}{x} - \frac{y}{4})$
7. $(\frac{x}{12} + y)(\frac{x}{12} - y)$
8. $(\frac{6}{5}l + \frac{7}{2}d)(\frac{6}{5}l - \frac{7}{2}d)$
9. $(c + a - b)(c - a + b)$
10. $(x + y + z)(x + y - z)$

جوابات

(iii) $5y - 1 = 0$ (iv) $-ay + b = 0$
(v) $7y - 6 = 0$ (vi) $17y - 16 = 0$

2. (i) $S = V_f t - \frac{1}{2}at^2$ (ii) $S = V_f t - \frac{3}{2}gt^2$
(iii) $2V_f t - gt^2 = 2S$

3. (i) $4a^2 = 4b^2 + 4b + 5$
(ii) $4a^2 - 9b^2 + 4 = 0$
(iii) $q^4 = p^4 - 4p^2$
(iv) $p^4 - q^4 = 2$
(v) $3y^2 + 8y - 7 = 0$
(vi) $m^2 - n^2 - 4 = 0$

جائزہ مشق 6

1. (i) (b) (ii) (d) (iii) (c) (iv) (c)
(v) (b)

2. for $x - \frac{1}{x} = 5$ (i) 27 (ii) 727
(iii) 140 (iv) 19602
for $x + \frac{1}{x} = 3$ (i) 7 (ii) 47
(iii) 18 (iv) 322

3. (i) 10609 (ii) 9409 (iii) 9991

4. (i) $5(x + 2y + 3z)$ (ii) $(x + 7)^2$
(iii) $(12x + 11y)(12x - 11y)$
(iv) $(5x - y)^2$
(v) $(a + 2b + 3y)(a + 2b - 3y)$
(vi) $(1 + \frac{1}{x^2})(1 + \frac{1}{x})(1 - \frac{1}{x})$

5. (i) $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$
(ii) $27x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 64y^3$
(iii) $x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$
(iv) $x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$

6. (i) 24,389 (ii) 29,791

7. (a) (i) $\{(4, 2)\}$ (ii) $\{(\frac{22}{9}, \frac{-7}{9})\}$
(b) (i) $\{(1, 2)\}$ (ii) $\{(5, 4)\}$
(c) (i) $\{(2, 1)\}$ (ii) $\{(11, 1)\}$

(iii) $-1\frac{3}{8}$ (iv) 1000.001

4. (i) 140 (ii) -14
(iii) $1\frac{1}{27}$ (iv) 999.999

مشق 6.4

1. یک درجی مساوات ایک متغیر میں:
(ii), (v)
یک درجی مساوات دو متغیر میں:
(i), (vi)
یک درجی ہمزاد مساواتیں:
(iii), (iv)

2. (i) $x + y = 50$ (ii) $6x = 3y$
(iii) $2x + 5 = 25$ (iv) $3x - 6y = 45$
(v) $x = \frac{2y}{3}$ (vi) (6, 0)

مشق 6.5

1. (i) $\{(3,4)\}$ (ii) $\{(\frac{7}{8}, 1\frac{3}{8})\}$
(iii) $\{(2, 3)\}$ (iv) $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})\}$
(v) $\{(1\frac{1}{2}, 5)\}$ (vi) $\{(-2\frac{3}{5}, 6\frac{2}{5})\}$

2. (i) $\{(5, 2)\}$ (ii) $\{(-1, 2)\}$
(iii) $\{(-2, -3)\}$ (iv) $\{(-1, -2)\}$
(v) $\{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}$ (vi) $\{(5, 2)\}$

3. (i) $\{(1, 1)\}$ (ii) $\{(-5, -1)\}$
(iii) $\{(4\frac{2}{5}, 1\frac{1}{5})\}$ (iv) $\{(6\ 1)\}$
(v) $\{\ \}$ (vi) $\{(1, -1)\}$

مشق 6.6

1. 150 روپے کلو **2.** 4 گیندیں
3. لمبائی 100m، چوڑائی 50m **4.** لڑکوں کی تعداد 300
5. مزدور کا ماہانہ خرچ 30000 روپے

مشق 6.7

1. (i) $y = 0$ (ii) $27y - 5 = 0$

جوابات

خط قاطع , ایک ہی جانب

(v) (*a*) متبادل , نسبتی

(b) سپلیمنٹری , ضلع , زاویے

(vi) زیادہ , تین , سطح

(vii) متماثل , متوازی

(viii) متوازی الاضلاع (ix) اندرونی

(x) Regular polygon (xi) دائرہ

(xii) وتر

2. $m\angle Q = 110^\circ = m\angle S$, $m\angle R = 70^\circ$, $m\ \overline{AD} = 4.5$, $m\ \overline{CD} = 6cm$
$m\angle A = m\angle C = 70^\circ$,
$m\angle B = m\angle D = 110^\circ$. No.

3. $m\angle A = 65^\circ = m\angle BCD$,
$m\angle B = 115^\circ = m\angle BCF = m\angle ADC$.
(i) $(\angle A, \angle EDC)$; $(\angle ADC, \angle BCF)$
(ii) $(\angle EDC, \angle BCD)$; $(\angle B, \angle BCF)$
(iii) $(\angle A, \angle B)$; $(\angle A, \angle ADC)$;
$(\angle ADC, \angle BCD)$; $(\angle ADC, \angle CDE)$;
$(\angle B, \angle BCD)$ and $(\angle BCD, \angle BCF)$

6. (i) 8 cm (ii) 2.5 cm, 3.5 cm, 5 cm
(iii) (a) ایک (b) ایک

جائزہ مشق 8

(i) (b) (ii) (b) (iii) (a) (iv) (d)
(v) (c) (vi) (c) (vii) (c) (viii) (b)

مشق 9.2

1. (i) 15 cm (ii) 20 cm (iii) 24 cm
(iv) 7.5 cm (v) 6 cm (vi) 4.8 cm
(vii) 3.5 cm (viii) 7.2 cm

2. (ii) اور (v)

3. (i) 5 cm (ii) 6 cm (iii) 7 cm
(iv) 8 cm (v) 1.1 cm (vi) 2.2 cm
(vii) 1.5cm (viii) 5.5cm (ix) 7.5cm

4. 3.9 m **5.** 16 m

6. (i) 8.5 cm (ii) 55 cm
(iii) 7 cm (iv) 8 cm

7. 600 m **8.** $3072m^2$

8. $32\ cm^2$

9. (i) $21k^2 + 4k - 5 = 0$ (ii) $m^2 + 2 = n^2$

مشق 7.1

1. (*a*) 120° (b) 135° (c) 120° (d) 80°

2. $m\angle 1 = 65^\circ = m\angle 5 = m\angle 7$;
$m\angle 2 = m\angle 4 = m\angle 6 = m\angle 8 = 115^\circ$;

3. $m\angle APE = 130^\circ = m\angle BPQ =$
$m\angle DQF = m\angle PQC$;
$m\angle APQ = 50^\circ = m\angle CQF = m\angle BPE$

4. (i) $\angle AGE$ (ii) $\angle BGH$ (iii) $\angle DHF$
(iv) (*a*) $\angle AGH$ (b) $\angle GHD$ (c) $\angle CHF$

5. (i) $x = 11^\circ$ (ii) $x = 5^\circ$, $y = 25^\circ$, $z = 130^\circ$
(iii) $y = 135^\circ$, $z = 105^\circ$
(iv) $x = 80^\circ$, $y = 100^\circ$, $z = 80^\circ$

مشق 7.2

1. (i) T (ii) T (iii) T (iv) T (v) T
(vi) T (vii) T (viii) T (ix) T (x) T

2. L = 6 cm, B= 3 cm

3. زاویے ہیں 65°, 115°, 65°, 115°

4. $m\angle W = 60^\circ = m\angle Y$
$m\angle X = 120^\circ = m\angle Z$

5. 6 : 3, **6.** 2:1

7. نقطہ P دائرے کے اندر ہے، نقطہ Q دائرے سے باہر واقع ہے
اور نقطہ R دائرے پر ہے۔

8. تمام بیانات غلط ہیں۔
صحیح بیانات کے لیے ان کی تعریف دیکھئے۔

جائزہ مشق 7

1. (i) سطحی (ii) متوازی
(iii) تیسرا، مرکزی نقطہ ہے
(iv) (b) متبادل (c) سپلیمنٹری

جوابات

9. شکل (i) x = 24 cm, y = 40 cm
شکل (ii) x = 15 cm, y = 20 cm
شکل (iii) $x = 2\sqrt{337}$ cm, y = 40 cm

مشق 9.3

1. (i) 124.89 cm² (ii) 84 cm²
(iii) 24 cm² (iv) 176 cm²
(v) 104.88 cm²

2. (i) 48 cm² (ii) 71.5 cm²
(iii) 40.24 cm² (iv) 265.33 cm²

3. $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ cm²

4. (i) c = 12 cm, ▲ABD = 74.8cm²
(ii) f = 3.9 cm, ▲DEF = 6.73cm²
(iii) n = 6.4 cm, ▲LMN = 19.04cm²
(iv) r = 5 cm, ▲PQR = 9.35cm²

مشق 9.4

1. 61.68cm² **2.** 72 cm²
3. 199.35 m² **4.** 6549.64 m²
5. 114 cm²

مشق 9.5

1. (i) 15393 cm² (ii) 14 cm
(iii) 2.21 cm² (iv) 4.18 cm²
(v) 12.06 cm²

2. (i) 7 cm (ii) 14 cm
(iii) 84 cm (iv) 8.8 cm
(v) 3.5 cm

3. (i) 38792 cm³ (ii) 492807 cm³
(iii) 91.9 cm³ (iv) 22449297.5 cm³
(v) 61.6 cm³

4. (i) 1436 لٹر (ii) 4849 لٹر
(iii) 91952 لٹر (iv) 22449 لٹر
(v) 61600 لٹر

5. (i) 0.01149667 m³
(ii) 0.09198933 m³, 114.9867 لٹر

یا 153.0 a|
(iii) 15.293 m³, 15293 لٹر (تقریباً)
(iv) 26.6197 m³, 26619.7 لٹر (تقریباً)
(v) 4.851 m³, 4851 لٹر (تقریباً)

6. (a) رقبہ 4 مرتبہ بڑھے گا
(b) مقدار 8 مرتبہ بڑھے گی

7. (a) 1:9 (b) 1:27

8. (i) 2009947cm³ (ii) 479646 گولائی

9. 9 □ مکعب **10.** 7241.142 مکعب س.م

مشق 9.6

1. (i) S = 35 cm, مخروط کے قاعدے کا رقبہ = 1386 cm²,
مخروط کے منحنی سطح کا رقبہ = 2310cm²
مخروط کی سطح کا کل رقبہ (T.S.A) = 3696 cm²
(ii) r = 42 cm, B.A = 5544 cm²,
C.S.A = 9240 cm², C.S.A = 14784 cm²
(iii) h = 48 cm, B.A 4073.14 cm²,
(C.S.A) 6788.57 cm²,
T.S.A = 10861.71 cm²
(iv) r = 54.258 cm, B.A = 9252.35 cm²,
C.S.A = 17052.51429 cm²,
T.S.A = 26304.86 cm²

2. (i) S = 7.615 cm, V = 22 cm³
(ii) S = 6.946 cm, V = 22 cm³
(iii) r = 21 cm, V = 616 cm³
(iv) r = 10.5 cm, S = 17.5 cm
(v) h = 104.810 cm, V = 691.746 cm³

مشق 9.7

1. 1436 cm³ **2.** 396 cm³
3. 137.9 m³ **4.** 2 400 kg
5. 66000 L **6.** 465.69 **7.** $\frac{3}{4}$ cm

جائزہ مشق 9

1. (iii)	**2.** (ii)	**3.** (ii)	**4.** (iii)
5. (iv)	**6.** (iv)	**7.** (i)	**8.** (i)
9. (ii)	**10.** (iv)		

جوابات

مشق 10.1

1. (a) ثابت ہوا, مسئلہ اثباتی, شارح
(b) استخراجی, استقرائی
(c) استقرائی (d) استخراجی
(e) ثبوت کے بغیر قبول کیا گیا
(f) اصول موضوعہ, اصول متعارفہ
(g) اصول موضوعہ
(h) مفروضے, غیر تعریف شدہ اصلاحات،
(مسئلہ اثباتی) مسئلہ مجوّزہ، تعریف شدہ اصلاحات، بنیادی مفروضے

2. (a) غلط (b) صحیح (c) غلط
(d) صحیح (e) صحیح (f) صحیح

مشق 10.2

1. (i) $\angle AOC$ (ii) $\angle POC$ (iii) $40^\circ, 130^\circ$
3. (a) $140^\circ, 40^\circ$ (b) $135^\circ, 45^\circ, 135^\circ$
6. $\angle AOE, \angle BOD; \angle BOD, \angle COE; \angle DOC, \angle COE; \angle DOC, \angle AOE$

مشق 10.3

6. (i) (a) $\angle c, \angle d; \angle g, \angle h$
(b) $\angle a, \angle b; \angle e, \angle f; \angle f, \angle a$
(c) $\angle a, \angle e; \angle b, \angle f$
(ii) (a) $\angle c, \angle e; \angle d, \angle f; \angle c, \angle d; \angle e, \angle f$
(b) $\angle a, \angle b; \angle g, \angle h;$
(c) $\angle c, \angle f; \angle d, \angle e$
(iii) (a) $\angle c, \angle d$
(b) $\angle e, \angle h; \angle h, \angle g; \angle g, \angle f; \angle f, \angle e$
(c) $\angle e, \angle g; \angle h, \angle f$

مشق 10.5

1. (a) 90° (b) 120° [180 – (135–75)]
(c) 55° (d) 140° [180–115+(180–105)]
(e) 65°

جائزہ مشق 10

8. (a) (i) F (ii) T (iii) F (iv) F (v) T
(b) (i) سطح (ii) خط
(iii) عمود
(iv) متبادل اور نسبتی زاویے
(v) مجموعہ

9. (i) خطوط AB,CD; AB,FG; FG,CD; EF,GC
(ii) (a) 22 (b) 75+50=125 (c) 20

مشق 11.1

1. $\text{Sin } m\angle P = \text{Cos } m\angle Q = \frac{3}{5}$,

$\text{Cos } m\angle P = \text{Sin } m\angle Q = \frac{4}{5}$,

$\text{Tan } m\angle P = \text{Cot } m\angle Q = \frac{3}{4}$,

$\text{Cot } m\angle P = \text{Tan } m\angle Q = \frac{4}{3}$,

$\text{Cosec } m\angle P = \text{Sec } m\angle Q = \frac{5}{3}$,

$\text{Cosec } m\angle Q = \text{Sec } m\angle P = \frac{5}{4}$

2. (i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{4}{3}$ (iv) $\frac{5}{3}$
(v) $\frac{5}{3}$ (vi) $\frac{4}{3}$ (vii) $\frac{3}{5}$ (viii) $\frac{3}{5}$
(ix) $\frac{3}{4}$ (x) $\frac{5}{4}$ (xi) $\frac{5}{4}$ (xii) $\frac{3}{4}$;
$\text{Cos } x = \text{Sin } y$, $\text{Sec } x = \text{Cosec } y$,
$\text{Tan } x = \text{Cot } y$, $\text{Cot } x = \text{Tan } y$,
$\text{Cosec } x = \text{Sec } y$

مشق 11.2

1. (i) 30° (ii) 45° (iii) 60°

جوابات

2. (i) 60° (ii) 45° (iii) 30°

3. (i) 30° (ii) 45° (iii) 60°

4. (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\frac{13}{3}$ (iii) $\frac{19\sqrt{3}}{12}$

(iv) 0 (v) $-\frac{1}{6}$ (vi) $3\frac{1}{3}$ (vii) 0

5. (i) 60° (ii) 30° (iii) 45°

(iv) 20° (v) 50° (vi) 35°

(vii) 80° (viii) 25° (ix) 55°

6. (i) 55° (ii) 25° (iii) 70°

(iv) 37° (v) 34° (vi) 15°

مشق 11.3

A. 1. $m\angle B=60^\circ$, $m\overline{AB}=6$, $m\ \overline{AC}=3\sqrt{3}$

2. $m\angle F=30^\circ$, $m\overline{EF}=4\sqrt{3}$, $m\ \overline{DF}=8$

3. $m\angle L=45^\circ$, $m\overline{LN}=8\sqrt{2}$, $m\ \overline{MN}=8$ cm

B. 1. $m\angle B = 60^\circ$, $m\overline{BC} = 5$ cm,

$m\overline{AC} = 5\sqrt{3}$ cm

2. $m\angle D = 30^\circ$, $m\overline{BC} = 7$ cm,

$m\overline{DC} = 7\sqrt{3}$ cm

3. $m\angle\ \ = 45^\circ$, $m\overline{GC} = 8$ cm,

$m\overline{GC} = 8$ cm

4. $m\angle E = 60^\circ$, $m\overline{EC} = 4.5$ cm,

$m\overline{CF} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ cm

5. $m\angle M = 30^\circ$, $m\overline{ON} = 8$ cm,

$m\overline{OM}=8\sqrt{3}$ cm

6. $m\angle R = 30^\circ$, $m\overline{PQ} = 3$ cm,

$m\overline{PR} = 6$ cm

C. 1. $m\angle L=30^\circ$, $m\angle N=60^\circ$, $m=8$ cm

2. $m\angle P=60^\circ$, $m\angle R=30^\circ$, $q=12$ cm

3. $m\angle X=45^\circ$, $m\angle Z=45^\circ$, $y=7\sqrt{2}$ cm

D. 1. $m\angle A=30^\circ$, $m\angle B=60^\circ$, $b=5\sqrt{3}$ cm

2. $m\angle E=30^\circ$, $m\angle D=60^\circ$, $e = 7$ cm

3. $m\angle M=45^\circ$, $m\angle N=45^\circ$, $n = 8$ cm

مشق 11.4

1. 6 m **2.** 200 m **3.** 294 m (approx)

4. 11.55m (approx) **5.** 50 m

جائزہ مشق 11

2. 9 m **3.** 120 m

4. (i) Sec 60° (ii) Tan 30° (iii) Sin 45°

(iv) Cosec 60° (v) Cot $m\angle C$

(vi) $(90^\circ - m\angle A)$ (vii) $m\angle A$

(viii) 60° (ix) 80° (x) θ

5. (i) b (ii) c (iii) c (iv) a

(v) b (vi) c (vii) b

6. (i) F (ii) F (iii) F (iv) T (v) T

(vi) F (vii) T (viii) F (ix) F (x) F

اعادہ مشق 12

1.

جماعتی نمبر شمار	تعدد	جماعتی وقفہ	حقیقی جماعتی حدود	بالائی جماعتی حد	جماعتی وسعت
1st	03	24-28	23.5-28.5	28.5	5
2nd	16	29-33	28.5-33.5	33.5	5
3rd	12	34-38	33.5-38.5	38.5	5
4th	23	39-43	38.5-43.5	43.5	5
5th	16	44-48	43.5-48.5	48.5	5

جوابات

2. (i)

حاصل کردہ نمبر	0	1	2	3	4	5	6
طلباء کی تعداد	4	2	5	9	5	4	1

(ii) وسعت = 6 (iii) 3 (iv) 6

3. (i) تعددجدول

گھنٹے	1	2	3	4	5	6
رکنوں کی تعداد	5	8	7	4	2	1

(ii) 27 (iii) 6 گھنٹے

4. (i) 1 (ii) 6 (iii) 5 میں سے ایک شخص (iv) 8 لوگوں نے 5 گھنٹے وقت گذارا

مشق 12.1

1. تعددی جدول

وزن (کلو گرام)	29-32	33-36	37-40	41-44	45-47
اسکاؤٹس کی تعداد	4	6	8	8	4

سوال (1) تا (6) تک ہسٹوگرام یعنی کالمی نقشہ طلباء خود بنائیں۔

مشق 12.2

1 A. (i) 4 (ii) 8 (iii) 14 (iv) 22 (v) 4.95

1B. (i) 11 (ii) 5 (iii) 12 (iv) 141

2. (i) $\frac{410}{7}$ (ii) $\frac{134}{7}$ (iii) $\frac{50}{6}$ (iv) $\frac{170}{6}$

3. (i) 11 (ii) 25 (iii) 12 (iv) 49 (v) 79

4 A. (i) 14 (ii) 24 (iii) 29 (iv) 26 (v) 71 (vi) نہیں.

4 B. (i) 8 (ii) 8 (iii) 12

5. 6 **6.** 40

7. (i) 5 or > 5 (ii) 5 or < 5 **8.** (iv) تقریباً 1, 2 اور 11

مشق 12.3

1. 40 روپے کلو گرام 2. کثرتی اوسط

2.

135	136	138	142	140
2 بار	**2** بار	**2** بار	**2** بار	**3** بار

کثرتی اوسط = 138.35, وسطانیہ = 138, کثرتی اوسط = 140, (نہیں)

3. حسابی اوسط = 1.75, وسطانیہ = 2, کثرتی اوسط 2 اور 3, (نہیں)

4. سائنس میں حاصل کردہ نمبروں کی قدری اوسط = $\frac{2090}{45} = \frac{418}{9}$

سائنس میں حاصل کردہ نمبروں کی قدری اوسط = $\frac{434}{9} = \frac{2170}{15}$

اس طرح سائنس کے مضمون میں ریاضی کے مضمون سے زیادہ بہتری ہے۔

5. فی فیملی اشخاص کی سائیز = 3.76

جائزہ مشق 12

2. (i) 20 خاندان (ii) 5 خاندان (iii) 20 – 25 لٹر

جوابات