7

رياضي

ستين ڪلاس لاءِ

سنڌ ٽيڪسٽ بُڪ بورڊ

ڇپيندڙ:

ڪاشف بُڪ ايجنسي، ڪراچي

سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ، ڄامشورو جو تيار ڪيل ۽ ڇپائي پڌرو ڪيل.
ڪتابن جي نصاب جي جائزي واري صوبائي ريويو ڪاميٽي بيورو آف ڪيريڪيولم
۽ ايڪسٽينشن ونگ سنڌ ڄامشورو جو سڌاريل
تعليم ۽ لٽريسي کاتو، حڪومت سنڌ طرفان سنڌ صوبي جي اسڪولن
لاءِ واحد درسي ڪتاب طور منظور ٿيل
حوالو نمبر SO(G-I) E&L/CURRICULUM-2014 تاريخ 04-01-2016

نگران اعلىٰ: عبد العليم لاشاري
چيئرمين سنڌ ٽيڪسٽ بُڪ بورڊ

ليکڪ:
- محمد صغير شيخ
- پروفيسر اعجاز علي صبحپوٽو
- شمس الحق مغل
- عطيه تبسم پٺو
- اسماء پٺي
- سُمترا راٺي

نظر ثاني ڪميٽي :
- محمد صغير شيخ
- آفتاب علي
- سيد آفاق احمد
- محمد هارون لغاري
- عطيه تبسم پٺو
- ارجن لعل۔ايس ۔ سڌريا

ايڊيٽر:
- پروفيسر اعجاز علي صبحپوٽو
- سُمترا راٺي

ٽيڪنيڪل ايڊيٽر:
- ارجن لعل۔ايس ۔ سڌريا

مترجم:
- سُمترا راٺي
- پروفيسر اعجاز علي صبحپوٽو

ڪنسلٽنٽ:
- ڪامران لطيف لغاري: اي ايس ايس
- مير سرفراز خليل ساند: جي ايس ايس

لي آئوٽ ۽ ڪمپوزنگ: بختيار احمد پٺو، حيدرآباد سنڌ

ڇپيندڙ: هيءُ ڪتاب حميد پرنٽنگ پريس، ڪراچي ۾ ڇپيو.
ڇپجڻ جو سال : 2024

فهرست

پيش لفظ

سنڌ ٽيڪسٽ بُڪ بورڊ هڪ اهڙو تعليمي ادارو آهي، جنهن جو ڪم درسي ڪتابن جي تياري ۽ اشاعت ڪرڻ آهي. ان جو اهم مقصد اهڙن درسي ڪتابن جي تياري ۽ فراهمي آهي، جيڪي نئين نسل کي علم ۽ شعور سان گڏوگڏ منجهن اهڙي صلاحيت پيدا ڪن، جنهن جي ذريعي اُهي اسلام جي آفاقي نظرين، پائيچاري، بزرگن جي ڪارنامن، پنهنجي ثقافتي ورثي ۽ روايت جي حفاظت ڪندي نئين دور جي سائنسي، ٽيڪنيڪي ۽ سماجي تقاضائن کي پورو ڪري ڪامياب زندگي گذاري سگهن.

هن اعليٰ مقصد کي پورو ڪرڻ خاطر اهل علم، ماهرن، استاد صاحبن ۽ مخلص دوستن جي هڪ ٽيم ڪُنڊ ڪڙڇ کان حاصل ٿيندڙ معلومات جي روشنيءَ ۾ ڪتابن جي درستگيءَ جي معيار، جائزي ۽ اُنهن جي سُڌاري جي عمل ۾ اسان سان گڏ لڳاتار مصروف آهي.

اسان جا ماهر ۽ اشاعتي عملو اُن صورت ۾ ئي ڀرپور مقصدن ۾ ڪامياب ٿيندو، جڏهن انهن ڪتابن مان استاد صاحب، شاگرد ۽ شاگردياڻيون پورو پورو لاڀ ماڻين. ان لاءِ سندن تجويزون ۽ رايا انهن ڪتابن کي بهتر بنائڻ ۾ ڪار آمد ٿيندا.

چيئرمين

سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ

بسم الله الرحمٰن الرحيم

يونٽ 1

سيٽ

1.1 سيٽ

علم جي ميدان ۾ تمام گھڻيون انقلابي تبديليون اچي رهيون آهن. ہين مضمونن وانگر رياضيءَ ۾ بہ نوَن نوَن تصورن ۽ موضوعن سان واڳ اچي رهي آهي. ڪيترائي نوان نوان اصطلاح ۽ علامتون نهي رهيون آهن. سيٽ جو تصور سڀ کان پهريان جارج ڪينٽر اوڻويهين صديءَ ۾ متعارف ڪرايو.

ويهين صديءَ ۾ سيٽ جو تصور رياضيءَ جي مختلف شاخن ڪي پاڻ ۾ ڳنڍڻ لاءِ استعمال ٿيو.

سيٽ ’واضح بيان ڪيل‘ ۽ مختلف شين جو ميڙ آهي.

1.1.1 سيٽ کي ظاهر ڪرڻ

(i) بياني صورت ۾

(ii) علامتي صورت ۾

(iii) جدولي صورت ۾

سيٽ کي هينين ٽن صورتن يا نمونن ۾ ظاهر ڪبو آهي:

(i) بياني نمونو (ii) جدولي نمونو (iii) علامتي نمونو

(i) بياني نمونو (Descriptive form)

هينين سيٽن تي غور ڪريو:

توهان جي اسڪول جي ستين ڪلاس جي شاگردن جو سيٽ = A

پهرين ڏهن قدرتي عددن جو سيٽ = B

پهرين ڏهن پورن يا مڪمل عددن (Whole numbers) جو سيٽ = C

هڪ باڪس ۾ جاميٽري جي اوزارن جو سيٽ = D

اسين مٿي ڏنل بيانن سان هرهڪ سيٽ جي رُڪنن کي ظاهر ڪري سگھون ٿا. جيئن تہ مٿي ڏنل سيٽ پنهنجي رُڪنن جون خاصيتون بيان ڪن ٿا، تنهنڪري سيٽ کي ظاهر ڪندڙ هن نموني کي’بياني نمونو‘ چئبو آهي.

هينيان سيٽ بياني نموني ۾ ,سيٽن جا ڪجھ وڌيڪ مثال ظاهر ڪن ٿا:

مثال طور:

هفتي جي ڏينهن جي نالن جو سيٽ = A

پهرين پنجن قدرتي عددن جو سيٽ = B

پهرين ڇهن پورن يا مڪمل عددن جو سيٽ = C

’ج‘ سان شروع ٿيندڙ سال جي مهينن جي نالن جو سيٽ = D

1 کان 8 تائين سڄن عددن (Integers) جو سيٽ = E

عملي ڪم: هيٺيان سيٽ بياني نموني ۾ لکو:

(i) $D = \{3, 6, 9, 12\}$

عدد 3 جي پهرين چئن ضرب اُپتن جو سيٽ = D

(ii) $O = \{a, e, i, o, u\}$

__________ جو سيٽ = O

(iii) $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

__________ جو سيٽ = W

(iv) M = {مارچ، مئي}

__________ جو سيٽ = M

(v) B = {خ، و، ب، ص، ر، ت}

__________ جو سيٽ = B

ياد رکو:
سيٽن جي بياني نموني ۾، اسان سيٽ جي رُڪنن جون خاصيتون، ڪنهن به عام زبان ۾ بيان ڪندا آهيون.

(ii) جدولي نمونو (Tabular form)

هيٺين سيٽ تي غور ڪريو، جيڪو جدولي نموني ۾ ڏنل آهي:

$A = \{a, b, c, d, e\}$

هتي انگريزيءَ جي ننڍي الفابيٽ جا پهريان پنج اکر، سيٽ A جا رُڪن آهن. يعني a، b، c، d ۽ e. انهيءَ سيٽ جو بياني نمونو آهي: ’انگريزي ننڍي الفابيٽ جي پهرين پنجن اکرن جو سيٽ‘.

هيٺيان سيٽ، جدولي نموني ۾ سيٽن جا ڪجهه وڌيڪ مثال آهن:

(i) $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

هن سيٽ جو بياني نمونو آهي: ’پهرين پنجن قدرتي عددن جو سيٽ‘.

(ii) G = { △, □ , ○ }

هن سيٽ جو بياني نمونو آهي: ’جاميٽريءَ جي ٽن شڪلين ٽڪنڊي، چورس ۽ گول جو سيٽ‘.

(iii) $F = \{1, 2, 3, ..., 100\}$

هن سيٽ جو بياني نمونو آهي: ’1 کان 100 تائين قدرتي عددن جو سيٽ‘.

(iv) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$، انهيءَ سيٽ جو بياني نمونو آهي: ’سيني قدرتي عددن جو سيٽ‘.
متين مثالن مان اهو نتيجو نڪري ٿو ته:

جدولي نموني ۾ اسان سيٽ جي رُڪنن کي وچين ڏنگين ۾ لکندا آهيون ۽ ڪاما ’،‘ جي نشانيءَ سان جدا ڪندا آهيون.

(iii) علامتي نمونو (Set-builder form)

علامتي نموني ۾ سيٽ کي سيني رُڪنن جي عام خاصيتن کي بيان ڪندي ظاهر ڪبو آهي.
هينين مثالن تي غور ڪريو.

مثال 1: پهرين ڏهن قدرتي عددن جو سيٽ A آهي. سيٽ A کي ٽن نمونن ۾ لکو.

بياني نمونو: پهرين ڏهن قدرتي عددن جو سيٽ = A

جدولي نمونو: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

علامتي نمونو: $A = \{x \,/\, x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 10\}$

علامتي نموني ۾ لکيل متين سيٽ کي هن ريت پڙهبو آهي: ’اهڙن سيني x جو سيٽ جيڪي قدرتي عددن جي سيٽ N جا رُڪن به آهن ۽ ڏهن کان ننڍا يا ڏهن جي برابر آهن‘.
علامت ’/‘ کي پڙهبو ’جڏهن ته‘.

ياد رکڻ لاءِ علامتون:	
/	جڏهن ته
$\in$	’تعلق رکي ٿو‘
$\geq$	’وڏو يا برابر آهي‘
$\leq$	’ننڍو يا برابر آهي‘
$\wedge$	’۽‘
$\vee$	’يا‘
=	’برابر آهي‘
$\neq$	’برابر نه آهي‘

مثال 2: سيني واڌو ٻڌي عددن جو سيٽ = B
اچو ته هن سيٽ کي جدولي ۽ علامتي نموني ۾ ظاهر ڪريون.
جدولي نموني ۾ اسين هن ريت لکنداسين:

$B = \{ 2, 4, 6, ... \}$

علامتي نموني ۾ اهو هن ريت لکبو:

$B = \{x \,/\, x \in E^{+}\}$

اسين انهيءَ علامتي نموني کي هن ريت پڙهي سگهون ٿا:
’سيٽ B، x رڪنن جو سيٽ آهي جڏهن ته x سيني ٻڌي عددن جي سيٽ سان تعلق رکي ٿو.

مثال 3: سيٽ $X = \{a, b, c, d, ..., z\}$ کي علامتي نموني ۾ لکو.

علامتي نمونو: $X = \{ x \,/$ x انگريزي الفابيٽ جو هڪ اکر آهي$\}$

مثال 4: سيٽ $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ کي علامتي نموني ۽ بياني نموني ۾ لکو.

علامتي نمونو: $C = \{x \,/\, x \in W \wedge x \leqslant 5\}$

بياني نمونو: پهرين ڇهن پورن يا مڪمل عددن جو سيٽ = C

عملي ڪم: ڪالم A جي هيٺين سيٽن کي، ڪالم B جي علامتي نموني ۾ لکيل سيٽن سان درست طريقي سان ملايو.

سلسليوار نمبر	ڪالم A	ڪالم B
1.	پهرين پنجن واڌو بڌي عددن جو سيٽ	$\{x \,/\, x \in \mathbb{O},\ 1 \leqslant x \leqslant 9\}$
2.	$\{1, 3, 5, 7, 9\}$	$\{x \,/\, x \in \mathbb{N}\}$
3.	پهرين ڏهن پورن يا مڪمل عددن جوسيٽ	$\{x \,/\, x \in \mathbb{E} \wedge 2 \leqslant x \leqslant 10\}$
4.	$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$	$\{x \,/\, x \in \mathbb{W} \wedge 0 \leqslant x \leqslant 9\}$
5.	سيني قدرتي عددن جو سيٽ	$\{x \,/\, x \in \mathbb{Z} \wedge -2 \leqslant x \leqslant 2\}$

مشق 1.1

I- هيٺيان سيٽ بياني نموني ۾ لکو:

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$
2. $E = \{2, 4, 6, 8\}$
3. $F = \{1, 2, 5, 10\}$
4. $J = \{2, 3, 5, 7, 11\}$
5. $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
6. $S = \{5, 10, 15, 20, 25\}$
7. $T = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$

II- هيٺيان سيٽ جدولي نموني ۾ لکو:

1- پهرين ستن قدرتي عددن جو سيٽ = A

2- پهرين انن واڌو بڌي عددن جو سيٽ = B

3- 2 کان نندين ۽ 4 – کان وڏن سڄن عددن جو سيٽ = C

-4 لفظ ‘Pakistan’ ۾ استعمال ٿيل انگريزي الفابيٽ جي اکرن جو سيٽ = D
-5 عدد 2 جي پهرين ڏهن ضرب اُپتن جو سيٽ = E
-6 پهرين ڏهن مفرد عددن جو سيٽ = F
-7 عدد 15 جي سيني جزن جو سيٽ = G

III- هيٺيان سيٽ علامتي نموني ۾ لکو:

-1 $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$
-2 $B = \{-2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5\}$
-3 C = {راوي، چناب، سنڌو ندي، جهلم، ستلج}
-4 $E = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, ..., 20\}$
-5 $D = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$
-6 ’ڇ‘ سان شروع ٿيندڙ هفتي جي ڏينهن جي نالن جو سيٽ = S
-7 سيني سجن عددن جو سيٽ = Z
-8 $L = \{4, 8, 12, 16, 20, ...\}$

IV- هيٺيان سيٽ جدولي نموني ۾ لکو:

-1 $A = \{x \,/\, x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 5\}$
-2 $B = \{y \,/\, y \in \mathbb{E} \wedge 4 \leqslant y \leqslant 20\}$
-3 $C = \{a \,/\, a \in \mathbb{Z} \wedge -3 < a < 3\}$
-4 $D = \{z \,/\, z \in \mathbb{W} \wedge z < 5\}$

V- ڏنل سيٽن کي انهن جي موزون ڪالمن ۾ رکو ۽ پوءِ هرهڪ سيٽ جا ٻيا نمونا لکو.

$A = \{a, e, i, o, u\}$
$B = \{2, 4, 6, 8, ...\}$
$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$D = \{x \,/\, x \in \mathbb{N} \wedge x > 50\}$
$E = \{p, a, k, i, s, t, n\}$
F = هفتي جي ڏينهن جي نالن جو سيٽ

بياني نمونو	جدولي نمونو	علامتي نمونو

1.2 سيٽن تي عمل

1.2.1 ٻن سيٽن جو ميلاپ، ڪاٽ ۽ فرق بيان ڪرڻ

1- ٻن سيٽن جو ميلاپ (Union)

ڪن ٻه ٻن سيٽن A ۽ B جو ميلاپ هڪ اهڙو سيٽ آهي،جيڪو سيٽ A يا سيٽ B يا ٻنهي سيٽن جي رُڪنن تي مشتمل هجي. ميلاپ جي علامت '$\cup$' سان ظاهر ڪبي آهي.

مثال 1: جيڪڏهن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ۽ $B = \{5, 6, 7\}$ ته $A \cup B$ معلوم ڪريو.

حل: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{5, 6, 7\}$

يا $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

اسين $A \cup B$ کي پڙهنداسين: 'A يونين B' يا 'A ميلاپ B'.

2- ٻن سيٽن جي ڪاٽ (Intersection)

ڪن ٻه ٻن سيٽن A ۽ B جي ڪاٽ هڪ اهڙو سيٽ آهي، جيڪو انهن رُڪنن تي مشتمل آهي جيڪي ٻنهي سيٽن A ۽ B ۾ موجود هجن. ڪاٽ کي علامت '$\cap$' سان ظاهر ڪبو آهي.

مثال 2: جيڪڏهن $A = \{3, 4, 6, 8\}$ ۽ $B = \{3, 5, 6, 7\}$ ته $A \cap B$ معلوم ڪريو.

حل: هتي رُڪن 3 ۽ 6 ٻنهي سيٽن ۾ موجود آهن.

$A \cap B = \{3, 4, 6, 8\} \cap \{3, 5, 6, 7\}$

تنهنڪري $A \cap B = \{3, 6\}$

اسين $A \cap B$ کي پڙهنداسين: 'A انٽرسيڪشن B' يا 'A ڪاٽ B'.

3- ٻن سيٽن جو فرق (Difference)

ٻن سيٽن A ۽ B جو فرق $A - B$ هڪ اهڙو سيٽ آهي، جنهن ۾ A جا اُهي سڀ رُڪن موجود آهن جيڪي B ۾ نه آهن. انهيءَ کي $A \backslash B$ سان به ظاهر ڪبو آهي.

مثال 3: جيڪڏهن $A = \{1 2, 3, 4, 5\}$ ۽ $B = \{2, 4, 6\}$ ته $A - B$ ۽ $B - A$ معلوم ڪريو.

حل: $A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{2, 4, 6\}$

$= \{1, 3, 5\}$

۽ $B - A = \{2, 4, 6\} - \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$= \{6\}$

اسين $A - B$ کي پڙهنداسين 'A ڊفرنس B' يا A فرق B.

1.2.2 (الف) ٻن يا ٻن کان وڌيڪ سيٽن جو ميلاپ معلوم ڪرڻ

(i) ٻن سيٽن جو ميلاپ

مثال 1: جيڪڏهن $X = \{3, 4, 5, 6\}$ ۽ $Y = \{1, 2, 3, 8\}$ ته $X \cup Y$ معلوم ڪريو.

حل:

$$X \cup Y = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{1, 2, 3, 8\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

مثال 2: جيڪڏهن $E = \{2, 4, 6\}$ ۽ $Q = \{\ \}$ ته $E \cup Q$ معلوم ڪريو.

حل:

$$E \cup Q = \{2, 4, 6\} \cup \{\ \}$$
$$= \{2, 4, 6\}$$

مثال3: جيڪڏهن $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ ۽ $D = \{2, 4, 6, 8\}$ ته $A \cup D$ معلوم ڪريو.

حل:

$$A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} \cup \{2, 4, 6, 8\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$$

(ii) ٽن سيٽن جو ميلاپ

ٽن سيٽن جي ميلاپ کي هيٺين مثال جي مدد سان سمجهايو ويو آهي.

مثال: جيڪڏهن $A = \{1, 2\}$، $B = \{2, 3, 4\}$ ۽ $C = \{2, 3, 4, 5\}$ ته $A \cup B \cup C$ معلوم ڪريو.

حل:

جيڪڏهن اسين پهريان $A \cup B$ معلوم ڪريون ته اسين لکنداسين $(A \cup B) \cup C$ ۽ هيئين ريت معلوم ڪنداسين:

$$A \cup B = \{1, 2\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

انهيءَ ڪري $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

جيڪڏهن اسين پهريان $B \cup C$ معلوم ڪريون ته اسين لکنداسين $A \cup (B \cup C)$ ۽ هيئين ريت معلوم ڪنداسين:

$$B \cup C = \{2, 3, 4\} \cup \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 3, 4, 5\}$$

هاڻي $A \cup (B \cup C) = \{1, 2\} \cup (2, 3, 4, 5)$

يا $A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

انهيءَ ڪري $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

1.2.2 (ب) ٻه يا ٽن وڏيڪ سيٽن جي ڪاٽ معلوم ڪرڻ

(i) ٻن سيٽن جي ڪاٽ

مثال 1: جيڪڏهن $A = \{1, 2, 3, 10\}$ ۽ $B = \{2, 3, 8, 10\}$ ته $A \cap B$ معلوم ڪريو.

حل: $A \cap B = \{1, 2, 3, 10\} \cap \{2, 3, 8, 10\}$

هتي رڪن 2، 3 ۽ 10 ساڳيا آهن.

تنهنڪري $A \cap B = \{2, 3, 10\}$

مثال 2: جيڪڏهن $C = \{a, b, e, f\}$ ۽ $D = \{2, 4, 8, 10\}$ ته $C \cap D$ معلوم ڪريو.

حل: $C \cap D = \{a, b, e, f\} \cap \{2, 4, 8, 10\}$

تنهنڪري $\varnothing$ يا $C \cap D = \{\ \}$

ڇاڪاڻ جو سيٽن C ۽ D ۾ ڪوبه رُڪن ساڳيو نه آهي.

(ii) ٽن سيٽن جي ڪاٽ

اسين ٻن سيٽن جي ڪاٽ اڳي ئي سکي چڪا آهيون. ساڳيئي طريقي سان اسين ٽن سيٽن جي ڪاٽ ڪري سگهون ٿا.

ٽن سيٽن جي ڪاٽ هيٺين مثال جي مدد سان سمجهائي وئي آهي.

مثال: جيڪڏهن $A = \{1, 2\}$، $B = \{2, 3\}$ ۽ $C = \{2, 3, 4\}$ ته $A \cap B \cap C$ معلوم ڪريو.

حل: اسين ٻن طريقن سان هي سوال حل ڪري سگهون ٿا.

جيڪڏهن اسين پهريان $A \cap B$ معلوم ڪريون ته اسين لکنداسين $(A \cap B) \cap C$ ۽ هيٺين ريت معلوم ڪنداسين:

$$A \cap B = \{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$$

هاڻي $(A \cap B) \cap C = \{2\} \cap \{2, 3, 4\}$

$$= \{2\}$$

انهيءَ ڪري $A \cap B \cap C = \{2\}$

جيڪڏهن اسين پهريان $B \cap C$ معلوم ڪريون، ته اسين لکنداسين $A \cap (B \cap C)$ ۽ هيٺين ريت معلوم ڪنداسين:

$$B \cap C = \{2, 3\} \cap \{2, 3, 4\}$$

$$= \{2, 3\}$$

هاڻي $A \cap (B \cap C) = \{1, 2\} \cap \{2, 3\}$

$$= \{2\}$$

انهيءَ ڪري $A \cap B \cap C = (2)$

1.2.2 (ج) ٻن سيٽن جو فرق معلوم ڪرڻ

مثال 1: جيڪڏهن $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ۽ $B = \{2, 4, 5, 7\}$ ته $A - B$ معلوم ڪريو.

حل: $A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{2, 4, 5, 7\}$

هتي رڪن 1 ۽ 3 رڳو سيٽ A ۾ موجود آهن.

اهو واضح آهي ته A ۽ B جو فرق اهو سيٽ آهي،جنهن جا رڪن 1 ۽ 3 آهن جيڪي فقط سيٽ A سان تعلق رکن ٿا پر سيٽ B سان تعلق نٿا رکن.

وري سيٽ B ۽ A جو فرق آهي $B \setminus A$

يا $B - A = \{2, 4, 5, 7\} - \{1, 2, 3, 4, 5\}$

اهڙيءَ طرح $B - A = \{7\}$ يا $B \setminus A$

هتي پڻ B ۽ A جو فرق اهو سيٽ آهي،جنهن جو رُڪن فقط 7 آهي،جيڪو سيٽ B سان تعلق رکي ٿو، پر A سان تعلق نٿو رکي.

تنهن ڪري $A - B \neq B - A$ يا $A \setminus B \neq B \setminus A$

مثال 2: جيڪڏهن $P = \{2, 3, 4\}$ ۽ $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ته $P - Q$ ۽ $Q - P$ معلوم ڪريو.

حل: $P - Q = \{2, 3, 4\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{\ \}$

تنهنڪري $P - Q = \{\ \}$ يا $\varnothing$

وري $Q - P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{2, 3, 4\} = \{1, 5, 6\}$

تنهنڪري $Q - P = \{1, 5, 6\}$

اهو معلوم ٿيو ته $\boxed{P - Q \neq Q - P \text{ يا } P \setminus Q \neq Q \setminus P}$

مشق 1.2

I. هيٺين سيٽن جو ميلاپ (Union) معلوم ڪريو.

1. $A = \{4, 5\}$ ۽ $B = \{4, 6, 8, 9\}$
2. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ۽ $B = \{2, 4, 6, 8\}$
3. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ۽ $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$
4. پهرين ڇهن مفرد عددن جو سيٽ = X ۽
3 جي پهرين ڇهن ضرب اُپتن جو سيٽ = Y

5. جيڪڏهن $D = \{2,4,6\}$، $E = \{1,3,5,6\}$ ۽ $F = \{1,3,6,9,10\}$ ته $D \cup E \cup F$ معلوم ڪريو.
6. جيڪڏهن $A = \{1, 2, 3\}$، $B = \{\ \}$ ۽ $C = \{2, 3\}$ ته $(A \cup B) \cup C$ ۽ $A \cup (B \cup C)$ معلوم ڪريو.

II. هيٺين سيٽن جي ڪاٽ (Intersection) معلوم ڪريو:

1. $A = \{1, 2, 3\}$ ۽ $B = \{3, 6, 9, 12\}$
2. $D = \{2, 4, 6, 8\}$ ۽ $E = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
3. $P = \{a, b, c, d\}$ ۽ $Q = \{a, e, i, o, u\}$
4. سجن عددن جو سيٽ $= A$ ۽ واڌو سجن عددن جو سيٽ $= B$
5. جيڪڏهن $A = \{a, b, c, d\}$، $B = \{d, e, f\}$ ۽ $C = \{f, g, h\}$ ته $(A \cap B) \cap C$ ۽ $A \cap (B \cap C)$ معلوم ڪريو.
6. جيڪڏهن $D = \{2, 3\}$، $E = \{4, 5\}$ ۽ $F = \{\ \}$ ته $(D \cap E) \cap F$ ۽ $D \cap (E \cap F)$ معلوم ڪريو.

III. هيٺين سيٽن سان $A - B$ ۽ $B - A$ معلوم ڪريو، جيڪڏهن:

1. $A = \{4, 5, 6\}$ ۽ $B = \{5, 6, 7, 8\}$
2. $A = \{1, 3, 5, 9, 11\}$ ۽ $B = \{1, 3, 5, 7, 11\}$
3. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$ ۽ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
4. عدد 3 جي پهرين ڇهن ضرب اُپتن جو سيٽ $= A$ ۽
عدد 4 جي پهرين ڇهن ضرب اُپتن جو سيٽ $= B$

1.2.3 منفرد سيٽ (Disjoint sets) ۽ لاڳاپيل سيٽ (Overlapping sets) جي سڃاڻپ ۽ وصف بيان ڪرڻ

(i) منفرد سيٽ (Disjoint Sets)

ٻن سيٽن A ۽ B کي منفرد سيٽ چئبو آهي،جيڪڏهن انهن ۾ ڪوبہ رُڪن مشترڪ (Common) نہ هجي.

فرض ڪريو: $A = \{1, 2, 3\}$ ۽ $B = \{4, 5\}$

انهن سيٽن ۾ ڪوبہ ميمبر مشترڪ نہ آهي. انهيءَ ڪري اهي منفرد سيٽ آهن.

(ii) لاڳاپيل سيٽ (Overlapping sets)

ٻن سيٽن X ۽ Y کي لاڳاپيل سيٽ چئبو آهي جيڪڏهن انهن ۾ گهٽ ۾ گهٽ هڪ رُڪن مشترڪ هجي ۽ انهن مان ڪوبہ سيٽ ٻئي جو ماتحت سيٽ نہ هجي.

جيڪڏهن $X = \{0, 1, 2, 4\}$ ۽ $Y = \{2, 3, 5, 7\}$
اسين ڏسون ٿا ته $2 \in X$ ۽ $2 \in Y$.
يعني ٻنهي سيٽن ۾ مشترڪ رڪن 2 آهي ۽ ڪوبه سيٽ ٻئي جو ماتحت سيٽ نه آهي. انهيءَ ڪري X ۽ Y لاڳاپيل سيٽ آهن.

مشق 1.3

(الف) منفرد ۽ لاڳاپيل سيٽن جي سڃاڻپ ڪريو.

.1 $F = \{\Delta, ▭, ⬡\}$ ۽ M = {ڪوپ، جڳ، ٿالهي}
.2 $W = \{0, 1, 2, 3\}$ ۽ $N = \{1, 2, 3, 4\}$
.3 $C = \{a, e, i, o, u\}$ ۽ $D = \{p, q, r\}$
.4 $C = \{a, c, d, f\}$ ۽ $D = \{1, 2, 3\}$
.5 $N = \{1, 2, 4, 6, 8, 12, 24, 48\}$ ۽ $M = \{6, 8, 12, 14, 16, 18\}$
.6 10 کان 40 تائين قدرتي عددن جو سيٽ = A ۽
40 تائين پورن يا مڪمل عددن جو سيٽ = W
.7 $E = \{2, 4, 6, ...\}$ ۽ $O = \{5, 10, 15, ...\}$

(ب) هيٺين ۾ منفرد ۽ لاڳاپيل سيٽن جي سڃاڻپ ڪريو ۽ ڏنل ڪالم ۾ لکو.

.i $F = \{2, 3\}$ ۽ $A = \{1, 4, 6, 8\}$	....
.ii $H = \{2, 3, 5, 7, 9\}$ ۽ $C = \{1, 3, 5, ...\}$	....
.iii $N = \{a, e, i, o, u\}$ ۽ $G = \{h, o, c, k, y\}$	....
.iv $W = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ ۽ $B = \{x, y, z\}$	....
.v P = {ٿالهي، جڳ، ڪوپ} ۽ $D = \{f, e, s, l\}$	....
.vi $Q = \{★, \Delta, □, ○\}$ ۽ $E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$	....
.vii $A = \{10, 20, 30, ...\}$ ۽ $B = \{4, 8, 12, ...\}$	....

1.2.4 ڪائناتي سيٽ (Universal Set) ۽ سيٽ جو ڪامپليمينٽ (Complement) بيان ڪرڻ

(i) ڪائناتي سيٽ (Universal Set)

ڪائناتي سيٽ هڪ اهڙو سيٽ آهي، جنهن ۾ زير غور مسئلي سان واسطو رکندڙ سمورا ميمبر موجود هجن. اُن کي U سان ظاهر ڪبو آهي.
جيڪڏهن اسين قدرتي عددن کي زير غور آڻيون، ته پوءِ سمورا قدرتي عدد ڪائناتي سيٽ جا ميمبر ٿيندا.

ساڳي طرح جيڪڏهن اسين پهريان ڇهه قدرتي عدد زير غور آڻيون ته پوءِ اسان جو ڪائناتي سيٽ پهرين سمورن ڇهن قدرتي عددن تي مشتمل هوندو.

يعني $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

(ii) سيٽ جو ڪامپليمينٽ (پورائو ڪندڙ)

جيڪڏهن U هڪ ڪائناتي سيٽ آهي ۽ A ان جو ماتحت سيٽ آهي ته $U - A$ کي سيٽ A جو ڪامپليمينٽ چئبو ۽ ان کي A' سان ظاهر ڪبو. يعني $A' = U - A$.

سيٽ جي ڪامپليمينٽ مان مراد آهي U' جي انهن سڀني رڪنن جو سيٽ،جيڪي سيٽ A سان تعلق نه رکندا هجن.'

مثال 1: جيڪڏهن $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ۽ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ته A' معلوم ڪريو.

حل:

$$A' = U - A$$
$$= \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \} - \{ 1, 2, 3, 4 \}$$
$$A' = \{ 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$$

مثال 2: جيڪڏهن $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ۽ $B = \{2\}$ ته B' معلوم ڪريو.

حل:

$$B' = U - B$$
$$= \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \} - \{ 2 \}$$
$$B' = \{ 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7 \}$$

مشق 1.4

1- فرض ڪريو $U = \{ a, b, c, d, e, f\}$ ۽ $A = \{ a, e, f \}$

ته معلوم ڪريو: (i) A' (ii) $A \cup A'$ (iii) $A \cap A'$ (iv) U' (v) $\varnothing'$

2- فرض ڪريو $U = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$ ۽ $E = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$

ته معلوم ڪريو: (i) E' (ii) $E \cup E'$ (iii) $E \cap E'$ (iv) U' (v) $\varnothing'$

3- جيڪڏهن $U = \{0, 1, 2, 3, ..., 12\}$ ۽ $P = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ ته معلوم ڪريو:

(i) P' (ii) $P \cup P'$ (iii) $P' \cap P$ (iv) $U \cap U'$

4- جيڪڏهن $U = \{ u, v, w, x, y, z\}$ ۽ $B = \{ x, y, z \}$, ته معلوم ڪريو:

(i) B' (ii) $B' \cup B$ (iii) $B' \cap B$ (iv) $U \cup U'$

5- جيڪڏهن $U = \{1,2,3,4,...,10\}$، $A = \{1,2,3,5,6,7\}$ ۽ $B = \{2,4,6,8,10\}$ ته معلوم ڪريو:

(i) A' (ii) B' (iii) $A' \cap A$ (iv) $A \cup A'$ (v) $B \cup B'$ (vi) $B \cap B'$

1.2.5 سيٽن جي ميلاپ، سيٽن جي ڪاٽ، سيٽن جي فرق ۽ سيٽ جي ڪامپليمينٽ سان واسطو رکندڙ مختلف خاصيتن جي چڪاس ڪرڻ جهڙوڪ: $A \cap A' = \varnothing$

(i) سيٽن جي ميلاپ سان واسطو رکندڙ خاصيتون

(الف) ميلاپ جي مٽا سٽا واري خاصيت

فرض ڪريو A ۽ B ڪي ٻه سيٽ آهن ته A ۽ B لاءِ $A \cup B = B \cup A$. ان خاصيت کي ميلاپ جي مٽا سٽا واري خاصيت چئبو آهي.

مثال 1: جيڪڏهن $A = \{1, 2\}$ ۽ $B = \{2, 3\}$ ته ميلاپ جي مٽا سٽا واري خاصيت جي چڪاس ڪريو.

حل:

$$A \cup B = \{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\} \; \ldots \text{(i)}$$
$$B \cup A = \{2, 3\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3\} \; \ldots \text{(ii)}$$

مساواتون (i) ۽ (ii) ظاهر ڪن ٿيون ته $A \cup B = B \cup A$.

اهڙيءَ طرح سيٽن جي ميلاپ وارو عمل مٽا سٽا جي خاصيت رکي ٿو.

(ب) ميلاپ جي سنگت واري خاصيت:

فرض ڪريو A، B ۽ C ڪي ٽي سيٽ آهن ته $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

ان خاصيت کي ميلاپ جي سنگت واري خاصيت چئبو آهي.

مثال 2: جيڪڏهن $A = \{1, 2\}$، $B = \{2, 3\}$ ۽ $C = \{1, 2, 3, 4\}$ ته ميلاپ جي سنگت واري خاصيت جي چڪاس ڪريو.

حل: پهريائين اسان معلوم ڪنداسين

$$A \cup B = \{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$$
$$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \; \ldots \text{(i)}$$

اُن کان پوءِ معلوم ڪنداسين

$$B \cup C = \{2, 3\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$A \cup (B \cup C) = \{1, 2\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \; \ldots \text{(ii)}$$

مساواتون (i) ۽ (ii) ظاهر ڪن ٿيون ته $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

اهڙيءَ طرح ميلاپ وارو عمل سيٽن ۾ سنگت واري خاصيت رکي ٿو.

(ii) سيٽن جي ڪاٽ سان واسطو رکندڙ خاصيتون

(الف) ڪاٽ جي مٽا سٽا واري خاصيت

فرض ڪريو A ۽ B ڪي بہ بہ سيٽ آهن تہ $A \cap B = B \cap A$. ان خاصيت کي ڪاٽ جي مٽا سٽا واري خاصيت چئبو آهي.

مثال: جيڪڏهن $A = \{a\}$ ، $B = \{a, b\}$ ۽ $C = \{a, b, c\}$ تہ چڪاس ڪريو تہ:

(1) $A \cap B = B \cap A$ (2) $A \cap C = C \cap A$ (3) $B \cap C = C \cap B$

حل:
$$A \cap B = \{a\} \cap \{a, b\} = \{a\} \ldots \text{(i)}$$
$$B \cap A = \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\} \ldots \text{(ii)}$$

مساواتون (i) ۽ (ii) ظاهر ڪن ٿيون تہ $A \cap B = B \cap A$. ان طرح شاگرد پاڻ (2) ۽ (3) حل ڪن.

اهڙيءَ طرح سيٽن جي ڪاٽ وارو عمل مٽا سٽا واري خاصيت رکي ٿو.

(ب) ڪاٽ جي سنگت واري خاصيت

فرض ڪريو A، B ۽ C ڪي بہ ٽي سيٽ آهن تہ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

ان خاصيت کي ڪاٽ جي سنگت واري خاصيت چئبو آهي.

مثال: جيڪڏهن $A = \{a, b\}$، $B = \{a, b, c\}$ ۽ $C = \{a, c, d\}$ تہ چڪاس ڪريو تہ:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

حل:
$$A \cap B = \{a, b\} \cap \{a, b, c\} = \{a, b\}$$
$$(A \cap B) \cap C = \{a, b\} \cap \{a, c, d\} = \{a\} \ldots \text{(i)}$$
$$(B \cap C) = \{a, b, c\} \cap \{a, c, d\} = \{a, c\}$$

مساواتون (i) ۽ (ii) ظاهر ڪن ٿيون تہ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

اهڙي طرح ڪاٽ جو عمل سيٽن ۾ سنگت واري خاصيت رکي ٿو.

(iii) سيٽن جي فرق سان واسطو رکندڙ خاصيتون

مثال: جيڪڏهن $A = \{1, 2, 3, 5\}$، $B = \{4, 6, 7, 8\}$ تہ چڪاس ڪريو تہ: $A - B \neq B - A$

حل:
$$A - B = \{1, 2, 3, 5\} - \{4, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 5\} \quad \ldots \text{(i)}$$
$$B - A = \{4, 6, 7, 8\} - \{1, 2, 3, 5\} = \{4, 6, 7, 8\} \quad \ldots \text{(ii)}$$

مساواتون (i) ۽ (ii) ظاهر ڪن ٿيون تہ: $A - B \neq B - A$ يا $A \setminus B \neq B \setminus A$

اهڙيءَ طرح سيٽن جو فرق مٽا سٽا واري خاصيت نٿو رکي.

(iv) سيٽن جي ڪامپليمينٽ سان واسطو رکندڙ خاصيتون

جيڪڏهن $\mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ۽ $B = \{2, 4, 6, 8\}$ تہ B' معلوم ڪريو ۽ اها چڪاس پڻ ڪريو تہ:

(i) $B \cup B' = \mathbb{U}$ (ii) $B \cap B' = \varnothing$ (iii) $\varnothing' = \mathbb{U}$ (iv) $\mathbb{U}' = \varnothing$

حل: $B' = \mathbb{U} - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{2, 4, 6, 8\}$

$B' = \{1, 3, 5, 7\}$

تنهنڪري

(i) $B \cup B' = \{2, 4, 6, 8\} \cup \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \mathbb{U}$

(ii) $B \cap B' = \{2, 4, 6, 8\} \cap \{1, 3, 5, 7\} = \{\ \}$ يا $\varnothing$

(iii) $\varnothing' = \mathbb{U} - \varnothing = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{\ \} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \mathbb{U}$

(iv) $\mathbb{U}' = \mathbb{U} - \mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{\ \}$ يا $\varnothing$

مشق 1.5

(الف) جيڪڏهن $A = \{-1, -2, -3\}$، $B = \{-1, -4, -5, -6\}$ ۽ $C = \{0, -1, -2, -3, -4\}$ تہ هيٺين جي چڪاس ڪريو.

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $B - C \neq C - B$
3. $A \cup C = C \cup A$
4. $(A \cup B) \cup C = (B \cup C) \cup A$
5. $(A \cup C) \cup B = (C \cup B) \cup A$
6. $A \cap B = B \cap A$
7. $B \cap C = C \cap B$
8. $A - C \neq C - A$
9. $(A \cap B) \cap C = (B \cap C) \cap A$
10. $(A \cap C) \cap B = (A \cap B) \cap C$

(ب) جيڪڏهن $\mathbb{U} = \{10, 11, 12, 13, 14, \ldots, 20\}$، $A = \{10, 12, 14, 16, 18\}$ ۽ $B = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

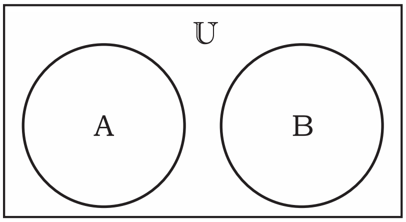
تہ هيٺين جي چڪاس ڪريو.

(i) $\mathbb{U}' = \varnothing$ (ii) $\varnothing' = \mathbb{U}$ (iii) $A \cup A' = \mathbb{U}$

(iv) $B \cap B' = \varnothing$ (v) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (vi) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

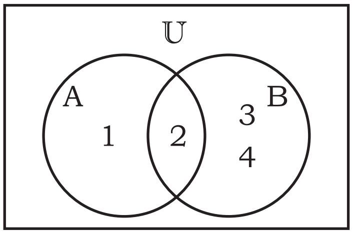
1.3 وين ڊائگرام يا وين شڪليون (Venn Diagrams)

تعارف:



وين شڪلين کي استعمال ڪندي، سيٽن کي گراف جي صورت ۾ ظاهر ڪري سگھجي ٿو. اصطلاح ’وين ڊائگرام‘ هڪ انگريزي رياضي دان جان وين (John Venn) جي نالي تان ورتل آهي، جنھن انھن جو استعمال 1881 ۾ متعارف ڪرايو. وين شڪلين ۾ ڪائناتي سيٽ U کي گھٽو ڪري هڪ مستطيل سان ظاهر ڪبو آهي.ان مستطيل جي اندر گول يا بيضوي شڪليون سيٽن کي ظاهر ڪن ٿيون.وين شڪليون سيٽن جي عملن کي به ظاهر ڪرڻ لاءِ استعمال ٿينديون آهن.

1.3.1 وين ڊائگرام وسيلي سيٽن کي ظاهر ڪرڻ



شڪل (i) لاڳاپيل سيٽ

اچو تہ هيٺين سيٽن کي وين ڊائگرام وسيلي ظاهر ڪريون:

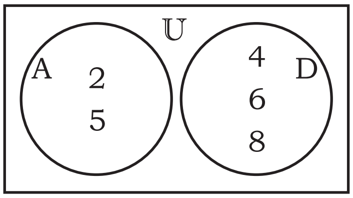
(i) لاڳاپيل سيٽ (ii) منفرد سيٽ

(iii) ماتحت سيٽ (iv) ڪائناتي سيٽ

(i) لاڳاپيل سيٽ

مثال 1: فرض ڪريو تہ: $A = \{1, 2\}$ ۽ $B = \{2, 3, 4\}$

شڪل (i) لاڳاپيل سيٽن کي ظاهر ڪري ٿي.

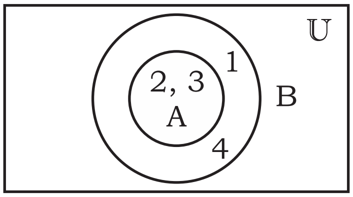


شڪل (ii) منفرد سيٽ

(ii) منفرد سيٽ

مثال 2: فرض ڪريو تہ: $A = \{2, 5\}$ ۽ $D = \{4, 6, 8\}$

شڪل (ii) منفرد سيٽن کي ظاهر ڪري ٿي.



شڪل (iii) ماتحت سيٽ

(iii) ماتحت سيٽ

مثال 3: فرض ڪريو تہ: $A = \{2, 3\}$ ۽ $B = \{1, 2, 3, 4\}$

هتي سيٽ A، ماتحت سيٽ آهي سيٽ B جو. يعني $A \subseteq B$

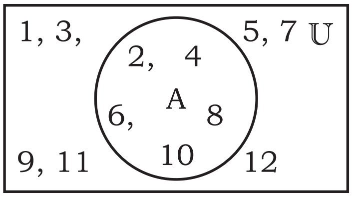
شڪل (iii) ظاهر ڪري ٿي تہ $A \subseteq B$.

(iv) ڪائناتي سيٽ

مثال4: فرض ڪريو تہ: $U = \{1, 2, 3, ..., 12\}$

۽ $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

شڪل (iv) ۾ مستطيل، ڪائناتي سيٽ کي ظاهر ڪري ٿو.



شڪل (iv) ڪائناتي سيٽ

مستطيل جي اندر گول يا بيضوي شڪل سيٽ A کي ظاهر ڪري ٿي.

1.3.2 بن سيٽن A ۽ B تي ميلاپ، ڪاٽ، فرق ۽ ڪامپليمينٽ

جا عمل ڪرڻ جڏهن:

- A ماتحت سيٽ آهي B جو
- B ماتحت سيٽ آهي A جو
- A ۽ B منفرد سيٽ آهن.
- A ۽ B لاڳاپيل سيٽ آهن.

وين شڪلين جي وسيلي سيٽن تي عمل جو اظهار

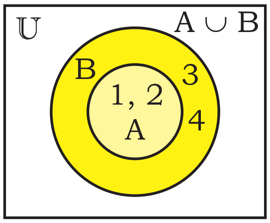
هاڻي اسين سيٽن تي اهي عمل وين شڪلين وسيلي ظاهر ڪريون ٿا.

(I) سيٽن جو ميلاپ

(الف) جڏهن سيٽ A، ماتحت سيٽ آهي سيٽ B جو.

مثال1: جيڪڏهن $A = \{1, 2\}$ ۽ $B = \{1, 2, 3, 4\}$ تہ:

$A \cup B = \{1, 2\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$



شڪل (i)

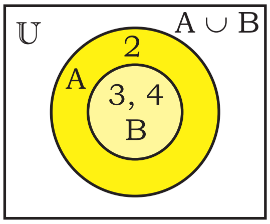
شڪل (i) ۾ شيڊ ڏنل حصو $A \cup B$ کي وين شڪل ذريعي ظاهر ڪري ٿو.

(ب) جڏهن سيٽ B ماتحت سيٽ آهي سيٽ A جو.

مثال2: جيڪڏهن $A = \{2, 3, 4\}$ ۽ $B = \{3, 4\}$

تہ $A \cup B = \{2, 3, 4\} \cup \{3, 4\} = \{2, 3, 4\}$

شيڊ ڏنل حصو $A \cup B$ آهي.



شڪل (ii)

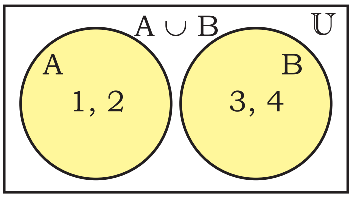
شڪل (ii) ۾ وين شڪل وسيلي $A \cup B$ کي ڏيکاريو ويو آهي.

(ج) جڏهن سيٽ A ۽ سيٽ B منفرد سيٽ آهن

مثال3: جيڪڏهن $A = \{1, 2\}$ ۽ $B = \{3, 4\}$ تہ:

$A \cup B = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

شيڊ ڏنل حصو $A \cup B$ آهي.
اهو وين شڪل وسيلي ظاهر ڪيو ويو آهي.
جيئن شڪل (iii) ۾ ڏيکاريل آهي.



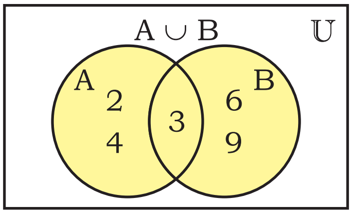
شڪل (iii)

(د) جڏهن سيٽ A ۽ سيٽ B لاڳاپيل سيٽ آهن.

مثال 4: جيڪڏهن $A = \{2, 3, 4\}$ ۽ $B = \{3, 6, 9\}$ ته:

$$A \cup B = \{2, 3, 4\} \cup \{3, 6, 9\}$$
$$= \{2, 3, 4, 6, 9\}$$

شيڊ ڏنل حصو $A \cup B$ آهي.
اهو وين شڪل وسيلي ظاهر ڪيو ويو آهي.
جيئن شڪل (iv) ۾ ڏيکاريل آهي.
شيڊ ڏنل حصو $A \cup B$ آهي.



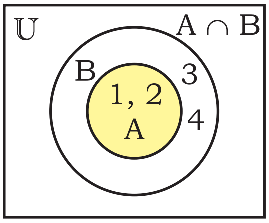
شڪل (iv)

(II) سيٽن جي ڪاٽ

(الف) جڏهن سيٽ A ماتحت سيٽ آهي سيٽ B جو.

مثال 1: جيڪڏهن $A = \{1, 2\}$ ۽ $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ته:

$$A \cap B = \{1, 2\} \cap \{1, 2, 3, 4\}$$
$$= \{1, 2\} = A$$



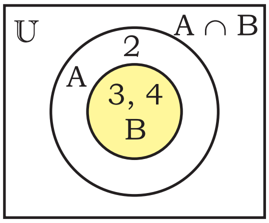
شڪل (i)

شڪل (i) ۾ $A \cap B$ ڏيکاريل آهي.
شيڊ ڏنل حصو $A \cap B$ آهي.

(ب) جڏهن سيٽ B، ماتحت سيٽ آهي سيٽ A جو.

مثال 2: جيڪڏهن $A = \{2, 3, 4\}$ ۽ $B = \{3, 4\}$ ته:

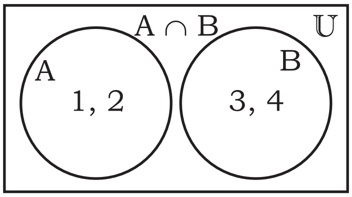
$$A \cap B = \{2, 3, 4\} \cap \{3, 4\}$$
$$A \cap B = \{3, 4\} = B$$



شڪل (ii)

شيڊ ڏنل حصو $A \cap B$ آهي.
$A \cap B$ کي وين شڪل وسيلي ظاهر ڪيو ويو آهي.
اهو شڪل (ii) ۾ ڏيکاريو ويو آهي.

(ج) جڏهن سيٽ A ۽ سيٽ B منفرد سيٽ آهن.



شڪل (iii)

مثال3: جيڪڏهن $A = \{1, 2\}$ ۽ $B = \{3, 4\}$ ته:

$$A \cap B = \{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \{\ \}$$

شڪل (iii) ۾ $A \cap B$ کي ڏيکاريو ويو آهي

۽ اهو وين شڪل وسيلي ظاهر ڪيل آهي.

(د) جڏهن سيٽ A ۽ سيٽ B لاڳاپيل سيٽَ آهن.

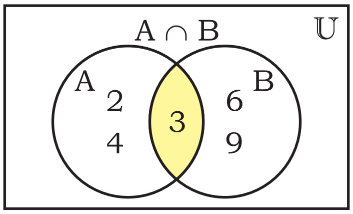
مثال4: جيڪڏهن $A = \{2, 3, 4\}$ ۽ $B = \{3, 6, 9\}$ ته:

$$A \cap B = \{2, 3, 4\} \cap \{3, 6, 9\}$$
$$= \{3\}$$

يعني $A \cap B = \{3\}$

$A \cap B$ کي شيڊ ڏنل حصي سان ظاهر ڪيو ويو آهي.

جيئن **شڪل** (iv) ۾ ڏيکاريو ويو آهي.



شڪل (iv)

(III) ٻن سيٽن A ۽ B جو فرق

(الف) جڏهن سيٽ A، ماتحت سيٽ آهي سيٽ B جو.

مثال1: جيڪڏهن $A = \{1, 2\}$ ۽ $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ته:

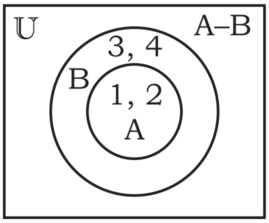
$$A - B = \{1, 2\} - \{1, 2, 3, 4\} = \{\ \}$$

$A - B$ کي وين شڪل وسيلي ظاهر ڪيو ويو آهي،

جيئن **شڪل** (i) ۾ ڏيکاريل آهي.

عملي ڪم: $B - A$ کي معلوم ڪريو ۽ وين شڪل وسيلي ڏيکاريو.

(ب) جڏهن سيٽ B، ماتحت سيٽ آهي سيٽ A جو.



شڪل (i)

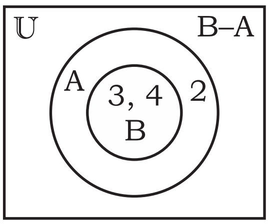
مثال2: فرض ڪريو $A = \{2, 3, 4\}$ ۽ $B = \{3, 4\}$ ته:

$$B - A = \{3, 4\} - \{2, 3, 4\} = \{\ \}$$

$B - A$ کي وين شڪل وسيلي ظاهر ڪيو ويو آهي،

جيئن **شڪل** (ii) ۾ ڏيکاريل آهي.

عملي ڪم: $A - B$ معلوم ڪريو ۽ وين شڪل وسيلي ڏيکاريو.



شڪل (ii)

(ج) جڏهن سيٽ A ۽ سيٽ B منفرد سيٽ آهن .

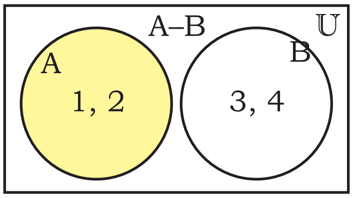
مثال 3: جيڪڏهن $A = \{1, 2\}$ ۽ $B = \{3, 4\}$ تہ:

$A - B = \{1, 2\} - \{3, 4\} = \{1, 2\}$

شيڊ ڏنل حصو $A - B$ آهي.

اهو وين شل وسيلي ظاهر ڪيو ويو آهي،

جيئن شڪل (iii) ۾ ڏيکاريو ويو آهي.



شڪل (iii)

(د) جڏهن سيٽ A ۽ سيٽ B لاڳاپيل سيٽ آهن.

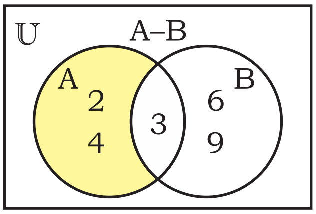
مثال 4: جيڪڏهن $A = \{2, 3, 4\}$ ۽ $B = \{3, 6, 9\}$ تہ:

$A - B = \{2, 3, 4\} - \{3, 6, 9\} = \{2, 4\}$

شيڊ ڏنل حصو $A - B$ آهي.

اهو وين شڪل وسيلي ظاهر ڪيو ويو آهي،

جيئن شڪل (iv) ۾ ڏيکاريل آهي.



شڪل (iv)

(iv) سيٽ جو ڪامپليمينٽ

(الف) جڏهن سيٽ B مليل آهي ۽ سيٽ A جو ماتحت سيٽ آهي يعني $\boldsymbol{B \subseteq A}$

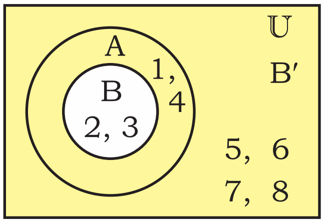
مثال 1: جيڪڏهن $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

۽ $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{2, 3\}$، تہ B' معلوم ڪريو.

حل: $B' = U - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{2, 3\}$

$B' = \{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$



شڪل (i)

B' کي وين شڪل و سيلي ظاهر ڪيو ويو آهي .

هتي شيڊ ڏنل حصو B' کي ظاهر ڪري ٿو، جيئن شڪل (i) ۾ ڏيکاريو ويو آهي.

(ب) جڏهن ڪائناتي سيٽ ۽ سيٽ A مليل آهن .

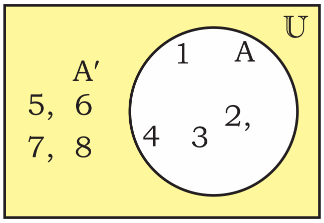
مثال 2: جيڪڏهن $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

۽ $A = \{1, 2, 3, 4\}$. تہ: A' معلوم ڪريو.

$A' = U - A$

$A' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{1, 2, 3, 4\}$

$= \{5, 6, 7, 8\}$



شڪل (ii)

شيڊ ڏنل حصو A' آهي، جيئن شڪل (ii) ۾ ڏيکاريو ويو آهي .

A' کي وين شڪل وسيلي ظاهر ڪيو ويو آهي.

مشق 1.6

(الف) هيٺيان معلوم ڪريو ۽ ميلاپ، فرق ۽ ڪاٽ جي عملن کي وين شڪل وسيلي ظاهر ڪريو:

1. فرض ڪريو $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ۽ $B = \{2, 4, 6, 8\}$

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ (iii) $A - B$ (iv) $B - A$

2. فرض ڪريو $W = \{a, b, c\}$ ۽ $X = \{u, v, w\}$

(i) $W \cup X$ (ii) $W \cap X$ (iii) $W - X$ (iv) $X - W$

3. فرض ڪريو $Y = \{$علي، رضا، سمير$\}$ ۽ $Z = \{$صابر، طلحه، زاهد$\}$

(i) $Y \cup Z$ (ii) $Y \cap Z$ (iii) $Y - Z$ (iv) $Z - Y$

4. فرض ڪريو $Y = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ ۽ $Z = \{2, 4, 6, ..., 16\}$

(i) $Y \cup Z$ (ii) $Y \cap Z$ (iii) $Y - Z$ (iv) $Z - Y$

(ب) جيڪڏهن $U = \{8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$, $A = \{8, 10, 12, 14, 16\}$ ۽ $B = \{8, 15\}$ ته هيٺيان معلوم ڪريو ۽ وين شڪل وسيلي ظاهر ڪريو:

(1) A'	(2) B'	(3) $A-B$	(4) $(A-B)'$
(5) $A \cup B'$	(6) $A' \cup B'$	(7) $A' - B'$	(8) $(A \cap B)'$
(9) $A' \cap B$	(10) $(A \cup B)'$	(11) $A' \cup A$	(12) $B' \cap B$

جائزي واري مشق 1

هيٺين جا جواب ڏيو:

-1 سيٽ کي ظاهر ڪندڙ ٽن نمونن جا نالا بيان ڪريو.

-2 (الف) پهرين پنجن سجن عددن جي سيٽ کي جدولي نموني ۾ ظاهر ڪريو.

(ب) $A = \{a, b, c, d, ...\}$ کي بياني نموني ۾ ظاهر ڪريو.

-3 علامتي نموني ۾ سيٽن جاٽي مثال ڏيو.

-4 مثالن جي مدد سان منفرد سيٽ ۽ لاڳاپيل سيٽ بيان ڪريو.

-5 جيڪڏهن $U = \{1, 2, 3, ..., 12\}$، $A = \{1, 2, 3, 10\}$، $B = \{2, 4, 6, ..., 12\}$ ۽ $C = \{1, 3, 5, ..., 11\}$ ته هيٺيان معلوم ڪريو:

(i) $A \cup B$	(ii) $A \cap B$	(iii) $A - B$	(iv) $(A \cap C)'$
(v) $(B \cup C)'$	(vi) $B' \cap C'$	(vii) $A - B'$	(viii) $B - A'$
(ix) $A' - C$	(x) $(B - C)'$	(xi) $(C - A)'$	(xii) $A' - C'$

6- $A = \{a, b, c, d\}$، $B = \{a, c, d\}$ ۽ $C = \{b, d, e\}$ ته هينيان ثابت ڪريو.

(i) $A \cup B = B \cup A$ (ii) $B \cap C = C \cap B$

(iii) $C \cup A = A \cup C$ (iv) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(v) $(A \cap C) \cap B = A \cap (C \cap B)$ (vi) $(B \cup A) \cup C = B \cup (A \cup C)$

7- درست جواب تي (✓) جو نشان لڳايو.

(i) جيڪڏهن $A = \{a, b, c\}$ ۽ $U = \{a, b, c, d, e\}$ ته A' آهي.

(a)$\{a, b\}$ (b)$\{b, c\}$ (c)$\{c, d\}$ (d)$\{d, e\}$

(ii) جيڪڏهن $A = \{l, m, n\}$ ۽ $B = \{l, m, n, o\}$ ته $B - A$ آهي.

(a)$\{l\}$ (b)$\{o\}$ (c)$\{n\}$ (d)$\{m\}$

(iii) جيڪڏهن $P = \{1, 2, 3\}$ ۽ $Q = \{2, 3, 4\}$ ته $P \cap Q$ آهي.

(a)$\{2, 3\}$ (b)$\{1, 3\}$ (c)$\{3, 4\}$ (d)$\{1, 4\}$

(iv) جيڪڏهن $X = \{2,3,4\}$، $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ۽ $Y = \{4,5,6\}$ ته $(X \cup Y)'$ آهي.

(a)$\varnothing$ (b)$\{2, 3\}$ (c)$\{1\}$ (d)$\{6\}$

(v) جيڪڏهن $A = \{x, y, z\}$ ۽ $B = \{y, z, x\}$ ته $A - B$ آهي.

(a)A (b)B (c)$\varnothing$ (d)$A \cap B$

8- هينيان معلوم ڪريو ۽ وين شڪل وسيلي ڏيکاريو:

(i) $C \cap D$ ۽ $C \cup D$ جيڪڏهن $C = \{c, d, e\}$ ۽ $D = \{d, e, f\}$

(ii) P' ۽ Q'، جيڪڏهن $P = \{l, m, n\}$، $Q = \{n, o, r\}$ ۽ $U = \{l, m, n, o, r\}$

(iii) $X \cap Y$ ۽ $X \cup Y$، جيڪڏهن $X = \{x, z\}$ ۽ $Y = \{x, y, z\}$

خلاصو

- سيٽ واضح بيان ڪيل ۽ مختلف شين جو ميڙ آهي.
- سيٽ کي ظاهر ڪرڻ جا ٽي مختلف طريقا آهن. اُهي آهن:

  (i) بياني نمونو (ii) جدولي نمونو (iii) علامتي نمونو

- جدولي نموني ۾ اسين سيٽ جي رُڪنن کي وچين ڏنگين ۾ بند ڪندا آهيون.
- ٻن سيٽن کي منفرد سيٽ چئبو آهي، جيڪڏهن انهن جي وچ ۾ ڪوبه رُڪن مشترڪ نه هجي.

- جيڪڏهن A ۽ B ڪي به ٻه سيٽ آهن ته A ۽ B جي ميلاپ کي $A \cup B$ سان ظاهر ڪبو آهي ۽ سيٽن A ۽ B جي ڪاٽ کي $A \cap B$ سان ظاهر ڪبو آهي.
- ٻن سيٽن A ۽ B جو ميلاپ هڪ اهڙو سيٽ آهي، جيڪو سيٽ A يا B ٻنهي سيٽن جي سيني رڪنن تي مشتمل هجي.
- ٻن سيٽن A ۽ B جي ڪاٽ هڪ اهڙو سيٽ آهي، جيڪو A ۽ B جي مشترڪ رُڪنن تي مشتمل هجي.
- جيڪڏهن A ۽ B ڪي به ٻه سيٽ آهن ته، سيٽ B کي سيٽ A جو ماتحت سيٽ چئبو، جيڪڏهن B جو هرهڪ رُڪن سيٽ A جو به رُڪن هجي.
- ٻن سيٽن کي لاڳاپيل سيٽ چئبو، جيڪڏهن ٻنهي سيٽن ۾ گهٽ ۾ گهٽ هڪ رُڪن مشترڪ هجي ۽ ڪوبه سيٽ ٻئي جو ماتحت سيٽ نه هجي.
- هڪ اهڙو سيٽ جيڪو ڪنهن زير غور مسئلي جي سيني رُڪنن تي مشتمل هجي، اُن سيٽ کي ڪائناتي سيٽ $\mathbb{U}$ چئبو آهي.
- **ميلاپ جي مٽا سٽا واري خاصيت:** جيڪڏهن A ۽ B ڪي به ٻه سيٽ هجن ته: $A \cup B = B \cup A$.
- **ڪاٽ جي مٽا سٽا واري خاصيت:** جيڪڏهن A ۽ B ڪي به ٻه سيٽ هجن ته: $A \cap B = B \cap A$
- جيڪڏهن A، B ۽ C ڪي به ٽي سيٽ آهن ته $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ کي ٽن سيٽن جي ڪاٽ جي سنگت واري خاصيت چئبو آهي.
- جيڪڏهن A، B ۽ C ڪي به ٽي سيٽ آهن ته $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ کي ٽن سيٽن جي ميلاپ جي سنگت واري خاصيت چئبو آهي.
- جيڪڏهن A ۽ B ڪي به ٻه سيٽ آهن ته A ۽ B جو فرق، انهن سيني رڪنن جو سيٽ آهي، جيڪي A سان تعلق رکن ٿا، پر سيٽ B سان تعلق نٿا رکن. اُن کي $A-B$ يا $A \setminus B$ سان ظاهر ڪبو آهي.
- جيڪڏهن $\mathbb{U}$ هڪ ڪائناتي سيٽ آهي ۽ سيٽ A ان جو ماتحت سيٽ آهي ته $\mathbb{U} - A$ کي سيٽ A جو ڪامپليمينٽ چئبو آهي ۽ A' سان ظاهر ڪبو آهي.
- ٻن سيٽن A ۽ A' جو ميلاپ ڪائناتي سيٽ ٿيندو.
- ٻن سيٽن A ۽ A' جي ڪاٽ خالي سيٽ آهي.

یونٽ 2

ناطق عدد

2.1 ناطق عدد

2.1.1 ناطق عدد جي وصف بيان ڪرڻ

اسين قدرتي عددن ۽ سڄن عددن کي ڳڻپ ڪرڻ، ماپ ڪرڻ ۽ مقدارن کي ظاهر ڪرڻ لاءِ استعمال ڪندا آهيون. ڪجهه مقدارون اهڙيون به آهن، جيڪي انهن عددن سان ظاهر نه ٿيون ڪري سگهجن. مثال طور:

جيڪڏهن 1 ڪلوگرام پٽاٽن جي قيمت = 15 رُپيا

ته اڌ ڪلوگرام پٽاٽن جي قيمت = $\frac{15}{2}$ رُپيا

اسين ڏسون ٿا ته $\frac{15}{2}$، نه قدرتي عدد آهي ۽ نه ڪي سڄو عدد. اهو هڪ ناطق عدد آهي.

عدد $-\frac{15}{17}, \frac{3}{4}, \frac{1}{7}, -\frac{2}{3}$ ناطق عددن جا ڪجهه وڌيڪ مثال آهن.

ناطق عدد اهو عدد آهي، جيڪو $\frac{p}{q}$ جي صورت ۾ لکي سگهجي، جڏهن ته p ۽ q پورا يا مڪمل عدد آهن ۽ $q \neq 0$.

ياد رکو

ڪنهن به عدد جي ٻڙيءَ سان ونڊ، ناقابلِ بيان آهي. تنهنڪري ٻڙي ڪڏهن به، اٽپور جو ڇيد نٿي ٿي سگهي.

ناطق عددن ۾ انس ۽ ڇيد هميشه سڄا عدد هوندا آهن ۽ ڇيد ڪڏهن به ٻڙي نه هوندو آهي. مثال طور $\frac{0}{6}$ هڪ ناطق عدد آهي، پر $\frac{6}{0}$ ناطق عدد نه آهي ڇاڪاڻ جو ناطق عدد جو ڇيد، ڪڏهن به ٻڙي نه هوندو آهي ۽ 6، 7− به ناطق عدد آهن، ڇاڪاڻ جو هرهڪ عدد ۾ ڇيد 1 آهي يعني $6 = \frac{6}{1}$ ۽ $-7 = -\frac{7}{1}$

ياد رکو

- هرهڪ قدرتي عدد ۽ سڄو عدد به ناطق عدد آهي.
- ڪن به ٻن عددن جي وچ ۾ لامحدود ناطق عدد هوندا آهن.

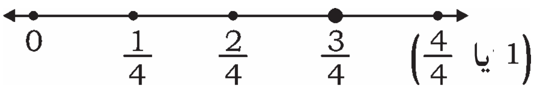
هيٺيون نقشو مختلف قسم جي عددن جو تعلق ظاهر ڪري ٿو:

- ناطق عدد
  - اڻپور
  - سچا عدد
    - ڪاٽو سچا عدد
    - غير ڪاٽو سچا عدد
      - واڌو سچا عدد
      - ٻڙي

2.1.2 عددي ليڪ تي ناطق عددن کي ظاهر ڪرڻ

اسين اڳين ڪلاس ۾ اهو سکي چڪا آهيون ته سڄن عددن کي عددي ليڪ تي ڪيئن ظاهر ڪجي. هاڻي اسين اهو سکنداسين ته ناطق عددن کي،عددي ليڪ تي ڪيئن ظاهر ڪجي.

اچو ته $\frac{3}{4}$ کي عددي ليڪ تي ظاهر ڪريون. ان لاءِ اسان کي هڪ عددي ليڪ ڪڍڻي پوندي ۽ (0 ۽ 1) جي وچ واري حصي کي چار برابر حصن ۾ ورهائڻو پوندو. هرهڪ حصو $\frac{1}{4}$ کي ظاهر ڪري ٿو،جيئن هيٺ ڏيکاريل آهي:



ٽئين حصي جي آخر وارو ٽپڪو گهربل عدد آهي،جيئن عددي ليڪ تي ڏيکاريل آهي.

اچو ته سکون ته غير واجب اڻپور $\frac{11}{4}$ کي عددي ليڪ تي ڪيئن ظاهر ڪجي.

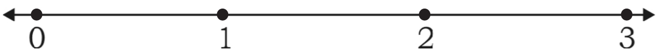
هيٺين عمل تي غور ڪريو:

ڏاڪو1: $\frac{11}{4}$ کي گڏيل اڻپور ۾ مٽايو يعني:

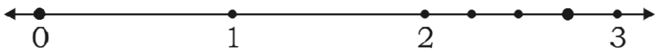
$$\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ 4 & 11 \\ & -8 \\ \hline & 3 \end{array}$$

ڏاڪو2: ڳڌيل اٽپور $\frac{3}{4}$ 2 جي سڄي حصي 2 کي ڏيکارڻ لاءِ، هڪ عددي ليڪ ڪيو.



ڏاڪو3: ليڪ جي 2 ۽ 3 جي وچ واري حصي کي چار برابر حصن ۾ ورهايو. ڇاڪاڻ جو اٽپور جو ڇيد 4 آهي.

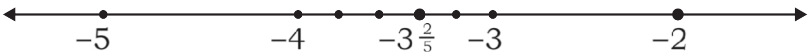


ڏاڪو4: هاڻي انهن حصن کي 2 کان ڳڻڻ شروع ڪريو. ٽيون ٽبڪو، گهربل ناطق عدد $\frac{11}{4}$ آهي، جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي:

ٽبڪو گهربل P نقطو آهي جيڪو $\frac{11}{4}$ يا $2\frac{3}{4}$ کي ظاهر ڪري ٿو.

مثال: $-\frac{17}{5}$ کي عددي ليڪ تي ظاهر ڪريو

جيئن ته $-3\frac{2}{5} = -\frac{17}{5}$، تنهنڪري ليڪ جي -3 ۽ -4 جي وچ واري حصي کي پنج برابر حصن ۾ ورهايو.



شروع ڪريو -3 کان -4 تائين، ٻئين حصي جي کاٻي پاسي وارو آخري ٽبڪو R گهربل ناطق عدد آهي، يعني $-\frac{17}{5}$ کي ظاهر ڪري ٿو.

مشق 2.1

1- هيٺ ڏنل هرهڪ بيان لاءِ صحيح يا غلط لکو:

(i) $\frac{0}{5}$، هڪ ناطق عدد آهي.

(ii) $\frac{5}{0}$، ناطق عدد آهي.

(iii) 0، ناطق عدد نه آهي.

(iv) 5 ۽ 6 جي وچ ۾ ناطق عدد $2\frac{1}{5}$ آهي.

(v) ڪاٿو سچا عدد ناطق عدد آهن.

(vi) واڌو سچا عدد، ناطق عدد نہ هوندا آهن.

(vii) هر هڪ سچو عدد بہ ناطق عدد هوندو آهي.

(viii) هرهڪ قدرتي عدد بہ ناطق عدد هوندو آهي.

(ix) ناطق عدد $\frac{p}{q}$ ۾، q هميشہ ٻُڙي هوندو آهي.

(x) 2 ۽ 3 جي وچ ۾ رڳو هڪ ناطق عدد آهي.

(xi) ناطق عدد $\frac{p}{q}$ جي صورت ۾ هوندا آهن، جڏهن تہ p ۽ q هميشہ قدرتي عدد هوندا آهن.

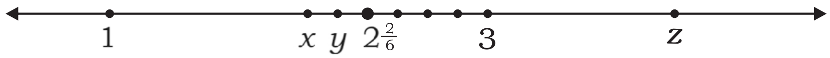
-2 عدد 2 ۽ 3 جي وچ ۾ ٽي ناطق عدد لکو.

-3 عددي ليڪ تي هيٺيان ناطق عدد ظاهر ڪريو

(i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{7}{2}$ (iii) $\frac{11}{3}$ (iv) $-\frac{2}{5}$ (v) $-\frac{12}{5}$

(vi) $2\frac{5}{6}$ (vii) $-3\frac{4}{7}$ (viii) $-\frac{13}{4}$ (ix) $\frac{15}{8}$ (x) $4\frac{2}{3}$

-4 هيٺين عددي ليڪ جي مطابق، صحيح يا غلط لکو.



(i) x جي قيمت 0 آهي. (ii) x جي قيمت 2 آهي.

(iii) y جي قيمت آهي: $2\frac{1}{6}$ (iv) y جي قيمت $3\frac{2}{5}$ آهي.

(v) z جي قيمت 4 آهي. (vi) z جي قيمت −4 آهي.

2.2 ناطق عددن تي حسابي عمل

ناطق عددن تي چار بنيادي عمل ٿيندا آهن، اهي آهن: جوڙ، ڪٽ، ضرب ۽ ونڊ.
اسين اڳين ڪلاس ۾ ٻن اٽپورن کي جوڙ ڪرڻ، ڪٽ ڪرڻ، ضرب ڪرڻ ۽ ونڊ ڪرڻ جا اُصول اڳيئي سکي چڪا آهيون. اچو تہ اهي اُصول ناطق عددن تي بہ عام طرح سان استعمال ڪريون.

2.2.1 ٻن يا وڌيڪ ناطق عددن جو جوڙ ڪرڻ

ٻن يا وڌيڪ ناطق عددن جي جوڙ لاءِ بہ صورتون آهن:

صورت1: جيڪڏهن ناطق عددن جا ڇيد ساڳيا آهن، تہ انسن کي جوڙ يا ڪٽ ڪريو.
جيئن هيٺين مثالن ۾ سمجهايو ويو آهي.

مثال1: هيٺين ناطق عددن کي جوڙ ڪريو:

(i) $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}$ (ii) $\frac{4}{5}+\frac{11}{5}$ (iii) $\frac{16}{7}+\left(-\frac{2}{7}\right)$

حل:

(i)
$$\frac{2}{3}+\frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$$

حل:

(ii)
$$\frac{4}{5}+\frac{11}{5} = \frac{4+11}{5} = \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{5}_{1}} = 3$$

حل:

(iii)
$$\frac{16}{7}+\left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{16-2}{7} = \frac{\cancel{14}^{2}}{\cancel{7}_{1}} = 2$$

نوٽ: ساڳي ڇيد وارن ناطق عددن جي جوڙ لاءِ اسين هن ريت حل ڪنداسين:

$$\boxed{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}}$$

مثال2: مختصر ڪريو:

(i) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)$

(ii) $\frac{17}{10}+\left(-\frac{3}{10}\right)+\frac{1}{10}$

حل: (i)
$$\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{2+3-4}{5} = \frac{5-4}{5} = \frac{1}{5}$$

حل: (ii)
$$\frac{17}{10}+\left(-\frac{3}{10}\right)+\frac{1}{10} = \frac{17-3+1}{10} = \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{10}_{2}}$$ (5 سان ونڊيندي)
$$= \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

صورت2: مختلف ڇيدن وارن ناطق عددن جي صورت ۾، اسين جوڙ ڪرڻ لاءِ عام طرح سان ڇيدن جي ن.ع.ب.أ لھندا آهيون.

مثال3: مختصر ڪريو:
$$\text{(i)}\ \frac{5}{6}+\frac{3}{8}\qquad \text{(ii)}\ \frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$$

حل: (i) $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}$

مليل مختلف چيدن 6 ۽ 8 جي ن. ع. پ. أ لهو. جيئن ته

2	6 , 8
2	3 , 4
2	3 , 2
3	3 , 1
	1 , 1

$= 2\times2\times2\times3$

ن.ع.پ.أ $= 24$

انهيءَ ڪري 6 ۽ 8 جي ن.ع.پ.أ 24 آهي.

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{8}=\frac{5\times4+3\times3}{24}\quad\left(\frac{24}{8}=3 \text{ ۽ } \frac{24}{6}=4\right)$$

تنهنڪري

$$=\frac{20+9}{24}$$
$$=\frac{29}{24}$$

حل: (ii) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$

2	2 , 4 , 6
2	1 , 2 , 3
3	1 , 1 , 3
	1 , 1 , 1

ن.ع.پ.أ $= 2\times2\times3 = 12$

انهيءَ ڪري 2، 4 ۽ 6 جي ن.ع.پ.أ 12 آهي.

جيئن ته

$$\left(\frac{12}{2}=6,\ \frac{12}{4}=3,\ \frac{12}{6}=2\right)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$$
$$=\frac{1\times6+3\times3+5\times2}{12}$$
$$=\frac{6+9+10}{12}=\frac{25}{12}$$

نوٽ: مختلف چيدن وارن ٻن ناطق عددن $\frac{a}{b}$ ۽ $\frac{c}{d}$ جي جوڙ لاءِ اسين هن ريت حل ڪنداسين:

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}}$$

مثال طور:
$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\times5+4\times3}{3\times5}=\frac{10+12}{15}=\frac{22}{15}$$

2.2.2 هڪ ناطق عدد کي ڪنهن ٻئي ناطق عدد مان ڪٽ ڪرڻ

جيڪڏهن ٻن ناطق عددن جا چيد ساڳيا آهن، ته اسين رڳو انسن کي ڪٽ ڪنداسين. جيئن هيٺين مثالن ۾ سمجهايو ويو آهي:

مثال: (i) $\frac{5}{3}$ مان $\frac{2}{3}$ کي ڪٽ ڪريو.

(ii)سادي صورت ۾ آڻيو:
$$\text{(a)}\ \frac{7}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\qquad \text{(b)}\ \frac{7}{8}-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}$$

حل: (i) ($\frac{5}{3}$ مان $\frac{2}{3}$ کي ڪٽ ڪندي)

$$\frac{5}{3}-\frac{2}{3}$$
$$=\frac{5-2}{3}=\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{3}_{1}}=1$$

(ii) (a) $\frac{7}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)$ (b) $\frac{7}{8}-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}$

حل: $\frac{7}{8}-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}$

$$\frac{7}{8}-\frac{1}{8}-\frac{3}{8} = \frac{7-1-3}{8} = \frac{6-3}{8} = \frac{3}{8}$$

حل: $\frac{7}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{7}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}+\frac{1}{2} = \frac{7+1}{2} = \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{2}_{1}} = \frac{4}{1} = 4$$

نوٽ: ساڳي ڇيدن وارن ٻن ناطق عددن جي ڪٽ لاءِ اسين هن ريت حل ڪنداسين:

$$\boxed{\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}}$$

صورت1: مختلف ڇيدن وارن ٻن ناطق عددن جي صورت ۾، اسين ڇيدن جي ن.ع.پ.أ استعمال ڪنداسين. جيئن هيٺين مثال ۾ سمجهايو ويو آهي.

مثال2: مختصر ڪريو.

(i) $\frac{4}{3}-\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{7}{4}-\frac{3}{8}-\frac{2}{3}$

حل:

3	3 , 5
5	1 , 5
	1 , 1

ن.ع.پ.أ $= 3 \times 5 = 15$

(i) $\frac{4}{3}-\frac{2}{5}$

$$= \frac{4\times5-2\times3}{15} \quad \left(\text{جيئن تہ } \frac{15}{3}=5 \text{ ۽ } \frac{15}{5}=3\right)$$

$$= \frac{20-6}{15} = \frac{14}{15}$$

حل:

2	4 , 8 , 3
2	2 , 4 , 3
2	1 , 2 , 3
3	1 , 1 , 3
	1 , 1 , 1

ن.ع.پ.أ $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

اهڙي طرح 4، 8 ۽ 3 جي ن.ع.پ.أ 24 آهي.

(ii) $\frac{7}{4}-\frac{3}{8}-\frac{2}{3}$

$$= \frac{7\times6-3\times3-2\times8}{24} \quad \left(\text{جيئن تہ } \frac{24}{8}=3,\ \frac{24}{4}=6,\ \text{۽ } \frac{24}{3}=8\right)$$

$$= \frac{42-9-16}{24} = \frac{33-16}{24} = \frac{17}{24}$$

نوٽ: ٻن ناطق عددن $\frac{a}{b}$ ۽ $\frac{c}{d}$ جي ڪٽ لاءِ اسين هن ريت حل ڪنداسين:

$$\boxed{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}}$$

مثال طور: $\frac{5}{3}-\frac{2}{5}=\frac{5\times5-2\times3}{15}=\frac{25-6}{15}=\frac{19}{15}=1\frac{4}{15}$

2.2.3 ناطق عددن جو جمعي اُبتڙ (Additive Inverse) معلوم ڪرڻ

جيڪڏهن ٻن ناطق عددن جي جوڙ اُپت ٻڙي آهي ته انهن کي هڪ ٻئي جو جمعي اُبتڙ چئبو.

ٻہ ناطق عدد $\frac{a}{b}$ ۽ $\left(-\frac{a}{b}\right)$ هڪ ٻئي جا جمعي اُبتڙ آهن.

ڇاڪاڻ جو: $\left(\frac{a}{b}\right)+\left(-\frac{a}{b}\right)=\frac{a-a}{b}=0$

مثال 1: (i) $\frac{5}{2}$ ۽ $-\frac{5}{2}$، هڪ ٻئي جا جمعي اُبتڙ آهن.

ڇاڪاڻ جو: $\left(\frac{5}{2}\right)+\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{5-5}{2}=0$

(ii) $-\frac{6}{7}$ ۽ $\frac{6}{7}$ هڪ ٻئي جا جمعي اُبتڙ آهن.

ڇاڪاڻ جو: $\left(-\frac{6}{7}\right)+\left(\frac{6}{7}\right)=\frac{-6+6}{2}=0$

نوٽ: ڪنهن بہ ناطق عدد (ٻڙي ڪان سواءِ) جو جمعي اُبتڙ اُن جي نشاني تبديل ڪري معلوم ڪري سگهجي ٿو.

ياد رکو: ٻڙيءَ جو جمعي اُبتڙ هميشہ ٻڙي هوندو آهي.

مثال 2: هيٺين مان هرهڪ جو جمعي اُبتڙ معلوم ڪريو:

(i) $-\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{5}{4}$ (iii) $\frac{11}{13}$ (iv) $-\frac{1}{7}$ (v) 8

حل:

ناطق عدد	$-\frac{3}{7}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{11}{13}$	$-\frac{1}{7}$	8
جمعي اُبتڙ	$\frac{3}{7}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{11}{13}$	$\frac{1}{7}$	-8

2.2.4 ٻن يا وڌيڪ ناطق عددن کي ضرب ڪرڻ

ٻن ناطق عددن جي ضرب اُپت انسن ۽ ڇيدن کي ڌار ڌار ضرب ڪري معلوم ڪبي آهي.

يعني:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ac}{bd}$$

مثال: هيٺين جي ضرب اُپت معلوم ڪريو.

(i) $\frac{3}{4}$ ۽ $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{3}{12}$ ۽ $-\frac{5}{6}$

حل: (i)

$\frac{3}{4}$ ۽ $\frac{2}{7}$ جي ضرب اُپت $= \frac{2}{7}\times\frac{3}{4}$

$$=\frac{2\times3}{7\times4}$$

$$=\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{28}^{14}}=\frac{3}{14}$$

حل: (ii)

$-\frac{3}{12}$ ۽ $-\frac{5}{6}$ جي ضرب اُپت $= \left(-\frac{5}{6}\right)\times\left(-\frac{3}{12}\right)$

$$=\frac{(-5)\times(-3)}{6\times12}=\frac{15}{72}$$

$$=\frac{{}^{5}\cancel{15}}{\cancel{72}^{24}}=\frac{5}{24}$$

ساڳي ريت اسين ٻن کان وڌيڪ ناطق عددن کي ضرب ڪري سگھون ٿا.

مثال طور:

$$\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2\times3\times1}{3\times5\times4}=\frac{{}^{1}\cancel{6}}{\cancel{60}_{10}}=\frac{1}{10}$$

2.2.5 ناطق عددن جو ضربي اُبتڙ (Multiplicative Inverse) معلوم ڪرڻ

جيڪڏھن ٻن غير ٻڙي ناطق عددن جي ضرب اُپت 1 آهي، تہ انهن کي هڪ ٻئي جو ضربي اُبتڙ چئبو. بہ غير ٻڙي ناطق عدد $\frac{a}{b}$ ۽ $\frac{b}{a}$ هڪ ٻئي جا ضربي اُبتڙ آهن ڇاڪاڻ

جو: $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$

مثال 1: (i) $\frac{2}{3}$ ۽ $\frac{3}{2}$ هڪ ٻئي جا ضربي اُبتڙ آهن

ڇاڪاڻ جو $\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1\right)$ يا $\left(\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}=1\right)$

(ii) $-\frac{5}{6}$ ۽ $-\frac{6}{5}$ هڪ ٻئي جا ضربي اُبتڙ آهن.

چاڪاڻ جو $\left(-\frac{5}{6} \times -\frac{6}{5} = 1\right)$ ۽ $\left(-\frac{6}{5} \times -\frac{5}{6} = 1\right)$

نوٽ: غير ٻڙي ناطق عدد جو ضربي اُبتڙ رڳو انس ۽ چيد کي بدلائڻ سان معلوم ڪري سگهجي ٿو.

> ياد رکو: ٻڙي جو ضربي اُبتڙ وجود نٿو رکي چاڪاڻ جو ناطق عدد جو چيد ڪڏهن بہ ٻڙي نٿو ٿي سگهي.

مثال 2: هيٺين مان هرهڪ جو ضربي اُبتڙ معلوم ڪريو.

$$\frac{2}{9}, -\frac{5}{8}, \frac{111}{3}, -6, \frac{1}{8}$$

حل:

ناطق عدد	$\frac{2}{9}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{111}{3}$	-6	$\frac{1}{8}$
ضربي اُبتڙ	$\frac{9}{2}$	$-\frac{8}{5}$	$\frac{3}{111}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{8}{1}$

2.2.6 ناطق عدد کي، ڪنهن غير ٻُڙي ناطق عدد سان ونڊ ڪرڻ

هڪ ناطق عدد جي ڪنهن غير ٻڙي ناطق عدد سان ونڊ درحقيقت ڏنل ناطق عدد ۽ ونڊيندڙ جي ضربي اُبتڙ جي ضرب آهي. يعني جيڪڏهن هڪ ناطق عدد $\frac{a}{b}$ کي ڪنهن غير ٻڙي ناطق عدد $\frac{c}{d}$ سان ونڊ ڪرڻو هجي تہ: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

مثال: مختصر ڪريو.

(i) $\frac{2}{5} \div \frac{7}{15}$ (ii) $\frac{3}{4} \div \frac{9}{8}$

حل:

(i) $\frac{2}{5} \div \frac{7}{15}$

$$\frac{2}{5} \div \frac{7}{15} = \frac{2}{5} \times \frac{15}{7}$$

$$= \frac{\cancel{30}^{6}}{\cancel{35}_{7}} \quad \text{(5 سان ونڊ ڪندي)}$$

$$= \frac{6}{7}$$

حل:

(ii) $\frac{3}{4} \div \frac{9}{8}$

$$\frac{3}{4} \div \frac{9}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9}$$

$$= \frac{\cancel{24}^{2}}{\cancel{36}_{3}} \quad \text{(12 سان ونڊ ڪندي)}$$

$$= \frac{2}{3}$$

2.2.7 ناطق عدد جو معڪوس (Reciprocal) معلوم ڪرڻ

جيڪڏهن $\frac{p}{q}$ هڪ غير ٻڙي ناطق عدد آهي ته اُن جو معڪوس $\frac{1}{\frac{p}{q}}$ آهي ۽ $\boxed{\frac{1}{\frac{p}{q}}=\frac{q}{p}}$

چاڪاڻ ته $\frac{1}{\frac{p}{q}} = 1 \div \frac{p}{q} = 1 \times \frac{q}{p} = \frac{q}{p}$

اهڙي طرح، ڪنهن غير ٻڙي ناطق عدد جو معڪوس، هڪ اهڙو ناطق عدد آهي، جيڪو اسين ڏنل ناطق عدد جي انس ۽ چيد ڪي بدلائڻ سان حاصل ڪريون ٿا.

مثال: $\frac{7}{2}$ جو معڪوس $\frac{2}{7}$ آهي ۽ 6 جو معڪوس $\frac{1}{6}$ آهي.

نوٽ: (i) ناطق عدد جا معڪوس ۽ ضربي اُبتڙ هميشه پاڻ ۾ برابر هوندا آهن.

(ii) ٻڙيءَ جو معڪوس وجود نٿو رکي.

مشق 2.2

1- هيٺين ناطق عددن جا معڪوس معلوم ڪريو.

(i) $\frac{19}{17}$ (ii) -13 (iii) $\frac{1}{10}$ (iv) $-\frac{6}{25}$

2- مختصر ڪريو.

(i) $\frac{9}{7}+\frac{15}{7}$ (ii) $\frac{5}{9}-\frac{2}{9}$ (iii) $\frac{3}{5}-\left(-\frac{7}{5}\right)$

(iv) $\frac{5}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}$ (v) $\frac{5}{8}-\frac{4}{5}$ (vi) $-\frac{2}{7}+\frac{7}{6}$

(vii) $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}-\frac{1}{6}$ (viii) $\frac{4}{5}-\frac{1}{7}+\frac{3}{70}$ (ix) $\frac{2}{9}-\left(-\frac{3}{6}\right)+\frac{5}{8}$

(x) $\frac{17}{10}+\frac{11}{20}-\frac{4}{5}$

3- هيٺين مان هرهڪ جو جمعي اُبتڙ ۽ ضربي اُبتڙ معلوم ڪريو.

(i) $\frac{17}{15}$ (ii) -26 (iii) $-\frac{1}{20}$ (iv) $\frac{-5}{19}$

(v) 0 (vi) 8 (vii) $\frac{1}{9}$ (viii) $\frac{200}{7}$

4- مختصر ڪريو.

(i) $\frac{5}{8}\times\frac{3}{2}$ (ii) $\frac{6}{7}\div\frac{2}{5}$ (iii) $\frac{2}{3}\times\frac{1}{7}\times\frac{4}{5}$

(iv) $-\frac{6}{7}\div\left(-\frac{7}{6}\right)$ (v) $\frac{14}{5}\div\frac{7}{25}$ (vi) $\frac{9}{4}\times\left(-\frac{4}{9}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)$

(vii) $\frac{1}{8}\times\frac{2}{5}\times-\frac{15}{4}$ (viii) $\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{4}{6}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)$

2.2.8 جوڙ ۽ ضرب جي لحاظ کان ناطق عددن جي مٽا سٽا واري خاصيت جي چڪاس ڪرڻ

(a) جوڙ جي لحاظ کان مٽا سٽا واري خاصيت

اسان کي خبر آهي ته ٻن ناطق عددن جي جوڙ اُپت ڪنهن به ترتيب ۾ ساڳي هوندي آهي.

يعني ٻن ناطق عددن $\frac{a}{b}$ ۽ $\frac{c}{d}$ لاءِ

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}}$$

ناطق عددن جي ان خاصيت کي جوڙ جي لحاظ کان مٽا سٽا واري خاصيت چئبو آهي.

مثال1: مليل ناطق عددن $\frac{2}{3}$ ۽ $\frac{7}{3}$ لاءِ جوڙ جي لحاظ کان مٽا سٽا واري خاصيت جي چڪاس ڪريو.

حل: اسان کي ڄاڻ آهي ته مليل ناطق عددن $\frac{2}{3}$ ۽ $\frac{7}{3}$ جي جوڙ جي لحاظ کان مٽا سٽا واري خاصيت مطابق:

$$\frac{2}{3}+\frac{7}{3}=\frac{7}{3}+\frac{2}{3}$$

هاڻي

ساڄو پاسو (RHS) $= \frac{7}{3} + \frac{2}{3}$

$= \frac{7+2}{3} = \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{3}_{1}} = 3$

کاٻو پاسو (LHS) $= \frac{2}{3} + \frac{7}{3}$

$= \frac{2+7}{3} = \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{3}_{1}} = 3$

جيئن تہ ساڄو پاسو (RHS) = کاٻو پاسو (LHS)

انهيءَ ڪري $\frac{2}{3} + \frac{7}{3} = \frac{7}{3} + \frac{2}{3}$.

اهڙيءَ طرح مليل ناطق عددن $\frac{2}{3}$ ۽ $\frac{7}{3}$ لاءِ جوڙ جي لحاظ کان مٽا سٽا واري خاصيت ثابت ٿي.

(b) ضرب جي لحاظ کان مٽا سٽا واري خاصيت

اسان کي خبر آهي تہ ٻن ناطق عددن جي ضرب اُپٽ ڪنهن بہ ترتيب ۾ ساڳي رهندي آهي. يعني ٻن ناطق عددن $\frac{a}{b}$ ۽ $\frac{c}{d}$ لاءِ:

$$\boxed{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}}$$

ناطق عددن جي ان خاصيت کي ضرب جي لحاظ کان مٽا سٽا واري خاصيت چئبو آهي.

مثال 2: مليل ناطق عددن $\frac{3}{4}$ ۽ $\frac{1}{4}$ لاءِ ضرب جي لحاظ کان مٽا سٽا واري خاصيت جي تصديق ڪريو.

حل: اسان کي ڄاڻ آهي تہ مليل ناطق عددن $\frac{3}{4}$ ۽ $\frac{1}{4}$ جي ضرب جي لحاظ کان مٽا سٽا واري خاصيت مطابق:

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$$

هاڻي

ساڄو پاسو (RHS) $= \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$

$= \frac{1 \times 3}{16} = \frac{3}{16}$

کاٻو پاسو (LHS) $= \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$

$= \frac{3 \times 1}{16} = \frac{3}{16}$

جيئن تہ ساڄو پاسو (RHS) = کاٻو پاسو (LHS)

انهيءَ ڪري $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$.

اهڙيءَ طرح مليل ناطق عددن $\frac{3}{4}$ ۽ $\frac{1}{4}$ لاءِ ضرب جي لحاظ کان مٽا سٽا واري خاصيت ثابت ٿي.

2.2.9 جوڙ ۽ ضرب جي لحاظ کان ناطق عددن جي سنگت واري خاصيت جي چڪاس ڪرڻ

(i) جوڙ جي لحاظ کان سنگت واري خاصيت

اسان کي خبر آهي تہ ٽن ناطق عددن $\frac{a}{b}$، $\frac{c}{d}$ ۽ $\frac{e}{f}$ جي جوڙ اُپت ڪنهن بہ ترتيب ۾ ساڳي هوندي آهي. يعني

$$\boxed{\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}}$$

ناطق عددن جي ان خاصيت کي جوڙ جي لحاظ کان سنگت واري خاصيت چئبو آهي.

مثال 1: مليل ناطق عددن $\frac{1}{2}$، $\frac{5}{3}$ ۽ $\frac{3}{4}$ لاءِ جوڙ جي لحاظ کان سنگت واري خاصيت جي چڪاس ڪريو.

حل: اسان کي ڄاڻ آهي تہ مليل ناطق عددن $\frac{1}{2}$، $\frac{5}{3}$ ۽ $\frac{3}{4}$ جوڙ جي لحاظ کان سنگت واري خاصيت مطابق:

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{3}\right)+\frac{3}{4}$$

هاڻي

ساڄو پاسو $(RHS) = \left(\frac{1}{2}+\frac{5}{3}\right)+\frac{3}{4}$

$$=\left(\frac{1\times3+2\times5}{2\times3}\right)+\frac{3}{4}$$

$$=\left(\frac{3+10}{6}\right)+\frac{3}{4}$$

$$=\frac{13}{6}+\frac{3}{4}$$

$$=\frac{13\times2+3\times3}{12}$$

$$=\frac{26+9}{12}=\frac{35}{12}$$

کاٻو پاسو $(LHS) = \frac{1}{2}+\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{4}\right)$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{5\times4+3\times3}{3\times4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{20+9}{12}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{29}{12}$$

$$=\frac{1\times6+29\times1}{12}$$

$$=\frac{6+29}{12}=\frac{35}{12}$$

جيئن تہ (RHS) ساڄو پاسو = (LHS) کاٻو پاسو

انهي ڪري $\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{3}\right)+\frac{3}{4}$

اهڙيءَ طرح مليل ناطق عددن $\frac{1}{2}$، $\frac{5}{3}$ ۽ $\frac{3}{4}$ لاءِ جوڙ جي لحاظ کان سنگت واري خاصيت ثابت ٿي.

(ii) ضرب جي لحاظ کان سنگت واري خاصيت

اسان کي خبر آهي تہ ڪن بہ ٽن ناطق عددن $\frac{a}{b}$، $\frac{c}{d}$ ۽ $\frac{e}{f}$ جي ضرب اُپٽ ڪنهن بہ ترتيب ۾ ساڳي هوندي آهي.

يعني
$$\boxed{\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)\times\frac{e}{f}}$$

ناطق عددن جي ان خاصيت کي ضرب جي لحاظ کان سنگت واري خاصيت چئبو آهي.

مثال 2: مليل ناطق عددن $\frac{1}{3}$، $\frac{2}{5}$ ۽ $\frac{3}{4}$ لاءِ ضرب جي لحاظ کان سنگت واري خاصيت جي چڪاس ڪريو.

حل: اسان کي ڄاڻ آهي تہ مليل ناطق عددن $\frac{1}{2}$، $\frac{5}{3}$ ۽ $\frac{3}{4}$ ضرب جي لحاظ کان سنگت واري خاصيت مطابق:

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{4}$$

هاڻي

ساڄو پاسو (RHS)
$$=\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{4}$$
$$=\left(\frac{1\times2}{3\times5}\right)\times\frac{3}{4}$$
$$=\frac{2}{15}\times\frac{3}{4}=\frac{\cancel{6}^{1}}{\cancel{60}_{10}}=\frac{1}{10}$$

کاٻو پاسو (LHS)
$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2\times3}{5\times4}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{6}{20}=\frac{\cancel{6}^{1}}{\cancel{60}_{10}}=\frac{1}{10}$$

جيئن تہ ساڄو پاسو (RHS) = کاٻو پاسو (LHS)

انهيءَ ڪري $\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{4}$.

اهڙيءَ طرح مليل ناطق عددن $\frac{1}{3}$، $\frac{2}{5}$ ۽ $\frac{3}{4}$ لاءِ ضرب جي لحاظ کان سنگت واري خاصيت ثابت ٿي.

2.2.10 ورهاست واريون خاصيتون

(i) ناطق عددن جي جوڙ تي ضرب جي ورهاست واري خاصيت

اسان کي خبر آهي تہ ڪنهن بہ هڪ ڏنل ناطق عدد جي ضرب اُپٽ ڪن بہ ٻن ناطق عددن جي جوڙ اُپٽ سان اُها ئي ملندي، جيڪا ڏنل ناطق عدد جي ٻنهي ناطق عددن سان جدا

جدا ضرب اُپتن جي جوڙ سان ملندي.

يعني ڪن بہ ٽن ناطق عددن $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ ۽ $\frac{e}{f}$ مطابق

$$\boxed{\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}}$$

ناطق عددن جي ان خاصيت کي جوڙ تي ضرب جي ورهاست واري خاصيت چئبو آهي.

مثال 1: مليل ناطق عددن $\frac{1}{7}$، $\frac{2}{7}$ ۽ $\frac{3}{7}$ لاءِ ناطق عددن جي جوڙ تي ضرب جي ورهاست واري خاصيت جي چڪاس ڪريو. يعني $\frac{1}{7}\times\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\right)=\frac{1}{7}\times\frac{2}{7}+\frac{1}{7}\times\frac{3}{7}$

حل: اسان کي ڄاڻ آهي تہ مليل ناطق عددن $\frac{1}{7}$ ، $\frac{2}{7}$ ۽ $\frac{3}{7}$ لاءِ ناطق عددن جي جوڙ تي ضرب جي ورهاست واري خاصيت مطابق:

$$\frac{1}{7}\times\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\right)=\frac{1}{7}\times\frac{2}{7}+\frac{1}{7}\times\frac{3}{7}$$

چڪاس

ساڄو پاسو (RHS) $=\frac{1}{7}\times\frac{2}{7}+\frac{1}{7}\times\frac{3}{7}$

$$=\frac{1\times2}{7\times7}+\frac{1\times3}{7\times7}=\frac{2}{49}+\frac{3}{49}$$

$$=\frac{2+3}{49}=\frac{5}{49}$$

کاٻو پاسو (LHS) $=\frac{1}{7}\times\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\right)$

$$=\frac{1}{7}\times\left(\frac{2+3}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{7}\times\frac{5}{7}=\frac{5}{49}$$

جيئن تہ ساڄو پاسو (RHS) = کاٻو پاسو (LHS)

انهيءَ ڪري $\frac{1}{7}\times\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\right)=\frac{1}{7}\times\frac{2}{7}+\frac{1}{7}\times\frac{3}{7}$.

اهڙيءَ طرح مليل ناطق عددن $\frac{1}{7}$ ، $\frac{2}{7}$ ۽ $\frac{3}{7}$ لاءِ ناطق عددن جي جوڙ تي ضرب جي ورهاست واري خاصيت ثابت ٿي.

(ii) ناطق عددن جي ڪٽ تي ضرب جي ورهاست واري خاصيت

اسان کي خبر آهي تہ ڏنل ناطق عدد جي ضرب اُپت، ٻن ناطق عددن جي فرق سان اها ئي ملندي، جيڪا ڏنل ناطق عدد جي ٻنهي ناطق عددن سان جدا جدا ضرب اُپتن جي فرق سان ملندي.

يعني، ڪن بہ ٽن ناطق عددن $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ ۽ $\frac{e}{f}$ مطابق

$$\boxed{\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}}$$

ناطق عددن جي ان خاصيت کي ڪٽ تي،ضرب جي ورهاست واري خاصيت چئبو آهي.

مثال2: مليل ناطق عددن $\frac{4}{5}$، $\frac{3}{5}$ ۽ $\frac{2}{5}$ لاءِ ناطق عددن جي ڪٽ تي،ضرب جي ورهاست واري خاصيت جي چڪاس ڪريو.

حل: اسان کي جاچڻ آهي تہ مليل ناطق عددن $\frac{4}{5}$ ، $\frac{3}{5}$ ۽ $\frac{2}{5}$ جي ڪٽ تي ضرب جي ورهاست واري خاصيت جي مطابق

$$\frac{4}{5}\times\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}$$

هاڻي

ساڄو پاسو (RHS) $=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}$

$$=\frac{4\times3}{5\times5}-\frac{4\times2}{5\times5}=\frac{12}{25}-\frac{8}{25}$$

$$=\frac{12-8}{25}=\frac{4}{25}$$

کاٻو پاسو (LHS) $=\frac{4}{5}\times\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\right)$

$$=\frac{4}{5}\times\left(\frac{3-2}{5}\right)$$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$$

جيئن تہ ساڄو پاسو (RHS) = کاٻو پاسو (LHS)

انهيءَ ڪري $\frac{4}{5}\times\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}$

اهڙيءَ طرح مليل ناطق عددن $\frac{4}{5}$، $\frac{3}{5}$ ۽ $\frac{2}{5}$ لاءِ ناطق عددن جي ڪٽ تي ضرب جي ورهاست واري خاصيت ثابت ٿي.

2.2.11 ٻن ناطق عددن جي ڀيٽ ڪرڻ

مليل ٻن ناطق عددن جي ڀيٽ ڪرڻ لاءِ اسين رڳو مليل ناطق عددن جي انسن جي ڀيٽ ڪندا آهيون، جيڪڏهن مليل ٻنهي ناطق عددن جا چيدَ ساڳيا هجن. جيڪڏهن مليل ٻن ناطق عددن جا چيد ساڳيا نہ هجن تہ ن.ع.ب.اُ کي استعمال ڪندي، انهن ٻنهي مليل ناطق عددن کي مشترڪ چيد وارو بڻائي لکبو.

هيٺين مثالن ۾ ٻن ناطق عددن جي ڀيٽ کي سمجهايو ويو آهي.

مثال: مليل ناطق عددن جي ڀاڱ ۾ ڀيٽ ڪريو: (i) $\frac{3}{4}$ ۽ $\frac{5}{4}$ (ii) $\frac{5}{7}$ ۽ $\frac{3}{8}$

حل: (i) $\frac{3}{4}$ ۽ $\frac{5}{4}$

جيئن تہ مليل ٻنهي ناطق عددن جا چيدَ ساڳيا آهن، انهيءَ ڪري رڳو مليل ٻنهي ناطق عددن جي انسن جي ڀاڱ ۾ ڀيٽ ڪنداسين.

جيئن تہ هتي 5>3، انهيءَ ڪري $\frac{5}{4} > \frac{3}{4}$

(ii) $\frac{5}{7}$ ۽ $\frac{3}{8}$

حل: جيئن تہ مليل ٻنهي ناطق عددن جا چيد ساڳيا نہ آهن، انهيءَ ڪري اسين انهن مليل ٻنهي ناطق عددن جي چيدن 7 ۽ 8 جي ن.ع.ب.اُ معلوم ڪنداسين.

7 ۽ 8 جي ن.ع.ب.اُ لاءِ ڏسون ٿا:

2	7 , 8
2	7 , 4
2	7 , 2
7	7 , 1
	1 , 1

ن.ع.ب.اُ $= 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 56$

هاڻي $\frac{5}{7} = \frac{5 \times 8}{7 \times 8} = \frac{40}{56}$

۽ $\frac{3}{8} = \frac{3 \times 7}{8 \times 7} = \frac{21}{56}$

جيئن تہ هتي $40 > 21$

انهيءَ ڪري چئبو: $\frac{40}{56} > \frac{21}{56}$

تنهن ڪري $\frac{5}{7} > \frac{3}{8}$

2.2.12 مليل ناطق عددن کي ننڍ وڏائي يا وڏ ننڍائي ترتيب ڏيڻ

(i) جيڪڏهن مليل ناطق عددن جا چيد ساڳيا هجن تہ انسن جي ڀيٽ جي مدد سان ٻن يا وڌيڪ ناطق عددن کي ننڍ وڏائي يا وڏ ننڍائي ۾ ترتيب ڏئي سگهجي ٿي.

(ii) جيڪڏهن مليل ناطق عددن جا چيد ساڳيا نہ هجن، تہ اسين مليل ناطق عددن جي چيدن جي ن.ع.ب.اُ جو استعمال ڪندي، سڀني ناطق عددن کي مشترڪ چيد وارو بڻائي لکنداسين، جيئن هيٺين مثالن ۾ سمجھايو ويو آهي.

مثال 1: هيٺين ناطق عددن کي ننڍ وڏائي ۽ وڏ ننڍائي ترتيب ۾ لکو:

$\frac{2}{5}$، $\frac{7}{5}$ ۽ $\frac{1}{5}$

حل: جيئن تہ هتي مليل ناطق عددن جا چيد ساڳيا آهن.

انهيءَ ڪري، اسين رڳو انهن مليل ناطق عددن جي انسن جي پاڻ ۾ ڀيٽ ڪنداسين.

چاڪاڻ تہ $7 > 2 > 1$. انهيءَ ڪري $\frac{1}{5} < \frac{2}{5} < \frac{7}{5}$

انهيءَ ڪري مليل ناطق عددن جي ننڍ وڏائي ترتيب آهي: $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{7}{5}$

۽ مليل ناطق عددن جي وڏ ننڍائي ترتيب آهي: $\frac{7}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}$

مثال2: هيٺين مليل ناطق عددن کي ننڍ وڏائي ۽ وڏ ننڍائي ترتيب ۾ لکو:

$$\frac{3}{7} ، \frac{4}{5} ۽ \frac{1}{2}$$

حل: جيئن تہ هتي ڇيد مختلف آهن. تنهنڪري اسين پهريان انهن مليل ناطق عددن جي ڇيدن جي ن.ع.پ.اُ معلوم ڪنداسين.

مليل ناطق عددن $\frac{3}{7}$، $\frac{4}{5}$ ۽ $\frac{1}{2}$ جي ڇيدن 2، 5 ۽ 7 جي ن.ع.پ.اُ لاءِ:

2	2 , 5 , 7
5	1 , 5 , 7
7	1 , 1 , 7
	1 , 1 , 1

يعني 2، 5 ۽ 7 جي ن.ع.پ.اُ 70 آهي

$2 \times 5 \times 7 = 70$

هاڻي مليل ناطق عددن جا هم ڇيد اٽپور ناهينداسين

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \times 10}{7 \times 10} = \frac{30}{70} \quad , \quad \frac{4}{5} = \frac{4 \times 14}{5 \times 14} = \frac{56}{70}$$

۽

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 35}{2 \times 35} = \frac{35}{70}$$

حاصل ٿيل هم ڇيد اٽپورن جي انسن جي ڀيٽ ڪرڻ سان هتي

$$30 < 35 < 56$$

تنهنڪري

$$\frac{30}{70} < \frac{35}{70} < \frac{56}{70}$$

انهيءَ ڪري مليل ناطق عددن جي ترتيب آهي: $\frac{3}{7} < \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$

اهڙيءَ طرح مليل ناطق عددن جي ننڍ وڏائي ترتيب آهي: $\frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}$

۽ مليل ناطق عددن جي وڏ ننڍائي ترتيب آهي: $\frac{4}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{7}$

مشق 2.3

1- مليل ناطق عددن جي هيٺين عملن جي چڪاس ڪريو:

(i) $\frac{2}{3} + \left(-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{2}{3}$

(ii) $\frac{4}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{7}$

(iii) $\frac{3}{4} + \left(\frac{5}{6} + \frac{4}{8}\right) = \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) + \frac{4}{8}$

(iv) $\frac{7}{15} \times \left(\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}\right) = \left(\frac{7}{15} \times \frac{3}{4}\right) \times \frac{5}{7}$

(v) $\frac{2}{7} \times \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{7} \times \frac{3}{4} - \frac{2}{7} \times \frac{1}{2}$

(vi) $\frac{4}{5} \times \left(\frac{7}{8} + \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5} \times \frac{7}{8} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{5}$

2- مليل ناطق عددن $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ۽ $\frac{1}{4}$ لاءِ جوڙجي لحاظ کان سنگت واري خاصيت جي چڪاس ڪريو.

3- مليل ناطق عددن $\frac{2}{7}$، $\frac{4}{5}$ ۽ $\frac{3}{4}$ لاءِ ضرب جي لحاظ کان سنگت واري خاصيت جي چڪاس ڪريو.

4- مليل ناطق عددن $\frac{3}{4}$، $\frac{4}{5}$ ۽ $\frac{7}{8}$ لاءِ جوڙ تي ضرب جي ورهاست واري خاصيت جي چڪاس ڪريو.

5- مليل ناطق عددن $\frac{5}{7}$، $\frac{3}{4}$ ۽ $\frac{1}{5}$ لاءِ ڪٽ تي ضرب جي ورهاست واري خاصيت جي تصديق ڪريو.

6- هيٺين مليل ناطق عددن کي وڌ ننڍائي ترتيب ۾ لکو.

(i) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}$ (ii) $\frac{1}{6}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ (iii) $\frac{4}{7}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}$

7- هيٺين مليل ناطق عددن کي ننڍ وڏائي ترتيب ۾ لکو.

(i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ (ii) $\frac{4}{5}, \frac{1}{10}, \frac{2}{15}$ (iii) $\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}$

8- هيٺين مليل ناطق عددن کي ننڍ وڏائي ۽ وڌ ننڍائي ترتيب ۾ لکو:

(i) $\frac{4}{3}, \frac{5}{7}, \frac{1}{4}$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{11}$ (iii) $\frac{2}{9}, \frac{5}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$ (iv) $\frac{4}{20}, \frac{20}{15}, \frac{1}{2}, \frac{9}{7}$

جائزي واري مشق 2

1- هيٺين سوالن جا جواب ڏيو:

(i) ناطق عددن کي بيان ڪريو ۽ اُن جا مثال ڏيو.

(ii) ناطق عدد 'a' جو جمعي اُبتڙ لکو.

(iii) ناطق عدد $\frac{p}{q}$ ، $q \neq 0$ جو معڪوس ڇا آهي؟

(iv) ٻن ناطق عددن $\frac{p}{q}$ ۽ $\frac{r}{s}$ جي جوڙ اُبت لکو. (جڏهن ته q ۽ s غير ٻڙي عدد آهن)

(v) ڪن ٻہ ٻن ناطق عددن جي ضرب اُپت معلوم ڪرڻ جو اُصول ڇا آهي؟

(vi) ناطق عددن جا جوڙ ۽ ضرب جا اُبتڙ عمل ڇا آهن؟

2- خال ڀريو:

(i) هرهڪ اڻپور ۽ سچو عدد آهي ________

(ii) ناطق عدد $\frac{p}{q}$ ۽ $-\frac{p}{q}$ هڪ ٻئي جا ________ اُبتڙ آهن.

(iii) اهو عدد جيڪو $\frac{p}{q}$ جي صورت ۾ ظاهر ڪري سگهجي، اُن کي ________ چئبو آهي جڏهن تہ p ۽ q سچا عدد آهن.

(iv) ناطق عدد 0 کي ڪوبہ ________ نہ آهي.

(v) ناطق عدد جو ________ اُبتڙ اُن جو ئي معڪوس هوندو آهي.

3- صحيح جواب تي (✓) جو نشان لڳايو:

(i) جيڪڏهن $p, q \in Z$ ۽ $q \neq 0$ تہ اُهو عدد جيڪو $\frac{p}{q}$ جي صورت ۾ ظاهر ڪري سگهجي، اُن کي چئبو:

(الف) سچو عدد (ب) ناطق عدد (ج) مڪمل يا پورو عدد (د) واڌو عدد

(ii) $\frac{2}{3}$ جو جمعي اُبتڙ آهي:

(الف) $-\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $-\frac{3}{2}$

(iii) $-\frac{4}{7}$ جو ضربي اُبتڙ آهي:

(الف) $\frac{4}{7}$ (ب) $\frac{7}{4}$ (ج) $-\frac{7}{4}$ (د) $\frac{1}{7}$

(iv) $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=$ ______ .

(الف) $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{1}{6}$ (ج) $\frac{2}{5}$ (د) $\frac{5}{6}$

(v) $\frac{2}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)=$ ______ .

(الف) 2 (ب) -2 (ج) $-\frac{1}{2}$ (د) $-\frac{2}{5}$

4- عددي ليڪون کي ۾ هيٺيان ناطق عدد اُنهن عددي ليڪن تي ظاهر ڪريو.

(i) $1\frac{1}{2}$ (ii) $3\frac{1}{3}$ (iii) $-\frac{1}{4}$ (iv) $-1\frac{4}{5}$

5- هيٺين ناطق عددن جا جمعي اُبتڙ ۽ ضربي اُبتڙ معلوم ڪريو.

(i) -14 (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $-\frac{2}{3}$ (iv) $-\frac{11}{27}$

6- مليل ناطق عددن جي هيٺين جوڙن جي وچ ۾ درست نشاني > يا < لڳايو.

(i) $\frac{2}{3},\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{10}{13},\frac{11}{14}$ (iii) $\frac{1}{4},-\frac{1}{2}$

(iv) $-\frac{11}{17},\frac{3}{8}$ (v) $-\frac{4}{9},-\frac{2}{5}$ (vi) $-\frac{5}{22},-\frac{11}{25}$

7- مليل ناطق عددن جا هيٺيان عمل حل ڪريو.

(i) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{2}{7}+\frac{1}{2}-\frac{3}{14}$ (iii) $\frac{5}{8}-\frac{1}{5}-\frac{3}{4}$

(iv) $\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}$ (v) $\left(-\frac{11}{15}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{5}{4}$

(vi) $\left(-\frac{19}{55}\right)+\frac{51}{55}+\left(-\frac{21}{55}\right)$

8- مليل ناطق عددن جا هيٺيان عمل مختصر ڪريو:

(i) $\left(-\frac{1}{100}\right) \div \left(-\frac{1}{10}\right)$ (ii) $\frac{1}{5} \times \frac{2}{3} \times \left(-\frac{30}{44}\right)$

(iii) $\frac{2}{3} \div \frac{16}{21} \times \frac{27}{49}$ (iv) $\frac{8}{21} \div \frac{7}{12}$

(v) $\frac{1}{6} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \div \left(-\frac{11}{63}\right)$ (vi) $-\frac{2}{7} \div \frac{3}{4} \times \frac{63}{100}$

9- هيٺ مليل ناطق عددن ۾ ثابت ڪريو ته:

(i) $(-1) + \frac{35}{54} = \frac{35}{54} + (-1)$

(ii) $\left(-\frac{121}{169}\right) \times \left(-\frac{13}{11}\right) = \left(-\frac{13}{11}\right) \times \left(-\frac{121}{169}\right)$

(iii) $\frac{4}{9} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}\right) = \left(\frac{4}{9} \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{5}{7}$

(iv) $-\frac{4}{5} \times \left(\frac{1}{8} + \frac{11}{12}\right) = \left(-\frac{4}{5} \times \frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{4}{5} \times \frac{11}{12}\right)$

(v) $-\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{5}\right) = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) + \frac{3}{5}$

(vi) $\frac{5}{12} \times \left(-\frac{2}{7} - 2\right) = \left(\frac{5}{12} \times -\frac{2}{7}\right) - \left(\frac{5}{12} \times 2\right)$

10- هيٺين مليل ناطق عددن ۾ استعمال ٿيل خاصيتن جا نالا لکو:

(i) $\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)$

(ii) $\left(-\frac{10}{11}\right) \times \left(-\frac{5}{44}\right) = \left(-\frac{5}{44}\right) \times \left(-\frac{10}{11}\right)$

(iii) $-\frac{2}{3} \times \left(\frac{7}{8} \times \frac{9}{14}\right) = \left(-\frac{2}{3} \times \frac{7}{8}\right) \times \frac{9}{14}$

(iv) $-\frac{3}{5} + \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{10}\right) = \left(-\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right) + \frac{7}{10}$

(v) $-\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right) + \frac{1}{4}$

(vi) $\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{6}\right)$

(vii) $\left(-\frac{12}{105}\right)\times\left(-\frac{15}{84}\right)=\left(-\frac{15}{84}\right)\times\left(-\frac{12}{105}\right)$

(viii) $\frac{1}{4}\times\left(\frac{8}{9}-\frac{12}{15}\right)=\left(\frac{1}{4}\times\frac{8}{9}\right)-\left(\frac{1}{4}\times\frac{12}{15}\right)$

(ix) $-\frac{5}{8}\times\left(\frac{4}{7}-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\right)-\left(-\frac{5}{8}\times\frac{2}{3}\right)$

(x) $\frac{24}{49}\times\left(\frac{7}{8}+\frac{14}{6}\right)=\left(\frac{24}{49}\times\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{24}{49}\times\frac{14}{6}\right)$

خلاصو

- هرهڪ سجو عدد ڪنهن ٻئي غير ٻڙي سجي عدد سان ونڊجي سگهجي ٿو، ائين حاصل ٿيندڙ عدد کي ناطق عدد چئبو ۽ اُن کي نشانيءَ ۾ $\frac{a}{b}$ جي صورت ۾ لکبو، جڏهن ته $b\neq0$
- ساڳي ڇيد وارن ناطق عددن جو جوڙ اسين هن ريت حل ڪنداسين:
  $$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$
  مختلف ڇيدن وارن ناطق عددن جو جوڙ اسين هن ريت حل ڪنداسين:
  $$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$
- ساڳي ڇيد وارن ناطق عددن جي ڪٽ اسين هن ريت حل ڪنداسين:
  $$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$
  مختلف ڇيدن وارن ناطق عددن جي ڪٽ اسين هن ريت حل ڪنداسين:
  $$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$
- ٻن ناطق عددن جي ضرب جو اُپت معلوم ڪرڻ لاءِ هڪ ناطق عدد جي انس کي ٻئي جي انس سان ضرب ڪريو. ساڳيئي ريت ڇيدن کي پڻ پاڻ ۾ ضرب ڪريو.
  $$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$
- ضرب جو اُبتڙ عمل ونڊ آهي. انهيءَ ڪري ڪن به ٻن ناطق عددن $\frac{a}{b}$ ۽ $\frac{c}{d}$ لاءِ $(d\neq0)$
  $$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

- 0 کي جوڙ لاءِ ذاتي عنصر چئبو آهي ۽ 1 کي ضرب لاءِ ذاتي عنصر چئبو آهي.
- $\frac{b}{a}$ جو ضربي اُبتڙ $\frac{a}{b}$ آهي.
- جيڪڏهن $\frac{a}{b}$ ۽ $\frac{c}{d}$ کي بہ بہ ناطق عدد آهن تہ متا ستا واري خاصيت مطابق:

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\times\frac{a}{b} \quad ۽ \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

- جيڪڏهن $\frac{a}{b}$، $\frac{c}{d}$ ۽ $\frac{e}{f}$ کي بہ ٽي ناطق عدد آهن تہ سنگت واري خاصيت جي مطابق:

$$\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)\times\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\right) \quad ۽ \quad \left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$$

- جيڪڏهن $\frac{a}{b}$، $\frac{c}{d}$ ۽ $\frac{e}{f}$ کي بہ ٽي ناطق عدد آهن تہ ورهاست واري خاصيت جي مطابق آهي:

$$\text{(i)}\ \frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}\right) \quad \text{(ii)}\ \frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)-\left(\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}\right)$$

•••

خيالي ذخيرو:

اچو تہ عدد 37 جي متعلق عجيب معلومات تي غور ڪريون ۽ هيٺيان عمل مڪمل ڪريون.

$37 \times 9 = 333$	$37 \times 6 = 222$	$37 \times 3 = 111$
$37 \times \boxed{} = 666$	$37 \times (3 \times 5) = 555$	$37 \times (3 \times 4) = 444$
$37 \times \boxed{} = \boxed{}$	$37 \times \boxed{} = 888$	$37 \times \boxed{} = 777$

يونٽ 3

ڏهائي اٽپور

3.1 ڏهائي اٽپورن کي ناطق عددن ۾ مٽائڻ

اسين اڳيئي سکي چڪا آهيون تہ ڏهائي اٽپور اُهي عدد آهن، جيڪي انهن انگن تي مشتمل هوندا آهن، جن جو مڪاني ملهہ ڏهيون پتيون، سويون پتيون ۽ هزاريون پتيون وغيره ۾ هوندو آهي.

اچو تہ هڪ ڏهائي اٽپور 2.5 تي غور ڪريون. اِهو ٻن حصن تي مشتمل آهي. هڪ '2' جيڪو سجو آهي ۽ ٻيو '5.' جيڪو ڏهائي يا اٽپورو حصو آهي.

اِن ۾ ڏهائيءَ جو هڪ درجو آهي، چاڪاڻ تہ هتي ڏهائيءَ کان پوءِ رڳو هڪ انگ آهي.

هڪ ڏهائي اٽپور ۾ سجو حصو ۽ اٽپورو حصو تي سگهن ٿا. جيئن: 2.5، 14.57، 32.163 ۽ 103.0978 وغيره يا ڏهائي اٽپور ۾ رڳو اٽپورو حصو تي سگهي ٿو. جيئن: 0.6، 0.56 ۽ 0.10652 وغيره.

3.1.1 ڏهائي اٽپورن کي ناطق عددن ۾ مٽائڻ

اسين ڏهائي اٽپورن کي ناطق عددن ۾ هيٺين ريت مٽائي سگهون ٿا:

مثال 1: هڪ ڏهائي اٽپور 0.5 کي ناطق عدد ۾ مٽايو.

حل:
$$0.5 = \frac{05}{10} = \frac{5}{2 \times 5} = \frac{\cancel{5}^{1}}{2 \times \cancel{5}_{1}} = \frac{1}{2}$$

يا
$$0.5 = \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{10}_{2}} = \frac{1}{2}$$

ڏاڪا: (i) ڏهائيءَ جي هينان 1 لکو ۽ ڏهائيءَ کي ختم ڪريو.

(ii) 1 کان پوءِ ايترين ٻڙيون لڳايو، جيترا ڏهائيءَ کان پوءِ انگ آهن. (جيئن تہ اِن کي ڏهائيءَ جو هڪ درجو آهي، تنهن ڪري اسين 1 کان پوءِ هڪ ٻڙي لڳائينداسين.

(iii) هاڻي ان کي سادي صورت (معياري صورت) ۾ مٽايو.

اهڙي طرح $\qquad 0.5 = \frac{1}{2}$ ڏهائي اٽپور

مثال 2: ڏهائي اٽپور 0.06 کي ناطق عدد ۾ مٽايو.

حل: جيئن تہ 0.06 کي ڏهائي جا ٻہ درجا آهن، انهيءَ ڪري اسين 1 کان پوءِ ٻہ ٻڙيون لڳائينداسين.

$$0.06 = \frac{06}{100} = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{100}_{50}} = \frac{3}{50}$$ (ناطق عدد) ڏهائي اٽپور

اهڙي طرح اسان (ڏهائي اٽپور) $0.6 = \frac{3}{50}$ (ناطق عدد) حاصل ڪيو.
تنهنڪري $\frac{1}{2}$ ۽ $\frac{3}{50}$ ناطق عدد آهن.

مثال3: ڏهائي اٽپور 2.40 کي ناطق عدد ۾ مٽايو.

حل: ڏنل ڏهائي اٽپور ٻن حصن تي مشتمل آهي.هڪ سڄو حصو ’2‘ ۽ ٻيو اٽپورو حصو ’40‘؛
انهيءَ ڪري اسين پهريائين ڏهائي حصي ’.40‘ کي ناطق عدد ۾ مٽائينداسين.
هتي $.40 = \frac{40}{100}$ (جيئن ته .40 کي ڏهائي جا ٻه درجا آهن,تنهن ڪري اسين ’1‘ کان پوءِ ٻه ٻڙيون لڳائينداسين)

انهيءَ ڪري $2.40 = 2 + .40 = 2\frac{40}{100} = 2\frac{4}{10} = 2\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{10}_{5}} = 2\frac{2}{5} = \frac{12}{5}$

اهڙي طرح ڏهائي اٽپور $2.40 = \frac{12}{5}$ جيڪو عام اٽپور يا ناطق عدد آهي.

مثال4: -1.60 کي ناطق عدد ۾ مٽايو.
هتي سڄي حصي ’-1‘ کي سڄو رهڻ ڏبو ۽ اٽپوري حصي ’.60‘ کي عام اٽپور ۾ تبديل ڪبو.

انهيءَ ڪري

$$-1.60 = -(1 + .60)$$
$$= -\left(1 + \frac{6\cancel{0}}{10\cancel{0}}\right) = -\left(1 + \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{10}_{5}}\right)$$
$$= -\left(1 + \frac{3}{5}\right) = -1\frac{3}{5} = -\frac{8}{5}$$

اهڙي طرح ڏهائي اٽپور $-1.60 = -\frac{8}{5}$ جيڪو هڪ ناطق عدد آهي.

مشق 3.1

A- هينين هڪ درجي ڏهائي اٽپورن کي ناطق عددن ۾ مٽايو.

(1) 0.2 (2) 0.4 (3) 0.6 (4) 0.8 (5) 0.9

B- هينين ٻه درجي ڏهائي اٽپورن کي ناطق عددن ۾ مٽايو.

(1) 0.15 (2) 0.35 (3) 0.48 (4) 0.75 (5) 0.95
(6) – 1.30 (7) – 2.50 (8) 5.05 (9) 5.60 (10) 6.85

c- هيٺين تي درجي ڏهائي اڻپورن کي ناطق عددن ۾ مٽايو.

(1) 0.024 (2) 3.125 (3) 0.375 (4) 4.065 (5) 5.625
(6) −0.001 (7) −0.0005 (8) −0.005 (9) −5.005
(10) −11.375 (11) −0.00125 (12) −15.00625

3.2 ختم ٿيندڙ ۽ نہ ختم ٿيندڙ ڏهائي اڻپور

ڏهائي اڻپور بنيادي طور تي هيٺين ٻن قسمن جا هوندا آهن:

(i) ختم ٿيندڙ ڏهائي اڻپور (Terminating decimals)

(ii) نہ ختم ٿيندڙ ڏهائي اڻپور (Non-Terminating decimals)

3.2.1 ڏهائيءَ کان پوءِ انگن جي محدود تعداد رکندڙ ڏهائي اڻپورن جي طور تي ختم ٿيندڙ ڏهائي اڻپورن کي بيان ڪرڻ.

(i) ختم ٿيندڙ ڏهائي اڻپور:

مثال 1: اچو تہ ڪجھ ناطق عددن جي تبديلي تي غور ڪريون. $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{5}$، $\frac{1}{2}$ ۽ $\frac{3}{8}$

حل: (ii) $\frac{1}{5} = 1 \div 5$ $5\overline{)10}$ = 0.2 -10 0 اهڙي طرح $(\frac{1}{5} = 0.2)$	**حل:** (i) $\frac{1}{4} = 1 \div 4$ $4\overline{)10}$ = 0.25 -8 20 -20 0 اهڙي طرح $(\frac{1}{4} = 0.25)$
حل: (iv) $\frac{3}{8} = 3 \div 8$ $8\overline{)30}$ = 0.375 -24 60 -56 40 -40 0 تنهن ڪري $(\frac{3}{8} = 0.375)$	**حل:** (iii) $\frac{1}{2} = 1 \div 2$ $2\overline{)10}$ = 0.5 -10 0 تنهن ڪري $(\frac{1}{2} = 0.5)$

متين تبديليءَ ۾، وند جو عمل پورو ٿيو ۽ هرهڪ مثال ۾ پاچي ٻڙي آهي. اِهي ناطق عدد انهن ڏهائي اڻپورن ۾ تبديل ٿي چڪا آهن، جن ۾ ڏهائيءَ کان پوءِ انگن جو تعداد محدود آهي. اِهي ڏهائي اڻپور ختم ٿيندڙ ڏهائي اڻپور آهن.

اُهو ڏهائي اڻپور جنهن ۾ ڏهائيءَ کان پوءِ انگن جو تعداد محدود هجي، اُن کي ختم ٿيندڙ ڏهائي اڻپور چئبو آهي.
اهڙي طرح 0.5، 0.25، 0.75، 0.345، 1.7227، 5.023748 وغيره سڀ ختم ٿيندڙ ڏهائي اڻپور آهن.

3.2.2 ورجندڙ ڏهائي اڻپورن (Recurring decimals) کي اهڙن ڏهائي اڻپورن جي طور بيان ڪرڻ جن ۾ ڏهائيءَ کان پوءِ هڪ انگ يا انگن جو ٽولو وري لامحدود ڀيرا اچي.

جهڙوڪ $\frac{2}{7} = 0.\ 2\ 85\ 71\ 42\ 85\ 71\ 4\ \ldots$

(ii) نہ ختم ٿيندڙ ڏهائي اڻپور (Non –Terminal decimals)

مثال 1: ناطق عددن $\frac{7}{9}$ ، $\frac{1}{6}$ ۽ $\frac{10}{11}$ جي تبديليءَ تي غور ڪريو.

حل:	حل:	حل:
(iii) $\frac{10}{11} = 10 \div 11$	(ii) $\frac{1}{6} = 1 \div 6$	(i) $\frac{7}{9} = 7 \div 9$
$$\begin{array}{r} 0.909090\ldots \\ 11\overline{)100} \\ -99 \\ \hline 100 \\ -99 \\ \hline 100 \\ -99 \\ \hline 1 \end{array}$$	$$\begin{array}{r} 0.1666\ldots \\ 6\overline{)10} \\ -6 \\ \hline 40 \\ -36 \\ \hline 40 \\ -36 \\ \hline 4 \end{array}$$	$$\begin{array}{r} 0.777\ldots \\ 9\overline{)70} \\ -63 \\ \hline 70 \\ -63 \\ \hline 70 \\ -63 \\ \hline 7 \end{array}$$
انهيءَ ڪري $(\frac{10}{11} = 0.909090\ldots)$	انهيءَ ڪري $(\frac{1}{6} = 0.1666\ldots)$	انهيءَ ڪري $(\frac{7}{9} = 0.777\ldots)$

ڏنل ناطق عددن کي ڏهائي اڻپورن ۾ تبديل ڪرڻ سان، اِهو معلوم ٿيو ته:

(i) $\frac{7}{9} = 0.777\ldots$ ، (ii) $\frac{1}{6} = 0.1666\ldots$ ۽ (iii) $\frac{10}{11} = 0.909090\ldots.$

مطلب تہ هتي ونڊ جو عمل پورو نہ ٿيو آهي. اِهي ڏهائي اٽپور 0.777...، 0.1666... ۽ 0.909090... ڏهائيءَ کان پوءِ انگن جو لامحدود تعداد رکن ٿا. انهيءَ ڪري اهي ڏهائي اٽپور نہ ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور (Non- Terminating decimals) آهن.

تنهن ڪري

اهڙو ڏهائي اٽپور جنهن ۾ ڏهائيءَ کان پوءِ انگن جو لامحدود تعداد هجي، اُن کي نہ ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور (Non- Terminating decimals) چئبو آهي.

0.777... ۾ ڏهائيءَ کان پوءِ انگ '7' لامحدود پيرا وري وري آيو آهي.

0.1666... ۾ ڏهائيءَ کان پوءِ انگ '6' لامحدود پيرا وري وري آيو آهي.

0.9090909... ۾ ڏهائيءَ کان پوءِ انگن جو ٽولو '90' لامحدود پيرا وري وري آيو آهي.

اِهي نہ ختم ٿيندڙ ورجندڙ ڏهائي اٽپور (Recurring decimals) آهن.
اهڙو نہ ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور، جنهن ۾ ڏهائيءَ کان پوءِ 'هڪڙو انگ' يا 'انگن جو ٽولو' لامحدود پيرا وري وري اچي، اُن کي ورجندڙ ڏهائي اٽپور (Recurring decimals) چئبو آهي.

مثال2: ڏنل ناطق عددن کي ڏهائي اٽپورن ۾ مٽايو ۽ معلوم ڪريو تہ ڇا حاصل ٿيندڙ ڏهائي اٽپور ورجندڙ آهن يا نہ؟

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{7}{6}$ (iv) $\frac{9}{10}$

حل: ڏِکيي ونڊ کان پوءِ اسين ڏسي سگهون ٿا تہ:

(i) $\frac{2}{3} = 0.666\ldots$ ۽ (iii) $\frac{7}{6} = 1.1666\ldots$

هتي ٻنهي عددن ۾، ڏهائيءَ کان پوءِ انگ '6' لامحدود پيرا وري وري اچي ٿو. تنهن ڪري ٻئي نہ ختم ٿيندڙ ۽ ورجندڙ ڏهائي عدد (Non- Terminating and recurring decimals) آهن.

(ii) $\frac{3}{4} = 0.75$ ۽ (iv) $\frac{9}{10} = 0.9$

هتي اسين پاڇي ٻڙي حاصل ڪريون ٿا، تنهنڪري ٻئي ختم ٿيندڙ ڏهائي عدد (Terminating decimals) آهن.

مثال3: ڏنل ناطق عددن $\frac{1}{3}$، $\frac{4}{6}$ ۽ $\frac{2}{7}$ کي ڏهائي اٽپورن ۾ مٽايو ۽ معلوم ڪريو تہ ڇا حاصل ٿيندڙ ڏهائي اٽپور ورجندڙ آهن يا نہ.

حل:

(iii)	(ii)	(i)
$\frac{2}{7} = 2 \div 7$ $\begin{array}{r} 0.285714\ldots \\ 7\overline{)\,20} \\ -14 \\ \hline 60 \\ -56 \\ \hline 40 \\ -35 \\ \hline 50 \\ -49 \\ \hline 10 \\ -7 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 2 \end{array}$ تنهن ڪري $(\frac{2}{7}) = 2 \div 7$ $\frac{2}{7} = 0.285714285714\ldots$	$\frac{4}{6} = 4 \div 6$ $\begin{array}{r} 0.666\ldots \\ 6\overline{)\,40} \\ -36 \\ \hline 40 \\ -36 \\ \hline 40 \\ -36 \\ \hline 4 \end{array}$ تنهن ڪري $\frac{4}{6} = 0.666\ldots$ هتي 6 لامحدود ڊيرا وري وري آيو آهي. تنهن ڪري اهو ورجندڙ ڏهائي اٽپور (Recurring decimals) آهي.	$\frac{1}{3} = 1 \div 3$ $\begin{array}{r} 0.333\ldots \\ 3\overline{)\,10} \\ -9 \\ \hline 10 \\ -9 \\ \hline 10 \\ -9 \\ \hline 1 \end{array}$ تنهن ڪري $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$ هتي 3 لامحدود ڊيرا وري وري آيو آهي. تنهن ڪري اهو ورجندڙ ڏهائي اٽپور (Recurring decimals) آهي.

اهڙي طرح ...0.333، ...0.666 ۽ ...0.285714 نه ختم ٿيندڙ ۽ ورجندڙ ڏهائي اٽپور آهن: ڇاڪاڻ ته ڏهائيءَ کان پوءِ ’هڪڙو انگ‘ يا ’انگن جو ٽولو‘ لامحدود ڊيرا وري وري اچي ٿو ۽ ونڊ جو عمل پورو نه ٿيو آهي.

عملي ڪم: ختم ٿيندڙ يا نه ختم ٿيندڙ طور سڃاڻپ ڪريو.

ناطق عدد	ڏهائي اٽپور جي شڪل	ختم ٿيندڙ	نه ختم ٿيندڙ (ورجندڙ)
$\frac{4}{3}$	1.333 ...		نه ختم ٿيندڙ
$\frac{4}{9}$	0.444 ...		
$\frac{5}{4}$	1.25	ختم ٿيندڙ	
$\frac{25}{7}$	3.5714285 ...		
$\frac{3}{11}$	0.2727 ...		

مشق 3.2

I- هيٺ ڏنل ناطق عددن کي ڏهائي اٽپورن ۾ مٽايو ۽ ختم ٿيندڙ ۽ نہ ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپورن جي سڃاڻپ ڪريو.

(1) $\frac{7}{3}$	(2) $\frac{11}{6}$	(3) $-\frac{13}{9}$	(4) $\frac{15}{7}$	(5) $\frac{14}{9}$
(6) $-\frac{17}{11}$	(7) $\frac{19}{12}$	(8) $\frac{21}{13}$	(9) $-\frac{23}{14}$	(10) $-\frac{29}{15}$
(11) $\frac{31}{17}$	(12) $-\frac{35}{18}$	(13) $\frac{47}{19}$	(14) $\frac{35}{23}$	(15) $-\frac{20}{21}$
(16) $\frac{39}{22}$	(17) $-\frac{41}{29}$	(18) $\frac{40}{31}$	(19) $-\frac{50}{37}$	(20) $\frac{101}{41}$

II- هيٺ ڏنل ناطق عددن کي ڏهائي اٽپورن ۾ مٽايو ۽ سڃاڻپ ڪريو تہ ڪهڙو ورجندڙ آهي ۽ ڪهڙو نہ آهي؟

(1) $\frac{19}{20}$	(2) $\frac{17}{6}$	(3) $\frac{15}{8}$	(4) $\frac{25}{10}$	(5) $\frac{2}{11}$
(6) $\frac{10}{3}$	(7) $\frac{11}{12}$	(8) $\frac{16}{7}$	(9) $\frac{2}{13}$	(10) $\frac{4}{25}$

3.2.3 هيٺ ڏنل قاعدو اهو معلوم ڪرڻ لاءِ استعمال ڪريو تہ ڇا ڏنل ناطق عدد ختم ٿيندڙ آهي يا نہ؟

قاعدو: جيڪڏهن معياري صورت ۾ ناطق عدد جي ڇيد کي مفرد جزا 2 ۽ 5 يا رڳو 2، 5 هجن، تہ پوءِ اُهو ناطق عدد ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور (Terminating decimal) آهي.

اسين بنا ونڊ ڪندي مٿي ڏنل قاعدو استعمال ڪري، هڪ ناطق عدد جي سڃاڻپ ڪري سگهون ٿا تہ ڇا اِهو ختم ٿيندڙ يا نہ ختم ٿيندڙ آهي.

هينئين مثالن تي غور ڪريو:

ناطق عدد	ونڊ جو طريقو	قاعدي جو استعمال	ڏهائي اٽپور جو قسم
$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20} = 9 \div 20 = 0.45$	$\frac{9}{20} = \frac{9}{2 \times 2 \times 5}$ 2 ۽ 5 چيد جا مفرد جزا آهن.	ختم ٿيندڙ
$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5} = 3 \div 5 = 0.6$	$\frac{3}{5} = \frac{3}{5 \times 1}$ 5 چيد جو مفرد جزو آهي.	ختم ٿيندڙ
$\frac{27}{200}$	$\frac{27}{200} = 27 \div 200 = 0.135$	$\frac{27}{200} = \frac{27}{2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5}$ 2 ۽ 5 چيد جا مفرد جزا آهن.	ختم ٿيندڙ
$\frac{40}{90}$	$\frac{40}{90} = 40 \div 90 = 0.4444\ldots$	$\frac{40}{90} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 5}{2 \times 3 \times 3 \times 5} = \frac{2 \times 2}{3 \times 3}$ 5 ۽ 2 چيد جا مفرد جزا نہ آهن.	نہ ختم ٿيندڙ
$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7} = 4 \div 7 = 0.57142857\ldots$	$\frac{4}{7} = \frac{4}{7 \times 1}$ 5 ۽ 2 چيد جا مفرد جزا نہ آهن.	نہ ختم ٿيندڙ
$\frac{27}{18}$	$\frac{27}{18} = 27 \div 18 = 1.5$	$\frac{27}{18} = \frac{3 \times 9}{6 \times 3} = \frac{3 \times 3 \times 3}{2 \times 3 \times 3} = \frac{3}{2}$ 2 چيد جو مفرد جزو آهي.	ختم ٿيندڙ

مشق 3.3

وند کان سواءِ ختم ٿيندڙ ۽ نہ ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپورن کي ڌار ڪريو.

(1) $\frac{12}{25}$	(2) $\frac{43}{21}$	(3) $\frac{5}{12}$	(4) $\frac{17}{20}$	(5) $\frac{117}{125}$
(6) $\frac{5}{7}$	(7) $-\frac{9}{40}$	(8) $\frac{10}{33}$	(9) $\frac{23}{60}$	(10) $\frac{40}{35}$
(11) $\frac{55}{75}$	(12) $-\frac{96}{100}$	(13) $\frac{101}{125}$	(14) $\frac{111}{96}$	(15) $\frac{125}{200}$
(16) $\frac{141}{144}$	(17) $\frac{200}{201}$	(18) $-\frac{210}{147}$	(19) $\frac{372}{400}$	(20) $-\frac{401}{333}$

3.2.4 هڪ ناطق عدد کي ڏهائي اٽپور طور ظاهر ڪرڻ ۽ اهو ظاهر ڪرڻ تہ ڇا اهو ختم ٿيندڙ آهي يا ورجندڙ

هيٺين عددن جي تبديليءَ تي غور ڪريو.

(i) $\frac{7}{20}$ (ii) $2\frac{1}{100}$ (iii) $\frac{1}{7}$ (iv) $\frac{5}{9}$

حل:

(i) $\frac{7}{20} = 0.35$ (ii) $2\frac{1}{100} = 2.01$

جيئن تہ ٻنهي $\frac{7}{20}$ ۽ $\frac{1}{100}$ ۾ پاڇي ٻڙي آهي، تنهن ڪري اِهي ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور آهن هاڻي اچو تہ $\frac{1}{7}$ ۽ $\frac{5}{9}$ کي ڏهائي اٽپور ۾ تبديل ڪريون.

(iii) $\frac{1}{7} = 1 \div 7$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 10 \\ & -7 \\ \hline & 30 \\ & -28 \\ \hline & 20 \\ & -14 \\ \hline & 60 \\ & -56 \\ \hline & 4 \end{array} \quad 0.1428\ldots$$

انهيءَ ڪري $\frac{1}{7} = 0.1428571\ldots$

۽ وند جو عمل پورو نہ ٿيو آهي.

(iv) $\frac{5}{9} = 5 \div 9$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 50 \\ & -45 \\ \hline & 50 \\ & -45 \\ \hline & 50 \\ & -45 \\ \hline & 5 \end{array} \quad 0.555\ldots$$

انهيءَ ڪري $\frac{5}{9} = 0.555\ldots$

۽ وند جو عمل پورو نہ ٿيو آهي.

اسين ڏسون ٿا تہ ناطق عدد $\frac{1}{7}$ ۽ $\frac{5}{9}$ نہ ختم ٿيندڙ ۽ ورجندڙ ڏهائي اٽپور آهن.

مشق 3.4

هيٺ ڏنل ناطق عددن کي ڏهائي اٽپورن ۾ مٽايو ۽ اِهو پڻ ظاهر ڪريو ته هرهڪ ناطق عدد ختم ٿيندڙ آهي يا ورجندڙ.

(1) $\frac{5}{14}$ (2) $-\frac{13}{18}$ (3) $\frac{19}{20}$ (4) $-3\frac{21}{22}$ (5) $6\frac{17}{30}$

(6) $\frac{23}{40}$ (7) $3\frac{27}{32}$ (8) $-3\frac{49}{50}$ (9) $2\frac{45}{48}$ (10) $\frac{91}{65}$

(11) $-\frac{153}{85}$ (12) $\frac{266}{171}$ (13) $\frac{272}{288}$

3.3 اندازي طور مُلهه (Approximate value)

ڪنهن عدد جو گهربل ڏهائيءَ جي درجن تائين اندازي طور مُلهه حاصل ڪرڻ کي اندازي طور سادو ڪرڻ چئبو آهي.

حسابن ۾ اسان جو واسطو اهڙن ناطق عددن سان پئجي سگهجي ٿو، جيڪي نه ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور آهن. تنهن ڪري اسين ڏهائي اٽپورن کي ڏهائيءَ جي ڪجهه درجن تائين اندازي طور، سادو ڪندا آهيون ۽ پوءِ پنهنجا حسابَ حل ڪندا آهيون.

> **قاعدو:** (i) پُڌايل انگن کان پوءِ باقي بچيل انگن جي چڪاس ڪريو، جيڪڏهن پڌايل انگ کان پوءِ بيو انگ، 5 کان ننڍو آهي ته اُن کي ڇڏي ڏيو.
> (ii) جيڪڏهن بيو انگ 5 يا 5 کان وڏو آهي، ته عدد جي پوئين انگ ۾ 1 کي جوڙ ڪريو.

مثال 1: ڏهائي اٽپور ...0.555 کي ڏهائيءَ جي ٻن درجن تائين اندازي طور سادو ڪريو.

حل: اسان کي ڏهائيءَ جي ٻن درجن تائين اندازي طور سادو ڪرڻو آهي.

ڏاڪو 1: انهيءَ ڪري اسين ڏهائي اٽپور جا ٻه انگ ساڳيا رکنداسين يعني ...0.55

ڏاڪو 2: جيئن ته ڏهائيءَ جي ٻن درجن کان پوءِ نه ختم ٿيندڙ بيو انگ 5 آهي، انهيءَ ڪري اسين 0.55 جي پوئين انگ ۾ 1 جوڙ ڪنداسين.

اهڙي طرح ڏنل ڏهائي اٽپور ...0.555، ڏهائيءَ جي ٻن درجن تائين 0.56 اندازي طور سادو ٿيندو.

مثال2: 2.333333 کي ڏهائيءَ جي ٻن درجن تائين اندازي طور سادو ڪريو.
اسين 2.33 حاصل ڪنداسين.

مثال3: 4.88889 کي ڏهائيءَ جي ٻن درجن تائين اندازي طور سادو ڪريو.
مٿي ٻڌايل قاعدي موجب اسين 4.89 حاصل ڪنداسين.

عملي ڪم: ڏهائيءَ جي ڏنل درجن تائين، هيٺين ناطق عددن کي اندازي طور سادو ڪري ڏيکاريو.

سلسليوار عدد	عدد	ڏهائيءَ جي ٻن درجن تائين	ڏهائيءَ جي ٽن درجن تائين	ڏهائيءَ جي چئن درجن تائين
.1	0.05753	0.06	0.058	0.0575
.2	2.421875			
.3	0.83333			
.4	1.76794			
.5	0.9916667			
.6	0.96257			
.7	1.61538			
.8	8.08547			
.9	6.98677			
.10	15.47648			

مشق 3.5

I- هيٺين ناطق عددن کي ختم ٿيندڙ ۽ نہ ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپورن ۾ مٽايو ۽ ڏهائيءَ جي ٽن درجن تائين ظاهر ڪريو.

(1) $\frac{23}{400}$ (2) $\frac{27}{64}$ (3) $\frac{53}{60}$ (4) $-\frac{46}{75}$ (5) $\frac{69}{70}$

(6) $\frac{77}{80}$ (7) $-\frac{43}{90}$ (8) $\frac{119}{120}$ (9) $\frac{246}{300}$ (10) $-\frac{81}{96}$

II- وندُ جي مدد سان ختم ٿيندڙ ۽ نہ ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپورن جي سڃاڻپ ڪريو ۽ اُنهن ڪي ڏهائيءَ جي ٻن درجن تائين ظاهر ڪريو.

(1) $\frac{4}{15}$ (2) $-\frac{11}{12}$ (3) $\frac{8}{9}$ (4) $\frac{22}{7}$ (5) $-\frac{21}{16}$

(6) $\frac{3}{40}$ (7) $-\frac{18}{45}$ (8) $\frac{21}{66}$ (9) $\frac{33}{90}$ (10) $-\frac{81}{101}$

III- هيٺين ناطق عددن کي، نہ ختم ٿيندڙ يا ورجندڙ ڏهائي اٽپورن جي طور تي، ڏهائيءَ جي ٽن درجن تائين ظاهر ڪريو.

(1) $\frac{10}{11}$ (2) $-\frac{41}{90}$ (3) $\frac{21}{13}$ (4) $\frac{17}{19}$ (5) $\frac{9}{7}$

(6) $\frac{15}{23}$ (7) $-\frac{111}{96}$ (8) $\frac{22}{29}$

IV- هيٺين ڏهائي اٽپورن کي، ڏهائيءَ جي ٻن درجن تائين اندازي طور سادو ڪريو.

(1) 0.4555 (2) 0.3648 (3) 0.6666 (4) 0.1054
(5) 1.9091 (6) 3.2479 (7) 2.0518 (8) 8.3381
(9) 10.1036 (10) 3.9995 (11) 13.0967 (12) 15.8159

V- هيٺين ڏهائي اٽپورن کي، ڏهائيءَ جي ٽن درجن تائين اندازي طور سادو ڪريو.

(1) 4.51689 (2) 6.7472 (3) 0.0098 (4) 0.9861
(5) 206.4176 (6) 3.4073 (7) 102.99909 (8) 11.1234
(9) 55.12345 (10) 4.10539 (11) 66.3957 (12) 59.9196

جائزي واري مشق 3

1- هيٺين ڏهائي اٽپورن کي ناطق عددن ۾ مٽايو.

(i) 0.325 (ii) 0.75 (iii) 2.5 (iv) 7.75
(v) 0.78 (vi) 1.297 (vii) 2.348

2- هيٺين کي ڏهائي اٽپورن ۾ مٽايو ۽ نہ ختم ٿيندڙ اٽپورن جي سڃاڻپ ڪريو.

(i) $\frac{41}{5}$ (ii) $\frac{111}{12}$ (iii) $\frac{28}{9}$ (iv) $\frac{10}{7}$

(v) $\frac{22}{7}$ (vi) $\frac{21}{16}$ (vii) $\frac{73}{10}$

3- هيٺين کي ڏهائيءَ جي ٻن درجن تائين اندازي طور سادو ڪريو.

(i) 14.5828 (ii) 1078287 (iii) 5.7895
(iv) 6.7989 (v) 25.4897

4- ونڊ جي عمل کان سواءِ، ختم ٿيندڙ ۽ نہ ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپورن کي ڌار ڪريو.

(i) $\frac{13}{4}$ (ii) $\frac{17}{25}$ (iii) $\frac{80}{3}$ (iv) $\frac{15}{11}$
(v) $\frac{19}{6}$ (vi) $\frac{25}{15}$ (vii) $\frac{22}{7}$ (viii) $\frac{14}{9}$

5- هيٺين ناطق عددن کي ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپورن ۾ مٽايو.

(i) $\frac{21}{100}$ (ii) $\frac{127}{20}$ (iii) $\frac{13}{25}$ (iv) $\frac{31}{50}$ (v) $\frac{145}{1000}$
(vi) $\frac{25}{8}$ (vii) $\frac{23}{16}$ (viii) $\frac{88}{64}$ (ix) $\frac{48}{32}$

6- هيٺين ناطق عددن کي نہ ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپورن ۾ مٽايو ۽ ڏهائيءَ جي ٽن درجن تائين ظاهر ڪريو.

(i) $\frac{40}{3}$ (ii) $\frac{20}{7}$ (iii) $\frac{50}{11}$ (iv) $\frac{80}{13}$ (v) $\frac{100}{6}$
(vi) $\frac{240}{22}$ (vii) $\frac{70}{12}$ (viii) $\frac{52}{91}$

7- هيٺين ڏهائي اٽپورن کي ڏهائيءَ جي ٽن درجن تائين اندازي طور سادو ڪريو.

(i) 5.71679 (ii) 11.60365 (iii) 0.92598
(iv) 3.40855 (v) 0.74396 (vi) 23.15847

8- هيٺين سوالن جا جواب ڏيو:

(i) ختم ٿيندڙ ۽ نہ ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور ڇا آهن؟
(ii) ڏهائي اٽپورن کي ناطق عدد ۾ مٽائڻ جو طريقو لکو. هرهڪ جو مثال ڏيو.
(iii) ڪهڙن نہ ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپورن کي، ورجندڙ ڏهائي اٽپور چئبو آهي. ہ مثال ڏيو.
(iv) اُهو قاعدو ڪهڙو آهي، جيڪو اِهو معلوم ڪرڻ لاءِ استعمال ٿيندو آهي، تہ ڇا ڏنل ناطق عدد ختم ٿيندڙ آهي يا نہ؟
(v) ڏهائي اٽپورن ۾ اصطلاح ’اندازي طور سادو ڪرڻ‘ جو مطلب ڇا آهي؟

9- خال پريو:

(i) $\frac{1}{2} = 0.5$، جيڪو هڪ ______ آهي.
(ii) $\frac{1}{3} = 0.333...$، جيڪو هڪ ______ آهي.
(iii) هڪ ٽٻڪي سان ڌار ٿيل ڏهائي اٽپور جي ٻن حصن کي ______ ۽ ______ چئبو آهي.
(iv) ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپورن ۾، ونڊ جو عمل ڏاڪن جي محدود تعداد کان پوءِ ______ ٿي ويندو آهي.

(v) هڪ اٽپور کي ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور چئبو، جيڪڏهن ______ جي ڇيد جا جزا 2 يا 5 يا ٻئي هجن.

(vi) ورجندڙ ڏهائي اٽپور ۾ هڪڙو انگ يا انگن جو ______ وري وري اچي ٿو.

10- درست جواب تي (✓) جو نشان لڳايو.

(i) ڏهائي اٽپور ۾ سڄي حصي کي، اٽپوري حصي کان ڌار ڪرڻ لاءِ اسين نشاني استعمال ڪندا آهيون:

(الف) — (ب) : (ج) . (د) /

(ii) جيڪڏهن اسين 3.8461 کي ڏهائيءَ جي ٻن درجن تائين سادو ڪريون، ته اسان کي ________ ملندو:

(الف) 3.48 (ب) 3.81 (ج) 3.86 (د) 3.85

(iii) هڪ ناطق عدد ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور ٿيندو، جيڪڏهن هن جي ڇيد جا مفرد جزا نه هجن سواءِ ________ جي.

(الف) 2 ۽ 5 (ب) 3 ۽ 6 (ج) 4 ۽ 5 (د) 5 ۽ 7

(iv) جڏهن اسين 0.75 کي ناطق عدد ۾ مٽائينداسين ته اسان کي ملندو:

(الف) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{1}{7}$

خلاصو

- ڏهائي اٽپور بنيادي طور تي ٻن قسمن جا آهن:
  (i) ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور (ii) نه ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور
- هر اُهو ڏهائي اٽپور جنهن ۾ ڏهائيءَ کان پوءِ انگن جو تعداد محدود هجي، اُن کي ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور چئبو آهي.
- هڪ ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور، ناطق عدد کي ظاهر ڪندو آهي.
- هر اُهو ڏهائي اٽپور، جنهن ۾ ڏهائيءَ کان پوءِ انگن جو تعداد لامحدود هجي، اُن کي نه ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور چئبو آهي.
- نه ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور ورجندڙ يا نه ورجندڙ تي سگهي ٿو.
- هڪ اٽپور کي ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور چئبو، جيڪڏهن معياري صورت ۾ اُن جي ڇيد جا جزا 2 يا 5 يا ٻئي هجن.
- هيٺين ريت ڏهائي اٽپورن کي ڏهائيءَ جي گهربل درجي تائين اندازي طور سادو ڪري سگهجي ٿو:
  (i) باقي بچيل انگن جي چڪاس ڪريو. جيڪڏهن ٻيو انگ 5 کان ننڍو آهي، ته اُن کي ڇڏي ڏيو.
  (ii) جيڪڏهن ٻيو انگ 5 يا 5 کان وڏو آهي، ته پوين انگ ۾ 1 جوڙ ڪريو.

يونٽ
4

سگهه نما

4.1 سگهه نما يا قوت نما (Exponents/Indices)

4.1.1 بنياد، سگهه نما ۽ مُلهه جي سڃاڻپ ڪرڻ

اسان کي خبر آهي تہ جيڪڏهن هڪ عدد وري وري پنهنجو پاڻ سان ضرب ٿي تہ اُن کي سگهه واري صورت ۾ ظاهر ڪري سگهجي ٿو.

مثال طور: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

يا $\boxed{2^5 = 32}$

هتي 2 بنياد آهي.

5 سگهه نما يا قوت نما آهي.

32 مُلهه آهي،جيڪو 2 جي پنجين سگهه آهي.

اِن کي هن ريت پڙهبو: ’2 جي پنجين سگهه 32 آهي‘.

هاڻي اسين سگهه واري صورت سان واسطو رکندڙ اصطلاحن کي بيان ڪريون ٿا.

بنياد (Base):

بنياد هڪ اهڙو عدد آهي، جيڪو سگهه نما جي مطابق پنهنجي پاڻ سان ضرب ٿيندو آهي.

سگهه نما (Exponent or Index):

سگهه نما هڪ اهڙو عدد آهي، جيڪو اِهو ظاهر ڪري ٿو تہ بنياد پنهنجو پاڻ سان ڪيترا ڀيرا ضرب ٿيندو.

سگهه واري صورت جو مُلهه (Value of Exponential form):

سگهه نما جي مطابق بنياد جو پنهنجو پاڻ سان ضرب اُپت کي سگهه واري صورت جو مُلهه چئبو آهي.

مثال طور: $3^4 = 81$ يا $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

هتي 81 مُلهه آهي ’3 جي چوٿين سگهه‘ جو.

مثال 1: هيٺين مان بنياد ۽ سگهه نما جي سڃاڻپ ڪريو ۽ مُلهه بہ لکو.

(i) 2^4 (ii) 5^2 (iii) $\left(\frac{4}{7}\right)^3$ (iv) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

حل:

مُلهه	سگهه نما	بنياد	اظهار	سلسليوار نمبر
16 چاڪاڻ ته $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$	4	2	2^4	(i)
25 چاڪاڻ ته $5^2 = 5 \times 5 = 25$	2	5	5^2	(ii)
$\frac{64}{343}$ چاڪاڻ ته $\left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{64}{343}$	3	$\frac{4}{7}$	$\left(\frac{4}{7}\right)^3$	(iii)
$\frac{16}{81}$ چاڪاڻ ته $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$	4	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4$	(iv)

مشق 4.1

1- هرهڪ سگهه واري صورت کي کوليو ۽ اُن جو مُلهه لکو.

(i) 3^2 (ii) 2^7 (iii) $2^3 \times 3^4$

(iv) $5^2 \times 7^2$ (v) $2^3 \times 3^2 \times 5^2$ (vi) $2^4 \times 3^3 \times 7^2$

2- بنياد ۽ سگهه نما جي سڃاڻپ ڪريو. هيٺ ڏنل هرهڪ اظهار جو مُلهه به معلوم ڪريو.

(i) 2^5 (ii) 5^4 (iii) 6^3 (iv) $\left(\frac{2}{3}\right)^6$ (v) $\left(-\frac{1}{5}\right)^5$

3- ثابت ڪريو ته:

(i) $(-3)^3 = -27$ (ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$ (iii) $\left(-\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$

(iv) $\left(-\frac{1}{10}\right)^6 = \frac{1}{1000000}$ (v) $\left(-\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{625}{81}$ (vi) $\left(\frac{4}{5}\right)^5 = \frac{1024}{3125}$

4- هرهڪ ناطق عدد کي سگهه واري صورت ۾ ظاهر ڪريو.

(i) 1000 (ii) 512 (iii) −343 (iv) 625

(v) $-\frac{1}{100000}$ (vi) $\frac{32}{243}$ (vii) $-\frac{125}{343}$ (viii) $\frac{729}{64}$

4.2 سگهه نما جا قاعدا (Laws of Exponents/ Indices)

4.2.1 ناطق عددن کي استعمال ڪندي سگهه نما جا قاعدا حاصل ڪرڻ

سگهه نما جا ڪجهه قاعدا آهن، جيڪي سگهه نما واري صورت جي اظهارن کي سادو ڪرڻ ۾ اسان جي مدد ڪن ٿا. اهي قاعدا هيٺ ڏنل آهن.

ضرب اُپت جو قاعدو:

(I) جڏهن بنياد ساڳيا ۽ سگهه نما مختلف هجن ته ضرب اُپت جو قانون آهي:

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ جڏهن ته 'a' هڪ ناطق عدد آهي ۽ m، n قدرتي عدد آهن.

هي قاعدو حاصل ڪرڻ لاءِ، اچو ته هيٺين مثالن تي غور ڪريون.

(i) $2^3 \times 2^2 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2)$

يعني $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

ساڳي ريت $\boxed{2^3 \times 2^2 = 2^{3+2} = 2^5}$

(ii) $$\left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}\right)$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^7$$

يعني $$\boxed{\left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^7 = \left(\frac{2}{5}\right)^{3+4}}$$

اهڙي طرح اسان اهو نتيجو ڪڍيو سين ته جيڪڏهن ساڳي بنياد ۽ مختلف سگهه نما وارا ٻه ناطق عدد ضرب ڪيا وڃن، ته اسين بنياد ساڳيو رکندي، رڳو اُنهن جا سگهه نما جوڙ ڪنداسين.

يعني $\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$

جڏهن ته a هڪ ناطق عدد آهي ۽ m، n قدرتي عدد آهن.

مثال: ضرب اُپت جو قاعدو استعمال ڪندي سادو ڪريو.

(i) $\left(\frac{2}{7}\right)^4 \times \left(\frac{2}{7}\right)^5$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left(\frac{2}{5}\right)^5$

حل:

(i) $\left(\frac{2}{7}\right)^4 \times \left(\frac{2}{7}\right)^5$

$= \left(\frac{2}{7}\right)^{4+5}$ (ضرب أپت جو قاعدو استعمال ڪندي)

$= \left(\frac{2}{7}\right)^9$

(ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left(\frac{2}{5}\right)^5$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^{5+6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{4+5}$ (ضرب أپت جو قاعدو استعمال ڪندي)

$= \left(\frac{3}{4}\right)^{11} \times \left(\frac{2}{5}\right)^9$

(II) جڏهن بنياد مختلف پر سگهه نما ساڳيا هجن، تہ ضرب أپت جو قاعدو آهي:

$a^n \times b^n = (ab)^n$ جڏهن تہ a، b ناطق عدد آهن ۽ n هڪ قدرتي عدد آهي.

اِهو قاعدو حاصل ڪرڻ لاءِ اچو تہ هيٺين مثالن تي غور ڪريون:

(i) $3^4 \times 2^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2)$

$= 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4$

يعني $3^4 \times 2^4 = 6^4 = (3 \times 2)^4$

(ii) ساڳي ريت $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$

$= \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}\right)$

$= \left(\frac{2}{15}\right) \times \left(\frac{2}{15}\right) \times \left(\frac{2}{15}\right) = \left(\frac{2}{15}\right)^3$

يعني $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{15}\right)^3 = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}\right)^3$

اهڙي طرح اسان اِهو نتيجو ڪڍيوسين، تہ جيڪڏهن مختلف بنياد ۽ ساڳي سگهہ نما وارا بہ ناطق عدد پاڻ ۾ ضرب ٿين، تہ اسين سگهہ نما ساڳي رکندي، رڳو اُن جا بنياد پاڻ ۾ ضرب ڪنداسين.

يعني: $a^n \times b^n = (ab)^n$

جڏهن تہ a، b ناطق عدد آهن ۽ n هڪ قدرتي عدد آهي.

مثال: ضرب اُپت جو قاعدو استعمال ڪندي سادو ڪريو: (i) $\left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$ (ii) $x^3 \times y^3$

حل:

(i) $\left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{7} \times \frac{4}{5}\right)^2$$ (ضرب اُپت جو قاعدو استعمال ڪندي)

$$= \left(\frac{12}{35}\right)^2$$

(ii) $x^3 \times y^3$

$= (x \times x \times x) \times (y \times y \times y)$

$= (x \times y) \times (x \times y) \times (x \times y)$

$= (xy)(xy)\ (xy) = (xy)^3$

(ضرب اُپت جو قاعدو استعمال ڪندي)

$= x^3\ y^3$

مشق 4.2

1- ضرب اُپت جو قاعدو استعمال ڪندي سادو ڪريو.

(i) $\left(\frac{5}{7}\right)^2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^4$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^6 \times \left(\frac{1}{5}\right)^6$

(iii) $\left(\frac{1}{7}\right)^5 \times \left(\frac{1}{7}\right)^5 \times \left(-\frac{5}{7}\right)^8 \times \left(-\frac{5}{7}\right)^8$ (iv) $p^6 \times p^7$

(v) $y^5 \times x^{11} \times y^6$ (vi) $\left(\frac{4}{3}\right)^5 \times \left(\frac{4}{3}\right)^6 \times \left(\frac{4}{3}\right)^7$

(vii) $x^5 \times y^6 \times x^2 \times y^7$ (viii) $\left(-\frac{1}{3}\right)^6 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3$

(ix) $x^5 \times y^5 \times z^5$ (x) $p^2 \times q^7 \times p^5$

2- چڪاس ڪريو تہ:

(i) $2^5 \times 3^5 = 6^5$ (ii) $p^7 \times q^7 = (pq)^7$

(iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 = \left(\frac{3}{4}\right)^{12}$

(iv) $\left(\frac{1}{7}\right)^4 \times \left(\frac{1}{7}\right)^5 = \left(\frac{1}{7}\right)^9$

(v) $\left(-\frac{1}{8}\right)^6 \times \left(-\frac{3}{5}\right)^6 = \left(\frac{3}{40}\right)^6$

ونڊ اُپت جو قاعدو:

1. جيڪڏهن بنياد ساڳيا ۽ سگهه نما مختلف هجن، ته ونڊ اُپت جو قاعدو هي آهي:

$a^m \div a^n = a^{m-n}$ جڏهن ته $'a'$ هڪ ناطق عدد آهي ۽ m,n قدرتي عدد آهن.

اهو قاعدو حاصل ڪرڻ لاءِ، اچو ته هيٺين مثالن تي غور ڪريون.

(i) $3^6 \div 3^2 = \frac{3^6}{3^2}$

$= \frac{3\times3\times3\times3\times\cancel{3}\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times\cancel{3}}$

$= 3\times3\times3\times3 = 3^4$

يعني $3^6 \div 3^2 = 3^4 = 3^{6-2}$

(ii) ساڳي ريت $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \div \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

يعني $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \div \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2}$

اهڙي طرح اسان اهو نتيجو ڪڍيوسين، ته جڏهن ساڳي بنياد ۾ مختلف سگهه نما وارا ٻه ناطق عدد ونڊ ٿين، ته اسين بنياد ساڳيو رکندي، رڳو اُن جي سگهه نما کي ڪٽ ڪنداسين.

يعني $a^m \div a^n = a^{m-n}$

جڏهن ته a هڪ ناطق عدد آهي ۽ m، n قدرتي عدد آهن.

مثال: ونڊ اُپت وارو قاعدو استعمال ڪندي سادو ڪريو: $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \div \left(\frac{2}{3}\right)^2$

حل:

$\left(\frac{2}{3}\right)^6 \div \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{6-2}$ (ونڊ اُپت جو قاعدو استعمال ڪندي)

$= \left(\frac{2}{3}\right)^4$

2. جڏهن بنياد مختلف پر سگهه نما ساڳيا هجن، تہ وند اُپٽ جو قاعدو هي آهي:

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = a^n \div b^n$ جڏهن تہ a ۽ b ناطق عدد آهن ۽ $b \neq 0$ ۽ n هڪ قدرتي عدد آهي.

اِهو قاعدو حاصل ڪرڻ لاءِ اچو تہ هيٺين مثالن تي غور ڪريون:

$$\text{(i)}\quad 5^2 \div 3^2 = \frac{5^2}{3^2} = \frac{5\times5}{3\times3}$$

$$= \frac{5}{3}\times\frac{5}{3} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$\text{(ii)}\quad 7^3 \div 2^3 = \frac{7^3}{2^3} = \frac{7\times7\times7}{2\times2\times2}$$ ساڳي ريت

$$= \frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2} = \left(\frac{7}{2}\right)^3$$

اهڙي طرح اسان اهو نتيجو ڪڍيوسين، تہ جيڪڏهن مختلف بنيادن ۽ ساڳي سگهه نما وارا بہ ناطق عدد وند ٿين، تہ اسين اُن جي سگهه نما ساڳي رکندي، رڳو بنيادن کي وند ڪنداسين.

يعني $$a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

جڏهن تہ a، b ناطق عدد آهن ۽ $b \neq 0$ ۽ n هڪ قدرتي عدد آهي.

مثال 1: وند اُپٽ جو قاعدو استعمال ڪندي سادو ڪريو: $5^7 \div 3^7$

حل: $$5^7 \div 3^7 = \left(\frac{5}{3}\right)^7$$

مثال 2: وند اُپٽ جو قاعدو استعمال ڪندي سادو ڪريو: $6^5 \div 2^5$

حل: $$6^5 \div 2^5 = \left(\frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right)^5 = (3)^5$$

مشق 4.3

-1 وند اُپت جو قاعدو استعمال ڪندي سادو ڪريو.

(i) $5^7 \div 5^4$ (ii) $\left(\frac{5}{7}\right)^5 \div \left(\frac{5}{7}\right)^2$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^6 \div \left(\frac{1}{2}\right)^2$

(iv) $x^{10} \div x^4$ (v) $(5)^6 \div (3)^6$ (vi) $(10)^5 \div (2)^5$

(vii) $(-7)^4 \div (-5)^4$ (viii) $\left(\frac{2}{5}\right)^6 \div \left(\frac{3}{5}\right)^6$ (ix) $\left(\frac{7}{11}\right)^6 \div \left(\frac{7}{11}\right)^5$

(x) $x^4 \div y^4$

-2 چڪاس ڪريو:

(i) $\left(\frac{2}{9}\right)^5 \div \left(\frac{2}{9}\right)^2 = 2^3 \div 9^3$

(ii) $(-3)^8 \div (-5)^8 = \left(\frac{3}{5}\right)^{10} \div \left(\frac{3}{5}\right)^2$

(iii) $\left(\frac{x}{y}\right)^7 \div \left(\frac{x}{y}\right)^5 = x^2 \div y^2$

(iv) $5^{11} \div 5^8 = (20)^3 \div (4)^3$

سگهه وارو قاعدو:

(i) جيڪڏهن 'a' هڪ ناطق عدد ۽ m، n قدرتي عدد آهن تہ سگهہ وارو قاعدو هي آهي:

$$\mathbf{(a^m)^n = a^{mn}}$$

اِهو قاعدو حاصل ڪرڻ لاءِ اچو تہ هينين مثالن تي غور ڪريون:

(i)
$$(7^3)^2 = (7^3) \times (7^3)$$
$$= (7 \times 7 \times 7) \times (7 \times 7 \times 7) = 7^6$$
يعني $(7^3)^2 = 7^6 = (7)^{3\times 2}$

ساڳي ريت

(ii)
$$\left\{\left(\frac{11}{12}\right)^2\right\}^4 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 \times \left(\frac{11}{2}\right)^2 \times \left(\frac{11}{2}\right)^2 \times \left(\frac{11}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{11}{2} \times \frac{11}{2}\right) \times \left(\frac{11}{2} \times \frac{11}{2}\right) \times \left(\frac{11}{2} \times \frac{11}{2}\right) \times \left(\frac{11}{2} \times \frac{11}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}\right)^8$$
يعني $\left\{\left(\frac{11}{12}\right)^2\right\}^4 = \left(\frac{11}{2}\right)^8 = \left(\frac{11}{2}\right)^{2\times 4}$

اهڙي طرح اسان اِهو نتيجو ڪڍيوسين، تہ جيڪڏهن هڪ ناطق عدد جي سگهہ جي بہ سگهہ معلوم ڪرڻي هجي، تہ اسين بنياد ساڳيو رکندي، رڳو ٻنهي سگهہ نمائن ڪي ضرب ڪنداسين.

يعني: $(a^m)^n = a^{mn}$

جڏهن تہ 'a' هڪ ناطق عدد آهي ۽ m، n قدرتي عدد آهن.

مثال: سگهہ وارو قاعدو استعمال ڪندي سادو ڪريو. (i) $(2^5)^3$ (ii) $\left\{\left(\frac{3}{10}\right)^2\right\}^4$

حل:

(i) $(2^5)^3 = (2)^{5\times3} = 2^{15}$

(ii) $\left\{\left(\frac{3}{10}\right)^2\right\}^4 = \left(\frac{3}{10}\right)^{2\times4} = \left(\frac{3}{10}\right)^8$

سگهہ نما واري اظهار جو ملهہ لهڻ، جڏهن سگهہ نما ٻڙي هجي.

ٻڙي لاءِ $a^0=1$. جڏهن تہ a هڪ ناطق عدد آهي.

اسان کي خبر آهي تہ $\frac{a^2}{a^2} = \frac{a\times a}{a\times a} = 1$

ساڳي طرح $\frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0$

اهڙي طرح $a^0 = 1$

ساڳي ريت $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ ۽ $5^0 = 1,\ \left(\frac{5}{2}\right)^0 = 1$

سگهہ نما واري اظهار جو ملهہ لهڻ، جڏهن سگهہ نما ڪاٽو هجي.

جڏهن سگهہ نما ڪاٽو سچو عدد آهي تہ: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

اسان کي خبر آهي تہ: $\frac{1}{a^2} = \frac{a^o}{a^2}$

$= a^{0-2}$

$= a^{-2}$ (ونڊ اُپٽ واري قاعدي سان)

يعني $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ يا $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$

اهڙي طرح $6^{-7} = \frac{1}{6^7}$ ۽ $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$

عام طرح سان $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

تنهن ڪري $a^{-1} = \frac{1}{a}$

4.2.2 ڪاٽو سجي عدد جي سگهه جي تصور کي سمجهائي ڊيڪارٽ يعني تہ $(-a)^n$ جڏهن n هڪ ٻڌي عدد آهي يا اِڪي عدد آهي.

اچو تہ هيٺين مثالن تي غور ڪريون.

$(-3)^2 = (-3 \times -3) = +9$ (جڏهن سگهه نما عدد ٻڌي آهي)

$(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$ (جڏهن سگهه نما عدد اِڪي آهي)

$(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = +81$ (جڏهن سگهه نما عدد ٻڌي آهي)

$(-3)^5 = (-3)(-3)(-3)(-3)(-3) = -243$ (جڏهن سگهه نما عدد اِڪي آهي)

مٿين مثالن مان اسان نتيجو ڪڍيوسين تہ:

جيڪڏهن $(-a)^n = +a^n$ ٻڌي عدد آهي.

۽ جيڪڏهن $(-a)^n = -a^n$ اِڪي عدد آهي.

مثال: هيٺين مان ڪهڙا واڌو يا ڪاٽو آهن؟

(i) $(-5)^{11}$ (ii) $(-3)^{20}$ (iii) $(-8)^{113}$ (iv) $(-5)^{40}$

(v) $(-8)^{o}$ (vi) $(-7)^{-5}$ (vii) $(-110)^{-40}$

حل:

سلسليوار نمبر	اظهار	واڌو يا ڪاٽو	سبب
(i)	$(-5)^{11}$	ڪاٽو	سگهه نما اِڪي عدد آهي.
(ii)	$(-3)^{20}$	واڌو	سگهه نما ٻڌي عدد آهي.
(iii)	$(-8)^{113}$	ڪاٽو	سگهه نما اِڪي عدد آهي.
(iv)	$(-5)^{40}$	واڌو	سگهه نما ٻڌي عدد آهي.
(v)	$(-8)^{0}$	واڌو	سگهه نما ٻڌي عدد آهي.
(vi)	$(-7)^{-5}$	ڪاٽو	سگهه نما اِڪي عدد آهي.
(vii)	$(-110)^{-40}$	واڌو	سگهه نما ٻڌي آهي.

مشق 4.4

1- سگهہ وارو قاعدو استعمال ڪندي سادو ڪريو:

(i) $(5^2)^7$ (ii) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^6\right\}^8$ (iii) $\left\{(-3)^2\right\}^{10}$

(iv) $(x^5)^{20}$ (v) $\left\{\left(\frac{4}{7}\right)^9\right\}^2$ (vi) $\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)^{20}\right\}^2$

2- ڪاٽو سگهہ نما ۾ مٽايو:

(i) $\frac{1}{2^5}$ (ii) $\frac{1}{3^7}$ (iii) $\frac{1}{x^6}$ (iv) $\frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^6}$

3- واڌو سگهہ نما ۾ مٽايو:

(i) 5^{-8} (ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-7}$ (iii) x^{-5} (iv) y^{-7}

4- سڃاڻپ ڪريو تہ هيٺين مان ڪهڙا واڌو يا ڪاٽو آهن؟

(i) $(-7)^6$ (ii) $\left(-\frac{11}{2}\right)^{17}$ (iii) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-26}$

(iv) $(-3)^0$ (v) $\left(-\frac{1}{7}\right)^1$ (vi) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-100}$

4.2.3 اظهارن جو ملهہ ڪڍڻ لاءِ سگهہ نما جي قاعدن جو استعمال ڪرڻ

سگهہ نما جي قاعدن جي استعمال سان اظهارن کي آسانيءَ سان سادو ڪري سگهجي ٿو جيئن هيٺين مثالن ۾ سمجهايو ويو آهي.

مثال 1: سادو ڪريو ۽ سادي صورت ۾ لکو.

(i) $(2^5 \div 2^3) \times 2^{-2}$ (ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times (3)^6$

(iii) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3$

حل:

(i) $(2^5 \div 2^3) \times 2^{-2}$

$= 2^{5-3} \times 2^{-2} = 2^{5-3-2} = 2^0 = 1$

(ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3^6$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^{4+2} \times 3^6$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^6 \times 3^6$

$= \left(\frac{1}{\cancel{3}} \times \cancel{3}\right)^6$

$= (1)^6 = 1$

(iii) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3$

$= \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{4} \times \frac{4}{5}\right)^3$

$= \left(\frac{6}{6}\right)^2 + \left(\frac{20}{20}\right)^3 = (1)^2 + (1)^3$

$= 1 + 1 = 2$

مثال2: سگهه نما وارن قاعدن جو استعمال ڪندي، x جو ملهه لهو.

(i) $2^5 \times 2^3 = 2^x$

(ii) $\left(\frac{4}{5}\right)^6 \div \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^{2x}$

(iii) $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}^x = \left(\frac{3}{4}\right)^8$

حل:

(i) $2^5 \times 2^3 = 2^x$

يا $2^{5+3} = 2^x$

$2^8 = 2^x$

انهيءَ ڪري $8 = x$

يا $\boxed{x = 8}$

(ii) $\left(\frac{4}{5}\right)^6 \div \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^{2x}$

يا $\left(\frac{4}{5}\right)^{6-2} = \left(\frac{4}{5}\right)^{2x}$

يا $\left(\frac{4}{5}\right)^4 = \left(\frac{4}{5}\right)^{2x}$

انهيءَ ڪري $4 = 2x$

يا $\frac{4}{2} = x$ يعني $\boxed{x = 2}$

(iii) $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}^x = \left(\frac{3}{4}\right)^8$

يا $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{4}\right)^8$

انهيءَ ڪري $2x = 8$

يا $x = \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{2}_{1}}$

يا $\boxed{x = 4}$

مشق 4.5

1- سادو ڪريو ۽ سادي صورت ۾ لکو.

(i) $\left(\frac{5}{7}\right)^6 \times \left(\frac{5}{7}\right)^4 \times \left(\frac{7}{5}\right)^{10}$ (ii) $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}^3 \div \left(\frac{2}{3}\right)^4$

(iii) $\left(\frac{7}{9}\right)^3 \times \left(\frac{9}{7}\right)^3 + \left(\frac{11}{12}\right)^5 \times \left(\frac{12}{11}\right)^5$ (iv) $x^o + x^5 \times x^{-5}$

(v) $\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^7 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2\right\} \div \left(\frac{4}{5}\right)^8$ (vi) $\left\{\left(\frac{7}{8}\right)^6 \div \left(\frac{7}{8}\right)^4\right\} \times \left(\frac{8}{7}\right)^2$

2- هيٺين ۾ x جو ملهہ لهو:

(i) $3^6 \times 3^4 = 3^x$ (ii) $\left(\frac{11}{9}\right)^8 \div \left(\frac{11}{9}\right)^6 = \left(\frac{11}{9}\right)^{2x}$

(iii) $\left\{\left(\frac{4}{7}\right)^3\right\}^x = \left(\frac{4}{7}\right)^9$ (iv) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \times \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$

جائزي واري مشق 4

1- بنياد، سگهہ نما جي سڃاڻپ ڪريو ۽ هيٺين جو ملهہ لهو.

(i) 3^5 (ii) 7^4 (iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ (iv) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$ (v) 8^0 (vi) y^0

2- سگهہ نما وارن قاعدن جو استعمال ڪندي سادو ڪريو.

(i) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2$ (ii) $\left(-\frac{4}{5}\right)^2 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^2$ (iii) $6^7 \div 6^4$

(iv) $\left(\frac{2}{7}\right)^5 \div \left(\frac{2}{7}\right)^3$ (v) $(3^2)^5$ (vi) $\left\{(-4)^2\right\}^5$

(vii) $(6^o)^2$ (viii) $(5^o)^2 \times (-5) \times (a^o)^2$

3- ثابت ڪريو:

(i) $\left(\frac{1}{5}\right)^4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \left(\frac{3}{5}\right)^9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^9$ (ii) $(6)^4 \div (2)^4 = 3^8 \div 3^4$

(iii) $6z^o = 6 \times (z^o)^2$

4- ڪهڙو واڌو آهي ۽ ڪهڙو ڪاٽو آهي؟

(i) $(-2)^7$ (ii) $(-5)^0$ (iii) $(-3)^8$ (iv) $(-6)^{-7}$ (v) $(-8)^{-10}$

5- سادو ڪريو.

(i) $6^2 \div 3^3$ (ii) $5^0 \div 5^{-2} \times 5^2$

(iii) $\left[\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^2\right\}^3 \div \left(\frac{2}{5}\right)^4\right] \times \left(\frac{2}{5}\right)^3$

6- x جو ملهه لهو.

(i) $25^x = 125$ (ii) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \div \left(\frac{2}{3}\right)^2$

(iii) $\left\{\left(\frac{2}{7}\right)^x\right\}^5 = \left(\frac{2}{7}\right)^{10}$

خلاصو

- **بنياد:** بنياد اهو عدد آهي، جيڪو سگهه نما جي مطابق پنهنجو پاڻ سان ضرب ٿيندو آهي.
- **سگهه نما:** سگهه نما هڪ اهڙو عدد آهي، جيڪو اِهو ظاهر ڪري ٿو ته بنياد پنهنجي پاڻ سان ڪيترا ڀيرا ضرب ٿيندو.

- **سگهه وارو قاعدو:** $a^n \times b^n = (ab)^n$ (ii) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (i)

جڏهن ته a، b ناطق عدد آهن ۽ m، n قدرتي عدد آهن.

- **ونڊ اُپت وارو قاعدو:** $a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ (ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (i)

جڏهن ته a، b ناطق عدد آهن ۽ m، n قدرتي عدد آهن.

- **سگهه وارو قاعدو:** $(a^m)^n = a^{mn}$

جڏهن ته a هڪ ناطق عدد آهي ۽ m، n قدرتي عدد آهن.

- **خاصيتون:** $a^0 = 1$ (i) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (ii)

(iii) $(-a)^n$ واڌو ٿيندو، جيڪڏهن n ٻڌي.

(iv) $(-a)^n$ ڪاٽو ٿيندو، جيڪڏهن n اِڪي آهي.

دماغي ذخيرو: تمام گهٽي ڪارائتي چاڻ

فرض ڪيو، ڪو اوهان کي چوي ٿو: 1 کان 10 تائين سيني لاڳيتن عددن جو جوڙ لهو. اوهان اهو معامرو تمام آسانيءَ سان هن ريت حل ڪري سگهو ٿا:

عدد 10 ۽ اُن جي لاڳيتي قدرتي عدد 11 جي ضرب اُپت کي 2 سان ونڊ ڪريو. يعني:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = \frac{\cancel{10}^{5} \times 11}{\cancel{2}_{1}} = 55$$

ساڳي طرح اسان وڏيڪ بيا حساب ڪري سگهون ٿا:

(i) $$1 + 2 + 3 + \ldots + 20 = \frac{20 \times 21}{2} = \frac{\cancel{20}^{10} \times 21}{\cancel{2}_{1}} = 210$$

(ii) $$1 + 2 + 3 + \ldots + 25 = \frac{25 \times 26}{2} = \frac{25 \times \cancel{26}^{13}}{\cancel{2}_{1}} = 325$$

يونٽ 5

واڌو عددجو ٻيومول

5.1 مڪمل يا پورو چورس

ڪي عدد اهڙا ٻ هوندا آهن، جيڪي سگهه نما واري صورت ۾ لکي سگهجن ٿا. مثال طور: سگهه نما 2 جي صورت ۾ لکون ٿا: $16 = 4 \times 4 = 4^2$
اسين ان کي هن ريت پڙهنداسين: '4 جو چورس 16 آهي'. ساڳي ريت 3 جو چورس 9 آهي ڇاڪاڻ ته: $9 = 3 \times 3 = 3^2$

5.1.1 مڪمل يا پورو چورس بيان ڪرڻ

مٿين مثالن ۾ عددن 9 ۽ 16 کي پورا چورس عدد چئبو، ڇاڪاڻ ته اهي واڌو عدد آهن. اِهي 3 ۽ 4 عددن جا ترتيبوار چورس آهن.
اهڙو واڌو عدد جيڪو ڪنهن عدد جو چورس هجي، اُن کي مڪمل يا پورو چورس چئبو آهي. پوري چورس عددن جا ڪجهه مثال: 1، 4، 9، 16، 25، 36 وغيره آهن.

عملي ڪم: ڪجهه پورا چورس عدد معلوم ڪرڻ لاءِ هيٺين جدول مڪمل ڪريو:

عدد	مليل عدد (جو) چورس	پورو چورس (عدد)	هن ريت پڙهبو
1	$1^2 = 1 \times 1$	1	1 جو چورس 1 آهي
2	$2^2 =$ ______	4	2 جو چورس 4 آهي
-3	$(-3)^2 = (-3) \times (-3)$	9	___ جو چورس ___ آهي
5	$5^2 =$ ______	25	___ جو چورس 25 آهي
-6	___ $= (-6) \times (-6)$	___	(−6) جو چورس ___ آهي
___	$7^2 = 7 \times 7$	___	___ جو چورس ___ آهي
8	___ $= 8 \times 8$	___	___ جو چورس ___ آهي
___	___ $= (-9) \times (-9)$	___	___ جو چورس ___ آهي
___	___ = ___	100	___ جو چورس 100 آهي

5.1.2 جاچ ڪرڻ ته ڪو مليل عدد پورو چورس آهي يا نه

اسين هيٺين طريقي سان جاچ ڪري سگهون ٿا ته ڪو مليل عدد پورو چورس آهي يا نه.
1. پهريائين اُن مليل عدد جا مفرد جزا معلوم ڪري لکو.

2. اُن کان پوءِ حاصل ٿيل مفرد جزن جا جوڙا ناهيو.

3. جيڪڏهن هرهڪ مفرد جزو، جوڙو ناهي ٿو ته اُهو عدد پورو چورس آهي.

4. جيڪڏهن ڪوبہ مفرد جزو جوڙو نٿو ناهي ته عدد پورو چورس نہ آهي.

مثال: جاچ ڪريو ته هيٺيان مليل عدد پورا چورس آهن يا نہ.

(i) 5625 (ii) 4563

حل: (i)

مليل عدد جي مفرد جزو ضربي صورت = $\underline{5 \times 5} \times \underline{5 \times 5} \times \underline{3 \times 3}$

جيئن ته هرهڪ مفرد جزو جوڙي ۾ آهي،

تنهن ڪري 5625 هڪ پورو چورس آهي.

5	5625
5	1125
5	225
5	45
3	9
	3

حل: (ii)

مليل عدد جي مفرد جزو ضربي صورت = $\underline{3 \times 3} \times 3 \times \underline{13 \times 13}$

جيئن ته هتي عدد 3 جا جوڙا ناهڻ ۾ هڪڙو 3 بچي پيو آهي.

تنهن ڪري 4563 پورو چورس نہ آهي.

3	4563
3	1521
3	507
13	169
13	13
	1

5.1.3 پوري چورس عدد جون خاصيتون

پوري چورس عددن جي ڪجهہ دلچسپ خاصيتن جي سڃاڻپ ڪرڻ ۽ استعمال ڪرڻ.

(i) بڏي عدد جو چورس بڏي آهي

اسان کي خبر آهي تہ اهڙا عدد جيڪي 2 سان پورو پورو ونڊجي سگهجن، تن کي بڏي عدد چئبو آهي. هيٺ ڪجهہ بڏي عددن جا چورس ڏنل آهن.

بڌي عدد	مليل بڌي عدد جو چورس	پورو چورس عدد
2	$2^2 = 2 \times 2$	4
4	$4^2 = 4 \times 4$	16
6	$6^2 = 6 \times 6$	36
8	$8^2 = 8 \times 8$	64
10	$10^2 = 10 \times 10$	100

بڌي عددن ۽ اُنهن جي پوري چورس عددن جي پاڻ ۾ ڀيٽ ڪندي، اسان اهو نتيجو ڪيون ٿا ته سيني بڌي عددن جا چورس به بڌي هوندا آهن.

(ii) اِڪي عدد جو چورس اِڪي هوندو آهي

اسان کي خبر آهي ته اِڪي عدد، 2 سان پورو پورو نه ونڊجي سگهندا آهن. اچو ته ڪجھ اِڪي عددن ۽ اُنهن جي پوري چورس عددن جي سڄاڻپ ڪريون.

اِڪي عدد	مليل اِڪي عدد جو چورس	پورو چورس عدد
1	$1^2 = 1 \times 1$	1
3	$3^2 = 3 \times 3$	9
5	$5^2 = 5 \times 5$	25
7	$7^2 = 7 \times 7$	49
9	$9^2 = 9 \times 9$	81

مٿين جدول مان اهو ظاهر آهي ته سيني اِڪي عددن جا چورس، به اِڪي هوندا آهن.

(iii) واجب اٽيور جو چورس پنهنجي واجب اٽيور کان ننڍو هوندو آهي

اسان کي خبر آهي ته هڪ اٽيور کي واجب اٽيور چئبو، جيڪڏهن اُن جو ڇيد اُن جي انس کان وڏو هجي.

اچو ته هيٺين مثالن سان هڪ واجب اٽيور جو چورس ڪرڻ جو طريقو ۽ ڀيٽ ڪرڻ سکون.

مثال 1: $\frac{3}{4}$ جو چورس معلوم ڪريو ۽ پنهنجي پاڻ سان ڀيٽ ڪريو.

حل: اچو ته $\frac{3}{4}$ جو چورس معلوم ڪريون.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3 \times 3}{4 \times 4} = \frac{9}{16}$$

هاڻي هم چيد اڻپور بٽائي اُنهن جي ڀيٽ ڪندي، ڏسون ٿا:

ڏنل عدد آهي $\frac{12}{16} = \frac{3 \times 4}{4 \times 4} = \frac{3}{4}$ ۽ $\frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$

هتي $\frac{12}{16} > \frac{9}{16}$ (تنهن ڪري ڏنل عدد جو چورس، ڏنل عدد کان ننڍو آهي.)

يعني $\frac{3}{4} > \frac{9}{16}$ يا $\frac{3}{4} > \left(\frac{3}{4}\right)^2$

تنهن ڪري ثابت ٿيو ته مليل واجب اڻپور جو چورس، پنهنجي واجب اڻپور کان ننڍو آهي.

ساڳيءَ ريت $\frac{4}{81} = \frac{2 \times 2}{9 \times 9} = \left(\frac{2}{9}\right) \times \left(\frac{2}{9}\right) = \left(\frac{2}{9}\right)^2$ ۽ $\frac{2}{9} > \frac{4}{81}$ يا $\frac{2}{9} > \left(\frac{2}{9}\right)^2$

$\frac{1}{49} = \frac{1 \times 1}{7 \times 7} = \left(\frac{1}{7}\right) \times \left(\frac{1}{7}\right) = \left(\frac{1}{7}\right)^2$ ۽ $\frac{1}{7} > \frac{1}{49}$ يا $\frac{1}{7} > \left(\frac{1}{7}\right)^2$

(iv) 1 کان ننڍي ڏهائي اڻپور جو چورس، ڏنل ڏهائي اڻپور کان ننڍو هوندو آهي

هيٺين مثالن تي غور ڪريو.

مثال: 0.2 جو چورس معلوم ڪريو ۽ اُن سان ڀيٽ ڪريو.

حل: 0.2 جو چورس آهي $(0.2)^2 = (0.2) \times (0.2) = \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{4}{100} = 0.04$

اسان ڏٺوسين ته $0.04 < 0.2$

يا $(0.2)^2 < 0.2$

اهو ظاهر آهي ته '1' کان ننڍي ڏهائي اڻپور جو چورس، هميشه ڏنل اڻپور کان ننڍو ٿيندو آهي.

ساڳيءَ ريت $(0.03)^2 = (0.03) \times (0.03) = \frac{3}{100} \times \frac{3}{100} = \frac{9}{10000} = 0.0009$

اهو ظاهر آهي ته $0.0009 < 0.03$

يا $(0.03)^2 < 0.03$

۽ $(0.12)^2 = (0.12) \times (0.12) = \frac{12}{100} \times \frac{12}{100} = \frac{144}{10000} = 0.0144$

انهيءَ ڪري $0.0144 < 0.12$

يا $(0.12)^2 < 0.12$

مشق 5.1

A- هيٺين جا چورس معلوم ڪريو.

(1)	11	(2)	19	(3)	25	(4)	50
(5)	66	(6)	78	(7)	100	(8)	500

B- جاچ ڪريو تہ ڇا هيٺين مان هرهڪ پورو پورو چورس آهي يا نہ؟

(1)	81	(2)	95	(3)	121	(4)	169
(5)	224	(6)	3969	(7)	3872	(8)	9845

C- ڀڃي ۽ اِڪي عددن جا پورا چورس جدا جدا ڪريو.

(i)	9	(ii)	25	(iii)	196	(iv)	441	(v)	2704
(vi)	3600	(vii)	9216	(viii)	9801				

D- هيٺين واجب اٽپورن جا چورس معلوم ڪريو ۽ پنهنجي پاڻ سان ڀيٽ ڪريو.

(1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{3}{7}$ (3) $\frac{8}{9}$ (4) $\frac{5}{6}$ (5) $\frac{2}{3}$

E- هيٺين ڏهائي اٽپورن جا چورس معلوم ڪريو ۽ پنهنجي پاڻ سان ڀيٽ ڪريو.

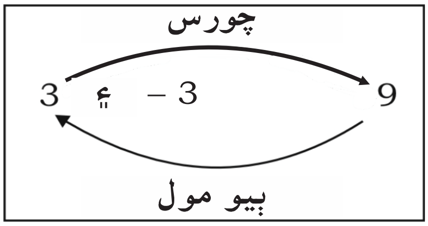
(1) 0.1 (2) 0.5 (3) 0.07 (4) 0.11 (5) 0.15

5.2 ٻيو مول

5.2.1 قدرتي عدد جو ٻيو مول معلوم ڪرڻ ۽ اُن جي نشانيءَ جي سڃاڻپ ڪرڻ

ڪنهن عدد جو ٻيو مول هڪ اهڙو عدد هوندو آهي، جيڪو پنهنجو پاڻ سان ضرب ٿيڻ تي اصل عدد ڏي. هي عام زندگيءَ سان واسطو رکندڙ حسابي مساواتن کي حل ڪرڻ جو هڪ ڪارائتو طريقو آهي. ٻيو مول هڪ قديم مصر ملڪ جي رهواسي ’مصري‘ متعارف ڪرايو، جنهن اُن کي اَڏاوت ۾ ٻين عملي ڪمن ۾ استعمال ڪيو.

اسين پورو چورس معلوم ڪرڻ ڄاڻون ٿا. بيو مول معلوم ڪرڻ جو طريقو رڳو ان جي اُبتڙ آهي. جيئن تہ: $3^2 = 3 \times 3 = 9$ ۽ $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$ اسين انهن ٻنهي عملن کي ملائي، نتيجو هن ريت پڙهنداسين '9' جا ٻيا مول 3 ۽ 3– آهن.



تنهن ڪري هر قدرتي عدد جي چورس جا ٻہ ٻيا مول هوندا آهن. هڪ واڌو ۽ ٻيو ڪاٽو. هتي هن ڪتاب ۾ اسان رڳو واڌو ٻيو مول ڪڍنداسين.

ڪنهن عدد جي ٻئي مول لاءِ نشاني '$\sqrt{\ }$' (Radical Sign) استعمال ٿيندي آهي. 9 جو ٻيو مول هن ريت $\sqrt{9}$ لکي سگهجي ٿو، جڏهن تہ 9 کي مول لاءِ پايو 'Radicand' چئبو آهي.

عام طرح سان ٻيو مول '$x^2 - y = 0$' يا '$x^2 = y$' قسم جي مساوات کي حل ڪرڻ لاءِ استعمال ٿيندو آهي جڏهن تہ y کي x جو چورس چئبو ۽ x کي y جو ٻيو مول چئبو.

5.2.2 قدرتي عدد، اٽپور ۽ ڏهائي اٽپور جو ٻيو مول ونڊ جي طريقي ۽ جزن جي طريقي سان معلوم ڪرڻ

ڪنهن عدد جو ٻيو مول معلوم ڪرڻ جا ٻہ طريقا آهن. پهريون جزن جي طريقي سان ۽ ٻيو ونڊ جي طريقي سان.

(i) جزن جي طريقي سان ٻيو مول لهڻ

مثال 1: جزن جي طريقي سان هيٺين جو ٻيو مول لهو:

(i) 256 (ii) 3969

حل: **(i)** سڀ کان اڳ ۾ اسين 256 جي مفرد جزن واري صورت معلوم ڪنداسين.

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$$256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

هاڻي $\sqrt{256} = \sqrt{\underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}}$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2$ (جزن جا جوڙا ناهيندي)

$= 16$

انهيءَ ڪري $\sqrt{256} = 16$

چڪاس: $16 \times 16 = 256$

حل: **(ii)** پهريان اسين 3969 جي مفرد جزن واري صورت معلوم ڪنداسين.

3	3969
3	1323
3	441
3	147
7	49
7	7
	1

تنهنڪري $3969 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$

هاڻي $\sqrt{3969} = \sqrt{\underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{7 \times 7}}$

(جزن جا جوڙا ناهيندي) $\sqrt{3969} = 3 \times 3 \times 7$ يا

$= 63$

تنهنڪري $\sqrt{3969} = 63$

چڪاس: $63 \times 63 = 3969$

مثال2: جزن واري طريقي سان هيٺين جو ٻيو مول لهو.

(i) $\dfrac{64}{81}$ (ii) $2\dfrac{113}{256}$

حل: **(i)** اسين هيٺين ريت انس ۽ ڇيد جو ٻيو مول جدا جدا معلوم ڪنداسين.

64 ۽ 81 جي مفرد جزن واري صورت معلوم ڪندي، اسان حاصل ڪيو:

انس

2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

ڇيد

3	81
3	27
3	9
3	3
	1

انس $64 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}$

ڇيد $81 = \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3}$

$$\sqrt{\frac{64}{81}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{81}} = \frac{\sqrt{\underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}}}{\sqrt{\underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3}}}$$

$$= \frac{2 \times 2 \times 2}{3 \times 3} = \frac{8}{9}$$

حل: **(ii)** $2\dfrac{113}{256} = \dfrac{625}{256}$ (مرڪب اٽپور کي غير واجب اٽپور ۾ تبديل ڪندي)

625 ۽ 256 جي مفرد جزن واري صورت معلوم ڪندي،
اسان حاصل ڪيو:

5	625
5	125
5	25
5	5
	1

انس

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

چيد

انس $625 = \underline{5\times5}\times\underline{5\times5} = 5^2\times5^2$

چيد $256 = \underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}$

انهيءَ ڪري $\sqrt{2\frac{113}{256}} = \sqrt{\frac{625}{256}}$

يا $\sqrt{2\frac{113}{256}} = \frac{\sqrt{625}}{\sqrt{256}} = \frac{\sqrt{\underline{5\times5}\times\underline{5\times5}}}{\sqrt{\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}}}$

$= \frac{5\times5}{2\times2\times2\times2}$

يا $\sqrt{2\frac{113}{256}} = \frac{25}{16} = 1\frac{9}{16}$

مثال3: جزن واري طريقي سان هيٺين ڏهائي اٽپورن جو بيو مول لهو.

(i) 1.44 (ii) 0.81

حل: (i) $1.44 = \frac{144}{100}$ (ڏهائي اٽپور کي عام اٽپور ۾ تبديل ڪندي)

2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

انس

2	100
2	50
5	25
5	5
	1

چيد

هاڻي $\sqrt{1.44} = \sqrt{\frac{144}{100}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}}$

يا $\sqrt{1.44} = \frac{\sqrt{\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{3\times3}}}{\sqrt{\underline{2\times2}\times\underline{5\times5}}} = \frac{2\times2\times3}{2\times5} = \frac{12}{10}$

يا $\sqrt{1.44} = 1.2$ (ڏهائي اٽپور ۾ تبديل ڪندي)

حل: (ii) $0.81 = \frac{81}{100}$

3	81
3	27
3	9
3	3
	1

انس

2	100
2	50
5	25
5	5
	1

چيد

$\sqrt{0.81} = \sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{100}}$

يا $\sqrt{0.81} = \frac{\sqrt{\underline{3\times3}\times\underline{3\times3}}}{\sqrt{\underline{2\times2}\times\underline{5\times5}}} = \frac{3\times3}{2\times5}$

يا $\sqrt{0.81} = \frac{9}{10} = 0.9$

(ii) ونڊ جي طريقي سان ٻيو مول لهڻ

هي طريقو عددن جو ٻيو مول معلوم ڪرڻ جو ڏاڍو ڪارائتو طريقو آهي. سڀ کان اڳ ۾ مول جي پايي جي انگن جا جوڙا نهڻ لازمي آهن. اچو تہ هيٺين مثالن جي مدد سان، قدرتي عددن، اٽپورن ۽ ڏهائي اٽپورن جي پوري چورس عددن جو ٻيو مول ونڊ واري طريقي سان لهڻ سکون.

مثال 1: ونڊ واري طريقي سان هيٺين قدرتي عددن جو ٻيو مول لهو.

(i) 256 (ii) 1024

حل: (i)

ڏاڪو 1: ايڪن کان شروع ڪندي، انگن جا جوڙا ناهڻ شروع ڪريو ۽ هرهڪ جوڙي جي مٿان هڪ ليڪ ٽڪر '—' (Bar) لڳايو. (جيڪڏهن انگن جي تعداد اِڪي هجي، تہ سڀ کان کاٻي پاسي واري انگ کي اڪيلو ڇڏي ڏبو ۽ اُن کي هڪ جوڙو سمجهيو ويندو. جيئن: $\hat{2}\overline{56}$)

ڏاڪو 2: سڀ کان کاٻي پاسي واري جوڙي تي غور ڪريو يعني '2' تي. اهڙو عدد معلوم ڪريو، جنهن جو چورس يا تہ 2 هجي يا 2 جي ڏاڍو ويجهو هجي، پر 2 کان ننڍو هجي. اُهو عدد '1' آهي.

ڏاڪو 3: 1 جي چورس $(1^2 = 1 \times 1 = 1)$ 1 کي جوڙي مان ڪٽ ڪريو، يعني $2 - 1 = 1$ ۽ ٻئي جوڙي کي هيٺ ڪٽي اچو جيڪو '56' آهي.

ڏاڪو 4: ونڊيندڙ کي پنهنجو پاڻ سان جوڙ ڪريو ۽ اُن کي نئين ونڊيندڙ جو سڀ کان کاٻي پاسي وارو انگ ناهيو.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 16 \\ \hline
1 & \hat{2}\overline{56} \\
+1 & -1 \\ \hline
26 & \ \ 156 \\
+6 & -156 \\ \hline
32 & \quad 0
\end{array}
$$

ڏاڪو 5: ٻيهر هڪ اهڙو وڏي ۾ وڏو عدد معلوم ڪريو، جنهن جي ايڪي واري مڪاني ملهہ تي ونڊيندڙ سان ضرب نئين ونڊٽي (156) جي برابر يا اُن کان ننڍي اچي. يعني $\boxed{26 \times 6 = 156}$ جڏهن پاچي ٻڙي اچي ۽ ڏنل عدد جا سڀ انگ استعمال ٿي وڃن تہ عمل بيهي ويندو.

ڏاڪو 6: ونڊ واري طريقي ۾ ونڊ اُپت گهربل ٻيو مول آهي، جيڪو چورس ڪرڻ سان ثابت ٿي سگهجي ٿو.

اهڙي طرح $\sqrt{256} = 16$

حل: (ii)

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 32 \\ \hline
3 & \overline{10}\ \overline{24} \\
+3 & -9 \\ \hline
62 & \ \ 124 \\
+2 & -124 \\ \hline
64 & \quad 0
\end{array}
$$

انهيءَ ڪري $\sqrt{1024} = 32$

مثال2: ونڊ واري طريقي سان $1\frac{1089}{1936}$ جو ٻيو مول لھو.

حل:

جيئن تہ $1\frac{1089}{1936}=\frac{3025}{1936}$ $\quad \left(1\frac{1089}{1936}=\frac{1\times1936+1089}{1936}=\frac{3025}{1936}\right)$

(چيڊ جو ٻيو مول $\overline{19}\,\overline{36}$) =

$$\begin{array}{r|l} & \;\;44 \\ \hline 4 & \overline{19}\;\overline{36} \\ +4 & -16 \\ \hline 84 & 336 \\ +4 & -336 \\ \hline 88 & 0 \end{array}$$

(انس جو ٻيو مول $\overline{30}\,\overline{25}$) =

$$\begin{array}{r|l} & \;\;55 \\ \hline 5 & \overline{30}\;\overline{25} \\ +5 & -25 \\ \hline 105 & 525 \\ +5 & -525 \\ \hline 110 & 0 \end{array}$$

اھڙي طرح $\sqrt{1\frac{1089}{1936}}=\sqrt{\frac{3025}{1936}}=\frac{\sqrt{3025}}{\sqrt{1936}}=\frac{55}{44}=\frac{\cancel{55}^{5}}{\cancel{44}_{4}}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$

انھيءَ ڪري $\sqrt{1\frac{1089}{1936}}=1\frac{1}{4}$

مثال3: ھيٺين ڏھائي اٽپورن جو ونڊ واري طريقي سان ٻيو مول معلوم ڪريو.

(i) 10.24 (ii) 249.64 (iii) 0.0441

حل:

(i)

$$\begin{array}{r|l} & \;\;3.2 \\ \hline 3 & \overline{10}.\overline{24} \\ +3 & -9 \\ \hline 62 & 124 \\ +2 & -124 \\ \hline 64 & 0 \end{array}$$

اھڙي طرح $\sqrt{10.24}=3.2$

(ii)

$$\begin{array}{r|l} & \;\;15.8 \\ \hline 1 & \hat{2}49.64 \\ +1 & -1 \\ \hline 25 & 149 \\ +5 & -125 \\ \hline 308 & 2464 \\ +8 & -2464 \\ \hline 316 & 0 \end{array}$$

انھيءَ ڪري $\sqrt{249.64}=15.8$

(iii)

$$\begin{array}{r|l} & \;\;0.21 \\ \hline 2 & 0.\overline{04}\;\overline{41} \\ 2 & -4 \\ \hline 41 & 041 \\ +1 & -41 \\ \hline 42 & 0 \end{array}$$

انھيءَ ڪري $\sqrt{0.0441}=0.21$

نوٽ: ڏھائي اٽپور ۾ جوڙن ناھڻ جو عمل ڏھائيءَ جي ٻنھي پاسن کان شروع ٿيندو. ڏھائيءَ واري اٽپوري حصي ۾ جوڙا پورا ڪرڻ لاءِ '0' رکي سگھجي ٿي.

مشق 5.2

A- هينين مان هرهڪ جو ٻيو مول لکو.

(1)	25	(2)	$(4)^2$	(3)	81	(4)	$(36)^2$
(5)	a^2	(6)	y^2	(7)	$(49)^2$	(8)	64

B- جزن ۾ ونڊ وارن طريقن سان ٻيو مول لکو.

(1)	676	(2)	169	(3)	484	(4)	961
(5)	4900	(6)	1089	(7)	1600	(8)	2304
(9)	3136	(10)	1681	(11)	1369	(12)	2025

C- جزن ۾ ونڊ وارن طريقن سان هينين اڌپورن جو ٻيو مول لکو.

(1)	$\frac{144}{225}$	(2)	$\frac{324}{441}$	(3)	$\frac{1225}{9801}$	(4)	$1\frac{25}{144}$
(5)	$1\frac{48}{121}$	(6)	$3\frac{13}{36}$	(7)	$\frac{961}{1681}$	(8)	$\frac{1024}{1225}$
(9)	$2\frac{217}{576}$	(10)	$5\frac{55}{169}$	(11)	$1\frac{63}{81}$	(12)	$3\frac{325}{900}$

D- جزن ۾ ونڊ وارن طريقن سان هينين ڏهائي اڌپورن جو ٻيو مول لکو.

(1)	3.24	(2)	4.41	(3)	5.29	(4)	7.29
(5)	6.25	(6)	37.21	(7)	7.84	(8)	10.24
(9)	30.25	(10)	100.00	(11)	33.64	(12)	34.81

5.2.3 ٻئي مول سان واسطو رکندڙ عام زندگيءَ جا حساب حل ڪرڻ

عام زندگيءَ ۾ اهڙا ڪيترا ئي حساب آهن، جن کي حل ڪرڻ لاءِ اسين ٻئي مول جو استعمال (سڌي ريت يا اڻ سڌي ريت) ڪندا آهيون.

اچو ته هينين حسابن تي غور ڪريون.

مثال 1: ستين ڪلاس جي شاگردن پڪنڪ لاءِ ڪجھ رقم گڏ ڪئي. هرهڪ شاگرد ايترا رپيا چندي ۾ ڏنا، جيترا شاگرد ڪلاس ۾ حاضر هئا. جيڪڏهن ڪل چندو 4761 رپيا آهي، تہ هرهڪ شاگرد ڪيتري رقم چندي ۾ ڏني؟

حل: ڪل رقم = 4761 رُپيا

هن صورت ۾ هرهڪ شاگرد جي ڏنل رقم = ڪلاس ۾ شاگردن جو تعداد = 4761 جو بيو مول

ونڊ وارو طريقو

	69
6	$\overline{47}\ \overline{61}$
+ 6	− 36
129	1161
+ 9	− 1161
138	0

مفرد جزن وارو طريقو

$$\sqrt{4761} = \sqrt{3\times3\times23\times23}$$
$$= 3\times23$$
$$= 69$$

3	4761
3	1587
23	529
23	23
	1

اهڙيءَ طرح هرهڪ شاگرد 69 رُپيا چندي ۾ ڏناءِ ڪلاس ۾ شاگردن جو ڪل تعداد 69آهي .

مثال 2: هڪ اسڪول ۾ 529 شاگرد آهن. سڀ شاگرد قطارن ۾ بيٺا آهن. هرهڪ قطار ۾ بيٺل شاگردن جو تعداد ايترو آهي، جيتريون قطارون آهن. قطارن جو تعداد معلوم ڪريو.

حل: شاگردن جو ڪل تعداد = 529

هرهڪ قطار ۾ شاگردن جو تعداد ايترو آهي، جيتريون قطارون آهن.

تنهن ڪري اسين شاگردن جي ڪل تعداد جو بيو مول معلوم ڪندي، قطارن جو تعداد معلوم ڪري سگھون ٿا.

هتي $\sqrt{529} = 23$

تنهن ڪري 23 قطارون آهن ۽ هرهڪ قطار ۾ 23 شاگرد آهن.

	23
2	$\hat{5}\ \overline{29}$
+ 2	− 4
43	129
+ 3	− 129
46	0

مثال 3: 1225 بوٽا قطارن ۾ اهڙي طرح سان لڳل آهن، جو هرهڪ قطار ۾ ايترا بوٽا آهن جيتريون قطارون آهن. هرهڪ قطار ۾ بوٽن جو تعداد معلوم ڪريو.

حل: بوٽن جو ڪل تعداد = 1225 بوٽا

قطارن جو تعداد = هرهڪ قطار ۾ بوٽن جو تعداد

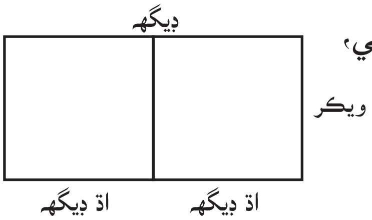
تنهن ڪري هرهڪ قطار ۾ بوٽن جو تعداد = $35 = \sqrt{1225}$.

اهڙي طرح 35 قطارون آهن ۽ هرهڪ قطار ۾ 35 بوٽا آهن.

	35
3	$\overline{12}\ \overline{25}$
+3	− 9
65	325
+5	− 325
70	0

مثال 4: هڪ مستطيل ميدان جي ڊيگهه اُن جي ويڪر کان ٻيڻي آهي. جيڪڏهن اُن جي ايراضي 96800 چورس ميٽر آهي ته مستطيل ميدان جي ڊيگهه معلوم ڪريو.

حل: جيڪڏهن ميدان کي ٻن برابر حصن ۾ ورهايو وڃي، ته هرهڪ حصو هڪ چورس ٿيندو.



هرهڪ چورس جي ايراضي = $\frac{96800}{2}$ چورس ميٽر

= 48400 چورس ميٽر

هرهڪ چورس جو پاسو = $\sqrt{\text{چورس جي ايراضي}}$

= $\sqrt{48400}$

يعني ميدان جي ويڪر = 220 ميٽر

اهڙيءَ طرح ميدان جي ڊيگهه = ميدان جي ويڪر × 2

= 2 × 220 = 440 ميٽر

	220
2	$\hat{4}\ \overline{84}\ \overline{00}$
+ 2	− 4
42	84
+ 2	− 84
440	000
+ 0	− 000
440	0

مشق 5.3

1- امتحاني ڪمري ۾ 784 ڪرسيون اهڙي ريت لڳل آهن، جو هرهڪ قطار ۾ ڪرسين جو تعداد ايترو آهي، جيتريون قطارون آهن. قطارن جو تعداد معلوم ڪريو. هرهڪ قطار ۾ ڪرسين جو تعداد به معلوم ڪريو.

2- هڪ چورس ٻنيءَ جي ايراضي 240.25 چورس ميٽر آهي. اُن جي هرهڪ پاسي جي ڊيگهه لهو.

3- هڪ ڪمري جي ڊيگهه اُن جي ويڪر کان ٽيڻي آهي ۽ اُن جي ايراضي 720.75 چورس ميٽر آهي. اُن جي ڊيگهه ۽ ويڪر معلوم ڪريو.

4- هڪ ڪوکي ۾ بسڪوٽن جون 2116 پڙيون بند ٿيل آهن. هرهڪ قطار ۾ بسڪوٽن جي پُڙين جو تعداد ايترو آهي، جيتريون بسڪوٽن جي پُڙين جون قطارون آهن. بسڪوٽن جي پُڙين جي قطارن جو تعداد معلوم ڪريو.

5- 1681 شاگردن کي اسڪول جي هڪ تقريب ۾ شرڪت ڪرڻي آهي. ويهڻ لاءِ ڪرسين جو تعداد هرهڪ قطار ۽ ڪالم ۾ معلوم ڪريو، جڏهن ته هرهڪ قطار ۽ ڪالم ۾ شاگردن جو تعداد برابر آهي.

6- 625 ٽرڪون آهن. سڀ ٽرڪون قطارن ۾ بيٺل آهن. هرهڪ قطار ۾ ٽرڪن جو تعداد ايترو آهي جيتريون قطارون آهن. قطارن جو تعداد معلوم ڪريو ۽ هرهڪ قطار ۾ ٽرڪن جو تعداد به معلوم ڪريو.

7- جسماني مشق ڪرائيندڙ هڪ استاد 1024 شاگردن کي قطارن ۾ بيهاريو. هرهڪ قطار ۾ شاگردن جو تعداد ايترو آهي، جيترون قطارون آهن. ٻڌايو ته ڪل قطارون ڪيترين آهن ۽ هرهڪ قطارن ۾ شاگردن جو تعداد ڇا آهي؟

8- هڪ مستطيل ٻنيءَ جي ڊيگهه اُن جي ويڪر کان ٽيڻي آهي. جيڪڏهن ٻنيءَ جي ايراضي 995.9052 چورس ميٽر آهي، ته اُن جي ويڪر ۽ ڊيگهه معلوم ڪريو.

9- هڪ چورس شڪل واري اسڪول جي حد جي ڊيگهه معلوم ڪريو، جنهن جي ايراضي 3387.24 چورس ميٽر آهي.

10-هڪ کنڊ جي ڪارخاني ۾ 15,198 کنڊ جي ڳوٽين کي چورس جي شڪل ۾ ترتيب سان رکڻو آهي، پر 69 ڳوٽيون وڌي وڃن ٿيون. ٻڌايو ته هرهڪ قطار ۾ ڪل ڪيترين ڳوٽيون آهن؟

جائزي واري مشق5

1. هيٺين جا مختصر جواب ڏيو:

(i) هڪ عدد جو ٻيو مول معلوم ڪرڻ جا مختلف طريقا ڪهڙا آهن؟

(ii) هڪ پورو چورس عدد ڇا آهي؟ مثال ڏيو.

(iii) ڪنهن عدد جي پوري چورس جون ڪي به ٻه خاصيتون بيان ڪريو ۽ مثال ڏيو.

2. خال ڀريو:

(i) 31 جو چورس ________ آهي.

(ii) 49 جو ٻيو مول ______ آهي.

(iii) 1, 4, 9, 16... کي _______ عدد چئبو آهي.

(iv) 12 جو _____ 144 آهي.

(v) $\sqrt{\frac{25}{36}} =$ __________

(vi) 1 جو چورس _______ آهي.

.3 درست لاءِ ‘T’ ۽ غلط لاءِ ‘F’ لکو.

(i) 235 جا مفرد جزا 2، 3 ۽ 5 آهن. (ii) $19^2 = 361$

(iii) اِڪي عدد جو چورس، ٻڏي عدد هوندو آهي.

(iv) $\frac{25}{49} > \frac{5}{7}$ (v) $(4.5)^2 > 4.5$ (vi) $0.7 < (0.7)^2$

.4 درست جواب چونڊيو.

(i) جيڪڏهن $p = q^2$ تہ q کي p جو ____ چئبو.

(الف) ٻيو مول (ب) چورس (ج) مفرد جزو (د) مول جو پايو

(ii) اُهي عدد جن جو چورس ۽ ٻيو مول برابر آهن، اُهي _____ آهن.

(الف) 0 ۽ 2 (ب) 1 ۽ 3 (ج) 0 ۽ 1 (د) 2 ۽ 3

(iii) پورو چورس عدد _____ آهي.

(الف) 14 (ب) 15 (ج) 16 (د) 17

.5 هيٺين جو ٻيو مول لهو.

(i)	729	(ii)	7056	(iii)	26569	(iv)	42025
(v)	$5\frac{71}{121}$	(vi)	$\frac{2116}{9604}$	(vii)	$1\frac{984}{14641}$	(viii)	0.0256
(ix)	344569	(x)	$\frac{6400}{9801}$	(xi)	$5\frac{41}{64}$	(xii)	131.1025

.6 هڪ چورس باغ جي ايراضي 12100 چورس ميٽر آهي. اُن جي پاسي جي ڊيگهہ معلوم ڪريو.

.7 هڪ چورس ڪمري جي فرش جي ايراضي 144 چورس ميٽر آهي. فرش جي ڊيگهہ معلوم ڪريو.

.8 هڪ مستطيل بنيءَ جي ايراضي 7688 چورس ميٽر آهي. ويڪر معلوم ڪريو جيڪڏهن بنيءَ جي ڊيگهہ ويڪر کان ٻيڻي آهي.

.9 دريءَ جي ڊيگهہ اُن جي ويڪر کان ٽيڻي آهي. دريءَ جي ويڪر ۽ ڊيگهہ معلوم ڪريو، جيڪڏهن اُن جي ايراضي 18.75 چورس ميٽر آهي.

.10 نجيب جُونِ جي مهيني ۾ 900 رُپيا خرچ ڪيا. هن هرهڪ ڏينهن ۾ ايترا رُپيا خرچ ڪيا، جيترا مهيني ۾ ڏينهن آهن. ٻڌايو تہ هن هرهڪ ڏينهن ۾ ڪيترا رُپيا خرچ ڪيا؟

یونٽ 5

واڌو عددجو ٻيو مول

خلاصو

- اهڙو عدد جيڪو اسين ڪنهن ٻہ عدد جو پنهنجو پاڻ سان ضرب ڪرڻ سان حاصل ڪريون، اُن کي چورس چئبو آهي.
- پورو چورس هڪ واڌو عدد آهي، جيڪو ڪنهن عدد جو چورس هوندو آهي.
- پوري چورس جا مفرد جزا هميشہ جوڙن ۾ ٿيندا آهن.
- ٻڌي عدد جو چورس ٻڌي ٿيندو آهي ۽ اِڪي عدد جو چورس اِڪي ٿيندو آهي.
- واجب اٽيور جو چورس، مليل اٽيور کان ننيو هوندو آهي.
- 1 کان ننڍي ڏهائي اٽيور جو چورس، ڏنل ڏهائي اٽيور کان ننيو ٿيندو آهي.
- عدد جو ٻيو مول هڪ اهڙو عدد آهي، جيڪو پنهنجو پاڻ سان ضرب ٿيڻ تي اصل عدد ڏيندو آهي.
- ٻيو مول معلوم ڪرڻ جو عمل، چورس معلوم ڪرڻ جي عمل جو اُبتڙ آهي.
- ٻيو مول ظاهر ڪرڻ لاءِ نشاني '$\sqrt{\ }$' استعمال ٿيندي آهي. اُن کي "Radical Sign" چئبو آهي.
- '$\sqrt{\ }$' جي اندر موجود عدد کي مول جو پايو (Radicand) چئبو آهي.
- اسين ڳڏيل اٽيور جو ٻيو مول اُن کي غير واجب اٽيور ۾ تبديل ڪري معلوم ڪندا آهيون.
- فرض ڪريو x، y کي ٻہ ٻہ عدد آهن تہ:

(i) $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$ (ii) $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

- مساوات $x^2 = y$ ۾، y کي x جو چورس چئبو آهي ۽ x کي y جو ٻيو مول چئبو آهي.
- ڪنهن ٻہ عدد جو ٻيو مول معلوم ڪرڻ جا ٻہ طريقا آهن: (i) جزن وارو طريقو ۽ (ii) وند وارو طريقو.
- ڏهائي اٽيور جو ٻيو مول اُن کي عام اٽيور ۾ تبديل ڪري، معلوم ڪري سگهجي ٿو.

يونٽ 6

سڌو ۽ اُبتو ڦيرڦار

6.1 مسلسل نسبت (Continued Ratio)

6.1.1 مسلسل نسبت کي بيان ڪرڻ ۽ سڌي ۽ اُبتي تناسب جو دؤر ڪرڻ

اسان کي خبر آهي ته ٻن يا وڌيڪ مقدارن جي ڀيٽ کي نسبت چئبو آهي. مثال طور: دانش ۽ رافع جي عمرين جي نسبت 4:1 آهي. ساڳي ريت بسمه، مائرا ۽ اُميمه جي عمرين جي نسبت 2:3:5 آهي. اُن کي مسلسل نسبت چئبو آهي.

ٽن مقدارن جي مسلسل نسبت، حقيقت ۾ اهڙن ٻن نسبتن جو ميلاپ آهي، جن ۾ ساڳي ماپ واري هڪ مشترڪ مقدار هجي.

اچو ته هيٺين مثالن ۾ ڏسون ته ٻه نسبتون ڪيئن پاڻ ۾ گڏجي، مسلسل نسبت ٺاهين ٿيون.

تنوير ۽ طٰحه جي عمرين جي نسبت 2:5 آهي.

طٰحه ۽ رافع جي عمرين جي نسبت 5:7 آهي.

هتي طٰحه جي عمر هڪ مشترڪ مقدار آهي، جنهن جي ماپ يا ملهه 5 آهي.

تنهن ڪري انهن ٽنهي جي عمرين جي مسلسل نسبت ٿيندي: (2:5:7 = رافع: طٰحه: تنوير)

انهيءَ ڪري ٽن نسبتن جي مسلسل نسبت هن ريت بيان ڪري سگهجي ٿي:

جيڪڏهن A، B ۽ C تي مشتمل ٻه نسبتون آهن $A:B = x:y$ ۽ $B:C = y:z$ ته اُنهن جي مسلسل نسبت آهي $A:B:C = x:y:z$.

مثال 1: مسلسل نسبت A:B:C معلوم ڪريو، جيڪڏهن $A : B = 5 : 6$ ۽ $B : C = 6 : 7$

حل: هتي $A : B = 5 : 6$ ۽ $B : C = 6 : 7$

جيئن ته ٻنهي نسبتن ۾ مشترڪ مقدار B جي ماپ ساڳي آهي يعني 6 آهي.

تنهن ڪري $A : B : C = 5 : 6 : 7$

جيڪڏهن مشترڪ مقدار جي ماپ مختلف هجي، ته اسين مسلسل نسبت معلوم ڪري سگهون ٿا. جيئن هيٺين مثال ۾ بيان ٿيل آهي:

مثال2: مسلسل نسبت X : Y : Z معلوم ڪريو، جيڪڏهن $X : Y = 6 : 7$ ۽ $Y : Z = 8 : 9$

حل: پهريون طريقو

سڀ کان اڳ ۾ اسين مشترڪ مقدار Y جي ماپن جي ضرب اُپت معلوم ڪنداسين، جيڪا 56 آهي. هاڻي اسين هرهڪ نسبت ۾ Y جي ماپ ساڳي (يعني 56) ڪنداسين.

هتي $X : Y = 6 : 7$ ۽ $Y : Z = 8 : 9$

يا $\frac{X}{Y} = \frac{6}{7}$ يا $\frac{Y}{Z} = \frac{8}{9}$

$= \frac{6 \times 8}{7 \times 8} = \frac{48}{56}$ $= \frac{8 \times 7}{9 \times 7} = \frac{56}{63}$

اهڙيءَ ريت $X : Y : Z = 48 : 56 : 63$

ٻيو طريقو

X	:	Y	:	Z
6		7		
		8		9
(6×8)	:	(7×8)	:	(7×9)
48	:	56	:	63

اهڙيءَ ريت $X : Y : Z = 48 : 56 : 63$

اسين انهيءَ ريت چئن مقدارن جي مسلسل نسبت به معلوم ڪري سگهون ٿا، جيئن هيٺ سمجهايو ويو آهي.

مثال3: A:B:C:D معلوم ڪريو، جيڪڏهن $A : B = 2 : 3$، $B : C = 4 : 5$ ۽ $C : D = 2 : 7$

حل:

A	:	B	:	C	:	D
2	:	3				
		4	:	5		
(2×4)		(3×4)		(3×5)		
8	:	12	:	15		
				2	:	7
(8×2)		(12×2)		(15×2)		(15×7)
16		24		30		105

اهڙيءَ ريت $A : B : C : D = 16 : 24 : 30 : 105$

مثال4: جيڪڏهن مريم ۽ بسم جي جيب خرچين جي نسبت 7:9 آهي ۽ مريم ۽ حفصه جي جيب خرچين جي نسبت 10:13 آهي. اُنهن جي جيب خرچين جي مسلسل نسبت معلوم ڪريو.

حل:

حفصه : بسم : مريم

$$\begin{array}{ccccc} \text{مريم} & : & \text{بسم} & : & \text{حفصه} \\ 7 & : & 9 & & \\ 10 & & & : & 13 \\ \hline (7\times10) & & (9\times10) & & (7\times13) \\ 70 & : & 90 & : & 91 \end{array}$$

انهيءَ ڪري گهربل مسلسل نسبت آهي (91 : 90 : 70).

(I) تناسب (Proportion): پوئين ڪلاس ۾ اسان تناسب ۽ اُن جي قسمن جي باري ۾ سکي چڪا آهيون. اچو ته اُن جو دؤر ڪريون.

ٻن نسبتن جي برابريءَ کي تناسب چئبو آهي. مثال طور: 2:3 = 4:6 يا 2:3 :: 4:6 هڪ تناسب آهي.

تناسب $a : b = c : d$ ۾ مقدارن a، d کي ٻاهريان رُڪن (Extremes) چئبو آهي ۽ b، c کي وچيان رُڪن (Means) چئبو آهي.

ياد رکو ته: وچين رُڪنن جي ضرب اُپت = ٻاهرين رُڪنن جي ضرب اُپت

مثال1: x معلوم ڪريو جيڪڏهن $(2 : 9 = x : 36)$

حل: اسان وٽ آهي

$$2:9 = x:36$$

جيئن ته ٻاهرين رُڪنن جي ضرب اُپت = وچين رُڪنن جي ضرب اُپت

تنهن ڪري $9 \times x = 2 \times 36$

يا $\dfrac{9 \times x}{9} = \dfrac{2 \times 36}{9} = \dfrac{2 \times \cancel{36}^{4}}{\cancel{9}_{1}} = 2 \times 4 = 8$

اهڙيءَ ريت $x = 8$

تناسب جا ٻه قسم آهن:

(i) سڌو تناسب (ii) اُبتو تناسب

(i) سڌو تناسب: جيڪڏهن ٻہ مقدار اهڙي طرح لاڳاپيل هجن جو، جنهن نسبت سان هڪ مقدار وڌي يا گهٽجي، تہ ٻيو مقدار بہ ساڳي نسبت سان وڌي يا گهٽجي، تہ انهيءَ تناسب کي سڌو تناسب چئبو آهي.

(ii) اُبتو تناسب: جيڪڏهن ٻہ مقدار اهڙي طرح لاڳاپيل هجن جو، جنهن نسبت سان هڪ مقدار وڌي، تہ اُنهيءَ نسبت سان ٻيو مقدار گهٽجي يا جنهن نسبت سان هڪ مقدار گهٽجي، تہ اُنهيءَ نسبت سان ٻيو مقدار وڌي، تہ اهڙي تناسب کي اُبتو تناسب چئبو آهي.

(II) ڪنهن مقدار جي ڏنل نسبت ۾ ورهاست

جيڪڏهن ڪنهن مقدار کي ڏنل نسبت ۾ ورهائڻو هجي، تہ اسين واسطيدار حصو معلوم ڪرڻ لاءِ هيٺيون فارمولو استعمال ڪنداسين:

$$\text{حصو} = \frac{\text{ڪل مقدار} \times \text{نسبت جو رُڪن}}{\text{نسبت جي رُڪنن جو جوڙ}}$$

مثال 1: 180 رُپين کي A، B ۽ C ۾ (2:3:4) نسبت سان ورهايو.

حل: هتي ڪل رقم 180 رُپيا آهي.

نسبت جي رُڪنن جو جوڙ $= 2 + 3 + 4 = 9$

$$A \text{ جو حصو } = \frac{2\times180}{9} = \frac{2\times\cancel{180}^{20}}{\cancel{9}_1} = 2\times20 = 40 \text{ رُپيا}$$

$$B \text{ جو حصو } = \frac{3\times180}{9} = \frac{3\times\cancel{180}^{20}}{\cancel{9}_1} = 3\times20 = 60 \text{ رُپيا}$$

$$C \text{ جو حصو } = \frac{4\times180}{9} = \frac{4\times\cancel{180}^{20}}{\cancel{9}_1} = 4\times20 = 80 \text{ رُپيا}$$

انهيءَ ڪري A، B ۽ C جي حصن جون ترتيبوار رقمون 40 رُپيا، 60 رُپيا ۽ 80 رُپيا آهن.

مشق 6.1

-1 A : B : C معلوم ڪريو، جيڪڏهن:

(i) $A : B = 2 : 5$ ۽ $B : C = 5 : 4$

(ii) $A : B = 3 : 7$ ۽ $B : C = 8 : 9$

(iii) $A : B = 10 : 11$ ۽ $B : C = 20 : 21$

-2 **X : Y : Z** معلوم ڪريو، جيڪڏهن:

(i) $X : Y = 3 : 5$ ۽ $X : Z = 4 : 9$

(ii) $X : Y = 5 : 7$ ۽ $X : Z = 11 : 13$

(iii) $X : Z = 3 : 5$ ۽ $Y : Z = 7 : 8$

-3 **A : B : C : D** معلوم ڪريو، جيڪڏهن:

(i) $A : B = 2 : 3$، $B : C = 4 : 5$ ۽ $C : D = 7 : 10$

(ii) $A : B = 4 : 3$، $B : C = 5 : 7$ ۽ $A : D = 7 : 9$

-4 نامعلوم عدد x معلوم ڪريو، جيڪڏهن:

(i) $x : 2 = 5 : 6$ (ii) $3 : x = 9 : 7$ (iii) $4 : 5 = x : 7$

-5 شازيہ ۽ نازيہ جي وزن جي نسبت 5:9 آهي. نازيہ ۽ مديحہ جي وزن جي نسبت 8:11 آهي. اُنهن جي وزن جي مسلسل نسبت معلوم ڪريو.

-6 سليم، عرفان ۽ عمران ۾ 2:3:5 جي نسبت سان 2000 رُپيا ورهايو.

-7 ساليانِي امتحان ۾ ٽن دوستن جي مارڪن جي نسبت هيٺين ريت آهي:
اختر ۽ عزيز جي مارڪن جي نسبت 3:4 آهي ۽ عزيز ۽ انيس جي مارڪن جي نسبت 5:7 آهي. انهن جي مارڪن جي مسلسل نسبت معلوم ڪريو.

-8 ڪنهن گهر جي ڀاتين جي ملڪيت ۾ نسبت هيٺين ريت آهي:
پيءُ ۽ ماءُ جي ملڪيت ۾ نسبت 5:2 آهي. ماءُ ۽ ڌيءُ جي نسبت 3:4 آهي. جڏهن تہ ڌيءُ ۽ پٽ جي نسبت 6:7 آهي. اُنهن جي ملڪيت جي مسلسل نسبت معلوم ڪريو.

-9 هڪ شخص جي 27,400 رُپين جي رقم يوٽيلٽي بلن ۾ خرچ ٿئي ٿي. بجلي، فون، گئس ۽ پاڻي. بجلي ۽ فون جي وچ ۾ نسبت 5:2 آهي، فون ۽ گئس جي نسبت 4:3 آهي پر گئس ۽ پاڻي جي نسبت 7:6 آهي. هرهڪ بل جي اصل رقم معلوم ڪريو.

-10 هڪ شاگرد ستين ڪلاس جي رياضي، سائنس، انگريزي ۽ اردوءَ جو هڪ هڪ ڪتاب، ڪُل 675 رُپين ۾ خريد ڪيا. ڪتابن جي قيمتن جي نسبت هيٺين ريت آهي:
انگريزي ۽ اردو جي ڪتاب جي قيمت جي نسبت 2:3، اردو ۽ سائنس جي ڪتاب جي قيمت جي نسبت 2:5 ۽ سائنس ۽ رياضيءَ جي ڪتاب جي قيمت جي نسبت 3:4 آهي. هرهڪ ڪتاب جي قيمت لکو.

6.1.2 ايڪي واري طريقي ۽ تناسب واري طريقي کي استعمال ڪندي، سڌي ۽ اُبتي تناسب تي مشتمل عام زندگيءَ جا لڪتي حساب حل ڪرڻ

هاڻي اسان اهو سکون ٿا ته تناسب وارا عام زندگيءَ جا لڪتي حساب، ايڪي واري طريقي ۽ تناسب واري طريقي سان ڪيئن حل ڪجن. هيٺين مثالن ۾ اهو سمجهايو ويو آهي.

مثال 1: جيڪڏهن 10 ساڳين ڪتابن جي قيمت 500 رُپيا آهي ته اهڙن 15 ڪتابن جي قيمت معلوم ڪريو.

حل: تناسب وارو طريقو:

فرض ڪريو ته 15 ڪتابن جي قيمت x رُپيا آهي.

(سڌو تناسب)	قيمت (رُپيا)	ڪتاب
	500	10
	x	15

اسان مليل مواد مان تناسب حاصل ڪيون ٿا.

$$10:15=500:x$$

جيئن ته پاهرين رُڪنن جي ضرب اُپت = وچين رُڪنن جي ضرب اُپت

تنهن ڪري $10 \times x = 15 \times 500$

يا $\frac{\cancel{10}^{1} \times x}{\cancel{10}_{1}} = \frac{15 \times 500}{10}$

يا $x = 750$

تنهن ڪري گهربل قيمت 750 رُپيا آهي، يعني 15 ڪتابن جي قيمت 750 رُپيا آهي.

ايڪي وارو طريقو:

10 ڪتابن جي قيمت = 500 رُپيا

1 ڪتاب جي قيمت = $\frac{500}{10}$ رُپيا (گهٽ ڪتابن ۾، گهٽ قيمت لڳندي)

= 50 رُپيا

اهڙن 15 ڪتابن جي قيمت ٿيندي: = 15×50

= 750 رُپيا

تنهن ڪري 15 ڪتابن جي گهربل قيمت آهي 750 رُپيا.

مثال 2: ٽي ساڳيا نلڪا، پاڻيءَ جي ٽانڪيءَ کي 10 ڪلاڪن ۾ ڀرن ٿا. اهڙا 5 نلڪا ساڳي ٽانڪيءَ کي ڪيترن ڪلاڪن ۾ ڀريندا؟

حل : تناسب وارو طريقو:

فرض ڪريو ڪلاڪن جو گهربل تعداد x آهي.

	ڪلاڪ	نلڪا
(اُبتو تناسب)	$10 \uparrow$	$3 \downarrow$
	x	5

اسان مليل مواد مان تناسب حاصل ڪيون ٿا. $3:5=x:10$

جيئن تہ ٻاهرين رُڪنن جي ضرب اُپت = وچين رُڪنن جي ضرب اُپت

تنهن ڪري $5 \times x = 3 \times 10$

يا $\frac{\cancel{5}^1 \times x}{\cancel{5}_1} = \frac{3 \times 10}{5}$

يا $x = 6$

تنهن ڪري ڪلاڪن جو گهربل تعداد 6 آهي

ايڪي وارو طريقو:

3 نلڪا ٽانڪي ڀري سگهن ٿا، 10 ڪلاڪن ۾.

انهيءَ ڪري 1 نلڪو ٽانڪي ڀري سگهي ٿو 3×10 ڪلاڪن ۾ (جيئن تہ گهٽ نلڪن کي وڌيڪ وقت کپي)

اهڙي طرح 5 نلڪا ٽانڪي ڀري سگهن ٿا = $\frac{3 \times 10}{5}$ ڪلاڪن ۾ (جيئن تہ وڌيڪ نلڪن کي گهٽ وقت کپي)

$= \frac{3 \times 10}{5} = \left(\frac{3 \times \cancel{10}^2}{\cancel{5}_1}\right)$ ڪلاڪ

= 6 ڪلاڪ

مشق 6.2

هيٺيان حساب ايڪي واري طريقي ۽ تناسب واري طريقي سان حل ڪريو:

1- 15 ڪرسين جي قيمت 4,500 رُپيا آهي. اهڙين 20 ڪرسين جي قيمت معلوم ڪريو.

2- ڇهہ ساڳيا نلڪا هڪ پاڻيءَ جي ٽانڪيءَ کي 3 ڪلاڪن ۾ ڀري سگهن ٿا. اهڙا ڪيترا نلڪا 2 ڪلاڪن ۾ ساڳي ٽانڪي ڀري سگهندا؟

-3 جيڪڏهن 5 ماڻهو 8 ڏينهن ۾ ڪاڏي جو سامان ختم ڪن ٿا، ته 4 ڏينهن ۾ ساڳي ڪاڏي جي سامان کي گهڻا ماڻهو ختم ڪري سگهندا؟

-4 4 ڪلوگرام انبن جي قيمت 300 رُپيا آهي. 10 ڪلوگرام انبن جي قيمت معلوم ڪريو.

-5 هڪ شاگرد ڪتاب جا 30 صفحا 4 ڏينهن ۾ پڙهي ٿو. ساڳي ڪتاب جا ڪيترا صفحا هي 10 ڏينهن ۾ پڙهندو؟

-6 20 سپاهي ڪاڏي جو سامان 8 ڏينهن ۾ ختم ڪن ٿا. ساڳيو ڪاڏي جو سامان 5 ڏينهن ۾ ڪيترا سپاهي ختم ڪندا؟

-7 جيڪڏهن 4 مزدور هڪ ڪم 8 ڪلاڪن ۾ پورو ڪن ٿا. ساڳيو ڪم 6 مزدور ڪيترن ڪلاڪن ۾ پورو ڪندا؟

-8 18 ڪلوگرام پٽاٽن جي قيمت معلوم ڪريو، جيڪڏهن 6 ڪلوگرام پٽاٽن جي قيمت 105 رُپيا آهي.

-9 جيڪڏهن ڪنهن ڌاتوءَ جي ٽڪر جي $\frac{4}{7}$ حصي جو وزن 28 ڪلوگرام آهي ته ساڳي ڌاتوءَ جي ٽڪر جي $\frac{8}{9}$ حصي جو وزن معلوم ڪريو.

-10 35 مهمانن جي محفل جو خرچ 5250 رُپيا آهي، ته 85 مهمانن جي محفل جو خرچ معلوم ڪريو.

6.2 وقت، ڪم ۽ مفاصلو

جڏهن اسين وقت ۽ ڪم سان لاڳاپيل حساب حل ڪندا آهيون ته اسين ڏسون ٿا ته:

(i) وقت سڌو تناسب رکي ٿو ڪم سان، چاڪاڻ ته وڌيڪ ڪم لاءِ وڌيڪ وقت لڳي ٿو ۽ گهٽ ڪم لاءِ گهٽ وقت لڳي ٿو.

(ii) مزدورن جي تعداد جو اُبتو تناسب آهي، وقت سان، چاڪاڻ ته ڪم پوري ڪرڻ لاءِ وڌيڪ مزدور، گهٽ وقت لڳائين ٿا ۽ ڪم پوري ڪرڻ لاءِ گهٽ مزدورن کي وڌيڪ وقت ڪپي ٿو.

6.2.1 وقت ۽ ڪم سان واسطو رکندڙ عام زندگيءَ جا حساب تناسب وسيلي حل ڪرڻ

اچو ته وقت ۽ ڪم سان واسطو رکندڙ عام زندگيءَ جا حساب تناسب وسيلي حل ڪرڻ سکون.

مثال 1: 10 ماڻهو ڪنهن خاص وقت ۾ ڪم جو $\frac{1}{2}$ حصو پورو ڪري سگهن ٿا. ڪيترا ماڻهو ساڳي وقت ۾ ساڳي ڪم جو $\frac{3}{4}$ حصو پورو ڪري سگهن ٿا؟

حل: فرض ڪريو تہ ماڻهن جو گهربل تعداد x آهي.

ڪم	ماڻهو
(اَڌُ) $\frac{1}{2}$ ↓	10 ↓
(مُنو) $\frac{3}{4}$	x

(سڌو تناسب)

مليل مواد مان تناسب ٿهندو:

$$10 : x = \frac{1}{2} : \frac{3}{4}$$

جيئن تہ: ٻاهرين رُڪنن جي ضرب اُپت = وچين رُڪنن جي ضرب اُپت

تنهن ڪري $\frac{1}{2} \times x = 10 \times \frac{3}{4}$

يا $\frac{x}{2} = \frac{30}{4}$

يا $4x = 60$

يا $\frac{4x}{4} = \frac{60}{4}$

يا $x = 15$

انهيءَ ڪري ماڻهن جو گهربل تعداد 15 آهي.

مثال 2: ڇهہ ماڻهو ڪو ڪم 7 ڏينهن ۾ پورو ڪري سگهن ٿا. ڪيترا ماڻهو ساڳيو ڪم 6 ڏينهن ۾ پورو ڪري سگهندا؟

حل: فرض ڪريو تہ ماڻهن جو گهربل تعداد x آهي.

ڏينهن	ماڻهو
7 ↑	6 ↓
6	x

(اُبتو تناسب)

مليل نسبتن مان هيٺين ريت تناسب ٺهندو:

$$\overbrace{6 : \underbrace{x = 6}} : 7$$

جيئن تہ: ’ٻاهرين رُڪنن جي ضرب اُپت = وچين رُڪنن جي ضرب اُپت‘

تنهن ڪري $6 \times x = 6 \times 7$

يا $\frac{\cancel{6}^{1} \times x}{\cancel{6}_{1}} = \frac{6 \times 7}{6}$

يا $x = 7$

تنهن ڪري ماڻهن جو گهربل تعداد 7 آهي.

مشق 6.3

1- 20 مزدور ڪنهن خاص وقت ۾ ڪم جو اڌ حصو پورو ڪري سگهن ٿا. ساڳي وقت ۾ ڪم جو ٽي چوٿائي حصو پورو ڪرڻ لاءِ ڪيترا مزدور گهرجن؟

2- جيڪڏهن 6 مزدور ڪو ڪم 10 ڏينهن ۾ پورو ڪن ٿا. ٻڌايو تہ ساڳيو ڪم 15 ڏينهن ۾ پورو ڪرڻ لاءِ ڪيترا مزدور گهرجن؟

3- جيڪڏهن 5 مزدور ڪو ڪم 8 ڏينهن ۾ پورو ڪن ٿا. ٻڌايو تہ ساڳيو ڪم 4 ڏينهن ۾ پورو ڪرڻ لاءِ ڪيترا مزدور گهرجن؟

4- جيڪڏهن ٽي رازا هڪ ڀت چار ڏينهن ۾ ناهين ٿا. ٻڌايو تہ اهڙا پنج رازا ساڳي ڀت ڪيترن ڏينهن ۾ ناهيندا؟

5- جيڪڏهن 5 ماڻهو ڪنهن ڪم جو ٽيون حصو پورو ڪن ٿا. ٻڌايو تہ ساڳي وقت ۾ 7 ماڻهو ڪم جو ڪهڙو حصو پورو ڪندا؟

6- 64 ڏينهن ۾ هڪ بنگلي ناهڻ لاءِ 12 مزدورن جي ضرورت آهي. ٻڌايو تہ ساڳي رفتار سان ڪم ڪندي 18 مزدور ساڳيو بنگلو ناهڻ لاءِ ڪيترا ڏينهن لڳائيندا؟

7- 1500 رڍن لاءِ چارو (گاهہ) 75 ڏينهن تائين هلي ٿو. جيڪڏهن رڍون ساڳي شرح سان چارو استعمال ڪن ٿيون تہ معلوم ڪريو:

(i) رڍن جو ڪيترو تعداد آهي، جيڪي ساڳيو چارو (گاهہ) 90 ڏينهن ۾ ڪائي مڪمل استعمال ڪنديون.

(ii) ڏينهن جو تعداد جنهن ۾ 1200 رڍون ساڳي چاري (گاهہ) کي ڪائي مڪمل استعمال ڪنديون.

6.2.2 وقت ۽ مفاصلي جي وچ ۾ لاڳاپو (يعني رفتار) معلوم ڪرڻ

عام زندگيءَ ۾، اسان ڏٺو آهي ته مفاصلو، وقت جي تناسب سان وڌي يا گھٽجي ٿو.

فرض ڪريو هڪ گاڏي 20 ڪلوميٽر جو مفاصلو پورو ڪري ٿي 10 منٽن ۾ ۽ 30 ڪلوميٽر مفاصلو پورو ڪري ٿي 15 منٽن ۾. جيڪڏهن اسين مفاصلي جو وقت سان لاڳاپو يا نسبت معلوم ڪريون ته اسان حاصل ڪنداسين:

$$\frac{20}{10} = \frac{\cancel{20}^{2}}{\cancel{10}_{1}} = 2 \quad ۽ \quad \frac{\cancel{30}^{2}}{\cancel{15}_{1}} = 2$$

اسين ڏسون ٿا ته مفاصلي ۽ وقت جي نسبت ساڳي آهي. انهيءَ نسبت کي رفتار چئبو آهي.

انهيءَ نسبت کي عام طرح سان، اسين هن ريت لکندا آهيون: $\frac{\text{مفاصلو}}{\text{وقت}} = \text{رفتار}$

مثال 1 : هڪ گاڏي 3 ڪلاڪن ۾ 15 ڪلوميٽر جو مفاصلو پورو ڪري ٿي. اُن جي رفتار معلوم ڪريو.

حل : هتي مفاصلو = 15 ڪلوميٽر ۽ وقت = 3 ڪلاڪ

اسان کي خبر آهي ته:

$$\text{رفتار} = \frac{\text{مفاصلو}}{\text{وقت}} = \frac{\overset{5}{\cancel{15}}\ \text{ڪلوميٽر}}{\underset{1}{\cancel{3}}\ \text{ڪلاڪ}} = 5 \quad (\text{5 ڪلوميٽر في ڪلاڪ})$$

تنهنڪري گاڏيءَ جي رفتار 5 ڪلوميٽر في ڪلاڪ آهي.

مثال 2 : هڪ بس جي رفتار 60 ڪلوميٽر في ڪلاڪ آهي. اها 4 ڪلاڪن ۾ ڪيترو مفاصلو پورو ڪندي؟

حل : هتي رفتار = 60 ڪلوميٽر في ڪلاڪ

لڳايل وقت = 4 ڪلاڪ ۽ مفاصلو = ؟

اسان کي خبر آهي ته $\frac{\text{مفاصلو}}{\text{وقت}} = \text{رفتار}$

يعني $\frac{\text{مفاصلو}}{\text{4 ڪلاڪ}} = \text{60 ڪلوميٽر في ڪلاڪ}$

مفاصلو = 60 ڪلوميٽر في ڪلاڪ × 4 ڪلاڪ

مفاصلو = 240 ڪلوميٽر

انهيءَ طرح بس 4 ڪلاڪن ۾ 240 ڪلوميٽر مفاصلو پورو ڪري ٿي.

6.2.3 رفتار جي ايڪن کي متائڻ (ڪلوميٽر في ڪلاڪ کي ميٽر في سيڪنڊ ۾ ۽ اُن جي اُبتڙ)

اسان کي خبر آهي ته:

1 ڪلوميٽر = 1000 ميٽر ۽ 1 ڪلاڪ = 3600 سيڪنڊ

مٿين تعلق کي استعمال ڪندي، اسين رفتار جي ايڪن جي وچ ۾ تعلق معلوم ڪري سگھون ٿا. يعني ڪلوميٽر في ڪلاڪ ۽ ميٽر في سيڪنڊ جي وچ ۾.

اهو تعلق آهي: 1 ڪلوميٽر في ڪلاڪ = $\frac{1000}{3600}$ ميٽر في سيڪنڊ

رفتار جي ايڪن جي متائڻ جا قاعدا يعني ڪلوميٽر في ڪلاڪ مان ميٽر في سيڪنڊ ۾ ۽ اُن جي اُبتڙ.

- ڪلوميٽر في ڪلاڪ کي ميٽر في سيڪنڊ ۾ متائڻ لاءِ $\left(\frac{1000}{3600}\right)$ سان ضرب ڪريو.
- ميٽر في سيڪنڊ کي ڪلوميٽر في ڪلاڪ ۾ متائڻ لاءِ $\left(\frac{1000}{3600}\right)$ سان ونڊ ڪريو.

مثال 1: 72 ڪلوميٽر في ڪلاڪ کي ميٽر في سيڪنڊ ۾ متايو.

حل: ميٽر في سيڪنڊ $72 \times \left(\frac{1000}{3600}\right) = $ 72ڪلوميٽر في ڪلاڪ

$$= \frac{720\cancel{00}}{36\cancel{00}} = \frac{720}{36} = \frac{\overset{20}{\cancel{720}}}{\underset{1}{\cancel{36}}} = 20$$ ميٽر في سيڪنڊ

مثال 2: 5000 ميٽر في سيڪنڊ کي ڪلوميٽر في ڪلاڪ ۾ متايو.

حل: 5000 ميٽر في سيڪنڊ $= \left(5000 \div \frac{3600}{1000}\right)$ ڪلوميٽر في ڪلاڪ

$= \left(5000 \times \frac{1000}{3600}\right)$ ڪلوميٽر في ڪلاڪ

$= \left(\frac{\overset{5}{\cancel{5000}} \times 3600}{\underset{1}{\cancel{1000}}}\right) = 5 \times 3600$ ڪلوميٽر في ڪلاڪ

$=$ 18000 ڪلوميٽر في ڪلاڪ

6.2.4 وقت ۽ مفاصلي سان واسطو رکندڙ ڦيرڦار وارا حساب حل ڪرڻ

اچو ته وقت ۽ مفاصلي سان واسطو رکندڙ، ڦيرڦار وارا حساب حل ڪرڻ سکون، جيئن هيٺين مثالن ۾ سمجھايو ويو آهي.

مثال 1 : هڪڙي گاڏي 120 ڪلوميٽر جو مفاصلو 2 ڪلاڪن ۾ پورو ڪري ٿي. اها 6 ڪلاڪن ۾ ڪيترو مفاصلو پورو ڪندي؟

حل: فرض ڪريو تہ گهربل مفاصلو x ڪلوميٽر آهي.

ڪلاڪ	ڪلوميٽر
2 ↓	120 ↓
6	x

(سڌو تناسب)

مليل نسبتي مواد مان اسان کي تناسب حاصل ٿئي ٿو: $120 : x = 2 : 6$

جيئن تہ ٻاهرين رُڪنن جي ضرب اُپت = وچين رُڪنن جي ضرب اُپت

تنهن ڪري $2 \times x = 6 \times 120$

يا $(1 \times x = 3 \times 120)$

يا $\left(\frac{\cancel{2}^{1} \times x}{\cancel{2}_{1}} = \frac{\cancel{6}^{3} \times 120}{\cancel{2}_{1}}\right)$ يا $\left(\frac{2 \times x}{2} = \frac{6 \times 120}{2}\right)$ يا

$x = 360$

تنهن ڪري گهربل مفاصلو 360 ڪلوميٽر آهي.

مثال 2: هڪ گاڏي 50 ڪلوميٽر في ڪلاڪ جي رفتار سان 5 ڪلاڪن ۾ هڪ خاص مفاصلو پورو ڪري ٿي. اها 60 ڪلوميٽر في ڪلاڪ جي رفتار سان ساڳيو مفاصلو ڪيتري وقت ۾ پورو ڪندي؟

حل: فرض ڪريو تہ گهربل وقت x ڪلاڪ آهي.

(وقت) ڪلاڪ	رفتار
5 ↑	50 ڪلوميٽر في ڪلاڪ ↓
x	60 ڪلوميٽر في ڪلاڪ

(اُبتو تناسب)

مليل نسبتي مواد مان اسان کي تناسب ملي ٿو: $50 : 60 = x : 5$

جيئن تہ: ٻاهرين رُڪنن جي ضرب اُپت = وچين رُڪنن جي ضرب اُپت

تنهن ڪري $60 \times x = 50 \times 5$

يا $\frac{\cancel{60}^{1} \times x}{\cancel{60}_{1}} = \frac{5\cancel{0} \times 5}{6\cancel{0}} = \frac{25}{6}$

يا $x = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$

انهيءَ ڪري گهربل وقت $4\frac{1}{6}$ ڪلاڪ آهي.

مشق 6.4

1- هيٺين کي ميٽر في سيڪنڊ ۾ مٽايو:
(i) 50 ڪلوميٽر في ڪلاڪ (ii) 75 ڪلوميٽر في ڪلاڪ
(iii) 80 ڪلوميٽر في ڪلاڪ (iv) 505 ڪلوميٽر في ڪلاڪ

2- هيٺين کي ڪلوميٽر في ڪلاڪ ۾ مٽايو.
(i) 30 ميٽر في سيڪنڊ (ii) 12 ميٽر في سيڪنڊ
(iii) 42 ميٽر في سيڪنڊ (iv) 25.5 ميٽر في سيڪنڊ

3- هڪ موٽر سائيڪل جي رفتار معلوم ڪريو، جيڪا 80 ڪلوميٽر جو مفاصلو 2 ڪلاڪن ۾ پورو ڪري ٿي.

4- هڪ وين 60 ڪلوميٽر في ڪلاڪ جي رفتار سان، 180 ڪلوميٽر مفاصلو پورو ڪرڻ ۾ گهٽو وقت لڳائيندي؟

5- جيڪڏهن هڪ سائيڪل سوار 150 ميٽر جو مفاصلو 30 سيڪنڊن ۾ پورو ڪري ٿو، ٻڌايو تہ هو 45 سيڪنڊن ۾ ڪيترو مفاصلو پورو ڪندو؟

6- هڪ بس پنهنجي منزل تي پهچڻ لاءِ 3 ڪلاڪ لڳائي ٿي. جيڪڏهن رفتار 60 ڪلوميٽر في ڪلاڪ آهي تہ اُها 70 ڪلوميٽر في ڪلاڪ جي رفتار سان ساڳيو مفاصلو ڪيتري وقت ۾ پورو ڪندي؟

7- هڪ گاڏي 210 ڪلوميٽر جو مفاصلو پورو ڪرڻ لاءِ 3 ڪلاڪ لڳائي ٿي.
(i) في ڪلاڪ جي حساب سان اُن جي رفتار ڇا ٿيندي؟
(ii) ڪلوميٽر في منٽ ۾ اُن جي رفتار ڇا ٿيندي؟
(iii) ميٽر في سيڪنڊ ۾ اُن جي رفتار ڇا ٿيندي؟
(iv) 70 ڪلوميٽر في ڪلاڪ جي رفتار سان اها $4\frac{1}{2}$ ڪلاڪن ۾ ڪيترو مفاصلو پورو ڪندي؟
(v) 350 ڪلوميٽر جو مفاصلو پورو ڪرڻ لاءِ اها گهٽو وقت لڳائيندي؟

جائزي واري مشق 6

1- $x : y : z$ معلوم ڪريو، جيڪڏهن $x : y = 2 : 5$ ۽ $x : z = 4 : 7$

2- $P : Q : R : S$ معلوم ڪريو، جيڪڏهن $P : Q = 3 : 4$، $Q : R = 5 : 6$ ۽ $R : S = 7 : 8$

3- ڏهہ قلمن جي قيمت 250 رپيا آهي. اهڙن 17 قلمن جي قيمت معلوم ڪريو.

4- ڏهہ مزدور ڪو ڪم 7 ڏينهن ۾ پورو ڪن ٿا. ٻڌايو تہ 5 ڏينهن ۾ ساڳيو ڪم ڪيترا مزدور پورو ڪندا؟

5- نامعلوم مقدار x معلوم ڪريو، جيڪڏهن $x:5 = 6:15$

6- y معلوم ڪريو، جيڪڏهن $7 : 8 = y : 24$

7- 60 ڪلوميٽر في ڪلاڪ رفتار کي ميٽر في سيڪنڊ ۾ مٽايو.

8- 105 ميٽر في سيڪنڊ رفتار کي ڪلوميٽر في ڪلاڪ ۾ مٽايو.

9- هڪ گاڏي 30 ڪلوميٽر جو مفاصلو 25 منٽن ۾ پورو ڪري ٿي. ٻڌايو تہ اها 55 منٽن ۾ ڪيترو مفاصلو پورو ڪندي؟ اُن جي رفتار معلوم ڪريو:

(i) ڪلوميٽر في ڪلاڪ ۾ (ii) ڪلوميٽر في منٽ ۾

(iii) ميٽر في منٽ ۾ (iv) ميٽر في سيڪنڊ ۾

10- گاڏين A، B ۽ C جي ٽانڪين ۾ پيٽرول جو مقدار 7:9:11 جي نسبت ۾ آهي. جيڪڏهن اُنهن ٽن گاڏين ۾ پيٽرول جو ڪل مقدار 162 لٽر استعمال ٿئي ٿو تہ هرهڪ گاڏيءَ ڪيترو پيٽرول استعمال ڪيو؟

11- 40 ڪلوميٽر جي مفاصلي تائين سامان کڻي وڃڻ جو خرچ 100 رُپيا آهي. ساڳي شرح سان:

(i) 150 ڪلوميٽر جي مفاصلي تائين سامان کڻي وڃڻ جو خرچ معلوم ڪريو.

(ii) اُهو مفاصلو معلوم ڪريو، جيڪڏهن سامان کڻي وڃڻ جو خرچ 560 رُپيا آهي.

خلاصو

- **نسبت:** ٻن ساڳي قسمن جي مقدارن جي ڀيٽ کي نسبت چئبو آهي.
- **مسلسل نسبت:** اها ٻن نسبتن جو ميلاپ آهي جن ۾ ساڳي ماپ وارو هڪ مشترڪ مقدار هجي.
- **ڏنل نسبت ۾ ڪنهن مقدار جي ورهاست:** اسين ڏنل نسبت ۾ ڪنهن مقدار کي هيٺين فارمولي سان ورهائيندا آهيون:

$$\text{حصو} = \frac{\text{ڪُل مقدار} \times \text{نسبت جو رُڪن}}{\text{نسبت جي رُڪنن جو جوڙ}}$$

- **تناسب:** ٻن نسبتن جي برابريءَ کي تناسب چئبو آهي. تناسب ۾:

ٻاهرين رُڪنن جي ضرب اُپت = وچين رُڪنن جي ضرب اُپت

سڌو ۽ اُبتو ڦيرڦار

- اهڙو لاڳاپو جنهن ۾ هڪ مقدار ساڳي نسبت سان وڌي، پر اُن سان گڏ ٻيو لاڳاپيل مقدار گهٽ ٿئي ته اُن کي اُبتو تناسب چئبو آهي.
- وقت سڌو تناسب رکي ٿو ڪم سان ۽ مزدورن جو تعداد اُبتو تناسب رکي ٿو وقت سان.
- رفتار: مفاصلي جي وقت سان نسبت کي رفتار چئبو آهي. اها هيٺين فارمولي سان معلوم ڪري سگهجي ٿي:

$$\text{رفتار} = \frac{\text{مفاصلو}}{\text{وقت}}$$

في ايڪي وقت ۾ پوري ٿيل فاصلي کي رفتار چئبو آهي.

- مفاصلي، رفتار ۽ وقت جي وچ ۾ تعلق کي سمجهڻ لاءِ فارمولو هن ريت آهي:

وقت × رفتار = مفاصلو

- رفتار جي ايڪن جو مٽجڻ هيٺين طرح ڪري سگهجي ٿو:

ڪلوميٽر في ڪلاڪ کي ميٽر في سيڪنڊ ۾ مٽائڻ لاءِ $\left(\frac{1000}{3600}\right)$ سان ضرب ڪريو.

ميٽر في سيڪنڊ کي ڪلوميٽر في ڪلاڪ ۾ مٽائڻ لاءِ $\left(\frac{1000}{3600}\right)$ سان ونڊ ڪريو.

ذهني ذخيرو: عجيب ۽ ڪارائتي ڄاڻ

اوهان ڪي ٽي انگ وٺو ۽ انهن کي وڏ ننڍائي ترتيب ۾ ناهي رکو. هاڻي انهن جي ترتيب ڦيري، پهرين اصل عددن مان ڪٽ ڪريو. هاڻي وري ٻيهر حاصل ٿيل نتيجي جي ترتيب ڦيري انهيءَ حاصل ٿيل نتيجي ۾ اُها رقم جوڙ ڪيو ته اوهان کي هرحالت ۾ عدد 1089 ملندو. پلي اوهان ٻيا ڪهڙا ٽي انگ وٺي اهو ساڳيو طريقو ڪندا ته وري به جواب هر صورت ۾ اهو ئي ملندو. اها ڪيڏي نه تعجب جي ڳالهه آهي.

$$\begin{array}{r} 321 \\ -\,123 \\ \hline 198 \\ +\,891 \\ \hline 1089 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 732 \\ -\,237 \\ \hline 495 \\ +\,594 \\ \hline 1089 \end{array}$$

اوهان به اهڙي کوجنا ڪريو.

يونٽ 7
مالياتي حساب

تعارف: اسان جي عام زندگيءَ ۾، اسين رياست يعني حڪومت طرفان مهيا ڪيل مختلف سهولتون استعمال ڪندا آهيون، جهڙوڪ حفاظت لاءِ پوليس، تعليم لاءِ سرڪاري اسڪول، صحت لاءِ سرڪاري اسپتال وغيره. سرڪار اِهي سهولتون ان رقم جي وسيلي مُهيا ڪري ٿي، جيڪا ملڪ جي شهرين کان گڏ ڪئي وڃي ٿي ۽ ان رقم کي **ٽيڪس** چئبو آهي.

7.1 ٽيڪس:
اُها في يا رقم جيڪا سرڪار ڪنهن پيداوار، آمدني يا ڪم تي وصول ڪري ٿي، تنهن کي ٽيڪس چئبو آهي. جيڪڏهن ٽيڪس ڪنهن شخصي آمدني يا ڪارپوريشن جي آمدني تي وصول ڪيو وڃي ته اُن کي سڌو ٽيڪس (Direct Tax) چئبو آهي. جيڪڏهن ٽيڪس شين جي قيمت يا خدمتن (Services) تي وصول ڪيو وڃي ته اُن کي اڻ سڌو ٽيڪس (Indirect tax) چئبو آهي. ٽيڪس وٺڻ جو مقصد حڪومت جو خرچ پورو ڪرڻ هوندو آهي. ٽيڪس جو سڀ کان اهم استعمال عوام جي شين ۽ خدمتن لاءِ رقم حاصل ڪرڻ هوندو آهي.

7.1.1 جائيداد ٽيڪس (Property Tax) ۽ عام وڪري وارو ٽيڪس (GST) (General Sales Tax)

حڪومت جي طرفان لڳل ٽيڪسن جا مختلف قسم آهن. جهڙوڪ دولت ٽيڪس، انڪم ٽيڪس، جائيداد ٽيڪس ۽ عام وڪري وارو ٽيڪس GST يا جنرل سيلز ٽيڪس وغيره.

هتي اسين رڳو ٻن قسمن جي ٽيڪسن جي باري ۾ پڙهنداسين:

(i) جائيداد ٽيڪس (ii) جنرل سيلز ٽيڪس

(i) جائيداد ٽيڪس (Property Tax)

جائيداد ٽيڪس اها ڍل يا ٽيڪس آهي، جيڪو حڪومت جي طرفان ڪنهن شخص جي جائيداد يا ذاتي ملڪيت تي جاري ڪيو ويندو آهي. ملڪيت جو مُلهه ڪڍڻ کان پوءِ، اُن ملهه تي ٽيڪس لڳندو آهي. پٽي تي ورتل مدت دوران، ٻيهر مُلهه ڪڍڻ تي، ڏنل ملڪيت تي ٽيڪس جي رقم تبديل ٿي سگهي ٿي. گهٽو ڪري ٽيڪس هر سال ادا ڪيو ويندو آهي.

جائيداد ٽيڪس عام طرح سان 2% جي شرح سان ادا ڪيو ويندو آهي، پر ٽيڪس جي شرح صوبي جي مطابق تبديل ٿيندي رهندي آهي. اسان جي سنڌ صوبي ۾ ٽيڪس، سنڌ شهري جائيداد ٽيڪس ايڪٽ 1958 جي مطابق لڳندو ۽ وصول ڪيو ويندو آهي. هيٺين ملڪيتن تي ٽيڪس معاف آهي:

1- سرڪاري ملڪيتون

2- رهائشي عمارت جيڪا 120 چورس وال (Square yards) کان وڌيڪ زمين تي نه هجي.

-3 عمارت جي ڪنهن به منزل تي 600 چورس فٽ (Square feet) يا اُن کان گهٽ ايراضي وارو رهائشي فليٽ.
-4 ڪتب خانو، باغيچو، ميدان، عبادت گاهه، يتيم خانو، قبرستان، مساڻ وغيره.
-5 بيواهن، يتيم ٻارن ۽ ڪنهن خاص حد تائين معذور ماڻهن جي ملڪيت يا جائيداد.
-6 سنڌ تهذيبي ورثو، بچاءُ ايڪٽ 1994 هيٺ آيل ورثو.

مثال1: 3% جي شرح سان 1,400,000 رُپين جي ملڪيت تي جائيداد ٽيڪس معلوم ڪريو.

حل: ملڪيت جو مُلهه = 1,400,000 رُپيا
ٽيڪس جي شرح = 3%
جائيداد ٽيڪس = ؟

جائيداد ٽيڪس معلوم ڪرڻ جو فارمولو آهي

جائيداد ٽيڪس = $\dfrac{\text{جائيداد جو مُلهه} \times \text{شرح}}{100}$

جائيداد ٽيڪس = 3% رُپين جو 1,400,000 = $\left(\dfrac{3}{100} \times 1,400,000\right)$

$= \dfrac{3 \times 1,400,000}{100}$

$= \dfrac{3 \times 1,4000\cancel{00}}{\cancel{100}} = 3 \times 14000 = 42000$ رُپيا

اهڙي طرح گهربل جائيداد ٽيڪس 42,000 رُپيا آهي.

مثال2: هڪ ليڊي ڊاڪٽر 2% جي شرح سان 9,500 رُپيا جائيداد ٽيڪس ادا ڪيو. هن جي جائيداد جو مُلهه لهو.

حل: ادا ڪيل جائيداد ٽيڪس = 9,500 رُپيا
ٽيڪس جي شرح = 2%
جائيداد جو مُلهه = ؟
جائيداد جي مُلهه جو 2% = 9,500 رُپيا
جائيداد جي مُلهه جو 1% = $\dfrac{9,500}{2}$ رُپيا
جائيداد جي مُلهه جو 100% = $\left(\dfrac{9500 \times 100}{2}\right)$ رُپيا = $\dfrac{9500 \times \cancel{100}^{50}}{\cancel{2}_{1}}$ رُپيا

اهڙي طرح ليڊي ڊاڪٽر جي جائيداد جو مُلهه 475,000 رُپيا آهي.

مشق 7.1

A- جائيداد جي مُلھ تي هيٺ ڏنل شرح سان، جائيداد ٽيڪس معلوم ڪريو:

1. جائيداد جو مُلھ = 286,400 رُپيا، شرح = 5%
2. جائيداد جو مُلھ = 1,657,900رُپيا، شرح = 2%
3. جائيداد جو مُلھ = 814,500 رُپيا، شرح = 3%
4. جائيداد جو مُلھ = 234,000 رُپيا، شرح = 1.4%
5. جائيداد جو مُلھ = 2,050,000 رُپيا، شرح = 1.6%

B- هيٺين ۾ جائيداد جو مُلھ معلوم ڪريو، جڏهن:

1. 2% جي شرح سان، ادا ڪيل جائيداد ٽيڪس 25,500 رُپيا آهي.
2. 4% جي شرح سان، ادا ڪيل جائيداد ٽيڪس 35,900 رُپيا آهي.
3. 5% جي شرح سان، ادا ڪيل جائيداد ٽيڪس 4,800 رُپيا آهي.
4. 3.5% جي شرح سان، ادا ڪيل جائيداد ٽيڪس 8,500 رُپيا آهي.
5. 1.5% جي شرح سان، ادا ڪيل جائيداد ٽيڪس 11,700 رُپيا آهي.

C- جائيداد ٽيڪس جو في سيڪڙو شرح معلوم ڪريو، جڏهن:

1. ادا ڪيل ٽيڪس 30,000 رُپيا آهي ۽ جائيداد جو مُلھ 1,800,000 رُپيا آهي.
2. ادا ڪيل ٽيڪس 33,000 رُپيا آهي ۽ جائيداد جو مُلھ 3,300,000 رُپيا آهي.
3. ادا ڪيل ٽيڪس 12,000 رُپيا آهي ۽ جائيداد جو مُلھ 600,000 رُپيا آهي.
4. ادا ڪيل ٽيڪس 8,676 رُپيا آهي ۽ جائيداد جو مُلھ 433,800 رُپيا آهي.
5. ادا ڪيل ٽيڪس 12,000 رُپيا آهي ۽ جائيداد جو مُلھ 600,000 رُپيا آهي.

D- هيٺين جا جواب ڏيو:

1. ٽيڪس ڇا آهي؟
2. ٽيڪس لڳائڻ جو مقصد ڇا آهي؟
3. جائيداد ٽيڪس جي وضاحت ڪريو.
4. ڪن ٻه ڇئن ملڪيتن جا نالا ٻڌايو جن تي ٽيڪس معاف آهي.

(ii) جنرل سيلس ٽيڪس (GST) يا وڪري وارو ٽيڪس

وڪري وارو ٽيڪس اهو ٽيڪس آهي، جيڪو حڪومت کي خدمتن ۽ ڪن خاص شين جي وڪري تي ادا ڪبو آهي. عام طرح سان وڪري جي وقت وڪٽنڊز کي واپرائيندڙ کان ٽيڪس جي رقم گڏ ڪرڻ جي اجازت هوندي آهي.

ڪڏهن ڪڏهن وڪٽنڊڙ شين يا خدمتن جي قيمتن کان جدا ٽيڪس وٺندو آهي يا شين جي قيمت ۾ ٽيڪس شامل ڪري وٺندو آهي (يعني ٽيڪس سميت)
اڪثر ڪجهه خاص شين يا خدمتن تي ٽيڪس معاف هوندو آهي.

7.1.2 جنرل سيلس ٽيڪس (GST) جو حساب

پاڪستان ۾ سال 2014 کان GST جي شرح 17% آهي.
GST جو حساب هيٺين ريٽ ڪيو وڃي ٿو:

GST جي شرح × شيءِ جي قيمت = ڪُل GST

تنهن ڪري $\dfrac{\text{GST جو ڪُل ٽيڪس}}{\text{شيءِ جي قيمت}}$ = GST جي شرح

مثال: بوٽن جي جوڙي جي قيمت 2,500 رُپيا آهي. وڪٽنڊڙ قيمت تي 17% شرح سان GST وٺي ٿو. GST جو مُلھ لهو.

حل:

2,500 رُپيا = شيءِ جي قيمت

17% = GST جي شرح

0.17 × شيءِ جي قيمت = GST جو مُلھ

425 رُپيا = 0.17 × 2,500 رُپيا =

تنهن ڪري GST جو مُلھ 425 رُپيا آهي.

(i) ڪُل قيمت معلوم ڪرڻ

ڪنهن شيءِ جي ٽيڪس سميت ڪُل قيمت معلوم ڪرڻ لاءِ شيءِ جي قيمت ۾ GST ڪي جوڙ ڪبو آهي.

تنهن ڪري شيءِ جي قيمت + GST = شيءِ جي ڪُل قيمت

متين مثال ۾

2,500 رُپيا = شيءِ جي قيمت

425 رُپيا = GST جو مُلھ

تنهن ڪري

2,925 رُپيا = 425 رُپيا + 2,500 رُپيا = بوٽن جي جوڙي جي ڪُل قيمت

انهيءَ ڪري بوٽن جي جوڙي جي ڪُل قيمت 2,925 رُپيا آهي.

نوٽ: شيءِ جي قيمت – ڪُل قيمت = GST

۽ GST – ڪُل قيمت = شيءِ جي قيمت

7.1.3 شيءِ جي قيمت معلوم ڪرڻ، جڏهن ڪُل قيمت ۽ GST جي شرح مليل هجي

اسان کي خبر آهي تہ GST شيءِ جي قيمت تي 17% شرح تي حاصل ٿيندو آهي ۽ شيءِ جي ڪُل قيمت ۾ شامل هوندو آهي.

فرض ڪريو ته شيءِ جي قيمت $= y$

جيئن ته GST جي شرح $= 17\% = 0.17$

تنهن ڪري $\text{GST} = 0.17 \times y = 0.17y$

جيئن ته اسان کي خبر آهي ته

GST – ڪُل قيمت = شيءِ جي قيمت

انهيءَ ڪري y × 0.17 – ڪُل قيمت = y

ڪُل قيمت $= y + 0.17y = (1 + 0.17)y$

يا ڪُل قيمت $= 1.17y$

يا $\dfrac{\text{ڪُل قيمت}}{1.17} = y$

اهڙي طرح $\boxed{\dfrac{\text{ڪُل قيمت}}{1.17} = \text{شيءِ جي قيمت}}$ جڏهن ته GST جي شرح 17% آهي.

مثال 1: هڪ واشنگ مشين GST سميت 15,912 رُپين ۾ وڪرو ڪئي وئي. GST کان سواءِ واشنگ مشين جي قيمت معلوم ڪريو، جڏهن ته GST جي شرح 17% آهي.

حل:

اسان کي خبر آهي ته $\dfrac{\text{ڪُل قيمت}}{1.17} = \text{شيءِ جي قيمت}$

هن حساب ۾: ? = شيءِ جي قيمت = واشنگ مشين جي قيمت

ڪُل قيمت = 15,912 رُپيا

GST جي شرح = 17% = 0.17

تنهن ڪري واشنگ مشين جي قيمت = $\left(\dfrac{15{,}912}{1.17}\right)$ رُپيا = (13,600) رُپيا

اهڙي طرح ٽيڪس کان سواءِ واشنگ مشين جي قيمت 13,600 رُپيا آهي.

مثال 2: هڪ ڪمپني 12,180 رُپين جي خدمتن تي 380 رُپيا GST ادا ڪري ٿي. GST جي شرح معلوم ڪريو.

حل:

اسان کي خبر آهي ته $\dfrac{\text{GST}}{\text{شيءِ جي قيمت}} = \text{GST جي شرح}$

هتي اسان کي GST جي شرح معلوم ڪرڻي آهي.

380 رُپيا = ادا ڪيل GST

2,180 رُپيا = خدمت جي قيمت = شيءِ جي قيمت

تنهن ڪري $17\% = \frac{17}{100} = 0.17 = \frac{380}{2\ 180}$ رُپيا/رُپيا = GST جي شرح

اهڙي طرح ڪمپني 17% GST ادا ڪيو.

مثال3: هڪ گئس جي ڪمپني واپرائيندڙ کان گئس جي قيمت طور 3,212 رُپيا وٺي ٿي. 17% جي شرح سان GST جي رقم معلوم ڪريو، جيڪا واپرائيندڙ ادا ڪئي.

حل: اسان کي خبر آهي ته GST = شيءِ جي قيمت × 17%

هتي ? = GST

3,212 رُپيا = گئس جي قيمت = شيءِ جي قيمت

17% = GST جي شرح

تنهن ڪري 546 رُپيا = 3,212 رُپيا × 17% = GST

= 546.04 رُپيا

اهڙي طرح واپرائيندڙ 546 رُپيا GST ادا ڪئي.

مثال4: آدم هڪ قميص جي وڪري تي 17% جي شرح سان 595 رُپيا GST ادا ڪئي. GST کان سواءِ قميص جي قيمت لکو.

حل: اسان کي خبر آهي ته GST = شيءِ جي قيمت × 17%

هتي ? = شيءِ جي قيمت = قميص جي قيمت

595 رُپيا = GST

17% = 0.17 = GST جي شرح

تنهن ڪري 0.17 × قميص جي قيمت = 595

يا 3,500 رُپيا = $\frac{595}{0.17}$ رُپيا = قميص جي قيمت

اهڙي طرح قميص جي قيمت 3,500 رُپيا آهي.

مثال5: هڪ شخص فرنيچر جون ڪجهه شيون GST سميت 77,950 رُپين ۾ خريد ڪيون. فرنيچر جي شين جي اصل قيمت معلوم ڪريو ۽ 17% جي شرح سان هن GST جي ڪيتري رقم ادا ڪئي؟

حل: هتي ? = فرنيچر جي قيمت = شيءِ جي قيمت

77,950 رُپيا = فرنيچر جي شين جي ڪُل قيمت

17% = 0.17 = GST جي شرح

هاڻي $\frac{77,950}{1.17}$ = $\frac{\text{ڪُل قيمت}}{1.17}$ = فرنيچر جي شين جي قيمت

66,624 رُپيا = 66,623.93 رُپيا =

66,624 × 0.17 = GST جي رقم

11,326 رُپيا = 11,326.08 رُپيا =

اهڙي طرح فرنيچر جي شين جي ڪُل قيمت 66,624 رُپيا آهي ۽ GST جي رقم 1,326 رُپيا آهي.

مشق 7.2

1. پارڪر پين جي قيمت 875 رُپيا آهي. 17% جي شرح سان ان تي GST معلوم ڪريو.
2. هڪ موبائيل جي قيمت 4,850 رُپيا آهي. 17% جي شرح سان ان تي GST معلوم ڪريو.
3. هار سينگار جي سامان جي قيمت 14,976 رُپيا آهي. جيڪڏهن هار سينگار جي سامان جي اصل قيمت 12,800 رُپيا آهي ته GST جي رقم معلوم ڪريو.
4. هڪ مائيڪرو ويو اُوِن جي قيمت 15,200 رُپيا آهي. ان تي ورتل GST جي شرح 17% آهي. GST جي رقم ۽ مائيڪرو ويو اُوِن جي ڪُل قيمت معلوم ڪريو.
5. عبدالله 7,880 رُپين قيمت وارو وڳو خريد ڪيو. ڪُل قيمت ۽ 17% جي شرح سان GST جي رقم معلوم ڪريو.
6. هڪ ريفريجريٽر 17% GST سميت 35,375 رُپين ۾ وڪرو ٿيو. ريفريجريٽر جي اصل قيمت معلوم ڪريو.
7. هڪ شخص 17% GST سميت 61,000 رُپين ۾ هڪ ڊش واشر خريد ڪيو. ڊش واشر جي قيمت GST کان سواءِ معلوم ڪريو. GST جي رقم به معلوم ڪريو.
8. عاليه آرائشي سامان جي خريد تي 17% جي شرح سان 2,720 رُپيا GST ادا ڪيو. GST کان سواءِ آرائشي سامان جي قيمت معلوم ڪريو.

9- هڪ اليڪٽرڪ ڪمپني 9,100 رُپين جي بجليءَ جي استعمال تي 1,547 رُپيا GST وٺي ٿي. GST جي شرح معلوم ڪريو.

10- ٽيڪس ڪان سواءِ قميص جي قيمت 2,560 رُپيا آهي ۽ ان تي GST جي رقم 436 رُپيا آهي ته GST جي شرح معلوم ڪريو.

7.2 نفعو ۽ مارڪ اپ

7.2.1 نفعو ۽ مارڪ اپ جي وضاحت ڪرڻ

نفعو: نفعو اها فائدي واري رقم آهي، جيڪا ڪنهن واپار ۾ ڪُل وڪري واري قيمت مان سڀ خرچ ڪڍڻ کان پوءِ حاصل ٿيندي آهي. نفعي جو مطلب ڪُل نفعو يا ڪُل ڪمائي ہ ورتو وڃي ٿو. تنهن ڪري نفعو وڪري جي قيمت ۽ خريدي قيمت جو فرق آهي.

يعني   نفعو = خريدي قيمت − وڪري جي قيمت

مارڪ اپ: عام زندگيءَ ۾ اسين ڪا شيءِ خريد ڪرڻ لاءِ پنهنجي دوستن يا مائٽن کان پئسا اُڌار وٺندا آهيون، جيڪي ڪجهه وقت کان پوءِ موٽائي ڏيندا آهيون. ڪجهه بئنڪون ۽ ريزڪي وڪرو ڪندڙ ڪمپنيون ہ ساڳي خدمت مهيا ڪن ٿيون ۽ ان تي وڌيڪ رقم وٺن ٿيون، جنهن کي مارڪ اپ چئبو آهي.

7.2.2 نفعو ۽ مارڪ اپ جي ساليانِي شرح معلوم ڪرڻ

نفعي جي شرح: نفعي جي شرح نفعي جي اُها نسبت آهي جيڪا ڪُل نفعي ۽ وڪري جي ڪُل آمدني جي وچ ۾ تعلق ڏيکاري ٿي. اهو هڪ اهڙو عام پيمانو آهي جنهن سان ڪاروبار جي ڪارڪردگي جو جائزو ونبو آهي.

ٻين لفظن ۾ اها نفعي واري رقم جو في سيڪڙو آهي.

$$\text{نفعي جي شرح} = \frac{\text{ڪُل نفعو}}{\text{ڪُل وڪري جي قيمت}} \times 100$$

ڪُل نفعو = ڪُل خريدي قيمت − ڪُل وڪري جي قيمت

انهيءَ ڪري، نفعي جي شرح × خريدي قيمت + خريدي قيمت = وڪري واري قيمت

(نفعي جي شرح + 1) خريدي قيمت = وڪري واري قيمت

يا   SP = C.P (1 + نفعي جي شرح)

۽

$$\text{خريدي قيمت (C.P)} = \frac{\text{وڪري واري قيمت (S.P)}}{(1 + \text{نفعي جي شرح})}$$

مثال: نفعي جي شرح معلوم ڪريو، جڏهن ڪُل نفعو 400 رُپيا آهي ۽ ڪُل وڪري جي قيمت 1,600 رُپيا آهي.

حل:

$$\text{نفعي جي شرح} = \frac{\text{ڪل نفعو}}{\text{ڪُل وڪري جي رقم}} \times 100$$

$$= \frac{400}{1600} \times 100$$

$$= \frac{\cancel{400} \times \cancel{100}^{25}}{\cancel{1600}_{\cancel{4}_1}} = 25$$

اهڙي طرح $\quad 25\% = $ نفعي جي شرح

ساليانو مارڪ اپ: اسان عام طور تي شين لاءِ ادا ڪيل اصل رقم جو في سيڪڙو معلوم ڪري مارڪ اپ لهندا آهيون. انهيءَ کي مارڪ اپ جي شرح چئبو آهي ۽ ادا ڪيل رقم کي اصل رقم (Principal) چئبو آهي.

مثال: 12% جي شرح سان 2 سالن لاءِ اصل قم 50,000 رُپين تي مارڪ اپ معلوم ڪريو.

حل:

$$\text{مارڪ اپ} = \frac{P \times R \times T}{100} = \frac{50000 \times 12 \times 2}{100} = \frac{500\cancel{00} \times 12 \times 2}{\cancel{100}_1} = 112,000 \text{ رُپيا}$$

عملي ڪم 1: فارمولو استعمال ڪندي ڪُٽل مقدارون معلوم ڪريو.

سيريل نمبر	فارمولو	C.P	S.P	ڪُل نفعو
(i)	نفعو = S.P – C.P	1600 رُپيا	1750 رُپيا	
(ii)	S.P = C.P + نفعو	2000 رُپيا		600 رُپيا
(iii)	S.P – نفعو = C.P		10450 رُپيا	950 رُپيا

عملي ڪم 2: فارمولي سان ڪٽل مقدارون معلوم ڪريو.

سيريل نمبر	فارمولو	نفعي جي شرح	ڪُل نفعو	C.P	S.P
(i)	$\frac{\text{نفعو}}{S.P} \times 100$ = نفعي جي شرح		200 رُپيا	800 رُپيا	1,000 رُپيا
(ii)	S.P = C.P (1 + نفعي جي شرح)	10%	100 رُپيا	1,000 رُپيا	
(iii)	$\frac{\text{نفعو}}{S.P} \times 100$ = نفعي جي شرح		400 رُپيا	1,600 رُپيا	2,000 رُپيا
(iv)		20%		1,000 رُپيا	1,200 رُپيا
(v)			250 رُپيا	2,500 رُپيا	2,750 رُپيا

عملي ڪم3: فارمولو استعمال ڪندي ڳُتل مقدارون معلوم ڪريو.

سيريل نمبر	مارڪ اپ	اصل رقم	مدت	مارڪ اپ جي شرح	استعمال ٿيل فارمولو
(i)	$\boxed{}$	500 رُپيا	2 سال	12%	$MP = \frac{P \times R \times T}{100}$
(ii)	205 رُپيا	$\boxed{}$	1 سال	8%	$P = \frac{MP \times 100}{R \times T}$
(iii)	528 رُپيا	1,650 رُپيا	10 سال	$\boxed{}$	$MPR = \frac{MP \times 100}{P \times T}$
(iv)	350 رُپيا	3,500 رُپيا	$\boxed{}$	2.5%	$T = \frac{MP \times 100}{P \times R}$
(v)	$\boxed{}$	100,000رُپيا	3 سال	1.25%	$MP = \frac{P \times R \times T}{100}$
(vi)	1,050 رُپيا	$\boxed{}$	5 سال	4.5%	$P = \frac{MP \times 100}{R \times T}$

7.2.3 (i) نفعي تي مشتمل عام زندگيءَ جا حساب حل ڪرڻ

هينين مثالن تي غور ڪريو.

مثال1: هڪ شخص ڪا شيءِ 400 رُپين ۾ پڌو وڪرو ڪندڙ واپاري کان خريد ڪئي. پوءِ هن اها شيءِ 700 رُپين ۾ عام واپرائيندڙ کي وڪرو ڪئي. هن جو نفعو ڇا آهي؟ ان جي نفعي جي شرح به معلوم ڪريو.

حل: اسان کي خبر آهي ته نفعو = خريدي قيمت − وڪري واري قيمت

هتي نفعو = 400 رُپيا − 700 رُپيا = 300 رُپيا

$$\text{نفعي جي شرح} = \frac{\text{نفعو}}{\text{خريدي قيمت}} \times 100$$

يا $\text{نفعي جي شرح} = \frac{300}{400} \times 100 = 75\%$

اهڙي طرح نفعي جي شرح 75% آهي ۽ هن جو نفعو 300 رُپيا آهي.

مثال2: هڪ ڪمپيوٽر سافٽ ويئر ريزڪي وڪرو ڪندڙ 45% نفعي جي شرح استعمال ڪري ٿو. هڪ اليڪٽرانڪ ڪمپيوٽر گيم جي وڪري واري قيمت معلوم ڪريو، جنهن تي ريزڪي وڪرو ڪندڙ جو 1250 رُپيا خرچ ٿيو.

حل: اسان کي خبر آهي ته:

(نفعي جي شرح + 1) خريدي قيمت = وڪري واري قيمت

هتي ? = وڪري واري قيمت

1,250 رُپيا = خريدي قيمت

نفعي جي شرح = 45% = 0.45

اسان کي خبر آهي ته S.P = C.P (1 + نفعي جي شرح)

تنهن ڪري 1812.50 رُپيا = (1250×1.45) رُپيا = (1+0.45) 1250 رُپيا = وڪري واري قيمت

اهڙي طرح ڪمپيوٽر گيم جي وڪري واري قيمت 1,812.50 رُپيا آهي.

مثال 3: هڪ شوز اسٽور خريدي قيمت تي 40% نفعو وٺي ٿو. هڪ بوٽن جي جوڙي جي خريدي قيمت معلوم ڪريو، جيڪا 2,630 رُپين ۾ وڪرو ٿي آهي.

حل: اسان کي خبر آهي ته

وڪري واري قيمت = خريدي قيمت (1 + نفعي جي شرح)

هتي ? = C.P = خريداري قيمت

وڪري واري قيمت = 2,630 رُپيا

نفعي جي شرح = 40% = 0.4

S.P = C.P (1 + نفعي جي شرح)

تنهن ڪري 2,630 = C.P (1 + 0.4)

يا C.P = $\frac{263}{1.4}$ رُپيا = 1,878.57 رُپيا

اهڙيءَ طرح بوٽن جي جوڙي جي خريدي قيمت 1,879 رُپيا آهي.

ياد رکو: نفعي جي شرح اصل خريدي قيمت جي في سيڪڙي سان ڳ معلوم ڪئي ويندي آهي.

$$\text{نفعي جي شرح} = \frac{\text{نفعو}}{\text{خريدي قيمت}} \times 100$$

نفعو اها قيمت معلوم ڪرڻ لاءِ استعمال ٿيندو آهي، جنهن تي شين کي وڪرو ڪرڻ گهرجي. اهڙي طرح درحقيقت ننڍي ڪاروبار ۾ پيداوار يا خدمتن جي خريدي قيمت ۽ نفعي جو جائزو وٺڻ جا ڳ مختلف طريقا آهن.

مثال 4: هڪ ٽائل ڪمپني گذريل مهيني 1,500,000 رُپين جو وڪرو ڪيو. گڏوگڏ 45,000 جو وڪرو واپس ٿيو (يعني ڪنهن سبب جي ڪري واپرائيندڙ وڪرو ڪيل شيءِ واپس ڪئي)، شين جي خريدي قيمت 650,000 رُپيا ۽ انتظامي خرچ 470,000 رُپيا آهي. ڪمپنيءَ جي ڪل نفعي جو في سيڪڙو لهو.

حل: اسان کي خبر آهي ته

$$\text{نفعي جي شرح} = \frac{\text{ڪُل نفعو}}{\text{ڪُل وڪري جي قيمت}} \times 100$$

هتي (واپس ٿيل وڪرو) 45,000 – (وڪرو) 1,500,000 رُپيا = ڪل وڪري واري قيمت
(شين جي خريدي قيمت) 650,000 رُپيا – (ڪُل وڪرو) 1,500,000 رُپيا = ڪُل نفعو
انتظامي خرچ 470,000 رُپيا –
= 335,000 رُپيا

فارمولو: $100 \times \dfrac{\text{ڪُل نفعو}}{\text{ڪُل وڪري جي قيمت}} = \text{نفعي جي شرح}$

تنهن ڪري $23\% = \dfrac{6700}{291} = \dfrac{\cancel{335,000}^{67} \times 100}{\cancel{1,455,000}_{291}} = 100 \times \dfrac{335,000}{1,455,000} = \text{نفعي جي شرح}$

تائل ڪمپني جي نفعي جو في سيڪڙو 23% آهي.

مشق 7.3

1. هڪ ريزڪي وڪرو ڪندڙ هيلمٽ لاءِ ٻڌو وڪرو ڪندڙ کي 1,860 رُپيا ادا ڪري ٿو. پوءِ هي اهو واپرائيندڙ کي 2,650 رُپين ۾ وڪرو ڪري ٿو. مارڪ اپ جي شرح ۽ هن جو نفعو ڇا آهي؟
2. هڪ دُڪاندار مائيڪرو ويو اُون 6,700 رُپين ۾ وڪرو ڪري ٿو. مارڪ اپ جي شرح ۽ هن جو نفعو معلوم ڪريو جيڪڏهن مائيڪرو ويو اُون جي خريدي قيمت 6,250 رُپيا آهي.
3. هڪ ريزڪي وڪرو ڪندڙ ڪمپيوٽر سامان تي 65% مارڪ اپ جي شرح استعمال ڪري ٿو. وڪري واري قيمت معلوم ڪريو جيڪڏهن ڪنهن خاص سامان جي خريدي قيمت 1,520 رُپيا آهي.
4. ڪنهن ناول جي خريدي قيمت 1,100 رُپيا آهي. 66% مارڪ اپ جي شرح سان ناول جي وڪري واري قيمت معلوم ڪريو.
5. هڪ موبائيل فون ڪمپني 55% مارڪ اپ شرح، هر ان موبائيل تي استعمال ڪري ٿي جنهن جي خريدي قيمت 2,260 رُپيا آهي. ان موبائيل فون جي وڪري واري قيمت معلوم ڪريو.
6. هڪ موبائيل ڪمپني 45% مارڪ اپ شرح استعمال ڪري ٿي. هڪ موبائيل جي خريدي قيمت معلوم ڪريو، جنهن جي وڪري واري قيمت 4785 رُپيا آهي.
7. هڪ ڪيلڪيوليٽر جي وڪري واري قيمت 1,230 رُپين تي مارڪ اپ جي شرح 50% آهي. ڪيلڪيوليٽر جي خريدي قيمت معلوم ڪريو.
8. هڪ اسٽيشنري وڪڻندڙ يعني ڪاغذ قلم وڪڻندڙ، هر ان شيءِ تي جيڪا هو وڪرو ڪري ٿو 60% مارڪ اپ استعمال ڪري ٿو. جيڪڏهن هڪ شيءِ جي وڪري واري قيمت 144 رُپيا آهي ته ان شيءِ جي خريدي قيمت معلوم ڪريو.

9- ٻارن جي ڪپڙن ۽ سامان وڪڻڻ تي هڪ ننڍي گهريلو واپار ۾ مهيني جي آمدني 25,000 رُپيا آهي. شين جي قيمت ۽ ٻيا خرچ ملائي ڪُل خرچ 10,550 رُپيا آهي. ڪل نفعي جو في سيڪڙو لهو.

10- هڪ خاص ڪاروبار ۾ مهيني جي ڪمائي 2,500,000 رُپيا آهي. 15,000 رُپين جون وڪيل شيون واپس ٿين ٿيون. وڪيل شين جي قيمت 505,000 رُپيا آهي ۽ 580,000 رُپين جا ٻيا خرچ آهن. نفعي جي في سيڪڙو شرح معلوم ڪريو.

11- هڪ دوائن جي ڪمپني جي گذريل مهيني جي ڪمائي 1,850,000 رُپيا آهي. 85,000 رُپين جون وڪيل شيون واپس ٿيون. وڪيل دوائن جي قيمت 850000 رُپيا آهي. 550,000 رُپين جا انتظامي خرچ آهن. ڪمپني جي ڪُل نفعي جو في سيڪڙو معلوم ڪريو.

7.2.3 (ii) مارڪ اپ تي مشتمل عام زندگيءَ جا حساب حل ڪرڻ

فرض ڪريو 'P' اصل رقم آهي، 'T' مدت آهي ۽ 'R' مارڪ اپ جي شرح آهي تہ مارڪ اپ جي رقم ٿيندي:

$$\text{مارڪ اپ} = \frac{(R \times P \times T)}{100}$$

ساڳي طريقي سان،

$$\text{اصل رقم} = \frac{(100 \times \text{مارڪ اپ})}{T \times R} \text{،} \quad \text{مارڪ اپ جي شرح} = \frac{(100 \times \text{مارڪ اپ})}{P \times T}$$

$$\text{۽} \quad \text{مدت} = \frac{(100 \times \text{مارڪ اپ})}{P \times R}$$

هيٺين مثالن تي غور ڪريو:

مثال 1: هڪ شخص مارڪ اپ جي 12% ساليانو شرح سان، بئنڪ مان 280,000 رُپيا قرض ورتو. مارڪ اپ جو مُلھ لهو جيڪڏهن مدت 2 سال آهي.

حل: مارڪ اپ جي شرح = ساليانو 12%، اصل رقم = 280,000 رُپيا

مارڪ اپ جو مُلھ = ؟ ۽ مدت (T) = 2 سال

$$\text{مارڪ اپ جو مُلھ} = \frac{R \times P \times T}{100} = \frac{12 \times 280,000 \times 3}{100} = 67,200 \text{ رُپيا}$$

اهڙي طرح مارڪ اپ جو مُلھ 67,700 رُپيا آهي.

مثال 2: اسلم 10% ساليانو شرح تي 292 ڏينهن لاءِ هڪ ريزڪي وڪڻندڙ واپاري کان 450,000 رُپين جو قرض ورتو. مارڪ اپ جي رقم معلوم ڪريو.

حل: (P) اصل رقم = 450,000 رُپيا ، (R) مارڪ اپ جي شرح = ساليانو 10%

مارڪ اپ = ؟ ۽ (T) مدت = 292 ڏينهن = $\frac{292}{365}$ سال = $\frac{4}{5}$ سال

فارمولي جو استعمال ڪندي $\frac{(R \times P \times T)}{100}$ = مارڪ اپ

$$= \frac{10 \times 450{,}000 \times \frac{4}{5}}{100} = \text{رُپيا}\ \frac{\cancel{10}^{2} \times 450{,}0\cancel{00} \times 4}{\cancel{100}_{1} \times \cancel{5}_{1}} = 36{,}000\ \text{رُپيا}$$

اهڙي طرح مارڪ اپ جو مُلهه 36,000 رُپيا آهي.

مثال3: بئنڪ مان قرض ورتل اصل رقم 87,600 رُپين تي 12.5% ساليانې شرح سان 20 مهينن لاءِ مارڪ اپ معلوم ڪريو.

حل: (R) مارڪ اپ جي شرح = 12.5% (P) اصل رقم = 87,600 رُپيا

مارڪ اپ = ؟، (T) مدت = 20مهينا = $\frac{20}{12}$ سال = $\frac{5}{3}$ سال

فارمولي جو استعمال ڪندي $\frac{(R \times P \times T)}{100}$ = مارڪ اپ

$$\text{مارڪ اپ} = \frac{12.5 \times \frac{5}{3} \times P}{100} = \frac{12.5 \times 5 \times \cancel{87600}^{292}}{\cancel{100}_{1} \times \cancel{3}_{1}} = 18250$$

انهيءَ ڪري مارڪ اپ 18,250 رُپيا آهي.

مشق 7.4

1- قاسم قسطن تي بئنڪ جي قرض مان 450,800 رُپين ۾ گاڏي خريد ڪئي جڏهن ته مارڪ اپ جي ساليانې شرح 12% آهي. گاڏيءَ جي وڪري واري قيمت معلوم ڪريو، جيڪڏهن مدت 3 سال آهي.

2- مارڪ اپ جي 10% ساليانې شرح سان، نجمه هڪ سون جي زيورن جو سيٽ قسطن تي 175,500 رُپين ۾ خريد ڪيو. زيورن جي سيٽ جي وڪري واري قيمت معلوم ڪريو، جيڪڏهن مدت 9 مهينا آهي.

3- شازيه هڪ موبائيل فون 16,900 رُپين ۾ وڪرو ڪيو. جڏهن ته مارڪ اپ جي شرح 15% آهي. هن جو مارڪ اپ معلوم ڪريو، جيڪڏهن مدت 219 ڏينهن آهي.

4- جيڪڏهن ½ 1 سالن لاءِ هڪ رنگين ٽي وي سيٽ تي 15% مارڪ اپ جو مُلهه 8,500 رُپيا آهي ته ٽي وي جي خريداري قيمت معلوم ڪريو.

5- فارمولو استعمال ڪندي ڪُٽل مقدارون معلوم ڪريو:

سيريل نمبر	مارڪ اپ	اصل رقم	مدت	مارڪ اپ جي شرح
(i)	____ رُپيا	800,000 رُپيا	1 سال	12%
(ii)	10,000 رُپيا	00,000 رُپيا	____	10%
(iii)	6,600 رُپيا	____	2 سال	11%
(iv)	____ رُپيا	200,000 رُپيا	½ 1 سال	8%
(v)	800 رُپيا	4,000 رُپيا	½ 2 سال	
(vi)	45,000 رُپيا	____	73 ڏينهن	10%

7.3 زڪوات ۽ عشر

زڪوات ۽ عُشر جو 1980 وارو دستور

پاڪستان ۾ زڪوات ۽ عُشر ڪي گڏ ڪرڻ ۽ ورهائڻ جي ذميوار زڪوات ڪائونسل آهي. زڪوات ڪائونسلن جي متان مذهبي معاملن جي وزارت نظر رکي ٿي. زڪوات ۽ عُشر جي گڏ ڪرڻ ۽ ورهائڻ جو نظام 1980 ۾ عمل ۾ آيو.

7.3.1 زڪوات ۽ عُشر ڪي بيان ڪرڻ

(i) زڪوات:

زڪوات اسلام جي پنجن رُڪنن مان هڪ آهي. اها قرآن ۾ نماز سان گڏ بيان ڪيل آهي. زڪوات هر ان صاحبِ حيثيت يا صاحبِ نصاب تي فرض آهي، جيڪو پنهنجي ضرورتن کان سواءِ هڪ پوري قمري سال ۾ نصاب کان وڌيڪ دولت رکي ٿو، جيڪا 87.48 گرام يا 7.50 تولا سون آهي يا 612.36 گرام يا 52.50 تولا چاندي آهي.

زڪوات هڪ پوري قمري سال کان پوءِ 2.5% جي شرح سان ادا ڪئي ويندي آهي.

يعني، 2.5% × ساليانِي بچت = زڪوات

(ii) عُشر:

عُشر هرهڪ زمين جو مالڪ، جاگيردار، حصيدار يا الاٽي، پٽيدار، پٽو رکندڙ يا زمين رکندڙ کي 5% يا 10% جي شرح سان پنهنجي اُپت يا پيداوار تي لازمي ادا ڪندو آهي.

عُشر اُن هاريءَ تي معاف آهي، جيڪو مستحق هجي يا هن جي اُپت يا پيداوار پنج وسق يا اٽڪل 948 ڪلوگرام ڪڻڪ يا اُن جي برابر مُلهه کان گهٽ هجي.

جيڪڏهن ٻني يا باغيچي کي قدرتي طور برسات يا چشمي يا دريا يا نديءَ مان پاڻي ملي ته عشر ڏهون حصو يا 10% فرض آهي. جيڪڏهن ٻني يا باغيچو هٿرادو ذريعن جهڙوڪ کوهه، ٽيوب ويل، واهه وغيره سان آباد يا زرخيز ٿئي ته عُشر ويهون حصو يا 5% فرض آهي.

(iii) زڪوات ۽ عشر جي ورهاست

زڪوات ادا ڪئي ويندي آهي:

- انهن کي جيڪي غريب ۽ ضرورتمند هجن.
- انهن کي جيڪي ٻانهپ يا قيد، قرض ۽ سفر ۾ هجن.
- انهن کي جيڪي فنڊز جو انتظام رکن ٿا.

7.3.2 زڪوات ۽ عُشر سان واسطو رکندڙ حسابن کي حل ڪرڻ

مثال 1: هڪ ڪاروباري ماڻهو هڪ پوري سال کان پوءِ 80,000 رُپيا روڪڙا بچت ڪئي. هن وٽ بئنڪ ۾ 60,000 رُپين جي نقدي آهي. هن کي ڪيتري زڪوات ڏيڻي پوندي؟

حل: (i) نقد بچت = 80,000 رُپيا

(ii) بئنڪ ۾ رقم (نقدي) = 600,000 رُپيا

ڪاروباري شخص جي ڪُل بچت = 600,000 + 80,000 رُپيا

= 680,000 رُپيا

هن تي واجب زڪوات جي رقم = 2.5% × 680,000

$= \frac{2.5}{100} \times 680,000 = 17000$ رُپيا

اهڙي طرح ڪاروباري شخص جي مٿان واجب زڪوات 17,000 رُپيا آهي.

مثال 2: هڪ گهريلو عورت وٽ سون جا زيور آهن جن جو مُلهه 500,000 رُپيا آهي. هن روز جي خرچ مان 25,000 رُپين جي رقم به بچائي آهي. هن تي واجب زڪوات معلوم ڪريو.

حل: ڪل رقم = 500,000 رُپيا + 25,000 رُپيا = 525,000 رُپيا

تنهن ڪري زڪوات = 525,000 رُپيا × 2.5 %

$= 525,000 \times \frac{2.5}{100}$ رُپيا = 13,125 رُپيا

اهڙي طرح هن کي 13,125 رُپين جي زڪوات ادا ڪرڻي آهي.

مثال3: فرح زڪوات ۾ 9,000 رُپين جي رقم ادا ڪئي. اها بچت معلوم ڪريو جنهن تي هن زڪوات ادا ڪئي.

حل: اسان کي خبر آهي ته 2.5% × ساليانو بچت = زڪوات جي رقم

9,000 = ساليانو بچت × 0.025

$\frac{9,000}{0.025}$ = ساليانو بچت = 360,000 رُپيا

اهڙي طرح هن وٽ ساليانو بچت 36,000 رُپيا هئي.

مثال4: هڪ زميندار 3,000 ڪلوگرام ڪڻڪ ۾ پاڄيون پيدا ڪري ٿو، جن جو مُلهه 25,000 رُپيا آهي. 5% جي شرح سان هن تي واجب عُشر جي رقم معلوم ڪريو، جڏهن ته ڪڻڪ جو مُلهه 30 رُپيا في ڪلوگرام آهي.

حل: 5% × پيداوار جو ڪُل مُلهه = عشر

= 30 رُپيا في ڪلوگرام جي حساب سان 3,000 ڪلوگرام جو مُلهه

= رُپيا $(3,000 \times 30)$ = 90,000 رُپيا

ڪڻڪ ۽ پاڄين جو ڪُل ملهه = رُپيا 90,000 + 25,000 رُپيا

= رُپيا 115,000

عشر جي رقم = رُپيا $115,000 \times 5\%$

= رُپيا $115,000 \times \frac{5}{100} = 115,000 \times 0.05$

= رُپيا 5,750

زميندار کي 5,750 رُپيا عُشر ڏيڻو پوندو.

مشق 7.4

1- هڪ شخص سڄو سال 50,000 رُپين جي رقم رکي ٿو. ڇا هي صاحبِ نصاب آهي. جيڪڏهن ها ته زڪوات جي رقم معلوم ڪريو، جيڪا هن کي ادا ڪرڻي آهي.

2- هڪ تنخواه دار شخص وٽ 200,000 رُپيا ۽ 3 تولا خالص سون آهي. زڪوات معلوم ڪريو، جيڪا هن کي ادا ڪرڻي آهي. سون جي قيمت 47,400 رُپيا في تولو آهي.

3- هڪ ليڊي ڊاڪٽر وٽ 500,000 رُپين جي قيمت جا زيور آهن ۽ هن سڄي سال ۾ 150,000 رُپين جي بچت ڪئي. زڪوات جي رقم معلوم ڪريو، جيڪا هن کي ادا ڪرڻي آهي.

4- هڪ واپاري 20,500 رُپين جي زڪوات ادا ڪئي. هُن جي سڄي سال جي بچت معلوم ڪريو.
5- هڪ هاري 10,000 رُپيا عُشر ادا ڪري ٿو. ان فصل جو ملهه معلوم ڪريو، جيڪا هن پيدا ڪئي.
6- هڪ هاري 15,000 ڪلوگرام ڪمند پيدا ڪري ٿو. 5% جي شرح تي هن جي عُشر جي رقم معلوم ڪريو. ڪمند جو مُلهه 5.25 رُپيا في ڪلوگرام آهي.
7- جُمن 5,000,000 رُپين ۾ پنهنجي باغيچي جون نارنگيون برآمد ڪري ٿو. 5% جي شرح سان عُشر جي رقم معلوم ڪريو.
8- ڪامل پنهنجي بنيءَ جي هڪ حصي ۾ 1,500 ڪلوگرام جي ڪٽڪ پيدا ڪري ٿو ۽ بنيءَ جي ٻيئي حصي تي 1,200 ڪلوگرام چانور پيدا ڪري ٿو. 5% جي شرح سان عُشر معلوم ڪريو. ڪٽڪ جو مُلهه 30 رُپيا في ڪلوگرام ۽ چانورن جو مُلهه 65 رُپيا في ڪلوگرام آهي.

جائزي واري مشق 7

1- موبائيل فون جي قيمت 8,500 رُپيا آهي. وڪٽندڙ قيمت تي 17% GST وٺي ٿو. وڪري تي لاڳو ٽيڪس معلوم ڪريو.
2- هڪ درآمد ٿيل LCD ٽي وي GST سميت 55,800 رُپين ۾ وڪرو ٿي آهي. ٽيڪس کان سواءِ LCD جي قيمت معلوم ڪريو. GST جي شرح 17% آهي.
3- هڪ اليڪٽرڪ ڪمپني واپرائيندڙ کان بجليءَ جي قيمت 16,750 رُپيا وٺي ٿي. 17% جي شرح سان GST جي اها رقم معلوم ڪريو، جيڪا واپرائيندڙ ادا ڪئي.
4- هڪ شخص ڪمري جي سيٽ جي خريديءَ تي 17% جي شرح سان 16,989 رُپيا GST ادا ڪري ٿو. GST کان سواءِ ڪمري جي سيٽ جي قيمت لهو.
5- 12.5% ساليانى مارڪ اپ جي شرح سان، هڪ واپاري بئنڪ کان 1,700,000 رُپين جو قرض وٺي ٿو. ½ 1 سالن جي مدت لاءِ مارڪ اپ لهو.
6- هڪ ليڊي ڊاڪٽر 2,850 رُپين جو مارڪ اپ بئنڪ کي ادا ڪري ٿي. 6 مهينن جي مدت آهي ۽ مارڪ اپ جي شرح 12% آهي. اصل رقم معلوم ڪريو.
7- هڪ وڏي عمر جو شهري بئنڪ ۾ 500,000 رُپيا رکي ٿو. هن جو مارڪ اپ معلوم ڪريو، جيڪڏهن مارڪ اپ جي شرح 10% آهي ۽ مدت ½ 2 سال آهي.

8- هڪ گاڏين جو واپاري 35% مارڪ اپ جي شرح استعمال ڪري ٿو. هڪ گاڏيءَ جي خريداري قيمت معلوم ڪريو جيڪا 1,051,000 رُپين ۾ وڪرو ٿئي ٿي.

9- هڪ واپاري سڄي سال ۾ 95,000 رُپين جي بچت ڪئي ۽ هن وٽ 500,000 رُپين جو مال آهي. هن تي واجب زڪوات معلوم ڪريو.

10- هڪ ماسترياڻيءَ وٽ سون جا زيور آهن، جن جو ملھ 400,000 رُپيا آهي. هن جي ساليانی بچت جي رقم 45,000 رُپيا آهي. هن تي واجب زڪوات معلوم ڪريو.

11- هڪ شخص12,500 رُپيا زڪوات جي رقم ادا ڪئي. هن جي اها رقم معلوم ڪريو جنھن تي هن زڪوات ادا ڪئي.

12- هڪ هاري 5,000 ڪلوگرام ڪٽڪ ۽ پاڃيون پيدا ڪيون، جن جو مُلھ 48,000 رُپيا آهي. 5% جي شرح سان ان تي واجب عُشر معلوم ڪريو. ڪٽڪ جو مُلھ 35 رُپيا في ڪلوگرام آهي.

13- هڪ هاريءَ 2,000 رُپيا عُشر ادا ڪري ٿو. ان فصل جو مُلھ معلوم ڪريو، جيڪا هن پيدا ڪئي. عُشر جي شرح 5% آهي.

خلاصو

- ٽيڪس هڪ في آهي، جيڪا حڪومت ڪنھن پيداوار، ڪمائيءَ يا ڪم تي وٺي ٿي.
- ٽيڪس لڳائڻ جو مقصد حڪومت جو خرچ پورو ڪرڻ آهي.
- جائيداد ٽيڪس اها في آهي جيڪا حڪومت ڪنھن شخص جي جائيداد يا ذاتي ملڪيت تي وٺي ٿي.
- ٽيڪس لڳندڙ رقم جو 2% = عام جائيداد ٽيڪس
- GST جي شرح × شيءِ جي قيمت = GST
- پاڪستان ۾ GST جي شرح 17% آهي.
- شيءِ جي قيمت + جنرل سيلس ٽيڪس (GST) = شيءِ جي ڪُل قيمت
- $\frac{\text{ڪُل قيمت}}{1.17}$ = شيءِ جي قيمت
- خريدي قيمت − وڪري واري قيمت = نفعو
- $\frac{\text{نفعو}}{\text{خريدي قيمت}} \times 100$ = نفعي جي شرح

- $\frac{P \times R \times T}{100}$ = مارڪ اپ جي شرح، جڏهن ته P جو مطلب آهي اصل رقم، T جو مطلب آهي مدت ۽ R جو مطلب آهي مارڪ اپ جي ساليانو شرح.
- (مارڪ اپ جي شرح + 1) خريداري قيمت = وڪري واري قيمت
- $100 \times \frac{\text{ڪُل نفعو}}{\text{ڪُل وڪري جي قيمت}}$ = نفعي جي شرح
- زڪوات هرهڪ صاحب نصاب شخص تي فرض آهي. اهو هڪ اسلامي ٽيڪس آهي جيڪو ان دولت تي ادا ڪبو آهي، جيڪا هڪ شخص وٽ سڄو سال رهي ٿي.
- نصاب: 87.48 گرام سون يا 7.5 تولا سون
  يا 612.36 گرام چاندي يا 52.5 تولا چاندي
- زڪوات جي شرح 2.5% آهي.
- عُشر هڪ زڪوات آهي، جيڪا هاري يا زمين جو مالڪ ادا ڪندو آهي.
- 948 ڪلوگرام ڪڻڪ جو مُلهه يا 5 وسق عشر جو نصاب آهي.
- بنيءَ جي پيداوار جو 5% يا 10% عُشر جي شرح آهي.

• • •

عجيب ۽ دلچسپ علم: سوچ جو تلاءُ

ڇا توهان سوچي سگهو ٿا ته عمل جو نمونو تبديل ڪرڻ ڪان پوءِ به جواب ساڳيو حاصل ٿئي؟

اهو ناقابلِ تصور آهي، پر ته به توهان مشاهدو ڪندا.

$$1\frac{1}{2} \times 3 = 1\frac{1}{2} + 3; \qquad 3\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 3\frac{1}{5} \div \frac{4}{5}$$

$$7\frac{1}{5} \div 6 = 7\frac{1}{5} - 6; \qquad 5 - \frac{5}{6} = \frac{4}{5}5 \times \frac{5}{6}$$

خبردار، هر وقت ان ڪي اصول نه ناهيو.

يونٽ 8

آلجبري اظهار

تعارف: عام زندگيءَ ۾ رياضيءَ جي انهن مشڪل حسابي مسئلن کي حل ڪرڻ لاءِ آلجبرا جو سهارو وٺڻو پوي ٿو، جيڪي انگي حساب جي طريقي سان، سولائيءَ سان، حل ٿي نٿا سگهن. عددن يا اکرن جي استعمال جي بدران آلجبرا ۾ نشانيون استعمال ڪري، حسابي مسئلي کي پهريائين بياني صورت ۾ آڻيون ٿا. اڪثر ڪري آلجبرا ۾ عددن کي ظاهر ڪرڻ لاءِ انگريزي الفابيٽ جا اکر استعمال ڪريون ٿا.

8.1 آلجبري اظهار

اسان اڳين ڪلاس ۾ پڙهي آيا آهيون ته آلجبري اظهار ۾ رقمون جوڙ (+) ۽ ڪٽ (–) جي عملن سان پاڻ ۾ ڳنڍيل ٿين ٿيون.

مثال طور: $4x + 5y + 3,\ 6a + 5b - 4\ ,\ 5m \div 6 \times 2\ p \times q$

8.1.1 مستقل جي وصف جو بيان، اهڙي نشاني جنهن کي مقرر عددي ملهه ٿئي ٿو.

هيءَ هڪ علامت يا نشاني آهي جنهن کي هڪ مقرر عددي مُلهه ٿئي ٿو.

مثال طور: 3، 8، 12،... وغيره سڀ مستقل آهن.

8.1.2 ياد ڪريو ته بدلجندڙ هڪ اهڙي رقم آهي، جنهن کي مختلف عددي مُلهه ٿي سگهن ٿا.

(a) بدلجندڙ: اِهي نشانيون يا اکرن کي ظاهر ڪن ٿا. مثال طور: x رُپين جو ڪجهه تعداد ظاهر ڪري ٿو، جيڪو هڪ شاگرد جي کيسي ۾ موجود آهي. ان جو مُلهه 5، 10، 35، 50، وغيره رُپيا ٿي سگهي ٿو.

(b) عددي سر: عددي سر هڪ عدد آهي، جيڪو هڪ بدلجندڙ يا گهڻن بدلجندڙن سان ضرب ٿيل هجي.

رقم $3x$ ۾ عددي سِرُ 3 آهي. اهڙي طرح رقم 5yz ۾ عددي سر 5 آهي.

8.1.3 ياد ڪريو نامعلوم عدد کي انگريزي الفابيٽ جي ڪنهن اکر سان ظاهر ڪريون ٿا.

انگريزي الفابيٽ جا اُهي اکر جنهن سان نامعلوم رقم کي ظاهر ڪجي ٿو، انهن کي عددي حروف (Literal numbers) سڏجي ٿو. مثال طور: چورس جي ايراضي، پاسي جي ماپ کي، پاسي جي ماپ سان ضرب ڪري معلوم ڪريون ٿا. يعني: چورس جي ايراضي A = پاسو × پاسو يا $A = s \times s$. ساڳي طرح مستطيل جي ايراضي: ديگهه ۽ ويڪر کي پاڻ ۾ ضرب ڪرڻ سان معلوم ڪريون ٿا. يعني: مستطيل جي ايراضي = ديگهه × ويڪر يا $A = l \times b$.

مٿين مثال ۾ چورس جي پاسي کي s سان ۽ مستطيل جي ديگهه ۽ ويڪر کي ترتيبوار l ۽ b سان ظاهر ڪريون ٿا.

اهڙي طرح s، l ۽ b وغيره نامعلوم رقم کي ظاهر ڪن ٿا.

8.1.4 ياد ڪريو ته آلجبري اظهار، مستقل ۽ بدلجندڙن ڪي بنيادي عمل جي نشانين لڳائڻ سان ٺهي ٿو.

اسان ڪي ڄاڻ آهي ته مستقل ۽ بدلجندڙ ڪي بنيادي عمل جي چئن نشانين +، –، × ۽ ÷ لڳائڻ سان آلجبري اظهار ٺهجي ٿو. ڪجھ آلجبري اظهار هيٺ ڏنل آهن.

مثال طور: (a) $2x + 3y$ (b) $2x^2 + 5y^2 + 3y$

(c) $5a \div b + 3c$ (d) $4m \times n - 2q$

8.1.5 گھڻ رقميءَ جي وصف، اهو هڪ آلجبري اظهار آهي، جنهن ۾ بدلجندڙن جي سگھه مڪمل عدد آهي.

آلجبرا ۾ گھڻ رقمي، هڪ آلجبري اظهار کي ظاهر ڪري ٿي، جنهن ۾ هڪ رقم، ٻه رقمون يا ٻن کان وڌيڪ رقمون موجود ٿين ٿيون. هڪ گھڻ رقميءَ ۾ بدلجندڙن جون سگھون مڪمل عدد ٿين ٿيون.

مثال طور: 6، 7، $2x$، $4x$، $x^2 + 5$، $y^2 + 3$، $3x + 3x^2 + x + 2$ گھڻ رقمون آهن جڏهن ته $y + \frac{1}{y}$، $x^2 + \frac{1}{x}$ ۽ $x^3 + y^{\frac{3}{2}} + 3$ وغيره گھڻ رقمون نه آهن، ڇاڪاڻ ته انهن جي سگھه مڪمل عدد نه آهي.

ان طرح آلجبري اظهار جنهن ۾ سگھه مڪمل عدد آهي، اُن کي گھڻ رقمي چئجي ٿو. تنهن ڪري اسان گھڻ رقميءَ جي وصف هن طرح بيان ڪيون ٿا:

هڪ آلجبري اظهار جنهن ۾ هڪ يا وڌيڪ رقمون موجود آهن ۽ اُن ۾ استعمال ٿيل بدلجندڙ جي سگھه (قوت نما) پورو يا مڪمل عدد آهي ته اُن کي گھڻ رقمي چئجي ٿو.

8.1.6 هڪ رقمي، ٻه رقمي ۽ ٽه رقمي گھڻ رقمن جي سڃاڻپ، جنهن ۾ ترتيبوار هڪ رقم، ٻه رقمون ۽ ٽي رقمون موجود هجن.

(1) هڪ رقمي: اهو اظهار جنهن ۾ فقط هڪ رقم موجود هجي، اُن کي سادو اظهار به چئجي ٿو. يعني: 2، $3x$، $4ab$ وغيره.

(2) ٻه رقمي: اهو اظهار جنهن ۾ ڪل ٻه رقمون موجود هجن، جيئن: $x + y$، $3a - bx^2$ ۽ $x^2 + x$ وغيره.

(3) ٽه رقمي: اهو اظهار جنهن ۾ ڪل ٽي رقمون ٿين ٿيون، جيئن: $a^3 + 2a - b$، $2x + 3g + 4z$ ۽ $x^3 + x^2 + x$ وغيره.

گھڻ رقمين جا مثال:

گھڻ رقميءَ جو قسم	رقمن جو تعداد	ڪجھ مثال
هڪ رقمي	1	$2, x, 5x^3$
ٻہ رقمي	2	$2x + 5, x^2 - x, x - 5$
ٽہ رقمي	3	$x^2 + 5x + 6, x^5 - 3x + 8$

عملي ڪم: سجاڳو ۾ نشان (✓) لڳايو تہ مليل گھڻ رقمي هڪ رقمي، ٻہ رقمي يا ٽہ رقمي آهي.

ٽہ رقمي	ٻہ رقمي	هڪ رقمي	مليل گھڻ رقمي	نمبر شمار
			$3.4 + 3.4x$	1
			$z^2 + 5z + 6$	2
			-8	3
			$2c + 5b + 6$	4
			$14 + x$	5
			$5x - 2$	6
			$4b - 2a$	7
			$f^2 + 5f + 6$	8

8.2 گھڻ رقمين سان عمل

8.2.1 ٻن يا ٻن کان وڌيڪ گھڻ رقمين جو جوڙ

(i) گھڻ رقمين جو جوڙ

اچو تہ گھڻ رقمين کي پاڻ ۾ جوڙ ڪرڻ جا ڪجھ مثال حل ڪريون تہ جيئن گھڻ رقمين جي جوڙ ڪرڻ جي جاڻ حاصل ٿئي.

مثال 1: $7a$ ۽ $3a$ کي پاڻ ۾ جوڙ ڪريو.

حل: $7a + 3a = (7 + 3)a$ (ضرب جي ورهاست واري خاصيت)

مطلب تہ $7a + 3a = 10a$

مثال2: $6ab$، $5ab$ ۽ $-7ab$ پاڻ ۾ جوڙ ڪريو.

حل: أفقي طريقو:

$$6ab + 5ab - 7ab = (6 + 5 - 7)\, ab = (11 - 7)\, ab = 4ab$$

عمودي طريقو:

$$\begin{array}{r} 6\,ab \\ 5\,ab \\ -7\,ab \\ \hline 4\,ab \\ \hline \end{array}$$

عمودي طريقي ۾، ساڳيون رقمون هڪ ٻئي جي هيٺان لکبيون آهن. پوءِ مليل رقمن جا عددي سر پاڻ ۾ جوڙ ڪري، سادي صورت ۾ آڻبا آهن.

مثال3:

$3a + 2b$ ۽ $2a + 5b$ جوڙ ڪريو.

حل: أفقي طريقو

$(3a + 2b) + (2a + 5b)$

$= 3a + 2b + 2a + 5b$

$= 3a + 2a + 2b + 5b$

$= (3 + 2)\, a + (2 + 5)\, b$

$= 5a + 7b$

عمودي طريقو

$$\begin{array}{r} 3a + 2b \\ +\ 2a + 5b \\ \hline 5a + 7b \\ \hline \end{array}$$

مثال4:

$6a^2b - 3ab^2$ ۽ $4a^2b + 3ab^2$ جوڙ ڪريو.

حل: أفقي طريقو

$(6a^2b - 3ab^2) + (4a^2b + 3ab^2)$

$= (6a^2b + 4a^2b) + (-3ab^2 + 3ab^2)$

$= 10a^2b + 0$

$= 10a^2b$

عمودي طريقو

$$\begin{array}{r} 6a^2b - 3ab^2 \\ +\ 4a^2b + 3ab^2 \\ \hline 10a^2b + 0 \\ \hline \end{array}$$

يا $10a^2b$

عمودي طريقي ۾ مليل اظهار، هڪ ٻئي جي هيٺان اهڙي طرح رکجن ٿا: جيئن ساڳيون رقمون هڪ ئي ساڳي ڪالم ۾ اچن. پوءِ اِهي ساڳيون رقمون پاڻ ۾ جوڙ ڪيون وڃن ٿيون. ان ريت مليل اظهارن جي جوڙ اُپت معلوم ٿئي ٿي.

جيڪڏهن مليل رقمن جي عددي سرن جي جوڙ اُپت ٻڙي اچي ته پوءِ مليل پوري رقم ٻڙي چئبي.

مشق 8.1

-1 هينيان جوڙ ڪريو.

(1) $5a,\ 8a$ (2) $a,\ a$ (3) $-12x,\ -2x$

(4) $9ab,\ -7ab$ (5) $8y,\ 3y,\ -4y$ (6) $6x^2+2x+4,\ 3x^2+5x$

-2 هينين جي جوڙ اُپٽ لهو.

(1) $2a+3b,\ 6a+5b$ (2) $3x-4y,\ 4x+6y$

(3) $2a-3b,\ 4a+5b,\ 5a-8b$ (4) $ab+4cd+6ad,\ 8ab+5cd+6ad$

(5) $4.5a+5.7b+3.2c,\ 3.5a+1.3b+2.8c$

(6) $1.7a+3.2b+4.9c,\ 4.3a+3.2b+3.1c,\ 6.0a+9.6b+3.0c$

(7) $6a+11b+10c,\ 13a+9b+5c,\ 8a+7b+12c$

(8) $4a+6b+5c,\ 7a+5b+5c,\ 3a+7b+7c$

(9) $2a+3b+4c,\ 6a+8b+4c,\ 3a+2b+3c$

(10) $14e-15f+10g,\ 13e+14f-g,\ -5e+3g$

8.2.2 هڪ گهڻ رقميءَ کي ٻي گهڻ رقميءَ مان ڪٽ ڪريو.

اسان کي ڄاڻ آهي ته ڪٽ جو عمل، جوڙ جي عمل جي اُبتڙ آهي. سڄن عددن جي قاعدن مطابق:

$$5-2=5+(-2)$$

۽

$$a-b=a+(-b)$$

اِن جو مطلب آهي ته رقم b کي رقم a مان ڪٽ ڪريو. چئبو ته رقم b جي، جوڙ جي اُبتڙ کي، رقم a ۾ جوڙ ڪريو، يعني b− کي a ۾ جوڙ ڪريو.

اِن ريت هڪ اظهار کي، ٻئي اظهار مان ڪٽ ڪرڻ معنيٰ جيڪو اظهار ڪٽ ڪرڻو هجي، اُن جون نشانيون تبديل ڪري پوءِ ملندڙ اظهار ۾ جوڙ ڪريو.

مثال 1: $3a+8b$ مان $2a+5b$ کي ڪٽ ڪريو.

حل:

عمودي طريقو:

$$\begin{array}{rcr} 3a & + & 8b \\ -\ 2a & \pm & 5b \\ \hline 1a & + & 3b \\ \hline \end{array}$$

يا $a+3b$

اُفقي طريقو:

$$\begin{aligned} & (3a+8b)-(2a+5b) \\ &= 3a+8b-2a-5b \\ &= 3a-2a+8b-5b \\ &= (3-2)\,a+(8-5)\,b \\ &= 1a+3b \\ &= a+3b \end{aligned}$$

مثال 2: $2x+3y-4z$ کي $3x-2y+5z$ مان ڪٽ ڪريو.

حل:

$$\begin{array}{rrrrr} & 3x & -2y & + & 5z \\ \pm & 2x & \pm 3y & \mp & 4z \\ \hline & x & -5y & + & 9z \\ \hline \end{array}$$

مثال 3: $3x+8y+1$ ۽ $2x+3y-6$ جي جوڙ اُپت مان $4x-y+2$ ڪٽ ڪريو.

حل:

$$\begin{array}{lrrrrr} & 3x & + & 8y & + & 1 \\ & 2x & + & 3y & - & 6 \\ \hline \text{جوڙ اُپت} & 5x & + & 11y & - & 5 \\ & \pm 4x & & \mp y & \pm & 2 \\ \hline \text{ڪٽ اُپت} & x & + & 12y & - & 7 \\ \hline \end{array}$$

مشق 8.2

مليل ٻئي نمبر اظهار کي، پهرين اظهار مان ڪٽ ڪريو.

(1) $8a, 5a$ (2) $-7ab, 12ab$ (3) $4a, -8a$

(4) $6a+7b, 2a+3b$ (5) $9a+11b+15c, 5a+3b-6c$

(6) $9c+8d+6e, 3e-5c+4d$

(7) $18x+16y+12z, 10x+9y+8z$

(8) $14a+15b+16c, 8a+10b-2c$

(9) $3x^2+25ab+21bc, 4x^2+18ab-6bc$

(10) $5a+4ab+2b, 4a+3ab+b$

11- $13a+8b+12c$ ۽ $9a+3b+5c$ جي جوڙ اُپت مان $10a+10b+17c$ ڪٽ ڪريو.

12- $2x+5y$ ۾ ڇا جوڙ ڪجي جو $6x+8y$ حاصل ٿئي؟

8.2.3 ضرب اُپت لهو:

- هڪ رقميءَ جي هڪ رقميءَ سان
- ٻه رقميءَ ۽ ٽه رقميءَ جي هڪ رقميءَ سان
- ٻه رقميءَ ۽ ٽه رقميءَ جي ٻه رقميءَ سان

i- هڪ رقميءَ جي هڪ رقميءَ سان ضرب

هڪ رقميءَ جي هڪ رقميءَ سان ضرب ڪرڻ وقت، مليل رقمن جي عددي سِرَن ۽ بدلجندڙن کي ڌار ڌار پاڻ ۾ ضرب ڪيو ويچي ٿو.

مثال1: $2a$ ۽ $3a^2$ جي پاڻ ۾ ضرب اُپت معلوم ڪريو.

حل:
$$2a \times 3a^2 = 2 \times 3 \times a \times a^2 = 6a^{1+2} = 6a^3$$

مثال2: $3ay^2$ ۽ $7a^2y^3$ جي پاڻ ۾ ضرب اُپت معلوم ڪريو.

حل:
$$3ay^2 \times 7a^2y^3 = 3 \times 7 \times a \times a^2 \times y^2 \times y^3 = 21 \times a^{1+2} \times y^{2+3} = 21a^3y^5$$

ii- ٻہ رقميءَ جي هڪ رقميءَ سان ضرب

مثال3: $(a + b)$ کي 3 سان ضرب ڪريو.

حل:

عمودي طريقو

$$\begin{array}{r} a + b \\ \times 3 \\ \hline 3a + 3b \\ \hline \end{array}$$

اُفقي طريقو

$$3 \times (a + b) = 3 \times a + 3 \times b = 3a + 3b$$

مثال4: $2a + 3b$ کي a سان ضرب ڪريو.

حل:

عمودي طريقو

$$\begin{array}{r} 2a + 3b \\ \times\ a \\ \hline 2a^2 + 3ab \\ \hline \end{array}$$

اُفقي طريقو

$$a \times (2a + 3b) = 2a^2 + 3ab$$

iii- ٽہ رقميءَ جي هڪ رقميءَ سان ضرب

مثال5: $(x + y + z)$ کي $4x$ سان ضرب ڪريو.

حل:

عمودي طريقو

$$\begin{array}{r} x + y + z \\ \times 4x \\ \hline 4x^2 + 4xy + 4xz \\ \hline \end{array}$$

اُفقي طريقو

$$4x(x + y + z) = 4x^2 + 4xy + 4xz$$

iv- ٻہ رقميءَ جي ٻہ رقميءَ سان ضرب

مثال6: $3e + 5f$ کي $4e + 2f$ سان ضرب ڪريو.

حل:

اُفقي طريقو

$$(3e + 5f) \times (4e + 2f) = 3e(4e + 2f) + 5f(4e + 2f) = 12e^2 + 6ef + 20ef + 10f^2$$

عمودي طريقو

$$\begin{array}{rrr} 3e & + 5f & \\ \times 4e & + 2f & \\ \hline 12e^2 & + 20ef & \\ & + 6ef & + 10f^2 \\ \hline 12e^2 & + 26ef & + 10f^2 \\ \hline \end{array}$$

$12e^2 + 20ef$ ← (پهرين اظهار جي ٻنهي رقمن کي $4e$ سان ضرب ڪريو)

$+ 6ef + 10f^2$ ← (پهرين اظهار جي ٻنهي رقمن کي $2f$ سان ضرب ڪريو)

V- ٽه رقميءَ جي ٻه رقميءَ سان ضرب

مثال 7: $2x^2 - 3xy + 4$ کي $x + y$ سان ضرب ڪريو.

حل: عمودي طريقو

$$\begin{array}{rrrrr} 2x^2 & - 3xy & + 4 & & \\ \times & x & + y & & \\ \hline 2x^3 & - 3x^2y & + 4x & & \\ & + 2x^2y & & - 3xy^2 & + 4y \\ \hline 2x^3 & - x^2y & + 4x & - 3xy^2 & + 4y \\ \hline \end{array}$$

أفقي طريقو

$$\begin{aligned} (x + y)(2x^2 - 3xy + 4) &= x(2x^2 - 3xy + 4) + y(2x^2 - 3xy + 4) \\ &= 2x^3 - 3x^2y + 4x + 2x^2y - 3xy^2 + 4y \\ &= 2x^3 - 3x^2y + 2x^2y + 4x - 3xy^2 + 4y \\ &= 2x^3 - x^2y + 4x - 3xy^2 + 4y \end{aligned}$$

مشق 8.3

I- هيٺ ڏنل اظهارن جي پاڻ ۾ ضرب اُپٽ لهو. (هڪ رقميءَ جي، هڪ رقميءَ سان ضرب)

(1) $15a, 8a$ (2) $9a, 6b$ (3) $10a^2, 2a^5$ (4) $4c^5, 8cd^2$

(5) $6a^2b, -5b^2$ (6) $-3a, 2b, -3$ (7) $4m^2, -5m^3, 3m^4$ (8) $-6xy, 3x^3y^2, 2xy$

II- هيٺ ڏنل اظهارن جي پاڻ ۾ ضرب اُپٽ لهو. (ٻه رقميءَ جي، هڪ رقميءَ سان ضرب)

(1) $a + b, 9$ (2) $x - y, -4y$ (3) $2m^2 - 3n^3, -5mn$

(4) $3xy + 2xy^2, -6xy^2$ (5) $6lm - 4mn, 3l^2m^2n$ (6) $-5bc + 3cd, -2bc^2d$

III- هيٺ ڏنل اظهارن جي پاڻ ۾ ضرب اُپٽ لهو. (ٻه رقميءَ جي، ٻه رقميءَ سان ضرب)

(1) $8c + 12d, -3c + 2d$ (2) $a + b, a - b$ (3) $a^2 + b^2, a^2 - b^2$

(4) $3x - 2y, 2x + 5y$ (5) $2lm + 3mn, -2m + 3n$ (6) $8pq^2 - 3p^2q, 2pq$

IV- هيٺ ڏنل اظهارن جي پاڻ ۾ ضرب اُپت لهو. (ٽہ رقميءَ جي، هڪ رقميءَ سان ضرب)

(1) $2a - 3b + 4c, 2abc$ (2) $a^2 + b^2 - c^2, ab$ (3) $m^2n + mn^2 - m^2n^2, - mn$

(4) $x^2 - 6xy + 9y^2, - 3xy$ (5) $2p^2 - 3pq + q^2, 4pqr$ (6) $xyz + x^2y^2 - y^2z^2, xyz$

V- هيٺ ڏنل اظهارن جي پاڻ ۾ ضرب اُپت لهو. (ٽہ رقميءَ جي، ٻہ رقميءَ سان ضرب)

(1) $1 + 2x - 3x^2, 1 - x$ (2) $8c + 12d - 6e, c^2 - d^2$ (3) $a^2 - ab - b^2, a - b$

(4) $x^2 - 5x + 4, 3x - 4$ (5) $a^2 - 2a^2b + b^2, a^2 - b^2$ (6) $3p^2q + 2pq^2 - q^2r, p^2 - q^2$

8.2.4 آلجبري اظهارن ۾ مليل جوڙ، ڪٽ ۽ ضرب جي عملن کي سادي صورت ۾ آڻڻ

اسان آلجبري اظهارن ۾ جوڙ، ڪٽ ۽ ضرب جا عمل سکي آيا آهيون. هاڻي اسان آلجبري اظهارن ۾ مليل جوڙ، ڪٽ ۽ ضرب جي عملن کي هيٺ ڏنل مثالن ذريعي سادي صورت ۾ آڻڻ سکون ٿا.

مثال: سادي صورت ۾ آڻيو:

(i) $3x(x + 2y) + 4x^2 - 7xy$

(ii) $2x + \{(3x + y)(2x - y) - (6x^2 + 2x)\}$

حل:

(i) $3x(x + 2y) + 4x^2 - 7xy$

$= 3x^2 + 6xy + 4x^2 - 7xy$

$= 3x^2 + 4x^2 + 6xy - 7xy$

$= 7x^2 - xy$

حل:

(ii) $2x + \{(3x + y)(2x - y) - (6x^2 + 2x)\}$

$= 2x + \{(3x + y) \times (2x - y) - (6x^2 + 2x)\}$

$= 2x + \{3x(2x - y) + y(2x - y) - 6x^2 - 2x\}$

$= 2x + \{\cancel{6x^2} - 3xy + 2xy - y^2 - \cancel{6x^2} - 2x\}$

$= 2x + \{-xy - y^2 - 2x\}$

$= \cancel{2x} - xy - y^2 - \cancel{2x}$

$= - xy - y^2$

8.3 آلجبري حقيقي فارمولا يا نتيجا

آلجبري حقيقي فارمولا يا نتيجن جي سڃاڻپ ۽ تصديق ڪرڻ

آلجبري حقيقي فارمولا يا نتيجا آلجبري رقم جو هڪ سادو نمونو آهي، جيڪو اسان کي هڪ قاعدي جو نمونو ڏسي ٿو ته ڪيئن هڪ آلجبري اظهار کي حل ڪري سگهجي ٿو. آلجبري حقيقي فارمولا ڪجهه اهڙا نتيجا آهن، جيڪي آلجبرا ۾ تمام گهڻو ۽ عام رواجي طور استعمال ڪيا وڃن ٿا. اسان انهن آلجبري حقيقتن کي استعمال ڪري تمام سولائيءَ سان اظهارن جي ضرب اُپت معلوم ڪري سگهون ٿا.

8.3.1 ثابت ڪريو: $(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)\ x + ab$

ثابتي: $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

LHS (کاٻو پاسو) $= (x+a)(x+b) = x\times(x+a)+b\times(x+a)$

$= x^2+ax+bx+ab$

$= x^2+(a+b)x+ab =$ (ساڄو پاسو) RHS

جيئن ته   کاٻو پاسو = ساڄو پاسو

تنهن ڪري مليل آلجبري حقيقي فارمولا ثابت ٿي ويو.

انهيءَ آلجبري حقيقي فارمولا جي استعمال سان، اسان ٻن سٽن ۽ سادن اظهارن کي تمام سولائيءَ سان بنا دير جي ضرب ڪري سگهون ٿا.

يعني $\boxed{(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)\ x + ab}$

اسان انهيءَ آلجبري حقيقي فارمولا کي جاميٽريءَ جي شڪل جي مدد سان پڻ ثابت ڪري سگهون ٿا.

	10	2
10	100	20
4	40	8

مليل اظهار کي گرافي شڪل ڏيڻ کان سواءِ به هينئين طرح کولي حل ڪري سگهجي ٿو.

$$(10 + 4)\ (10 + 2) = 10^2 + (4 + 2) \times 10 + 4 \times 2$$
$$= 100 + 6 \times 10 + 8$$
$$= 100 + 60 + 8$$
$$= 168$$

	x	2
x	x^2	$2x$
4	$4x$	8

ساڳي طرح اظهار $(x + 4)\ (x + 2)$ کي هينئين ريت کولي سگهون ٿا:

$$(x + 4)\ (x + 2) = x\ (x + 4) + 2\ (x + 4)$$
$$= x^2 + 4x + 2x + 8$$
$$= x^2 + 6x + 8$$

ساڳي طرح اسان ہيا بہ ڪجھ حقيقي فارمولا يا نتيجا ثابت ڪري سگهون ٿا.

(i) $(x + a)(x - b) = x^2 + (a - b)x - ab$

(ii) $(x - a)(x + b) = x^2 - (a - b)x - ab$

(iii) $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$

مثال 1: فارمولا ذريعي ثابت ڪريو: $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$

ثابتي:

LHS (کاٻو پاسو) $= (x + 2)(x + 3) = x^2 + (2 + 3)x + (2) \times (3)$

$= x^2 + 5x + 6 =$ (ساڄو پاسو) RHS

جيئن تہ کاٻو پاسو = ساڄو پاسو. تنهن ڪري مٿي مليل نتيجو يا حقيقت ثابت ٿي.

مثال 2: فارمولا ذريعي ثابت ڪريو. $(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$

ثابتي:

LHS (کاٻو پاسو) $= (x - 2)(x + 3) = x^2 + (-2 + 3)x + (-2) \times (3)$

$= x^2 + x - 6 =$ (ساڄو پاسو) RHS

جيئن تہ کاٻو پاسو = ساڄو پاسو. تنهن ڪري مٿي مليل نتيجو يا حقيقت ثابت ٿي.

مثال 3: فارمولا ذريعي ثابت ڪريو: $(x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6$

ثابتي: حقيقي فارمولا يا نتيجي کي استعمال ڪندي

LHS (کاٻو پاسو) $= (x - 2)(x - 3) = x^2 + (-2 - 3)x + (-2) \times (-3)$

$= x^2 - 5x + 6 =$ (ساڄو پاسو) RHS

جيئن تہ کاٻو پاسو = ساڄو پاسو. تنهن ڪري مٿي مليل نتيجو يا حقيقت ثابت ٿي.

مشق 8.4

-1 سادي صورت ۾ آڻيو.

(1) $5a - 2a(3 + 4b)$ (2) $7m - 4m(5 - 6n)$

(3) $6x\{2x(3x^2 - 4) - (6x^2 + 8y)\}$ (4) $3x - \{(2x + y)(2x - y) - (4x^2 + 2y^2)\}$

(5) $4lm\{3lm(d^2 - m^2) - 2mn(m^2 - n^2)^2\}$ (6) $3pq\{2pq(p^2 + q^2) + 4qr(p - r)\}$

-2 هيٺيان ثابت ڪريو.

(1) $(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$ (2) $(x + 5)(x + 6) = x^2 + 11x + 30$

(3) $(x + 2)(x - 4) = x^2 - 2x - 8$ (4) $(x - 3)(x + 4) = x^2 + x - 12$

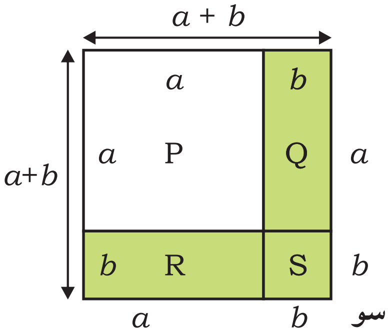
(5) $(x - 5)(x - 4) = x^2 - 9x + 20$ (6) $(x - 7)(x + 8) = x^2 + x - 56$

(7) $(x - 9)(x + 2) = x^2 - 7x - 18$ (8) $(x - 1)(x + 9) = x^2 + 8x - 9$

(9) $(x - 2)(x + 5) = x^2 + 3x - 10$

8.3.2 ثابت ڪريو: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

جاميٽريءَ ذريعي ثابت ڪرڻ:



فرض ڪريو، هڪ چورس شڪل جي ايراضي معلوم ڪريون ٿا. انهيءَ چورس شڪل جو هرهڪ پاسو (a+b) ماپ جو آهي. شڪل مان اها ڳالهه ظاهر آهي ته انهيءَ چورس شڪل جي ايراضي: P، Q، R ۽ S شڪلين جي ايراضين جي جوڙ جي برابر آهي.

$$\text{کاٻو پاسو} = (a+b)^2$$
$$= (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 = \text{ساڄو پاسو}$$

ان طرح کاٻو پاسو = ساڄو پاسو يعني گهربل نتيجو يا فارمولا ثابت ٿيو.

آلجبرا جي ذريعي ثابت ڪرڻ: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

انهيءَ نتيجي يا فارمولا کي اسان هن طرح بہ ثابت ڪري سگهون ٿا:

عمودي طريقو

LHS (کاٻو پاسو) = $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

$$\begin{array}{rl} & a + b \\ \times & a + b \\ \hline & a^2 + ab \\ & \quad + ab + b^2 \\ \hline & a^2 + 2ab + b^2 \\ \hline \end{array}$$

(a+b) کي a سان ضرب ڪرڻ سان)

(a+b) کي b سان ضرب ڪرڻ سان)

$a^2 + 2ab + b^2$ = (ساڄو پاسو) RHS

اُفقي طريقو

LHS (کاٻو پاسو) =

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$= a(a+b) + b(a+b)$$
$$= a^2 + ab + ba + b^2$$

(ڇاڪاڻ ته $ab = ba$)

$$= a^2 + 2ab + b^2 = \text{(ساڄو پاسو) RHS}$$

جيئن ته کاٻو پاسو = ساڄو پاسو

تنهن ڪري ثابت ٿيو ته: $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

انهيءَ فارمولي يا نتيجي کي اسان اکرن ۾ پڙهن طرح بيان ڪنداسين:

> ٻن رقمن جو چورس برابر آهي پهرين رقم جو چورس، واڌو پهرين ۽ ٻي رقم جي ضرب اُپت جي ٻيڻ ۽ واڌو ٻي رقم جو چورس.

مثال 1: ثابت ڪريو: $(a+5)^2 = a^2 + 10a + 25$

حل: ثابتي

LHS (کاٻو پاسو) = $(a+5)^2 = (a+5)(a+5)$

$$= a^2 + 2 \times a \times 5 + 5^2$$
$$= a^2 + 10a + 25 = \text{(ساڄو پاسو) RHS}$$

جيئن ته کاٻو پاسو = ساڄو پاسو تنهن ڪري مليل نتيجو فارمولا ذريعي ثابت ٿيو.

مثال 2: ثابت ڪريو: $(3a + 2b)^2 = 9a^2 + 12ab + 4b^2$

حل: ثابتي

$$\text{LHS (کاٻو پاسو)} = (3a + 2b)^2 = (3a + 2b)(3a + 2b)$$
$$= (3a)^2 + 2(3a)(2b) + (2b)^2$$
$$= 9a^2 + 12ab + 4b^2 = \text{(ساڄو پاسو) RHS}$$

جيئن تہ کاٻو پاسو = ساڄو پاسو تنهن ڪري مليل نتيجو فارمولا ذريعي ثابت ٿيو.

مشق 8.5

1- هيٺين نتيجن کي فارمولا ذريعي ثابت ڪريو:

(1) $(a + 7)^2 = a^2 + 14a + 49$

(2) $(a + 11)^2 = a^2 + 22a + 121$

(3) $(2x + 6)^2 = 4x^2 + 24x + 36$

(4) $(3a + 5)^2 = 9a^2 + 30a + 25$

(5) $(7x + 3)^2 = 49x^2 + 42x + 9$

(6) $(6x + 9)^2 = 36x^2 + 108x + 81$

(7) $(5a + 4)^2 = 25a^2 + 40a + 16$

(8) $(9x + 10)^2 = 81x^2 + 180x + 100$

(9) $(5x + 11)^2 = 25x^2 + 110x + 121$

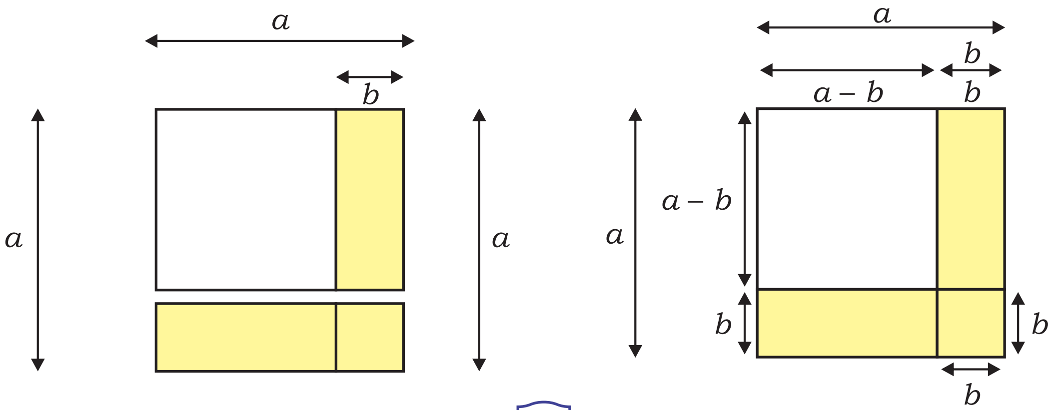
(10) $(6x + 7)^2 = 36x^2 + 84x + 49$

8.3.3 ثابت ڪريو $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

جاميٽريءَ جي ذريعي ثابتي

هڪ چورس جي ايراضيءَ تي غور ڪريو، جنهن جو هرهڪ پاسو a ماپ جو آهي. ٻن مستطيلن جي ايراضيءَ تي پڻ غور ڪريو، جنهن جي ڊيگهہ ۽ ويڪر جي ماپ ترتيبوار a ۽ b آهي.

هاڻي ٻنهي مستطيلن کي چورس جي مٿان هيٺين طرح ناهي رکو:



اڻ شيڊ ٿيل چورس شڪل جي ايراضي برابر آهي: $(a-b)(a-b)$

LHS (کابو پاسو) $= (a-b)(a-b) = (a-b)^2 =$ (اصلي چورس جي ايراضي، جنهن جو هرهڪ پاسو a ماپ جو آهي) ڪاٽو (ٻن مستطيلن جي ايراضي جنهن جا پاسا a ۽ b آهن ۽ اُن ۾ جوڙ ڪبو (ننڍي چورس جي ايراضي جنهن جو هرهڪ پاسو b ماپ جو آهي) (ڇاڪاڻ ته چورس جي ايراضيءَ جي ٻيڻ ڪٽ ڪئي وئي آهي)

$= a^2 - ab - ab + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 =$ (ساڄو پاسو) RHS

ان ريت کابو پاسو = ساڄو پاسو

مطلب ته مليل نتيجو يا فارمولا ثابت ٿيو: $\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

آلجبرا جي ذريعي ثابتي: اسان انهيءَ عمل کي هن طرح به ثابت ڪري سگهون ٿا:

اُفقي طريقو (کابو پاسو) LHS =

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$

$= a(a-b) - b(a-b)$

$= a^2 - ab - ba + b^2$ (ڇاڪاڻ ته $ab = ba$)

$= a^2 - 2ab + b^2 =$ (ساڄو پاسو) RHS

يا

عمودي طريقو (کابو پاسو) LHS =

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$

$$\begin{array}{rrrr} & a & - & b \\ \times & a & - & b \\ \hline & a^2 & - & ab \\ & & - & ab + b^2 \\ \hline & a^2 & - & 2ab + b^2 \end{array}$$

($a-b$ کي a سان ضرب ڪريو)

($a-b$ کي b سان ضرب ڪريو)

$a^2 - 2ab + b^2 =$ (ساڄو پاسو) RHS

جيئن ته کابو پاسو = ساڄو پاسو تنهن ڪري مليل نتيجو يا فارمولا ثابت ٿيو.

انهيءَ نتيجي کي اکرن ۾ هن طرح بيان ڪنداسين:

> ٻن رقمن جي فرق جو چورس برابر آهي: پهرين رقم جو چورس، ڪاٽو ٻنهي رقمن جي ضرب اُپت جي ٻيڻ ۽ اُن ۾ جوڙ ڪريو ٻي رقم جو چورس.

مثال 1: فارمولا ذريعي ثابت ڪريو: $(a-4)^2 = a^2 - 8a + 16$

ثابتي:

LHS (کابو پاسو) $= (a-4)^2 = (a-4)(a-4)$

$= a^2 - 2 \times a \times 4 + (4)^2$

$= a^2 - 8a + 16 =$ (ساڄو پاسو) RHS

ان طرح کابو پاسو = ساڄو پاسو يعني مليل نتيجو فارمولا ذريعي ثابت ٿي ويو.

مثال 2: ثابت ڪريو: $\left(\frac{4}{5}x - \frac{1}{3}y\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{8}{15}xy + \frac{1}{9}y^2$

ثابتي:

LHS (کابو پاسو) $= \left(\frac{4}{5}x - \frac{1}{3}y\right)^2 = \left(\frac{4}{5}x - \frac{1}{3}y\right)\left(\frac{4}{5}x - \frac{1}{3}y\right)$

$= \left(\frac{4}{5}x\right)^2 - 2 \times \left(\frac{4}{5}x\right) \times \left(\frac{1}{3}y\right) + \left(\frac{1}{3}y\right)^2$

$= \frac{16}{25}x^2 - \frac{8}{15}xy + \frac{1}{9}y^2 =$ (ساڄو پاسو) RHS

هاڻي جيئن ته کابو پاسو = ساڄو پاسو تنهن ڪري مليل نتيجو فارمولا ذريعي ثابت ٿي ويو.

مشق 8.6

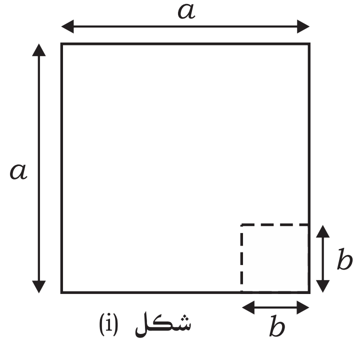
هينيان نتيجا فارمولا ذريعي ثابت ڪريو:

(1) $(a-3)^2 = a^2 - 6a + 9$
(2) $(a-7)^2 = a^2 - 14a + 49$
(3) $(2a-5)^2 = 4a^2 - 20a + 25$
(4) $(6x-8)^2 = 36x^2 - 96x + 64$
(5) $(4a-7)^2 = 16a^2 - 56a + 49$
(6) $(3a-8)^2 = 9a^2 - 48a + 64$
(7) $(7a-5)^2 = 49a^2 - 70a + 25$
(8) $(9y-10)^2 = 81y^2 - 180y + 100$
(9) $(8a-9)^2 = 64a^2 - 144a + 81$
(10) $(9a-11)^2 = 81a^2 - 198a + 121$

8.3.4 ثابت ڪريو: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

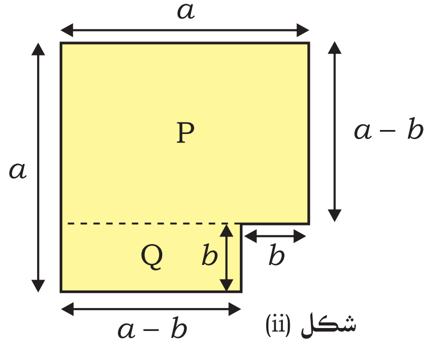
جاميٽريءَ جي ذريعي ثابتي

شڪل (i) ۾ هڪ چورس شڪل تي غور ڪريو، جنهن جي هرهڪ پاسي جي ماپ a آهي. هڪ ننڍي چورس شڪل جنهن جي هرهڪ پاسي جي ماپ b آهي، ان کي وڏي چورس جي پاسن a مان ڪاٽا ڪريو.



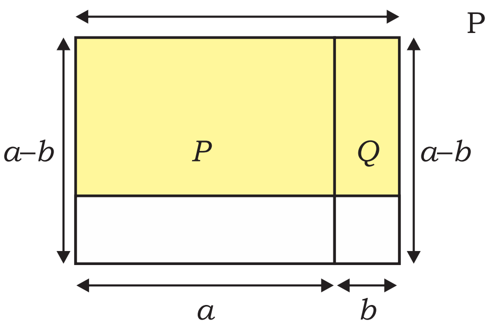
شڪل (i)

جڏهن ننڍي چورس b پاسن واري، مليل وڏي چورس مان ڏار ڪجي ٿي ته باقي تصوير ۾ هڪ مستطيل P ۽ ٻي مستطيل Q کي ڏار ڪري مستطيل P جي اڳيان هينين طرح گڏ رکجي ٿي. (ڏسو شڪل (ii)



شڪل (ii)

هاڻي شڪل (iii) ۾ مستطيل Q کي ڏار ڪري مستطيل P جي اڳيان، هينين طرح گڏ رکجي ٿي:



شڪل (iii)

RHS (ساڄو پاسو) = (a+b) (a–b) = مستطيل P جي ايراضي + مستطيل Q جي ايراضي

$= a(a-b) + b(a-b)$

$= a^2 - ab + ab - b^2$

$= a^2 - b^2 =$ (کابو پاسو) LHS

ان طرح ساڄو پاسو = کابو پاسو

تنهن ڪري مليل نتيجو ثابت ٿيو.

مطلب ته $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

مليل فارمولا يا نتيجو: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

آلجبرا جي ذريعي ثابتي: $(a+b)$ ۽ $(a-b)$ کي ضرب ڪرڻ سان ملي ٿو:

اُفقي طريقو

LHS (کابو پاسو)

$= (a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b)$

$= a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ba} - b^2$ (جاڪاڻ ته $ab = ba$

$= a^2 - b^2 =$ (ساجو پاسو) RHS ۽ $ab - ab = 0$)

ان طرح کابو پاسو = ساجو پاسو

يعني مليل فارمولا يا نتيجو ثابت ٿيو.

عمودي طريقو

LHS (کابو پاسو) $= (a+b)(a-b)$

$$\begin{array}{r} a + b \\ \times\ a - b \\ \hline a^2 + \cancel{ab} \\ - \cancel{ab} - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \\ \hline \end{array}$$

متين فارمولا يا نتيجي کي اکرن ۾ پڻ هن طرح بيان ڪري سگهجي ٿو:

(ٻن رقمن جي جوڙ ۽ فرق جي ضرب اُپت) = (ٻن رقمن جي چورس جو فرق)

مثال 1: ثابت ڪريو: $(x+2)(x-2) = x^2 - 4$

ثابتي: LHS (کابو پاسو) $= (x+2)(x-2) = x^2 - (2)^2$

$= x^2 - 4 =$ (ساجو پاسو) RHS

اهڙيءَ طرح کابو پاسو = ساجو پاسو يعني مليل نتيجو، فارمولا ذريعي ثابت ٿيو.

مثال 2: ثابت ڪريو. $(2x+y)(2x-y) = 4x^2 - y^2$

ثابتي: LHS (کابو پاسو) $= (2x+y)(2x-y) = (2x)^2 - (y)^2$

$= 4x^2 - y^2 =$(ساجو پاسو) RHS

ان طرح کابو پاسو = ساجو پاسو مطلب ته مليل نتيجو، فارمولا ذريعي ثابت ٿيو.

مشق 8.7

.I ثابت ڪريو:

(1) $(3x+2)(3x-2) = 9x^2 - 4$
(2) $(4x+3)(4x-3) = 16x^2 - 9$
(3) $(5x+4)(5x-4) = 25x^2 - 16$
(4) $(3x+7)(3x-7) = 9x^2 - 49$
(5) $(6x+5)(6x-5) = 36x^2 - 25$
(6) $(7x+6)(7x-6) = 49x^2 - 36$

.II هيٺيان ثابت ڪريو:

(1) $4a^2 - 9b^2 = (2a+3b)(2a-3b)$
(2) $64m^2 - 81 = (8m+9)(8m-9)$
(3) $9p^2 - 100q^2 = (3p+10q)(3p-10q)$
(4) $100y^2 - 169 = (10y+13)(10y-13)$

8.4 آلجبري اظهارن جي جزو ضربي

8.4.1 آلجبري اظهار جا جزا معلوم ڪرڻ (آلجبري نتيجا استعمال ڪرڻ سان)

ڪنهن به عدد يا ڪنهن آلجبري اظهار جي جزن کي ظاهر ڪرڻ لاءِ اُن مليل عدد يا آلجبري اظهار کي ضرب اُپت جي طور لکيو وڃي ٿو. ان طرح ضرب اُپت ۾ لکيل عدد يا اظهار مليل عدد يا مليل اظهار جا جزا سڏجن ٿا.

مثال طور: $12 = 2 \times 2 \times 3$, $4a^2 = 2 \times 2 \times a \times a$, $a^2 + 5a + 6 = (a+3)(a+2)$

آلجبري اظهار

اسان اڳ ۾ عددن جا جزا لهڻ سکي آيا آهيون. پر هاڻي هتي اسين آلجبري اظهارن جا جزا لهڻ سکنداسين.

(i) $ka + kb + kc$ نموني واري مليل آلجبري اظهار جا جزا لهڻ

ڏسون ٿا ته مليل آلجبري اظهار $ka+kb+kc$ ۾ ٽي رقمون آهن. هرهڪ رقم کي k سان ونڊ ڪري سگهجي ٿي. (چاڪاڻ ته k هرهڪ رقم جو عام جزو آهي)

جيئن ته: $\frac{ka}{k} = a, \quad \frac{kb}{k} = b, \quad \frac{kc}{k} = c$

تنهن ڪري هر رقم کي k سان ضرب ۽ ونڊ ڪرڻ سان، اسان کي ملندو:

$$ka + kb + kc = k\,(a + b + c)$$

چئبو ته مليل اظهار جا ٻه جزا آهن: k ۽ $(a + b + c)$

مثال1: مليل اظهار $2a + 4b + 6c$ جا جزا لهو.

حل: مليل اظهار جي ٽنهي رقمن ۾ 2 عام جزو آهي.

يعني $\frac{2a}{2} = a, \quad \frac{4b}{2} = 2b, \quad \frac{6c}{2} = 3c$

تنهن ڪري $2a + 4b + 6c = 2\,(a + 2b + 3c)$

مثال2: مليل اظهار $12a^2 - 8ab + 4a$ جا جزا لهو.

حل: مليل اظهار جي ٽنهي رقمن ۾ a، $2a$ ۽ $4a$ عام جزا نظر اچن ٿا. پر سڀ کان وڏو عام جزو $4a$ آهي.

جيئن ته $\frac{12a^2}{4a} = 3a, \quad \frac{-8ab}{4a} = -2b, \quad \frac{4a}{4a} = 1$

تنهن ڪري $12a^2 - 8ab + 4a = 4a\,(3a - 2b + 1)$

مثال3: مليل اظهار $a\,(x + y) + b\,(x + y) + c\,(x + y)$ جا جزا لهو.

حل: ڏسون ٿا ته مليل اظهار جي ٽنهي رقمن ۾ $(x + y)$ هڪ عام جزو آهي.

تنهن ڪري $a\,(x + y) + b\,(x + y) + c\,(x + y) = (x + y)\,(a + b + c)$

مشق 8.8

هيٺين اظهارن جا جزا لهو:

(1) $5a^2x - 15a$ (2) $m^4 - m^3 + m^2$ (3) $7a^3 + 14a^2 - 7$

(4) $mx^2 - m^2x - mx$ (5) $13n - 2n^3 + 39n^5$ (6) $a^2bc + ab^2c + abc^2$

(7) $3a(b+c) + 6d(b+c)$ (8) $xy\,(a + b) + y\,(a + b)^2 + x\,(a + b)$

(9) $4lm(x-y) + 8mn(x-y)^2 + 12nl(x-y)$ (10) $pq\,(p^2-q)^2 + pr\,(p^2-q)^2 + qr\,(p^2-q)^2$

(ii) $(a^2 + 2ab + b^2)$ يا $(a^2 - 2ab + b^2)$ نموني جي مليل اظهار جا جزا لهڻ

اسان ڄاڻون ٿا تہ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

۽ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

اظهار $(a^2 + 2ab + b^2)$ يا $(a^2 - 2ab + b^2)$ ۾ ٽي رقمون آهن.

- پهرين ۽ آخري رقم مڪمل چورس آهي.
- وچين رقم: پهرين رقم ۽ پوئين رقم جي ٻئي مول جي ضرب اُپت جي ٻيڻ آهي.

مثال1: مليل اظهار $a^2 + 6ab + 9b^2$ جا جزا لهو.

حل: مليل اظهار ۾:

(i) ٽي رقمون آهن.

(ii) پهرين رقم a جو چورس آهي ۽ آخري رقم 3b جو چورس آهي.

(iii) وچين رقم پهرين رقم ۽ پوئين رقم جي ٻئي مول جي ٻيڻ آهي. يعني $2(a)\,(3b) = 6ab$

تنهن ڪري مليل اظهار جا جزا هيٺين نموني سان لکي سگهجن ٿا:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

جنهن ڪري $a^2 + 6ab + 9b^2 = a^2 + 2\,(a)\,(3b) + (3b)^2$

$$= (a + 3b)^2$$
$$= (a + 3b)\,(a + 3b)$$

مثال2: مليل اظهار $2x^2 + 12x + 18$ جا جزا لهو.

حل: ڏسون ٿا تہ مليل اظهار ۾ پهريائين 2 عام جزو آهي ۽ اُن ڪان پوءِ وڌيڪ جزا معلوم ڪنداسين.

يعني

$2x^2 + 12x + 18 = 2\,(x^2 + 6x + 9)$ (2 عام جزو آهي)

$= 2\,\{(x)^2 + 2(x)\,(3) + (3)^2\}$ (مڪمل چورس جو فارمولا آهي)

$= 2\,(x + 3)^2$

$= 2\,(x + 3)\,(x + 3)$

مثال3: مليل اظهار $20a^3 - 60a^2b + 45ab^2$ جا جزا لهو.

حل: مليل اظهار آهي: $20a^3 - 60a^2b + 45ab^2$

$= 5a\,(4a^2 - 12ab + 9b^2)$ ($5a$ عام جزو آهي)

$= 5a\,\{(2a)^2 - 2\,(2a)\,(3b) + (3b)^2\}$ (مڪمل چورس جو فارمولا آهي)

$= 5a\,(2a - 3b)^2$ [جيئن تہ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$]

$= 5a\,(2a - 3b)\,(2a - 3b)$

مثال4: مليل اظهار $98c^2 - 140cd + 50d^2$ جا جزا لهو.

حل: پهرين ۽ آخري رقم مڪمل چورس نہ آهي. جيڪڏهن اسان مليل سڄي اظهار مان 2 عام جزو وننداسين تہ ٽيئي رقمون مڪمل پورو چورس بڻجي پونديون. يعني:

$$98c^2 - 140cd + 50d^2 = 2(49c^2 - 70cd + 25d^2) \quad \text{(2 عام جزو وٺڻ سان)}$$
$$= 2\{(7c)^2 - 2(7c)(5d) + (5d)^2\}$$
$$= 2(7c - 5d)^2$$
$$= 2(7c - 5d)(7c - 5d)$$

مشق 8.9

هيٺين اظهارن جا جُزا لهو:

(1) $x^2 + 12x + 36$ (2) $a^2 + 4a + 4$ (3) $4a^2 + 12a + 9$

(4) $9x^2 + 42xy + 49y^2$ (5) $25a^2 + 80ab + 64b^2$ (6) $16b^2 + 40b + 25$

(7) $4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$ (8) $144x^2 - 4x + \frac{1}{36}$ (9) $18c^2 + 60cd + 50cd^2$

(10) $4a^2 + 48a + 144$ (11) $5y^2 + 40y + 80$ (12) $3s^2 - 48st + 192t^2$

(13) $9a^2t^2 - 42ats + 49s^2$ (14) $4a^4 - 12a^2 + 9$ (15) $50p^2q^2 - 70pqr + 98r^2$

(iii) $a^2 - b^2$ واري نموني جي اظهارن جا جزا لهڻ

اسان کي ڄاڻ آهي تہ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

يا اُبتڙ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

هن اظهار جا خاص گڻ آهن:

1- مليل اظهار ۾ ٻئي رقمون چورس نموني ۾ آهن.

2- ٻنهي رقمن جي وچ ۾ ڪاٽوءَ جي نشاني آهي.

جزن لهڻ جو طريقو:

(i) ٻنهي چورس رقمن جو ٻيو مول لهو.

(ii) ٻنهي ننڍين ڏنگين کي ضرب اُپت جي صورت ۾ لکو. ڏنگين اندر ٻنهي رقمن کي اهڙيءَ طرح رکو جو هڪ ڏنگي، تفاوت ظاهر ڪري تہ ٻي جوڙ اُپت.

مثال1: مليل اظهار $4x^2 - 9y^2$ جا جزا لهو.

حل: مليل اظهار ٻن چورسن جي تفاوت وارو نمونو ظاهر ڪري ٿو.

تنهن ڪري $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2$

$$= (2x + 3y)(2x - 3y)$$

مثال2: مليل اظهار $9y^2 - 81$ جا جُزا لکو.

حل: مليل اظهار مان پهريائين 9 عام جزو ڪڍيو.

$$9y^2 - 81 = 9(y^2 - 9)$$
$$= 9(y + 3)(y - 3)$$

مثال3: مليل اظهار $15(a + b)^2 - 60(c + d)^2$ جا جُزا لکو.

حل:

$$15(a + b)^2 - 60(c + d)^2 = 15\{(a + b)^2 - 4(c + d)^2\}$$
$$= 15\{(a + b) + 2(c + d)\}\{(a + b) - 2(c + d)\}$$
$$= 15(a + b + 2c + 2d)(a + b - 2c - 2d)$$

مشق 8.10

هيٺ ڏنل اظهارن جا جزا لکو:

(1) $b^2 - c^2$ (2) $a^2 - 36$ (3) $a^2 - 49$ (4) $25 - y^2$

(5) $4x^2 - 9$ (6) $9x^2 - 16y^2$ (7) $6x^2 - 24$ (8) $200 - 18z^2$

(9) $81a^2 - 121b^2$ (10) $a^2c^2 - 16c^2d^2$ (11) $36 - (3a - 2b)^2$

(12) $(2x + 3y)^2 - 100z^2$ (13) $64b^2 - (6b + d)^2$ (14) $(3a - 4b)^2 - (3a - b)^2$

(15) $49(2a - 3b)^2 - 16(a + 2b)^2$ (16) $225(p - q)^2 - 49(p + q)^2$

(17) $72(c + d)^2 - 162(c - d)^2$ (18) $48l(m - n)^2 - 75l(p - q)^2$

8.4.2 آلجبري اظهار جا گروپ ناهي جُزا لهڻ

آلجبري اظهار جا گروپ ناهي جُزا لهڻ جي وضاحت هيٺ مثالن ذريعي ڏجي ٿي:

مثال1: هيٺ ڏنل اظهارن جا جُزا لکو:

(i) $x^2 + 5x + 4x + 20$

حل:

(i) $x^2 + 5x + 4x + 20$

$= (x^2 + 5x) + (4x + 20)$ (گروپ ناهڻ سان)

$= x(x + 5) + 4(x + 5)$

$= (x + 5)(x + 4)$ هاڻي $(x + 5)$ عام جزو ونون ٿا.

(ii) $x^2 + 4y^2 + xy^2 + 4x$

حل:

(ii) $x^2 + 4y^2 + xy^2 + 4x$

$= (x^2 + 4x) + (xy^2 + 4y^2)$ (گروپ ناهڻ سان)

$= x(x + 4) + y^2(x + 4)$

$= (x + 4)(x + y^2)$ هاڻي $(x + 4)$ عام جزو ونون ٿا.

اهڙو اظهار جنهن ۾ ٽي رقمون هجن ۽ مليل اظهار مڪمل پورو چورس نه هجي، اُن حالت ۾ آخري رقم جا جُزا اهڙي طرح لهون ٿا، جيئن انهن جُزن جو جوڙ يا ڪٽ جي وچين رقم جو عددي سر ملي.

مثال2: مليل اظهار $x^2 + 5x + 6$ جا جُزا لهو.

حل: مليل اظهار جي آخري رقم 6 جا به جُزا اهڙي طرح لهون ٿا، جيئن انهن ٻن جُزن کي جوڙ ڪجي ته وچين رقم جو عددي سِرُ ملي.

تنهن ڪري $x^2 + 5x + 6 = x^2 + 3x + 2x + 6$

اهو ڏسون ٿا ته ٻه جُزا 2 ۽ 3 آهن، جنهن کي عام ساڳيو بدلجندڙ آهي يعني:

$= (x^2 + 3x) + (2x + 6)$

$= x(x + 3) + 2(x + 3)$ (گروپ بڻائڻ سان)

$= (x + 3)(x + 2)$ [عام جزو ونون ٿا $(x + 3)$]

مثال3: مليل اظهار $x^2 + 5x - 6$ جا جُزا لهو.

حل:

$x^2 + 5x - 6$

$= x + 6x - x - 6$ (آخري رقم جا جُزا لهون ٿا)

$= (x + 6x) + (-x - 6)$ (وچين رقم کي ٻن حصن ۾ ٽوڙيون ٿا)

$= x(x + 6) - 1(x + 6)$ (هاڻي گروپ بڻايون ٿا)

$= (x + 6)(x - 1)$ [عام جزو ونون ٿا $(x + 6)$]

مشق 8.11

I- مليل اظهارن جا جُزا لهو:

(1) $5x^2 + 5x + 4x + 4$ (2) $ax + ay + bx + by$

(3) $b^2 + 4c^2 + bc^2 + 4b$ (4) $p^2 - 6pq - pq + 6q^2$

(5) $a^2 + 5b^2 + ab^2 + 5a$ (6) $7x^2 + py + 7x + pyx$

(7) $2c^2d + 4cd^2 - 2cd - 4d^2$ (8) $2y^2 - 10y + 4y - 20$

(9) $x^2y^2 + 5xy - xy - 5$ (10) $p^2 - pq + q - p$

II- هيٺ ڏنل هرهڪ اظهار جا جُزا لهو:

(1) $x^2 + 6x + 8$ (2) $y^2 + 8y + 12$ (3) $a^2 + 7a + 10$

(4) $c^2 + 5c + 6$ (5) $d^2 + 6d + 5$ (6) $p^2 - 4p + 3$

(7) $r^2 + 7r + 12$ (8) $a^2 + 3a - 10$ (9) $m^2 - 5m + 14$

(10) $x^2 - 2x - 15$ (11) $y^2 + 7y - 18$ (12) $x^2 + 10x + 21$

جائزي واري مشق 8

1- هيٺين سوالن جا جواب ڏيو:

(i) عددي اکرن جو مطلب ڇا آهي؟ (ii) مستقل جي وصف ٻڌايو.

(iii) ٻه رقمي ڇا آهي؟ (iv) آلجبري حقيقي فارمولا يا نتيجو ڇا آهي؟

(v) ڪنهن آلجبري اظهار جي جزو ضربي ڇا آهي؟ مثال ڏئي سمجهايو.

2- هيٺيان خال ڀريو:

(i) $(a+b)^2 =$ _________ (ii) $(a-b)^2 =$ _________

(iii) $(x+a)(x+b) =$ _________ (iv) $a^2 - b^2 =$ _________

(v) انگريزي الفابيٽ جا اُهي اکر، جنهن سان ڪنهن نامعلوم رقم کي ظاهر ڪجي، اُن کي ______ سڏجي ٿو.

(vi) اُها گهڻ رقمي جنهن ۾ فقط هڪ رقم استعمال ٿيل آهي، اُن کي _______ اظهار چئجي ٿو.

3- صحيح جواب تي (✓)نشان لڳايو:

i- $x^2 - x = ?$

(a) x (b) $x(x-1)$ (c) x^2 (d) $x - x^2$

ii- هڪ گهڻ رقمي جنهن ۾ فقط ٻه رقمون استعمال ٿيل آهن، اُن کي چئجي ٿو:

(a) جزو ضربي (b) هڪ رقمي اظهار (c) ٻه رقمي اظهار (d) ٽه رقمي اظهار

iii- هڪ اهڙي نشاني جنهن کي مقرر عددي ملهه هجي اُها سڏجي ٿي:

(a) رقم (b) بدلجندڙ (c) مستقل (d) عددي ملهه

iv- اظهار $a^2 - 9$ جا جزا آهن:

(a) $(a+3)(a-3)$ (b) $(a+9)(a-9)$

(c) $(a-3)(a-3)$ (d) $(a-9)(a-9)$

v- $(x-y)(x-y) = ?$

(a) $x^2 - y^2$ (b) $x^2 + 2xy + y^2$ (c) $x^2 - 2xy + y^2$ (d) $x^2 + y^2$

4- **جيڪڏهن $A = 2(x^2 + y^2 + z^2)$، $B = -x^2 + 3y^2 + 2z^2$ ۽ $C = x^2 - y^2 - 3z^2$ ته هيٺين جو مُلهه لهو:**

(i) $A + B + C$ (ii) $B + C - A$ (iii) $A - B + C$

(iv) $A + B - C$ (v) $A - B - C$ (vi) $B - C - A$

5- هيٺ ڏنل گهڻ رقمين کي سادي صورت ۾ آڻيو.

(i) $(x-2y)(x+2y)$ (ii) $(4x^2)(3x+1)$
(iii) $2x(x+y)-2y(x-y)$ (iv) $(a^2b^3)(2a-3b)$
(v) $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ (vi) $(a^2+1)(a^2-a-1)$
(vii) $x(y+1)-y(x+1)-(x-y)$
(viii) $a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)$

6- هيٺيان ثابت ڪريو.

(i) $(3x-5)(3x+5)=9x^2-25$ (ii) $(2a-5b)^2=4a^2-20ab+25b^2$
(iii) $(3x^2+4y^2)^2=9x^4+24x^2y^2+y^4$ (iv) $9x^2-25y^2=(3x-5y)(3x+5y)$

7- هيٺين اظهارن جا جُزا لهو.

(i) $10a^2-200a^4b$ (ii) $36x^3y^3z^3-27x^2y^4z+63xyz^4$
(iii) $15x^4y+21x^3y^2-27x^2y^2-33xy^4$ (iv) $x(a^2+11)-16(a^2+11)$
(v) $x^2(ab+c)+xy(ab+c)+z^2(ab+c)$

8- هيٺين آلجبري اظهارن جا جُزا لهو.

(i) $a^2-26a+169$ (ii) $1-6x^2y^2z+9x^4y^4z^2$ (iii) $7ab^2-343a$
(iv) $75-3(x-y)^2$ (v) $49(x+y)^2-16(x-y)^2$ (vi) $\frac{9}{16}a^2+ab+\frac{4}{9}b^2$
(vii) $\frac{a^2}{b^2}l^2-\frac{2ac}{bd}lm+\frac{c^2}{d^2}m^2$ (viii) $(a-\frac{9}{5})^2-\frac{36}{25}m^2$

خلاصو

- عام زندگيءَ ۾ رياضيءَ جا مشڪل حسابي مسئلا جيڪي انگي حساب جي ذريعي سولائيءَ سان حل ٿي نہ ٿا سگهن، اُنهن کي آسان طريقي ۾ حل ڪرڻ لاءِ آلجبرا جو سهارو ورتو پوي ٿو.
- انگريزي الفابيٽ جا اُهي اکر جنهن سان نامعلوم رقم کي ظاهر ڪجي ٿو، اُنهن کي عددي اکر پڻ سڏجي ٿو.
- اُهي نشانيون يا اکر جيڪي هڪ اهڙي رقم کي ظاهر ڪن ٿا، جنهن کي مختلف عددي مُلهہ ٿي سگهن ٿا، اُن کي بدلجندڙ چئجي ٿو.
- هڪ اهڙي نشاني يا اکر جنهن کي هڪ مقرر عددي مُلهہ ٿئي ٿو، اُن کي مستقل چئجي ٿو.
- مستقل ۽ بدلجندڙن کي رياضيءَ جي بنيادي عملن جي نشانين لڳائڻ سان حاصل ٿيندڙ مواد کي آلجبري اظهار چئجي ٿو.

يونٽ 8 آلجبري اظهار

- آلجبري اظهار جا حصا جيڪي '+' ۽ '−' جي نشانين لڳائڻ سان ڌار ٿي پون ٿا، اُنهن مان هرهڪ کي رقم سڏجي ٿو.
- عددي سر هڪ عدد آهي، جيڪو هڪ بدلجندڙ يا گهڻن بدلجندڙن سان ضرب ٿيل هجي.
- جيڪڏهن سيني عددي سرن جو جوڙ ٻڙي آهي، ته پوءِ سڄي رقم ٻڙي ٿيندي.
- آلجبري اظهار جنهن ۾ هڪ يا وڌيڪ رقمون موجود آهن، اُن ۾ استعمال ٿيل بدلجندڙن جي سگهه مڪمل يعني پورو عدد آهي، ته اُن کي گهڻ رقمي چئجي ٿو.
- اُهو آلجبري اظهار جنهن ۾ فقط هڪ رقم موجود هجي، اُن کي هڪ رقمي سڏجي ٿو.
- اُهو آلجبري اظهار جنهن ۾ فقط ٻه رقمون موجود هجن، ته اُن کي ٻه رقمي سڏجي ٿو.
- اُهو آلجبري اظهار جنهن ۾ ٽي رقمون موجود هجن، ته اُن کي ٽه رقمي سڏجي ٿو.
- هڪ آلجبري اظهار کي گروپن ۾ رکي، اُن جا جُزا معلوم ڪري سگهجن ٿا.
- هڪ گهڻ رقميءَ کي ڪهڙي به ترتيب ۾ رکي سگهجي ٿو. عام طور تي اسان مليل گهڻ رقميءَ کي گهٽو ڪري وڌ ننڍائي ترتيب ۾ رکون ٿا.
- آلجبري فارمولا يا نتيجا، آلجبري رقم جو هڪ سادو نمونو آهي. انهن آلجبري فارمولن ۽ نتيجن کي استعمال ڪري، تمام سولائيءَ سان اظهارن جي ضرب اُپت معلوم ڪري سگهون ٿا.
- آلجبري اظهار جي جُزن کي ظاهر ڪرڻ لاءِ، اُن مليل عدد يا آلجبري اظهار کي ضرب اُپت جي طور لکيو وڃي ٿو. ضرب اُپت ۾ لکيل اظهار جزا سڏجن ٿا.
- آلجبري فارمولا يا نتيجا:

(i) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

(ii) $(a+b)^2 = (a+b)(a-b) = a^2 + 2ab + b^2$

(iii) $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 + 2ab + b^2$

(iv) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

• • •

ذهني ذخيرو: تعجب ۾ وجهندڙ ڪارائتي ڄاڻ

عدد **6 هڪ خالص عدد** آهي، ڇاڪاڻ ته: $6 = 1+2+3 = 1 \times 2 \times 3 = 6$

ساڳي طرح عدد **28 به خالص عدد** آهي ڇاڪاڻ ته 28 جا ونڊيندڙ آهن:

1، 2، 4، 7، 14 ۽ $(1+2+4+7+14 = 28)$.

ان نموني جا ٻيا به ڪجهه عدد اوهان لهو.

یونٽ 9

ليڪي مساواتون

9.1 ليڪي مساواتون (Linear Equations)

9.1.1 هڪ بدلجندڙ ۾ ليڪي مساوات جي وصف

آلجبرا ۾ روزاني زندگيءَ جي عام مسئلن کي حل ڪرڻ لاءِ مساواتون تمام وڏو ڪردار ادا ڪن ٿيون. گذريل ڪلاس ۾ اسان سکيو آهي ته ڪيئن مساوات ناهبي آهي. مثال طور: $2x + 3 = 11$ اها هڪ مساوات آهي. هتي x هڪ بدلجندڙ آهي، جنهن کري اها هڪ بدلجندڙ واري مساوات سڏبي. جيئن ته هن مساوات ۾ x جي سگهه 1 آهي، تنهن ڪري ان کي هڪ درجي مساوات يا پهرين درجي جي مساوات پڻ سڏبو. ان طرح مساوات جنهن ۾ واحد هڪ بدلجندڙ آهي ۽ ان جي سگهه به 1 آهي ته ان کي هڪ بدلجندڙ ۾ ليڪي مساوات سڏبو.

عملي ڪم: هيٺ ڏنل مساواتن مان، هڪ بدلجندڙ ۾ ليڪي مساوات کي نشان (✓) ڏيو.

$y^2 + 3$	$4x + 5 = 2$	$x^2 + 3x + 4 = 0$
$3x^2 + 7 = 0$	$x + 5 = 20$	$x + x = 20$
$x^2 + y^2 = 9$	$m = n + 5$	$x + 7 = 11y$
$7v - 3 = 4$	$a^2 + 2ab + b^2 = 0$	$x = 13 - 4$

9.2 ليڪي مساوات جو حل

9.2.1 ليڪي مساوات کي حل ڪرڻ لاءِ ڪجھ مختلف ترڪيبن جا مشاهدا ڪرڻ

i- سادي ليڪي مساوات کي حل ڪرڻ

خاص ڳالھ جيڪا مساوات جي متعلق ياد رکڻي آهي، اُها آهي مساوات جي برابريءَ واري نشاني، جيڪا هڪ تارازيءَ جي نمائندگي ڪري ٿي. تنهنڪري مساوات جي هڪ پاسي جيڪو به عمل ڪنداسين، ساڳيو عمل مساوات جي ٻي پاسي ضرور ڪرڻو پوندو. جيترو ٿي سگهي، مساوات جي ٻنهي پاسي بلڪل ساڳيو ۽ ساڳي طرح جو عمل ڪرڻو آهي، جيئن مساوات جو توازن برقرار رهي.

اسان جو سڀ کان پهريون قدم، مساوات کي حل ڪرڻ جو اهو آهي ته بدلجندڙن ۽ مستقل واريون سڀ رقمون ڌار ڌار پاڙ ۾ گڏ ڪيون. اسان اهو سڀ ڪجھ مساواتن جي خاصيتن مطابق ڪريون ٿا.

مثال 1: مليل مساوات $3x + 15 = x + 25$ کي حل ڪريو.

حل: $3x + 15 = x + 25$

$3x - x + 15 = x - x + 25$ (مساوات جي ٻنهي پاسن مان x ڪٽ ڪرڻ سان)

يا $2x + 15 = 25$

يا $2x + \cancel{15} - \cancel{15} = 25 - 15$ (مساوات جي ٻنهي پاسن مان 15 ڪٽ ڪرڻ سان)

ان ريت
$$2x = 10$$
يا $\dfrac{2x}{2} = \dfrac{10}{2}$

(هرهڪ پاسي کي 2 سان وند ڪرڻ سان) يا $\dfrac{\cancel{2x}}{\cancel{2}} = \dfrac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{2}_{1}}$

يا $x = 5$

تنهن ڪري مليل مساوات جو حل آهي: $x = 5$.

هاڻي انهيءَ مساوات جي حل جي چڪاس ڪرڻ لاءِ مليل اصل مساوات ۾ x جو اهو مُلهه رکي ڏسنداسين ته ڇا مليل مساوات جا ٻئي پاسا ساڳيو نتيجو ڏيکارين ٿا؟ جيڪڏهن اسان اهو عمل ڪري ڏسنداسين ته کاٻي پاسي جو نتيجو ٿيندو: $3(5) + 15 = 30$. ساڳي طرح وري ساڄي پاسي سان اهو عمل ڪرڻ سان نتيجو بيهندو: $5 + 25 = 30$. ان طرح ڏسون ٿا ته کاٻي پاسي جو نتيجو برابر آهي ساڄي پاسي جو نتيجو.

تنهن ڪري مليل مساوات جو حل $x = 5$ درست آهي.

مثال 2: مليل مساوات $2x + 3 = 6 - (2x - 3)$ کي حل ڪريو.

حل: $2x + 3 = 6 - (2x - 3)$

(ڏنگيون ختم ڪريون ٿا)

يا $2x + 3 = 6 - 2x + 3$

يا $2x + 3 = 9 - 2x$

$2x + 2x + 3 = 9 - 2x + 2x$

يا (مساوات جي ٻنهي پاسي $2x$ جوڙ ڪرڻ سان)

ان طرح $4x + 3 = 9$

(مساوات جي ٻنهي پاسي 3 ڪٽ ڪرڻ سان)

يا $4x + \cancel{3} - \cancel{3} = 9 - 3$

ان طرح $4x = 6$

(مساوات جي ٻنهي پاسي 4 سان وند ڪرڻ سان)

$\dfrac{4x}{4} = \dfrac{6}{4}$ يا $\dfrac{\cancel{4x}}{\cancel{4}} = \dfrac{6}{4}$

$x = \dfrac{6}{4} = \dfrac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{4}_{2}}$

يا $\dfrac{3}{2} = 1\dfrac{1}{2}$

چڪاس: مليل اصل مساوات ۾ x جو اهو مله $x = 1\frac{1}{2}$ وجهڻ سان، اسان کي ملندو:

$2x + 3 = 6 - (2x - 3)$

يا $2 \times \left(1\frac{1}{2}\right) + 3 = 6 - \left\{2\left(1\frac{1}{2}\right) - 3\right\}$

يا $\cancel{2}\left(\frac{3}{\cancel{2}}\right) + 3 = 6 - \left\{2\left(\frac{3}{2}\right) - 3\right\}$

$3 + 3 = 6 - \left\{\cancel{2}\left(\frac{3}{\cancel{2}}\right) - 3\right\}$

$6 = 6 - (\cancel{3} - \cancel{3})$

يا $6 = 6$

جيئن ته مساوات جو کاٻو پاسو ۽ ساڄو پاسو برابر آهن، ان طرح اسان چڪاس ڪيو ته مليل مساوات جو حل $\left(x = 1\frac{1}{2}\right)$ درست آهي.

ii- ليکي مساوات حل ڪرڻ جڏهن مليل مساوات ۾ ڏنگيون ڏنل آهن

مثال 1: هيٺ ڏنل مساوات حل ڪريو ۽ حاصل ٿيل جواب جي پڙ چڪاس ڪريو.

$$8\,(x-3\,)-(6-2x)=2\,(x+2)-5\,(5-x)$$

حل: اسان شروعات ڏنگين کي ضرب ڪرڻ سان ڪنداسين ۽ سنياِل خاص ڪري رقمن ۾ استعمال ٿيل نشانين جي ڪنداسين.

$$8x-24-6+2x\;=2x+4-25+5x$$

مساوات جي هرهڪ پاسي ۾ بدلجندڙ x ۽ مستقل يعني عددن کي پاڻ ۾ گڏ ڪنداسين.

تنهن ڪري $\quad 8x+2x-24-6=2x+5x+4-25$

يا $\quad 10x-30=7x-21$

هاڻي مساوات جي ٻنهي طرفن مان $7x$ ڪٽ ڪريو.

$$10x-7x-30=\cancel{7x}-\cancel{7x}-21$$

يا $\quad 3x-30=-21$

مساوات جي ٻنهي طرفن ۾ 30 جوڙ ڪريو.

$$3x-\cancel{30}+\cancel{30}=30-21$$

يا $\quad 3x=9$

يا $\quad \dfrac{3x}{3}=\dfrac{9}{3}=3$ (مساوات جي ٻنهي طرفن کي 3 سان ونڊ ڪريو)

تنهن ڪري $x=3$

چڪاس: مليل مساوات ۾ x جو ملهه $x=3$ رکو.

اسان کي ملندو: $\quad 8\,(x-3)-(6-2x)=2\,(x+2)-5\,(5-x)$

يا $\quad 8\,(3-3)-(6-2\times 3)=2\,(3+2)-5\,(5-3)$

يا $\quad 8\,(0)-(6-6)=2\,(5)-5\,(2)$

يا $\quad 0-0=10-10$

يعني کاٻو پاسو = ساڄو پاسو يا $\quad 0=0$

ان ريت، چڪاس تي ته $x=3$ درست آهي.

مثال 2: هيٺ ڏنل مساوات حل ڪريو ۽ جواب جي پڙ چڪاس ڪريو.

$$(x+1)\,(2x+1)=(x+3)\,(2x+3)-14$$

حل: پهريائين اسان ڏنگيون ڇڏائينداسين.

$$x\,(2x+1)+1\,(2x+1)=x\,(2x+3)+3\,(2x+3)-14$$

يا $\quad 2x^2+x+2x+1=2x^2+3x+6x+9-14$

تنهن ڪري $\quad 2x^2+3x+1=2x^2+9x-5$

مساوات جي ٻنهي طرفن مان $2x^2$ ڪٽ ڪريو.

$$\cancel{2x^2}-\cancel{2x^2}+3x+1=\cancel{2x^2}-\cancel{2x^2}+9x-5$$

تنهن ڪري $3x+1=9x-5$

يا $9x-5=3x+1$

(مساوات جي ٻنهي پاسن مان $3x$ ڪٽ ڪريو)

$9x-3x-5=\cancel{3x}+1-\cancel{3x}$

يا $6x-5=1$

(مساوات جي ٻنهي پاسي 5 جوڙ ڪريو)

$6x-\cancel{5}+\cancel{5}=1+5$

يا $6x=6$

يا $\frac{6x}{6}=\frac{6}{6}$

ان طرح $x=1$

چڪاس: اصل مليل مساوات آهي:

مليل اصل مساوات ۾ x جو ملهه $x=1$ رکڻ سان اسان کي ملندو

$(x+1)(2x+1)=(x+3)(2x+3)-14$

$(1+1)(2\times1+1)=(1+3)(2\times1+3)-14$

يا $2\times(2+1)=4\times(2+3)-14$

يا $2(3)=4(5)-14$

يا $6=20-14$

يا $6=6$

يعني کابو پاسو = ساڄو پاسو

ان طرح چڪاس ٿي ته $x=1$ درست آهي.

iii- ليڪي مساوات حل ڪرڻ جڏهن سر عدد اٽپور آهن

مثال 1: حل ڪريو. $\frac{4(x+2)}{5}=7+\frac{5x}{13}$

حل: $\frac{4(x+2)}{5}=7+\frac{5x}{13}$

مساوات جي ٻنهي طرفن کي ڇيدن جي ننڍي عام يڃ أپٽ سان ضرب ڪريو.

(ڇيدن جي ن.ع.پ.أ $= 65 = 5\times13$)

$$65\times\frac{4(x+2)}{5}=65\left(7+\frac{5x}{13}\right)$$

يا $^{13}\cancel{65}\times\frac{4(x+2)}{\cancel{5}_1}=65\times7+{}^{5}\cancel{65}\times\frac{5x}{\cancel{13}_1}$

يا $52(x+2)=455+25x$

يا $52x+104=455+25x$

(مساوات جي ٻنهي طرفن مان $25x$ ڪٽ ڪريو)

يا $52x-25x+104=455+\cancel{25x}-\cancel{25x}$

يا $27x+104=455$

(مساوات جي ٻنهي طرفن مان 104 ڪٽ ڪريو)

يا $27x+104-104=455-104$

يا $27x=351$

مساوات جي ٻنهي پاسن کي 27 سان ونڊ ڪريون ٿا.

پوءِ $\frac{\cancel{27}x}{\cancel{27}} = \frac{\cancel{351}^{13}}{\cancel{27}_1}$

تنهن ڪري $x = 13$

مثال2: هيٺ ڏنل مساوات کي حل ڪريو ۽ حاصل ٿيل جواب جي چڪاس ڪريو.

$$\frac{x+5}{6} - \frac{x+1}{9} = \frac{x+3}{4}$$

حل: $\frac{x+5}{6} - \frac{x+1}{9} = \frac{x+3}{4}$ (4، 6 ۽ 9 جي ن.ع.پ.اُ 36 آهي)

يا $\frac{{}^{6}\cancel{36}(x+5)}{\cancel{6}_1} - \frac{{}^{4}\cancel{36}(x+1)}{\cancel{9}_1} = \frac{{}^{9}\cancel{36}(x+3)}{\cancel{4}_1}$ (مساوات جي ٻنهي پاسن کي 36 سان ضرب ڪرڻ سان)

تنهن ڪري $\frac{6(x+5)}{1} - \frac{4(x+1)}{1} = \frac{9(x+3)}{1}$

يا $6(x+5) - 4(x+1) = 9(x+3)$

يا $6x + 30 - 4x - 4 = 9x + 27$

يا $6x - 4x + 30 - 4 = 9x + 27$

يا $2x + 26 = 9x + 27$

يا $26 = 9x + 27 - 2x$

يا $26 = 7x + 27$

يا $26 - 27 = 7x$

يا $-1 = 7x$

يا $7x = -1$

$\frac{7x}{7} = -\frac{1}{7}$

(مساوات جي ٻنهي پاسن کي 7 سان ونڊ ڪرڻ سان)

$\frac{7x}{7} = -\frac{1}{7}$

تنهن ڪري $x = -\frac{1}{7}$

چڪاس: مليل اصل مساوات ۾ x جو مُلهه، $x = -\frac{1}{7}$ رکو.

(مليل مساوات) $\frac{x+5}{6} - \frac{x+1}{9} = \frac{x+3}{4}$

يا $\frac{-\frac{1}{7}+5}{6} - \frac{-\frac{1}{7}+1}{9} = \frac{\frac{-1}{7}+3}{4}$

$\left(\frac{-1+35}{7}\right)\times\frac{1}{6} - \left(\frac{-1+7}{7}\right)\times\frac{1}{9} = \left(\frac{-1+21}{7}\right)\times\frac{1}{4}$

$\frac{34}{42} - \frac{6}{63} = \frac{20}{28}$

$\frac{17}{21} - \frac{2}{21} = \frac{\cancel{20}^{5}}{\cancel{28}_7}$

يا $\frac{17-2}{21} = \frac{5}{7}$

يا $\frac{{}^{5}\cancel{15}}{\cancel{21}_7} = \frac{5}{7}$

يا $\frac{5}{7} = \frac{5}{7}$

مطلب ته اها ڳالهه ثابت ٿي ته مليل مساوات جو حل $x = -\frac{1}{7}$ درست آهي.

iv- هڪ بدلجندڙ ۾ ليڪي مساوات جو پيو ڪو نمونو

هن آخري حصي ۾ اسان ڪجهه ليڪي مساواتن تي غور ڪريون ٿا، جيڪي ظاهري طور تہ ڏسڻ ۾ ليڪي مساواتون نہ ٿيون لڳن. پر ڪجهه آلجبري عمل ڪرڻ کان پوءِ ساڳيون غير ليڪي مساواتون، ليڪي مساواتن جي عام نموني ۾ تبديل ٿي وڃن ٿيون.

مثال 1: سامهون ڏنل مساوات کي حل ڪريو ۽ حل ٿيل جواب جي چڪاس پڻ ڪريو. $\frac{3}{5}=\frac{6}{x}$

حل: جيئن تہ مختلف ہر چيد 5 ۽ x آهن. اسان کي هڪ عام چيد گهرجي. ان لاءِ اسان کي اهڙو تعداد گهرجي جيڪو 5 ۽ x ٻنهي سان ڌار ونڊجي سگهي. اهو تعداد $5x$ ٿي سگهي ٿو. اچو تہ مليل مساوات جي ٻنهي طرفن کي $5x$ سان ضرب ڏيئون ۽ سادو ڪريون:

$$5x\times\frac{3}{5}=5x\times\frac{6}{x}$$

يا $\cancel{5}^{1}x\times\frac{3}{\cancel{5}_1}=5\cancel{x}^{1}\times\frac{6}{\cancel{x}_1}$

يا $3x=5\times 6$

يا $3x=30$

يا $\frac{3x}{3}=\frac{30}{3}$ or $x=10$

چڪاس:

مليل اصل مساوات ۾ $x=10$ يعني x جو ملهه 10 رکو

مليل اصل مساوات آهي $\frac{3}{5}=\frac{6}{x}$

تنهن ڪري $\frac{3}{5}=\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{10}_{5}}$

يا $\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$

کاٻو پاسو = ساڄو پاسو ان طرح ثابت ٿيو تہ مساوات جو حل $x=10$ درست آهي.

مثال 2: حل ڪريو. $\frac{5}{3x}=\frac{25}{27}$

حل: مليل مساوات کي اُبتو ڪرڻ سان $\frac{3x}{5}=\frac{27}{25}$

هاڻي اسان کي ٻنهي چيدن مان عام چيد 25 ملي ٿو. مليل مساوات جي ٻنهي پاسن کي 25 سان ضرب ڪريون ٿا ۽ سادو ڪريون ٿا.

(مليل مساوات جي ٻنهي پاسن کي 25 سان ضرب ڪرڻ سان) $\frac{3x}{5}\times 25=\frac{27}{25}\times 25$

يا $\frac{3x\times\cancel{25}^{5}}{\cancel{5}_1}=\frac{27\times\cancel{25}^{1}}{\cancel{25}_1}$

يا $\frac{\cancel{15}^{1}x}{\cancel{15}_1}=\frac{27}{15}$ يا $15x=27$

يا $x=\frac{27}{15}=\frac{\cancel{3}^{1}\times 9}{\cancel{3}_1\times 5}$

تنهن ڪري $x=\frac{9}{5}$ يا $x=1\frac{4}{5}$

چڪاس:

مليل مساوات ۾ x جو ملهه يعني $\frac{9}{5}$ رکو.

مليل مساوات آهي: $\frac{5}{3x}=\frac{25}{27}$

$$\frac{5}{3\times\frac{9}{5}}=\frac{25}{27}$$

$$\frac{5\times 5}{3\times 9}=\frac{25}{27}$$

$$\frac{25}{27}=\frac{25}{27}$$

ان طرح ثابت ٿيو تہ مليل مساوات جو حل $x=1\frac{4}{5}$ درست آهي.

مثال3: حل ڪريو: $\frac{19x}{7} = \frac{57}{49}$

حل: جيئن ته 7 ۽ 49 جو عام ڇيد 49 آهي. هاڻي مليل مساوات جي ٻنهي پاسن کي 49 سان ضرب ڪرڻ سان

$$49 \times \frac{19x}{7} = 49 \times \frac{57}{49}$$

يا $$\frac{{}^{7}\cancel{49} \times 19x}{\cancel{7}_{1}} = \frac{\overset{1}{\cancel{49}} \times 57}{\underset{1}{\cancel{49}}}$$

تنهن ڪري $7 \times 19x = 57$

مساوات جي ٻنهي پاسن کي 19 سان ونڊ ڪرڻ سان

$$\frac{7 \times \overset{1}{\cancel{19}}x}{\cancel{19}_{1}} = \frac{\overset{3}{\cancel{57}}}{\underset{1}{\cancel{19}}}$$

يا $7x = 3$

يا $\frac{\cancel{7}x}{\underset{1}{\cancel{7}}} = \frac{3}{7}$

يا $x = \frac{3}{7}$

ان طرح $x = \frac{3}{7}$

مطلب ته ثابت ٿيو ته $x = \frac{3}{7}$ درست آهي.

چڪاس: مليل اصل مساوات ۾ $x = \frac{3}{7}$

يعني x جو ملهه $\frac{3}{7}$ رکون ٿا.

مليل اصل مساوات آهي $\frac{19x}{7} = \frac{57}{49}$

يا $\frac{19 \times \frac{3}{7}}{7} = \frac{57}{49}$

يا $\frac{19 \times 3}{7 \times 7} = \frac{57}{49}$

يا $\frac{57}{49} = \frac{57}{49}$

کاٻو پاسو = ساڄو پاسو

مشق 9.1

A. هيٺين مساواتن کي حل ڪريو.

1. $x + 5 = 9$
2. $12 - x = 7$
3. $5x = 3$
4. $4x + 10 = 2$
5. $5 - 3x = -4$
6. $2 + 14x = 30$
7. $9 + 5x = 3x + 13$
8. $4 - 3x = 8 + x$
9. $4x + \frac{5}{2} = x + 4\frac{1}{2}$

B. هيٺ ڏنل مساواتن کي حل ڪريو.

1. $5 + 3(x - 1) = 5x - 6$
2. $6 - 4(x + 3) = 2(x - 1)$
3. $5(3 - x) - 2(4 - 3x) = 11 - 2(x - 1)$
4. $5(1 - 2x) + 2(3 - x) = 3(x + 4) + 14$
5. $(x + 2)(x + 3) = (x - 3)(x - 2) + 20$

C. هيٺ مليل مساواتون حل ڪريو.

1. $6x + 2 = 29 - 3x$ 2. $\frac{1}{3}x + 4 = \frac{4x-1}{5}$ 3. $\frac{3x}{4} = \frac{2}{5}$

4. $\frac{8}{x} = 2$ 5. $\frac{7}{3x} = 2$ 6. $\frac{3}{x+1} = \frac{6}{5x-1}$

D. حل ڪريو.

1. $5 + \frac{x}{3} = 7$ 2. $\frac{x}{2} - 1 = 5$ 3. $\frac{3x}{4} - 2 = \frac{x}{3} + 3$

4. $4 - \frac{2x}{3} = \frac{x+2}{5}$ 5. $\frac{x+2}{3} = \frac{1-2x}{5}$ 6. $\frac{4x+3}{3} = \frac{x+7}{2}$

7. $\frac{5x+1}{2} - \frac{x+2}{6} = \frac{2x+4}{3}$ 8. $\frac{x-3}{3} - \frac{7}{2} = \frac{4x-3}{3} - \frac{2}{3}$

(ii) هيٺ ڏيڪاريل نموني واريون ليکي مساواتون حل ڪريو

- $ax + b = c$
- $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{m}{n}$

اسان مٿي ڏيڪاريل نموني واريون ليکي مساواتون مثالن ذريعي حل ڪريون ٿا.

مثال 1: حل ڪريو. $5x + 10 = 25$

حل:

$$5x + 10 = 25$$

مساوات جي ٻنهي طرفن مان 10 ڪٽ ڪريو

$$5x + 10 - 10 = 25 - 10$$

يا $5x = 15$

مساوات جي ٻنهي طرفن کي 5 سان ونڊ ڪريو

$$\frac{\cancel{5x}^{1}}{\cancel{5}_{1}} = \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{5}_{1}}$$

يا $x = 3$

ان طرح $x = 3$

چڪاس: مليل اصل مساوات ۾ يعني $x = 3$ ۾ x جو مُلهه 3 رکو.

$5x + 10 = 25$ (مليل مساوات)

$5 \times (3) + 10 = 25$

$15 + 10 = 25$

$25 = 25$

کابو پاسو = ساڄو پاسو

مطلب تہ ثابت ٿيو تہ مليل مساوات جو حل $x = 3$ درست آهي.

مثال 2: حل ڪريو: $\frac{2x+4}{5x+6} = \frac{1}{2}$

حل: مليل مساوات آهي: $\frac{2x+4}{5x+6} = \frac{1}{2}$

هاڻي مليل مساوات جي ڪراس ضرب ڪريون ٿا

$$2\,(2x + 4) = 1\,(5x + 6)$$

يا $4x + 8 = 5x + 6$

هاڻي حاصل ٿيل مساوات جي ٻنهي پاسن مان $4x$ ڪٽ ڪريون ٿا.

$$\cancel{4x} + 8 - \cancel{4x} = 5x + 6 - 4x$$

يا $8 = x + 6$

يا $8 - 6 = x$

يا $2 = x$ يا $x = 2$

ان ريت $x = 2$

مطلب ته ثابت ٿيو ته مليل مساوات جو حل $x = 2$ درست آهي.

چڪاس:

مليل اصل مساوات ۾ x جو مُلهه $x = 2$ رکو.

مليل اصل مساوات آهي $\frac{2x+4}{5x+6} = \frac{1}{2}$

$$\frac{2\,(2)+4}{5\,(2)+6} = \frac{1}{2}$$

يا $\frac{4+4}{10+6} = \frac{1}{2}$

يا $\frac{\cancel{8}^{1}}{\cancel{16}_{2}} = \frac{1}{2}$

يا $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

کاٻو پاسو = ساڄو پاسو

مشق 9.2

هيٺين مساواتن کي پهريائين حل ڪريو ۽ پوءِ حل جي آيل جواب جي چڪاس ڪريو.

(1)	$3x + 9 = 18$	(2)	$2x - 5 = 9$	(3)	$4x - 5 = 11$
(4)	$5x - 20 = 30$	(5)	$3x + 17 = 2$	(6)	$13 - 3x = -2$
(7)	$4x + 8 = 2$	(8)	$\frac{x+3}{x-1} = \frac{6}{7}$	(9)	$5x + 1 = \frac{6}{5}$
(10)	$\frac{x-1}{x+2} = \frac{4}{3}$	(11)	$\frac{2x+3}{7x+1} = \frac{7}{15}$	(12)	$\frac{3x-8}{5x+2} = 1$

9.2.3 روزاني عام زندگيءَ جا حساب ليکي مساوات ذريعي حل ڪرڻ

ليکي مساوات ذريعي حساب حل ڪرڻ جي ترڪيب

ڏاڪو 1: ڏنل حساب کي غور سان پڙهو. ڄاڻ ونو ته اوهان کي ڪهڙي اڻ ڄاڻايل شيءِ معلوم ڪرڻي آهي. اها به ڄاڻ حاصل ڪيو ته گهربل شيءِ حاصل ڪرڻ لاءِ ڪهڙي معلومات مليل آهي؟

ڏاڪو 2: مليل حساب ۾ گهربل اڻ ڄاڻايل شيءِ لاءِ ڪوبه بدلجندڙ مقرر ڪريو.

ڊاڪو3: ڄاڻايل ۽ اڻ ڄاڻايل شين جي وچ ۾ تعلق ناهيو ۽ آلجبري مساوات ٺاهيو.

ڊاڪو4: حاصل ڪيل مساوات کي حل ڪريو. بدلجندڙ جو مُلهه معلوم ڪريو. ان طرح حساب ۾ ہي بہ ڪا گهربل اڻ ڄاتل شيءِ معلوم ڪريو.

ڊاڪو5: هاڻي پنهنجي جواب جي چڪاس ڪريو.

ڊاڪو6: مليل سوال جو جواب صاف ۽ چٽن لفظن ۾ کولي لکو.

مثال 1: استاد، ثنيہ کي چوي ٿو تہ 25 ميٽر ڊگهي تار کي ٻن حصن ۾ اهڙي طرح ورهايو جو هڪ حصو، ٻئي حصي کان 1 ميٽر وڌيڪ ڊگهو هجي. تار جي هرهڪ حصي جي ڊيگهہ ٻڌايو.

حل: فرض ڪيو تہ تار جي ٻنهي حصن جي ڊيگهہ ترتيبوار x ۽ $x + 1$ ميٽر آهي.

ثنيہ، انهن ٻنهي تار جي حصن جي ڊيگهہ مان هيٺين ليڪي مساوات ٺاهي ٿي:

حاصل ٿيل آلجبري مساوات کي حل ڪريون ٿا. $x + (x + 1) = 25$

$$x + (x + 1) = 25$$

يا $$x + x + 1 = 25$$

يا $$2x + 1 = 25$$

يا $$2x + 1 - 1 = 25 - 1$$

يا $$2x = 25 - 1 = 24$$

يا $$x = \frac{\cancel{24}^{12}}{\cancel{2}_1} = 12$$

چڪاس:

تار جي هڪ حصي جي ڊيگهہ 13 ميٽر آهي ۽

تار جي ٻئي حصي جي ڊيگهہ 12 ميٽر آهي.

تار جي ڪل ڊيگهہ آهي:

$$13m + 12m = 25m$$

ان طرح تار جي هڪ حصي جي ڊيگهہ آهي 12 ميٽر.

تار جي ٻئي حصي جي ڊيگهہ آهي $(x + 1)$ ميٽر.

تنهن ڪري: $= (12 + 1) = 13$

تار جي ٻنهي حصن جي ڊيگهہ ترتيبوار 12 ۽ 13 ميٽر آهي.

مثال 2: اڄ کان 20 سال پوءِ نازيہ جي عمر هاڻي واري عمر کان ٽيڻي ٿيندي، تہ هن جي هن وقت عمر ڪيتري آهي؟

حل: فرض ڪيو تہ نازيہ جي هن وقت عمر x سال آهي. پر اڄ کان 20 سال پوءِ هوءَ اڄ واري عمر کان ٽيڻي ٿيندي يعني سندس عمر ٿيندي $3x$ سال.

تنهن ڪري $x + 20 = 3x$

يا $3x = x + 20$

ان طرح $3x - x = 20$

يا $2x = 20$

يا $x = \frac{\cancel{20}^{10}}{\cancel{2}_1} = 10$

تصديق:

معلوم ٿيو تہ نازيہ جي هاڻي عمر 10 سال آهي.

20 سالن کان پوءِ هيءَ ٿيندي: $20 + 10 = 30$

جيڪا اڄ جي عمر کان ٽيڻي آهي.

يعني: $10 \times 3 = 30$ سال

ان طرح ثابت ٿيو تہ نازيہ جي اڄ جي عمر 10 سال درست آهي.

مثال3: ٻن لاڳيتن اِڪي عددن جو جوڙ 36 آهي تہ اُهي عدد لکو.

حل: فرض تہ ڪيو هڪ اِڪي عدد آهي x

ٻيو لاڳيتو اِڪي عدد ٿيندو $x + 2$

جيئن تہ ٻنهي اِڪي عددن جو جوڙ 36 آهي.

تنهن ڪري گهربل ليڪي مساوات ٿيندي:

$x + (x + 2) = 36$

يا $x + x + 2 = 36$

يا $2x + 2 = 36$

يا $2x + 2 - 2 = 36 - 2$

$2x = 34$

يا $\frac{2x}{2} = \frac{\cancel{34}^{17}}{\cancel{2}_1} = 17$

يا $x = 17$

چڪاس:

جيئن تہ پهريون اِڪي عدد= 17

ٻيو لاڳيتو اِڪي عدد آهي = 19

ٻنهي لاڳيتن اِڪي عددن جو جوڙ آهي

$19 + 17 = 36$

تنهن ڪري ثابت ٿي ويو تہ پهريون اِڪي عدد آهي 17

ٻيو لاڳيتو اِڪي عدد آهي $x + 2 = 2 + 17 = 19$.

ان طرح گهربل ٻہ لاڳيتا اِڪي عدد 17 ۽ 19 آهن.

مشق 9.3

1. اسلم ڪي 35 رُپيا ڪيسي ۾ هئا. هن ٽي پينسلون خريد ڪيون. اجان بہ هن وٽ 5 رُپيا ڪيسي ۾ بچيا آهن. ٻڌايو تہ هڪ پينسل جي قيمت ڪيتري آهي؟
2. عليءَ وٽ ڪجھ رُپيا آهن. جيڪڏهن ان رقم جي ٽيڻ ۾ 7 رُپيا گڏجن ٿا تہ ڪل 22 رُپيا ٿين ٿا. ٻڌايو تہ عليءَ وٽ گھڻا رُپيا هئا؟
3. ڪنهن ڪمري جي ڊيگھ 1.5 ميٽر وڌيڪ آهي، سندس ويڪر ڪان. جيڪڏهن ڪمري جو پيريميٽر 63 ميٽر آهي تہ ڪمري جي ڊيگھ ۽ ويڪر لهو.
4. هڪ ٽڪنڊي ABC جو پيريميٽر 11 سينٽي ميٽر، پاسن $\overline{AB}$ ۽ $\overline{BC}$ جي ڊيگھ ۾ فرق 1 سينٽي ميٽر جو آهي ۽ پاسن $\overline{AC}$ ۽ $\overline{BC}$ جي ڊيگھ ۾ فرق 3 سينٽي ميٽر آهي. ٻڌايو تہ ٽڪنڊي جي هرهڪ پاسي جي ڊيگھ ڪيتري آهي؟
5. 32 سينٽي ميٽر ڊگھي لوهي جي تار کي موڙي، چورس ناهي وئي آهي. ٻڌايو تہ چورس جي هرهڪ پاسي جي ڊيگھ ڪيتري آهي؟
6. حسن ۽ اصغر وٽ ڪل 800 رُپيا آهن. حسن وٽ اصغر ڪان چئوٽا رُپيا آهن. ٻڌايو تہ حسن ۽ اصغر وٽ ڌار ڌار ڪيتري رقم آهي؟
7. پنهنجي دوست کي چئو تہ ڪو عدد سوچي. سوچيل عدد ۾ 3 وڌيڪ ملائي ۽ پوءِ اُن کي 2 سان ضرب ڏيو. هاڻي ان مان 6 ڪٽ ڪريو. پوءِ اُن نتيجي کي 2 سان ونڊ ڪريو. ٻڌايو تہ اصل سوچيل عدد ڇا آهي؟ ڇا اصل وارو سوچيل عدد ۽ آخر وارو جوابي عدد ٻئي هڪ جيترا آهن؟
8. اهڙا ٻہ لاڳيتا عدد ٻڌايو جن جي جوڙ اُپت 43 آهي.
9. اهڙا ٽي لاڳيتا پورا عدد ٻڌايو جن جي جوڙ اُپت 48 آهي.
10. ڪنهن رقم جي $\frac{1}{3}$ حصي ۽ $\frac{1}{4}$ حصي جي جوڙ اُپت 14 آهي تہ اُها رقم ٻڌايو.
11. ٻن عددن جي جوڙ اُپت 9 آهي. پهرين عدد جي پنجوڻ مان، ٻئي عدد جي چئوڻ ڪٽ ڪجي ٿي تہ جواب 9 اچي ٿو. ٻڌايو تہ اُهي ٻہ عدد ڪهڙا آهن؟
12. چئن لاڳيتن اِڪي عددن جي جوڙ اُپت 120 آهي تہ اُهي عدد معلوم ڪريو.

جائزي واري مشق 9

-1 هيٺين جون ليڪي مساواتون لکو.

-i ٻن لاڳيتن ٻڏي عددن جي جوڙ اُپت 42 آهي.

-ii ٽن لاڳيتن اِڪي عددن جي جوڙ اُپت 21 آهي.

-iii چئن لاڳيتن قدرتي عددن جي جوڙ اُپت 46 آهي.

-2 ڪي ٻه ٽي ليڪي مساواتون مختلف بدلجندڙن سان مختلف نمونن ۾ لکي ڏيکاريو.

-3 ڪنهن ٻه مساوات جو حل ڇا آهي؟ ڪي ٻه ٻه مثال ڏيو.

-4 هيٺيان خال پريو:

-i مساوات جنهن کي هڪ بدلجندڙ ۾ هڪ بدلجندڙ جي سگهه هڪ آهي، اُن کي ليڪي مساوات ________ ۾ چئبي.

-ii ڪنهن مساوات جي حل کي ________ به چئبو آهي.

-iii ڪنهن ٻه بدلجندڙ جي مُلهه لهڻ جو طريقيڪار آهي، مليل جملي کي صحيح ٻڌائڻ. اُن مُلهه کي مساوات جو ________ چئبو آهي.

-iv ليڪي مساوات جي ٻنهي پاسن ۾ ________ جي جوڙ سان مساوات جي برابري متاثر نہ ٿي ٿئي.

-5 صحيح جواب تي (✓) نشان لڳايو.

-i هڪ ليڪي مساوات جي گهڻ رقميءَ جي ڊگري يعني سگهه آهي:

(الف) هڪ (ب) ٻه (ج) ٽي (د) چار

-ii مليل مساوات $x = 1\frac{1}{2}$ مان x جو ملهه آهي:

(الف) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (ج) 1 (د) $\frac{2}{3}$

-iii مليل مساوات $2x + 1 = 6$ هڪ ليڪي مساوات آهي، جنهن کي ڊگري آهي:

(الف) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

-iv مليل مساوات $7 = 1 - 6x$ جو حل آهي:

(الف) $x = 0$ (ب) $x = 1$ (ج) $x = 2$ (د) $x = 3$

6- هيٺين مساواتن جو حل لهو:

(i) $\frac{x}{2} - 4 = 2$ (ii) $\frac{x-7}{4} = 3$ (iii) $\frac{x-5}{2}$

(iv) $\frac{x+1}{x-3} = \frac{5}{3}$ (v) $\frac{x-2}{x-1} = \frac{3}{4}$ (vi) $\frac{x+3}{3} = \frac{x+6}{2}$

7- **هڪ 120 سينٽي ميٽر ڊگهي تار کي مستطيل شڪل ۾ اهڙي طرح آڻجي ٿو، جيئن اُن جي ڊيگهه، ويڪر کان 10 سينٽي ميٽر وڌيڪ ٿئي. ٻڌايو ته مستطيل جي ڊيگهه ۽ ويڪر ڪيتري آهي؟**

خلاصو

- هڪ مساوات جنهن ۾ هڪ ئي بدلجندڙ هڪ سگهه وارو آهي. ان کي ليڪي مساوات هڪ بدلجندڙ ۾ چئجي ٿو. مثال طور: $ax + b = c$ يا $2x + 3 = 4$ وغيره.
- بدلجندڙ جو مُلهه جيڪو مساوات کي صحيح جملو بڻائي، اُن کي مساوات جو حل چئجي ٿو.

مثال طور: $2x + 3 = 5$

پوءِ $2x = 5 - 3 = 2$

يا $2x = 2$. ان ڪري $x = 1$ مليل مساوات جو حل چئبو.

- مليل مساوات جي ٻنهي پاسن ۾ ڪوبه ساڳيو عدد جوڙ ڪجي، ڪٽ ڪجي، ضرب ڪجي يا ونڊ ڪجي؛ هر حالت ۾ مساوات جي برابري متاثر نه ٿيندي. پر شرط اِهو آهي ته ونڊ جي صورت ۾ عدد، غير ٻڙي هئڻ گهرجي.
- روزمره جي عام زندگيءَ جي حسابن کي ليڪي مساوات ذريعي حل ڪرڻ لاءِ هيٺيان چار ڏاڪا استعمال ٿين ٿا:

(i) گهربل شيءِ ڇا آهي؟

(ii) گهربل شيءِ کي ڪنهن بدلجندڙ سان ظاهر ڪريو.

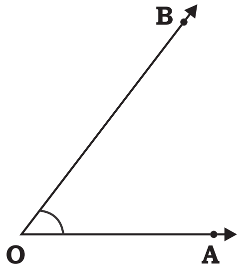
(iii) حساب ۾ ڏنل شرطن موجب آلجبري مساوات ٺاهيو.

(iv) حاصل ڪيل مساوات جو حل لهو ۽ اُن حل جي چڪاس پڻ ڪريو.

يونٽ 10

جاميٽريءَ جا بنيادي تصور

10.1 ڪندن جون خاصيتون



سامهون ڏنل ڪند $\angle AOB$ کي ڏسو.

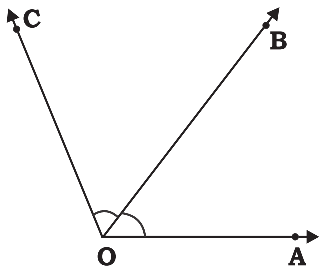
اها بن غير هم ليڪ شعاعن $\overrightarrow{OA}$ ۽ $\overrightarrow{OB}$ جي هڪ عام چيڙي واري ٽٻڪي O تي گڏجڻ سان ٺهي ٿي.

ٽٻڪي O کي ڪند جي چوٽي چئجي ٿو.

$\overrightarrow{OA}$ ۽ $\overrightarrow{OB}$ ڪند $\angle AOB$ جا پاسا يا ٻانهون آهن.

10.1.1 پر وارين ڪندن، ڪامپليمينٽري ڪندن ۽ سپليمينٽري ڪندن جي وصف

(i) پر وارين ڪندن جو جوڙو



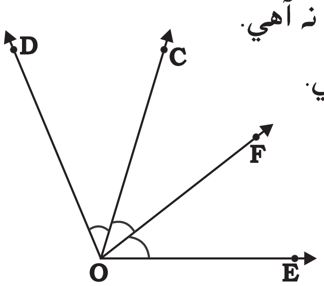
سامهون ڏنل شڪل کي ڏسو.

$\angle AOB$ ۽ $\angle BOC$ شروعاتي ٽٻڪي O سان ترتيبوار $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$ ۽ $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{OC}$ جي ميلاپ سان ٺهن ٿيون.

اسان اهو به ڏسي سگهون ٿا، ته ٽٻڪو O، ٻنهي ڪندن $\angle AOB$ ۽ $\angle BOC$ جو عام چوٽيءَ وارو ٽٻڪو آهي. $\overrightarrow{OB}$ انهن ٻنهي ڪندن جي عام ٻانهن آهي.

$\angle AOB$ ۽ $\angle BOC$ کي ٻيو ڪوبه عام ٽٻڪو، اُن جي اندرين ۾ نه آهي.

ان طرح $\angle AOB$ ۽ $\angle BOC$ پر وارين ڪندن جو هڪ جوڙو آهي.



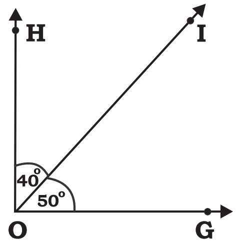
هاڻي هن سامهون ڏنل شڪل کي ڏسو.

انهيءَ شڪل ۾ پر وارين ڪندن جا چار جوڙا آهن.

اسان انهن چئن پر وارين ڪندن جا جوڙا هن طرح لکنداسين:

$(\angle EOF, \angle COF)$، $(\angle COF, \angle COD)$، $(\angle EOF, \angle FOD)$ ۽ $(\angle EOC, \angle COD)$

(ii) ڪامپليمينٽري ڪندون:



جيڪڏهن ٻن ڪندن جي ماپن جو جوڙ $90°$ آهي، ته اُهي ٻئي ڪامپليمينٽري ڪندون آهن. اُنهن مان هرهڪ ٻئي جي ڪامپليمينٽ آهي.

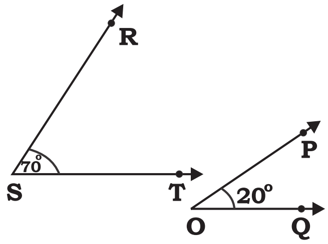
اسان مٿي ڏنل شڪل مان ڏسون ٿا ته:

$$m\angle GOI + m\angle HOI = 50° + 40° = 90°$$

تنهن ڪري $\angle GOI$ ۽ $\angle HOI$ ڪامپليمينٽري ڪندون آهن.

$\angle GOI$ ڪامپليمينٽ آهي $\angle HOI$ جي،

يا $\angle HOI$ ڪامپليمينٽ آهي $\angle GOI$ جي.



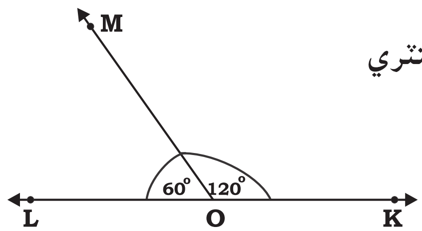
هاڻي سامهون ڏنل شڪل کي ڏسو.

اهي ٻه ڪندون اهڙي طرح آهن جو $m\angle POQ = 20°$ ۽ $m\angle RST = 70°$. جيئن ته ٻنهي ڪندن $m\angle POQ$ ۽ $m\angle RST$ جو ترتيبوار جوڙ $90°$ آهي. يعني $m\angle POQ + m\angle RST = 20°+70° = 90°$.

تنهن ڪري $\angle POQ$ ۽ $\angle RST$ ڪامپليمينٽري ڪندون آهن.

(iii) سپليمينٽري ڪندون

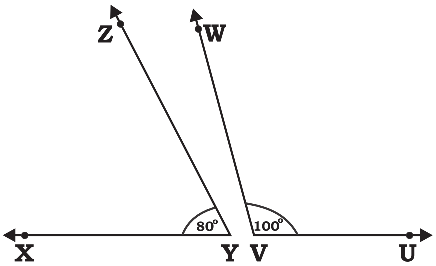
جيڪڏهن ٻن ڪندن جو جوڙ $180°$ آهي ته اُهي سپليمينٽري ڪندون آهن. اُنهن مان هرهڪ ٻئي جي سپليمينٽ آهي.



سامهون شڪل مان ڏسون ٿا:

$$m\angle MOK + m\angle MOL = 120° + 60° = 180°.$$

تنهن ڪري $\angle MOK$ ۽ $\angle MOL$ سپليمينٽري ڪندون آهن ۽ $\angle MOK$ سپليمينٽ آهي $\angle MOL$ جي يا $\angle MOL$ سپليمينٽ آهي $\angle MOK$ جي.



هاڻي وري ٻي سامهون ڏنل شڪل کي ڏسو.

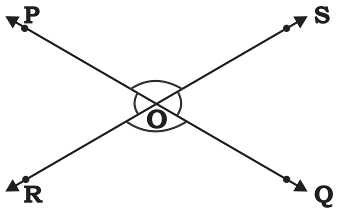
اِهي ٻه ڪندون آهن:

$$m\angle XYZ = 80° \text{ ۽ } m\angle UVW = 100°$$

اِنهن ٻنهي ڪندن جو جوڙ $180°$ آهي. يعني $m\angle UVW + m\angle XYZ = 100° + 80° = 180°$

تنهن ڪري ٻئي سپليمينٽري ڪندون آهن ۽ انهن مان هرهڪ ٻئي جي سپليمينٽ آهي.

10.1.2 آمهون سامهون چوٽيءَ واريون ڪندون



سامهون شڪل کي ڏسو.

$\overleftrightarrow{PQ}$ ۽ $\overleftrightarrow{RS}$ هڪ ٻئي کي، هڪ ٽٻڪي O تي ڪپين ٿيون ۽ چار ڪندون ناهين ٿيون:

$\angle POS$، $\angle QOR$، $\angle POR$ ۽ $\angle QOS$

اسان ڏسون ٿا ته:

(i) انهن چئن ئي ڪندن جي عام چوٽي، ٽٻڪو O آهي.

(ii) $\angle POS$ ۽ $\angle QOR$ جون ٻانهون هڪ ٻئي جا مخالف شعاع آهن.

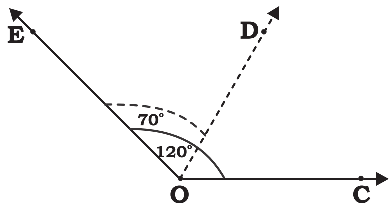
(iii) $\angle POR$ ۽ $\angle QOS$ جون ٻانهون به هڪ ٻئي جا مخالف شعاع آهن.

(iv) $\angle POS$ ۽ $\angle QOR$ آمهون سامهون چوٽيءَ وارين ڪندن جو هڪ جوڙو آهي ۽ اِهي ٻئي ڪندون ماپ ۾ هڪ ٻئي جي برابر آهن.

(v) ساڳيءَ طرح $\angle POR$ ۽ $\angle QOS$ به آمهون سامهون چوٽيءَ وارين ڪندن جو ٻيو جوڙو آهي ۽ اِهي به ٻئي ڪندون ماپ ۾ برابر آهن.

10.1.3 مليل ڪندن جي اڻ ڄاڻايل ماپ معلوم ڪرڻ جنهن ۾ پر واريون ڪندون، ڪامپليمينٽري ڪندون، سپليمينٽري ڪندون ۽ آمهون سامهون چوٽيءَ واريون ڪندون شامل آهن

اسان اڳ ۾ پر وارين ڪندن، ڪامپليمينٽري ڪندن، سپليمينٽري ڪندن ۽ آمهون سامهون چوٽيءَ وارين ڪندن جي وصف متعلق پڙهي آيا آهيون. هاڻي فقط انهن جي اڻ ڄاڻايل ماپ معلوم ڪرڻ سکنداسين.



مثال 1: سامهون ڏنل شڪل کي ڏسو.

ان ۾ پر وارين ڪندن جي جوڙن جا نالا لکو.

شڪل ۾ ڪندن جي اڻ ڄاڻايل ماپ پڻ معلوم ڪريو.

حل: شڪل کي ڏسي چئجي ٿو ته $\angle COD$ ۽ $\angle EOD$ ٻن پر وارين ڪندن جو هڪ جوڙو آهي. اهو پڻ مليل آهي ته: $m\angle EOD = 70°$، $m\angle COE = 120°$ ۽

$m\angle COD + m\angle EOD = m\angle COE$

يا $m\angle COD + 70° = 120°$ يا $m\angle COD = 120° - 70°$

يا $m\angle COD = 50°$.

تنهن ڪري اڻ ڄاڻايل ڪند $m\angle COD = 50°$.

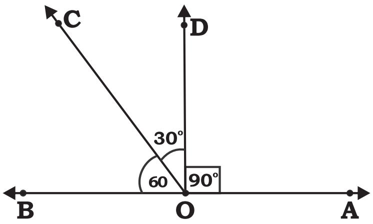
مثال 2: سامهون ڏنل شڪل کي ڏسو.

شڪل ۾ ڏيکاريل هيٺين ڪندن جا نالا لکو:

(i) پر وارين ڪندن جا جوڙا

(ii) ڪامپليمينٽري ڪندن جا جوڙا

(iii) سپليمينٽري ڪندن جا جوڙا



حل: شڪل کي ڏسي، چئون ٿا ته:

(i) اِن ۾ هيٺيان چار پر وارين ڪندن جا جوڙا آهن:

$(\angle AOC, \angle BOC)$, $(\angle COD, \angle BOC)$, $(\angle AOD, \angle BOD)$, $(\angle AOD, \angle COD)$

(ii) اِن ۾ ڪامپليمينٽري ڪندن جو هڪ جوڙو $(\angle COD, \angle BOC)$ آهي.

(iii) اِن ۾ سپليمينٽري ڪندن جا ٻه جوڙا $(\angle AOD, \angle BOD)$ ۽ $(\angle AOC, \angle BOC)$ آهن.

عملي ڪم: سامهون ڏنل شڪل ۾ ڪندن جي اڻ ڄاڻايل ماپ معلوم ڪريو.

جڏهن ته: $m\angle EOH = 60°$ ۽ $m\angle HOG = 120°$

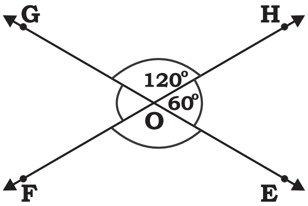
تنهن ڪري: $m\angle FOG =$ ________ ڇاڪاڻ ته

$m\angle EOH =$ ________

(اِهي ٻئي آمهون سامهون چوٽيءَ واريون ڪندون آهن)

ساڳي طرح: $m\angle EOF =$ ________ ڇاڪاڻ ته

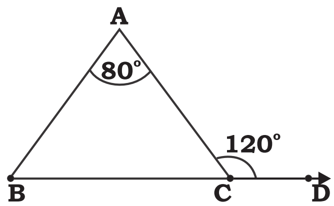
$m\angle EOF =$ ________ (اِهي ٻئي آمهون سامهون چوٽيءَ واريون ڪندون آهن)



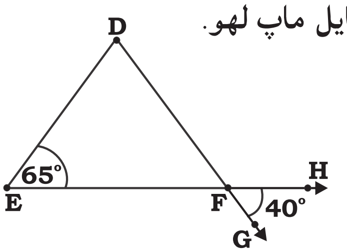
10.1.14 ٽڪنڊي ۾ ڪندن جي اڻ ڄاڻايل ماپ معلوم ڪرڻ

اسان سکي آيا آهيون ته ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪندن جو جوڙ 180° ٿئي ٿو. اسان انهيءَ ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪندن جي جوڙ واري خاصيت جي مدد سان، ٽڪنڊي جي اڻ ڄاڻايل ڪندن ماپ معلوم ڪري سگهون ٿا.

مثال: هيٺ ڏنل ٽڪنڊي جي شڪل ۾، ڪندن جي اڻ ڄاڻايل ماپ لِکو.



عملي ڪم: شڪل ۾ ڏيکاريل ڪندن جي اڻ ڄاڻايل ماپ لِکو.



حل: مٿي مليل شڪل ۾:

$m\angle BAC = 80°$ ، $\angle mACD = 120°$

اسان کي هيٺين ڪندن جي ماپ معلوم ڪرڻي آهي:

(a) $m\angle ABC = ?$ (b) $m\angle ACB = ?$

شڪل مان اهو صاف ظاهر آهي ته:

$m\angle ACB + m\angle ACD = 180°$

اِهي ٻئي سپليمينٽري ڪندون آهن.

پر $m\angle ACD = 120°$ (مليل)

تنهن ڪري

$m\angle ACB = 180° - m\angle ACD$

$= 180° - 120° = 60°$ ...(i)

اِهو پڻ شڪل مان ظاهر آهي ته

$m\angle ABC + m\angle BAC + m\angle ACB = 180°$

(ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪندن جو جوڙ 180° آهي)

انهيءَ ڪري

$m\angle ABC + m\angle BAC + m\angle ACB = 180°$

يعني $m\angle ABC + 80° + 60° = 180°$

يا $m\angle ABC + 140° = 180°$

يا $m\angle ABC = 180° - 140° = 40°$ ...(ii)

ان طرح اسان معلوم ڪيو ته $m\angle ABC = 40°$

۽ $m\angle ACB = 60°$

اچو ته عملي ڪم حل ڪريون.

شڪل مان ظاهر آهي ته

$m\angle DEF =$ ______

اهو به شڪل مان صاف ظاهر آهي ته:

$\overrightarrow{DG}$ ۽ $\overrightarrow{EF}$ هڪ ٻئي کي هڪ ٽڪي ______ تي ڪپين ٿيون ۽ هيٺيون به آمهون سامهون واريون چوٽيءَ واريون ڪندون ناهين ٿيون:

______ ۽ ______

تنهن ڪري $m\angle DEF =$ ______

جيئن ته $m\angle HEF =$ ______

انهيءَ ڪري (i) $m\angle DFE =$ ______

ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪندن جو جوڙ = ______

يعني

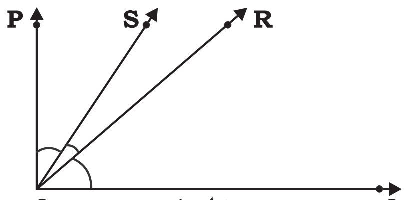
$m\angle DEF + m\angle DFE + m\angle EDF =$ ______

يا $65° + 40° + m\angle EDF =$ ______

يا (ii) $m\angle EDF = 180° - (65°+40°) =$ ______

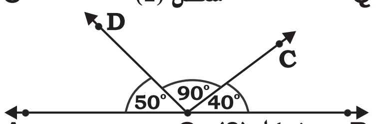
مشق 10.1

1- سامهون شڪل (1) کي ڏسي ڪري، سيني پر وارين ڪندن جا نالا لکو.



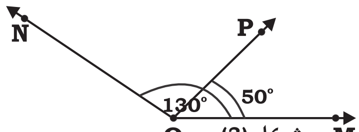
شڪل (1)

2- سامهون شڪل (2) کي ڏسي ڪري سيني سپليمينٽري ڪندن جا جوڙا لکو.



شڪل (2)

3- سامهون شڪل (3) ڪي ڏسو، جنهن ۾ $m\angle MON = 130^\circ$ ۽ $m\angle MOP = 50^\circ$.
هاڻي $\angle POM$ جي پر واري ڪند جي ماپ معلوم ڪريو.



شڪل (3)

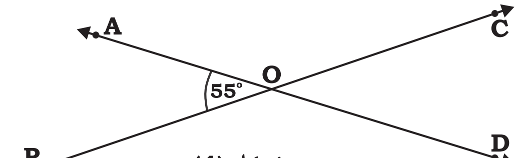
4- هيٺين چارٽ ۾ ڪندن جي مليل ماپن جي ڪامپليمينٽ واري ڪندن جي ماپ معلوم ڪريو.

ڪندن جي مليل ماپ	49°	62°	54°	36°	67°	81°	15°
مليل ڪندن جي ڪامپليمينٽ واري ڪند جي ماپ							

5- هيٺين چارٽ ۾ ڪندن جي مليل ماپن جي سپليمينٽ واري ڪندن جي ماپ معلوم ڪريو:

ڪندن جي مليل ماپ	80°	132°	49°	76°	125°	103°	68°
مليل ڪندن جي سپليمينٽ واري ڪند جي ماپ							

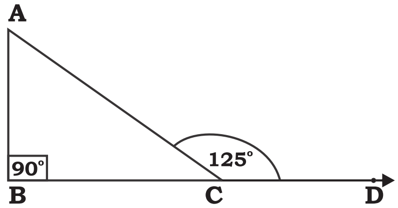
6- سامهون ڏنل شڪل (4) ۾ ڏسي، آمهون سامهون وارين چوٽيءَ وارين ڪندن جا نالا ۽ ماپ لکو.



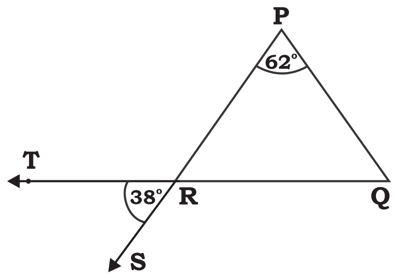
شڪل (4)

7- هيٺ ڏنل ٽڪنڊن ۾ اڻ ڄاتايل ڪندن جون ماپون لکو.

(i)



(ii)



8- ڏنل مواد مان صحيح جواب چونڊي خال ڀريو.

(i) جيڪڏهن ڪنهن مليل ڪند جي ماپ پنهنجي ڪامپليمينٽ جي برابر آهي، ته اُن مليل ڪند جي ماپ ________ آهي. (90°, 45°, 180°)

(ii) جيڪڏهن ڪنهن مليل ڪنڊ جي ماپ، پنهنجي سپليمينٽ جي برابر آهي تہ اُن مليل ڪنڊ جي ماپ _______ ٿيندي. (45°, 90°, 180°)

(iii) سوڙهي ڪنڊ جي سپليمينٽ، _______ ڪنڊ آهي. (هڪ سوڙهي، هڪ ڳوني، هڪ ويڪري)

(iv) سپليمينٽري ڪنڊن جي هڪ جوڙي مان، جيڪڏهن هڪ ڳوني ڪنڊ آهي تہ ٻي سپليمينٽ ڪنڊ _______ ٿيندي. (هڪ سوڙهي، هڪ ڳوني، هڪ ويڪري)

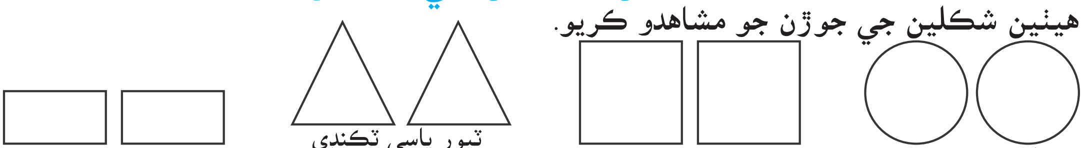
(v) ڪامپليمينٽري ڪنڊن جي جوڙي مان، هرهڪ ڪنڊ _______ ٿئي ٿي. (سوڙهي ڪنڊ، ڳوني ڪنڊ، ويڪري ڪنڊ)

(vi) ٻہ سڌيون ليڪون هڪ ٻئي کي اهڙيءَ طرح ڪپين ٿيون، جو اُنهن مان ٺهندڙ چئن ڪنڊن مان، هڪ ڳوني ڪنڊ آهي تہ باقي ڪنڊن مان هرهڪ _______ هوندي. (سوڙهي ڪنڊ، ڳوني ڪنڊ، ويڪري ڪنڊ)

10.2 يڪسان ۽ هڪجھڙيون شڪليون

10.2.1 يڪسان ۽ هڪجھڙين شڪلين کي سڃاڻ

هيٺين شڪلين جي جوڙن جو مشاهدو ڪريو.

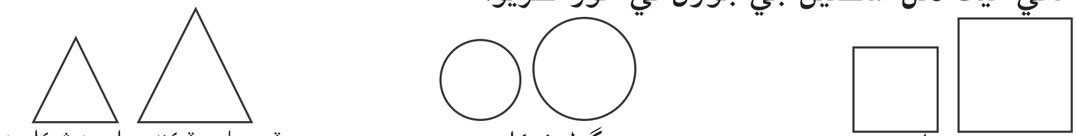


گول شڪليون — چورس شڪليون — ٽيور پاسي ٽڪنڊي واريون شڪليون — مستطيل شڪليون

يڪسان شڪليون: اُهي شڪليون جيڪي ماپ ۾ بلڪل هڪ جيتريون ۽ شڪل ۾ هڪ جهڙيون هجن، پر اهو ضروري نہ آهي تہ اُهي ساڳيون هجن، مگر اُهي رنگ ۽ روپ ۾ هڪ ٻئي کان مختلف ٿي سگهن ٿيون.

مثال: مٿي ڏيکاريل چورس، مستطيل، گول ۽ ٽيور پاسي ٽڪنڊي واريون سڀ شڪليون جيڪي ماپ ۾ بلڪل هڪ جيتريون ۽ هڪ جهڙيون آهن، اُهي يڪسان شڪليون (Congruent Figures) آهن.

هاڻي هيٺ ڏنل شڪلين جي جوڙن تي غور ڪريو.



چورس شڪليون — گول شڪليون — ٽيور پاسي ٽڪنڊي واريون شڪليون

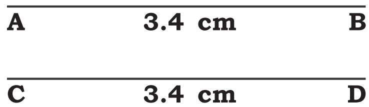
هڪ جهڙيون شڪليون: اُهي شڪليون جيڪي بلڪل هڪ جهڙيون آهن ۽ ضروري نہ آهي تہ اُهي ماپ ۾ هڪجيتريون هجن. انهن کي هڪجھڙيون شڪليون سڏجي ٿو.

مثال: سڀ چورس، سڀ گول ۽ سڀ ٽيور پاسو ٽڪنڊا، هڪ جهڙين شڪلين جا مثال آهن.

10.2.2 يڪسان هئڻ جي نشانيءَ جي سڃاڻپ

(i) يڪسان شڪليون: ٻہ يا ٻن کان وڌيڪ جاميٽريءَ جون شڪليون، هڪ ٻئي سان يڪسان چئي سگهجن ٿيون، جيڪڏهن اُهي شڪل شبيهہ ۾ بلڪل ساڳيون ۽ ماپ ۾ بلڪل هڪ جيتريون آهن. يڪسان هئڻ جي نشاني '$\cong$' آهي.

مثال طور: (i) ٻہ ليڪ ٽُڪر يڪسان سڏبا، جڏهن اُهي ماپ ۾ بلڪل ساڳيا آهن.

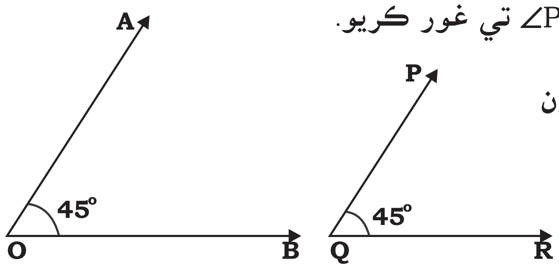


هتي $m\overline{AB} = 3.4\text{ cm} = m\overline{CD}$

يعني ٻئي ليڪ ٽڪر شڪل شبيهہ ۾ ساڳيا ۽ ماپ ۾ بہ بلڪل هڪ جيترا آهن.

تنهن ڪري $m\overline{AB} = m\overline{CD}$ ۽ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

(ii) هاڻي سامهون ڏنل ڪنڊن $\angle AOB$ ۽ $\angle PQR$ تي غور ڪريو.



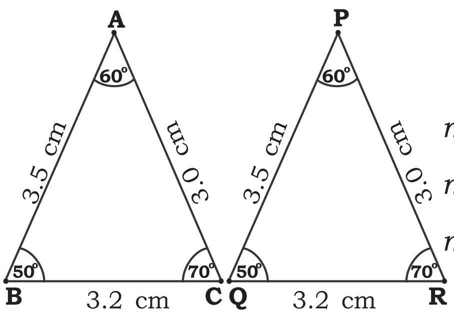
هتي $m\angle AOB = 45°$ ۽ $m\angle PQR = 45°$

ڇاڪاڻ تہ ٻئي ڪنڊون شڪل شبيهہ ۾ ساڳيون ۽ ماپ ۾ بہ بلڪل هڪ جيتريون آهن.

تنهن ڪري شڪل ۾ ڏيکاريل ٻئي ڪنڊون، هڪ ٻئي جي يڪسان آهن.

يعني: $\angle AOB \cong \angle POQ$

(iii) هاڻي وري هيٺين شڪل ۾ ڏيکاريل ٽڪنڊن ΔABC ۽ ΔPQR تي غور ڪريو.



هتي

$m\overline{AB} = m\overline{PQ} = 3.5\text{ cm}, m\angle BAC = m\angle QPR = 60°$

$m\overline{BC} = m\overline{QR} = 3.2\text{ cm}, m\angle ABC = m\angle PQR = 50°$

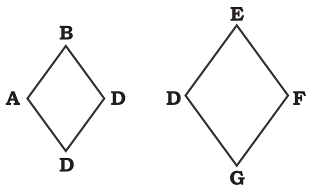
$m\overline{CA} = m\overline{RP} = 3.0\text{ cm}, m\angle BCA = m\angle QRP = 70°$

جيئن تہ ٻنهي ٽڪنڊن جي بلڪل ساڳي ماپ ۽ مطابقت آهي ۽ شڪل شبيهہ بہ ساڳي آهي.

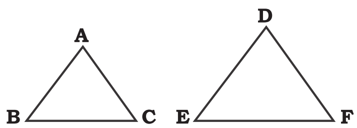
تنهن ڪري $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

(iii) ساڳيون شڪليون: ٻہ يا ٻن کان وڌيڪ جاميٽريءَ جون شڪليون ساڳيون سڏبيون، جڏهن اُهي شڪل شبيهہ ۾ هڪجهڙيون آهن، پر ضروري نہ آهي تہ اُهي ماپ ۾ بہ هڪ جيتريون هُجن. جاميٽريءَ جون شڪليون جيڪي شڪل شبيهہ ۾ ساڳيون يا هڪ جهڙيون آهن، اُنهن کي نشاني ۾ '~' سان ظاهر ڪبو آهي.

مثال طور:



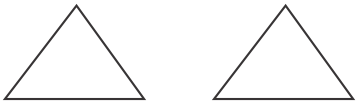
(چوڪندو ABCD ~ چوڪندو DEFG)

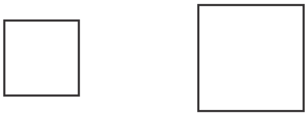


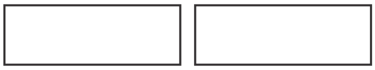
يا $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

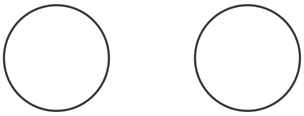
مشق 10.2

1. هيٺين شڪلين بابت لکو تہ ڪهڙيون يڪسان ۽ ڪهڙيون هڪجهڙيون آهن؟

i.  ____________

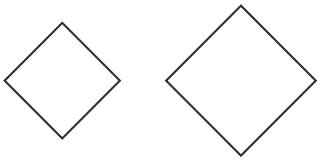
ii.  ____________

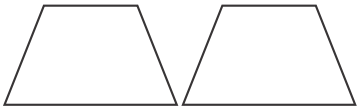
iii.  ____________

iv.  ____________

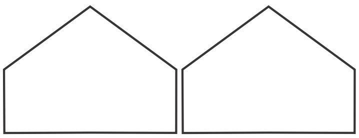
v. 

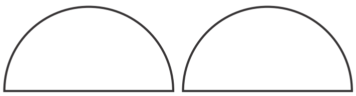
____

vi.  ____________

vii.  ____________

viii.  ____________

ix.  ____________

x.  ____________

B- هيٺيون جاميٽريءَ جون شڪليون ڏاهيو ۽ ٻڌايو:

(i) ٻه مستطيل شڪليون مختلف ماپ جون ڏاهيو. ڇا اهي ٻئي هڪجهڙيون شڪليون آهن؟

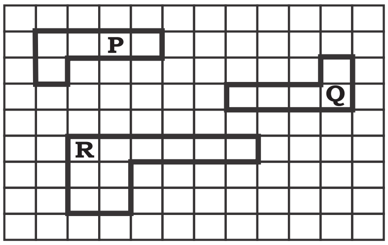
(ii) ٻه گول مختلف نيم قطرن جا ڏاهيو. ڇا اهي ٻئي يڪسان آهن؟

(iii) ٻه ٽيڪنڊا پاسا ٽڪنڊا ساڳين ماپن جا ڏاهيو. ڇا اهي ٻئي هڪجهڙيون شڪليون آهن؟

(iv) ٻه چورس مختلف ماپن جا ڏاهيو. ڇا اهي ٻئي يڪسان آهن؟

(v) ٻه مستطيل شڪليون ساڳي ماپ جون ڏاهيو. ڇا اهي ٻئي يڪسان آهن؟

C- هيٺين گراف ۾ ڏيکاريل شڪلين P، Q ۽ R تي غور ڪريو ۽ هيٺ پُڇيل سوالن جا جواب ڏيو.



(i) ڇا شڪل P ۽ شڪل R ٻئي ساڳي قسم جون شڪليون آهن؟

(ii) ڇا شڪل P ۽ شڪل R ساڳي ماپ جون شڪليون آهن؟

(iii) ڇا شڪل P ۽ شڪل R ٻئي يڪسان شڪليون آهن؟

(iv) ڇا شڪل P ۽ شڪل R ٻئي هڪ جهڙيون شڪليون آهن؟

(v) شڪل P ۽ شڪل Q جو پاڻ ۾ ڪهڙو تعلق آهي؟

D- صحيح لاءِ 'ص' ۽ غلط لاءِ 'غ' لکو.

(i) جيئن ته 10 رُپئي جي نوٽ جي شڪل ۽ 100 رُپئي جي نوٽ جي شڪل ساڳيون لڳن ٿيون، تنهن ڪري اهي ٻئي هڪجهڙيون شڪليون آهن.

(ii) جيئن ته 20 رُپئي جي نوٽ جي شڪل ۽ 50 رُپئي جي نوٽ جي شڪل پاڻ ۾ برابر ماپ جون نہ آهن، تنهن ڪري اهي هڪ جهڙيون شڪليون نہ آهن.

(iii) 500 رُپئي جي نوٽ جي شڪل ۽ 1,000 رُپئي جي نوٽ جي شڪل ٻئي يڪسان شڪليون آهن.

(iv) 100 رُپئي جي نوٽ جي شڪل ۽ 50 رُپئي جي نوٽ جي شڪل پاڻ ۾ يڪسان نہ آهن.

(v) 20 رُپئي جي نوٽ جي شڪل ۽ 500 رُپئي جي نوٽ جي شڪل پاڻ ۾ هڪجهڙيون شڪليون آهن.

10.2.3 يڪسان ۽ هڪ جهڙين شڪلين جون خاصيتون

اسان اڳ ۾ يڪسان ۽ هڪجهڙين شڪلين کي سمجهي آيا آهيون. ان مطابق:

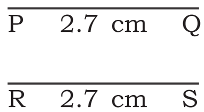
I- يڪسان شڪلين ۾ ساڳئي قسم جي شڪل هئڻ تمام ضروري آهي ۽ گڏوگڏ انهن جي ماپ بہ پاڻ ۾ برابر هئڻ گهرجي.

II- هڪجهڙين شڪلين ۾ ساڳئي قسم جي شڪل سان گڏ اُنهن جون ڪنڊون هڪ جيتري ماپ جون ٿين ٿيون ۽ پاسن جي ماپ ۾ ساڳي نسبت ٿئي ٿي.

هاڻي اسان اهي ٻئي خاصيتون استعمال ڪري، شڪلين کي يڪسان يا هڪ جهڙيون شڪليون بيان ڪري سگهون ٿا.

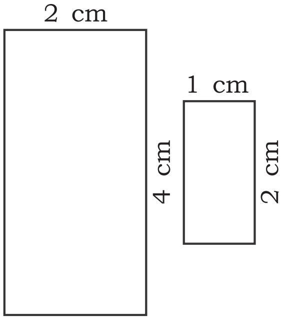
مثال 1: هيٺ ڏنل شڪلين جي جوڙن تي غور ڪري ٻڌايو ته ڪهڙيون شڪليون يڪسان يا هڪ جهڙيون آهن؟

(i)



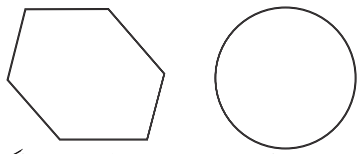
اِهي ٻئي ليڪ ٽڪر ساڳي قسم جي شڪل جا آهن ۽ انهن جي ماپ به پاڻ ۾ برابر آهي. تنهن ڪري: $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$

(ii)



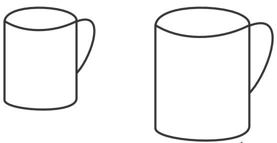
هتي به ٻئي مستطيل شڪليون آهن. اهي ٻئي ساڳئي قسم جون شڪليون آهن، پر انهن جي ماپ مختلف آهي. ڏسون ٿا ته انهن ٻنهي جي پاسن جي ڊيگهه ۾ ساڳي نسبت آهي، تنهن ڪري اهي ٻئي هڪجهڙيون شڪليون آهن.

(iii)



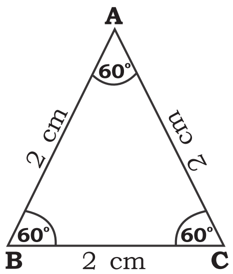
ڏسون ٿا ته اهي ٻئي شڪليون ساڳي قسم جون نه آهن. تنهن ڪري نه ته اهي هڪجهڙيون شڪليون چئبيون ۽ نه وري يڪسان.

(iv)

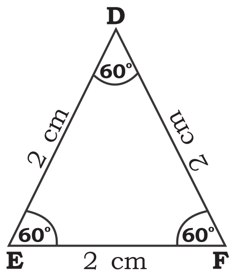


اهي ٻئي شڪليون ساڳي قسم جي عام زندگيءَ وارين شڪلين سان واسطو رکن ٿيون. اهو به ڏسون ٿا ته ٻنهي جي شڪل تقريبًا هڪ جهڙي آهي، پر انهن جي ماپ مختلف آهي. تنهن ڪري اهي هڪجهڙيون شڪليون آهن.

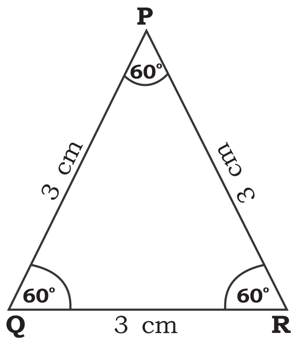
مثال 2: هيٺ ڏنل ٽڪنڊن جي تصويرن تي غور ڪري ٻڌايو ته ڪهڙيون شڪليون پاڻ ۾ هڪجهڙيون آهن ۽ ڪهڙيون شڪليون پاڻ ۾ يڪسان آهن؟



شڪل (i)



شڪل (ii)



شڪل (iii)

سائيز ۾ وڌايل ٽڪنڊو

ΔABC ۽ ΔDEF ۾ سڀ نسبتي پاسا ۽ ڪندون پاڻ ۾ يڪسان آهن.

يعني: $m\overline{AB} = m\overline{DE}$, $m\overline{BC} = m\overline{EF}$

۽ $m\overline{CA} = m\overline{FD}$

$m\angle ACB = m\angle DFE,$
$m\angle ABC = m\angle DEF,$
$m\angle BAC = m\angle EDF$

تنهن ڪري $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

پڙهنداسين: ΔABC يڪسان آهي ΔDEF جي.

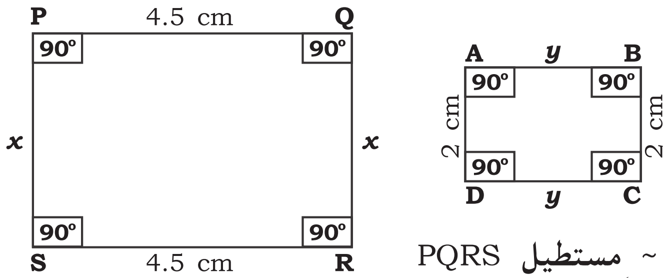
شڪل (ii) ۽ (iii) تي غور ڪريو.
ΔDEF اصل ٽڪنڊو آهي، جڏهن ته ΔPQR اصل ٽڪنڊي جي ماپن ۾ وڌايل شڪل آهي. تنهن ڪري ΔDEF هڪجهڙو آهي ΔPQR سان. ڏسون ٿا ته ٻنهي ٽڪنڊن جون نسبتي ڪندون ساڳي ماپ جون آهن. ماپ ۾ وڌايل واري ٽڪنڊي جي هرهڪ پاسي جي ڊيگهه ۽ اصلي ٽڪنڊي جي ترتيبوار پاسن جي ڊيگهه ۾ ساڳي نسبت موجود آهي. يعني ٻنهي ٽڪنڊن جي سيني پاسن جي ڊيگهه ۾ ساڳيو تناسب آهي.

$$\frac{DE}{PQ} = \frac{EF}{QR} = \frac{FD}{RP} = \frac{2}{3}$$

انهيءَ ڪري $\Delta PQR \sim \Delta DEF$

جنهن کي پڙهنداسين: ΔDEF هڪ جهڙو آهي ΔPQR سان.

مثال 4: جيڪڏهن هيٺ ڏيکاريل ٻه مستطيل شڪليون پاڻ ۾ هڪ جهڙيون آهن ته ٻنهي شڪلين ۾ ڏار ڏار اڻ ڄاڻايل پاسن جي ماپ لهو، جڏهن ته ٻنهي شڪلين جي پاسن جي ڊيگهه ۾ تناسب $\frac{3}{2}$ آهي.



حل: جيئن ته مستطيل ABCD ~ مستطيل PQRS

تنهن ڪري (i) سندن پاسن جي ڊيگهه ۾ ساڳيو تناسب آهي.
(ii) سندس نسبتي ڪندون پاڻ ۾ برابر آهن.

$$m\angle P = m\angle A = 90^\circ,\ m\angle Q = m\angle B = 90^\circ,\ m\angle R = m\angle C = 90^\circ,\ m\angle S = m\angle D = 90^\circ$$

۽ $\frac{m\overline{PQ}}{m\overline{AB}} = \frac{4.5}{y} = \frac{3}{2}$ (ٻنهي مستطيل شڪلين جي پاسن جي ڊيگهه جي نسبت ساڳي آهي)

تنهن ڪري $y = \frac{(4.5) \times 2}{3} = \frac{9}{3} = 3$، يعني $m\overline{AB} = 3$ س م

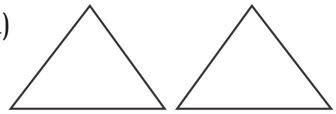
ساڳي طرح $\frac{m\overline{QR}}{m\overline{BC}} = \frac{x}{2} = \frac{3}{2}$

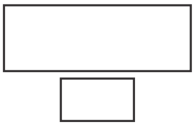
تنهن ڪري $x = \frac{2 \times 3}{2}$ ، يعني $x = 3$ يا $m\overline{QR} = 3$ س م

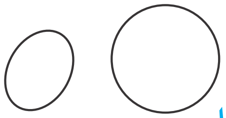
مشق 10.3

1- هيٺين شڪلين مان ٻڌايو ته ڪهڙا جوڙا يڪسان آهن، ڪهڙا هڪجهڙا آهن ۽ ڪهڙا جوڙا نه هڪجهڙا آهن ۽ نه وري يڪسان آهن.

(هيٺين مان پهريان ٽي حصا حل ڪري ڏيکاريا ويا آهن)

(i) 

(ii) 

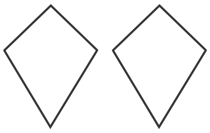
(iii) 

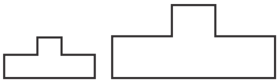
حل:

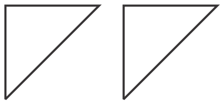
(i) مليل ٻئي شڪليون ساڳي قسم واريون ۽ ساڳي ماپ واريون آهن. تنهنڪري اهي ٻئي يڪسان شڪليون آهن.

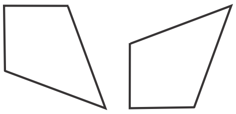
(ii) مليل ٻئي شڪليون ساڳي قسم واريون، پر ساڳي ماپ واريون نه آهن. تنهن ڪري اهي ٻئي هڪجهڙيون شڪليون آهن.

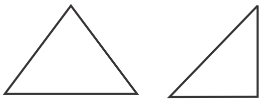
(iii) مليل ٻئي شڪليون ساڳي قسم واريون شڪليون نه آهن. تنهن ڪري اهي هڪجهڙيون شڪليون نه آهن ۽ نه وري اِهي يڪسان آهن.

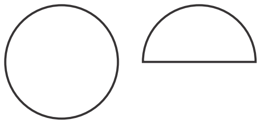
(iv) 

(v) 

(vi) 

(vii) 

(viii) 

(ix) 

2- هيٺ ڏنل مواد تي غور ڪري يڪسان ليڪ ٽڪرن جا جوڙا نشانين ۾ لکو.

$m\overline{CD} = 4.5$ س م	$m\overline{AB} = 3.2$ س م
$m\overline{GH} = 4.8$ س م	$m\overline{DE} = 5.1$ س م
$m\overline{XZ} = 5.1$ س م	$m\overline{MN} = 4.5$ س م
$m\overline{PQ} = 5.4$ س م	$m\overline{YZ} = 4.8$ س م
$m\overline{EF} = 3.9$ س م	$m\overline{RS} = 5.4$ س م
$m\overline{XY} = 3.2$ س م	$m\overline{YZ} = 3.9$ س م

3- هيٺ ڏنل مواد تي غور ڪري يڪسان ڪنڊن جا جوڙا نشانين ۾ لکو.

$m\angle DEF = 70^\circ$	$m\angle ABC = 60^\circ$
$m\angle PQR = 45^\circ$	$m\angle XYZ = 110^\circ$
$m\angle PRQ = 60^\circ$	$m\angle COD = 45^\circ$
$m\angle MNS = 110^\circ$	$m\angle AOB = 70^\circ$

4- هيٺيان خال پريو:

(i) جڏهن: $m\angle ABC = 100^\circ$ ۽ $\angle ABC \cong \angle DEF$ تنهن ڪري $m\angle DEF =$ ________

(ii) جڏهن: $m\angle PQR = m\angle XYZ$، تنهن ڪري $\angle XYZ$ ______ $\angle PQR$

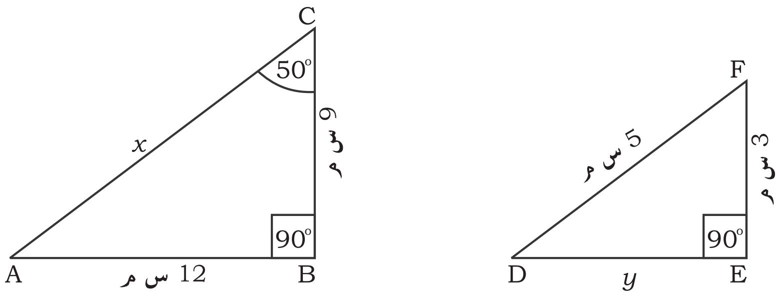
(iii) اُهي ليڪ ٽڪر، جيڪي ديگهه ۾ برابر آهن: اُنهن کي ________ ليڪ ٽڪر چئجي ٿو.

(iv) اُهي ڪندون جيڪي ماپ ۾ ________ آهن، اُهي يڪسان ڪندون سڏجن ٿيون.

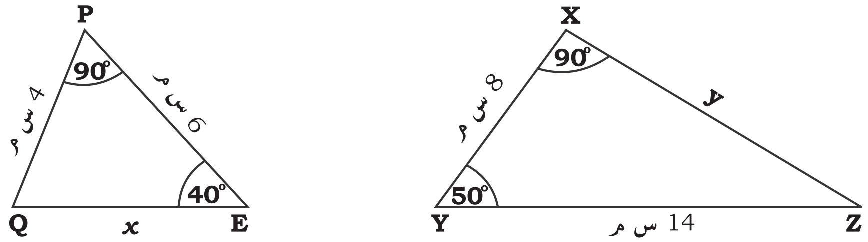
(v) ٻہ گول يڪسان آهن، جيڪڏهن اُنهن جا ________ برابر آهن.

5- هيٺ ڏنل هڪجهڙين شڪلين جي جوڙن تي غور ڪريو ۽ شڪلين جي هرهڪ جوڙي ۾ اڻ ڄاڻايل رُڪن معلوم ڪريو.

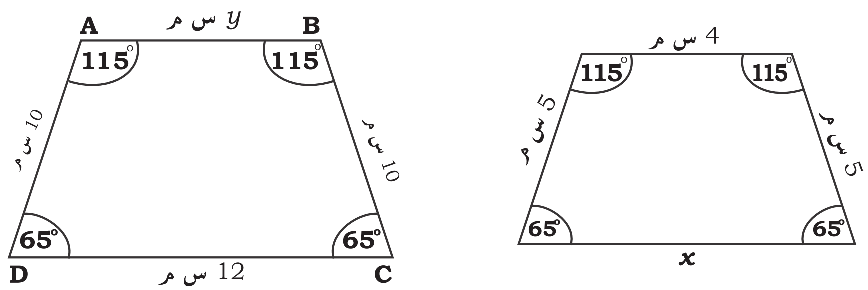
(i)



(ii)



(iii)



10.3 يڪسان ٽڪنڊا

ٻن ٽڪنڊن جي يڪسان هئڻ لاءِ هيٺيون خاصيتن کي استعمال ڪيون ٿا:

(i) SSS ≅ SSS (ii) SAS ≅ SAS

(iii) ASA ≅ ASA (iv) HS ≅ HS

مطلب ته ٻن ٽڪنڊن جي يڪسان هئڻ جون چار خاصيتون آهن.

10.3.1 ٽڪنڊن جي يڪسان هئڻ جي پهرين خاصيت (SSS ≅ SSS)

هيءَ خاصيت بيان ڪري ٿي ته ڪنهن به هڪ ٽڪنڊي جا ٽي پاسا، ٻئي ٽڪنڊي جي نسبتي ٽن پاسن سان يڪسان آهن؛ ته اُهي ٻئي ٽڪنڊا پاڻ ۾ يڪسان ٿيندا.

ٻن ٽڪنڊن PQR ۽ XYZ تي غور ڪريو.

$$\Delta PQR \longleftrightarrow \Delta XYZ$$

يعني ΔPQR کي هيٺين ريت هڪ هڪ نسبت آهي ΔXYZ سان:

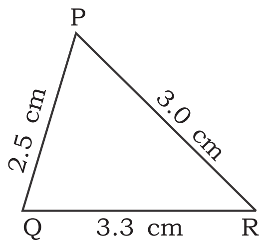
(i) $m\overline{PQ} = 2.5$ س م، $m\overline{XY} = 2.5$ س م. تنهن ڪري $\overline{PQ} \cong \overline{XY}$

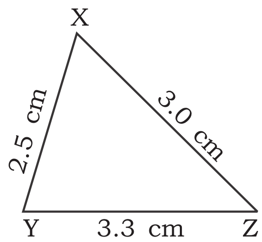
(ii) $m\overline{PR} = 3.0$ س م، $m\overline{XZ} = 3.0$ س م. تنهن ڪري $\overline{PR} \cong \overline{XZ}$

(iii) $m\overline{QR} = 3.3$ س م، $m\overline{YZ} = 3.3$ س م. تنهن ڪري $\overline{QR} \cong \overline{YZ}$

انهيءَ ڪري:

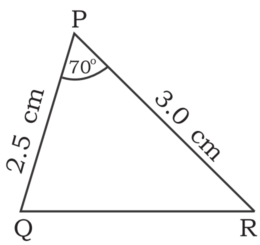
$\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ (SSS ≅ SSS)

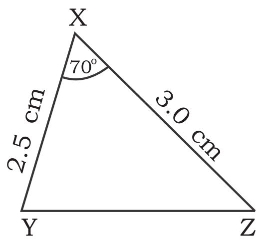




10.3.2 ٽڪنڊن جي يڪسان هئڻ جي ٻي خاصيت (SAS ≅ SAS)

جيڪڏهن ڪنهن هڪ ٽڪنڊي جي ٻن پاسن ۽ انهن جي وچ واري هڪ ڪنڊ، ٻي ٽڪنڊي جي نسبتي ٻن پاسن ۽ هڪ وچ واري ڪنڊ جي يڪسان آهي ته ٻئي ٽڪنڊا پاڻ ۾ يڪسان ٿيندا.

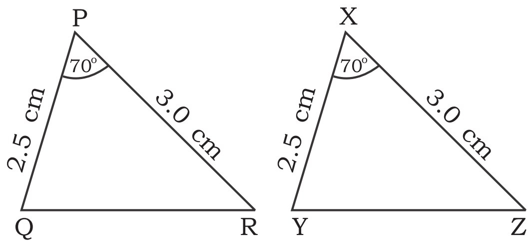




ٻن ٽڪنڊن PQR ۽ XYZ تي غور ڪريو.

$$\Delta PQR \longleftrightarrow \Delta XYZ$$

ٽڪنڊي ΔPQR کي هيٺين ريت هڪ – هڪ نسبت آهي ٽڪنڊي ΔXYZ سان.



(i) س م $m\overline{XY} = 2.5$، س م $m\overline{PQ} = 2.5$.

تنهن ڪري $\overline{PQ} \cong \overline{XY}$

(ii) س م $m\overline{XZ} = 3.0$، س م $m\overline{PR} = 3.0$.

تنهن ڪري $\overline{PR} \cong \overline{XZ}$

(iii) $m\angle QPR = 70°$ ۽ $m\angle YXZ = 70°$.

تنهن ڪري $\angle QPR \cong \angle YXZ$

چئبو تہ $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ (SAS ≅ SAS)

10.3.3 ٽڪندن جي يڪسان هئڻ جي ٽين خاصيت (ASA ≅ ASA)

هيءَ خاصيت ظاهر ڪري ٿي تہ هڪڙي ٽڪنڊي جون ٻہ ڪندون ۽ اُنهن ٻن ڪندن جي وچ وارو هڪ پاسو يڪسان آهي، ٻئي ٽڪنڊي جي انهن ٻن نسبتي ڪندن ۽ اُنهن ٻنهي ڪندن جي وچ واري هڪ عام پاسي جي؛ تہ پوءِ ٻئي ٽڪنڊا يڪسان چئبا.

هاڻي ٻن ٽڪندن PQR ۽ YXZ تي غور ڪريو.

$$\Delta PQR \longleftrightarrow \Delta XYZ$$

ΔPQR ۽ ΔXYZ جي پاڻ ۾ هڪ – هڪ نسبت هينئن ريت آهي:

(i) $m\angle XYZ = 65°$ ۽ $m\angle PQR = 65°$،

تنهن ڪري $\angle PQR \cong \angle XYZ$

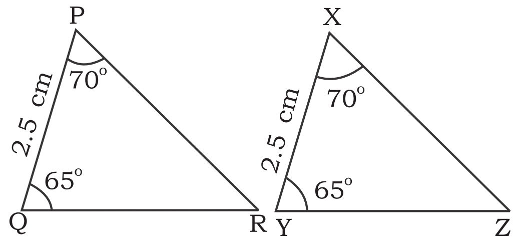
(ii) س م $m\overline{XY} = 2.5$، س م $m\overline{PQ} = 2.5$،

تنهن ڪري $\overline{PQ} \cong \overline{XY}$

(iii) $m\angle YXZ = 70°$ ۽ $m\angle QPR = 70°$،

تنهن ڪري $\angle QPR \cong \angle YXZ$

تنهن ڪري $\Delta PQR \cong \Delta YXZ$



(ASA ≅ ASA)

10.3.4 ٽڪندن جي يڪسان هئڻ جي چوٿين خاصيت (HS ≅ HS)

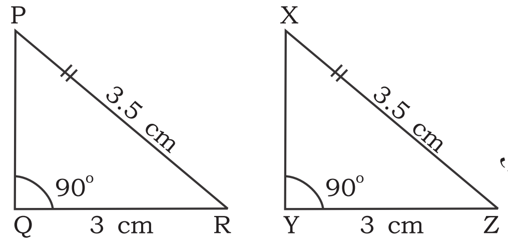
جيڪڏهن هڪ گوني ڪند ٽڪنڊي جو هئپاٽينيوز ۽ سندس هڪ پاسو (ترو يا عمود) يڪسان آهن، ٻئي گوني ڪند ٽڪنڊي جي هئپاٽينيوز ۽ سندس ٻئي نسبتي پاسي جي؛ تہ پوءِ ٻئي گوني ڪند ٽڪنڊا پاڻ ۾ يڪسان ٿيندا.

هاڻي ٻن گوني ڪند ٽڪندن PQR ۽ XYZ تي غور ڪريو.

$$\Delta PQR \longleftrightarrow \Delta XYZ$$

هاڻي ΔPQR جي هڪ – هڪ نسبت ΔXYZ سان هينئن ريت آهي:

(i) $m\angle XYZ = 90°$، $m\angle PQR = 90°$ يعني (گوني ڪند) $\angle PQR \cong \angle XYZ$



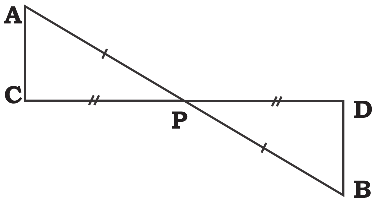
(ii) $m\overline{QR} = 3$ س م، $m\overline{YZ} = 3$ س م،
تنهن ڪري $\overline{QR} \cong \overline{YZ}$

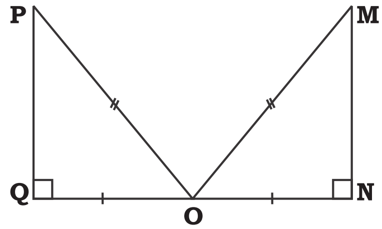
(iii) $m\overline{PR} = 3.5$ س م، $m\overline{XZ} = 3.5$ س م،
تنهن ڪري $\overline{PR} \cong \overline{XZ}$

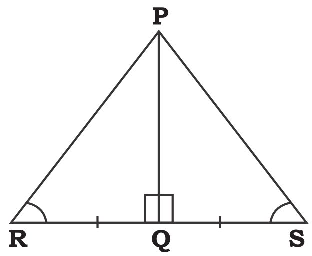
تہ پوءِ $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ (HS $\cong$ HS)

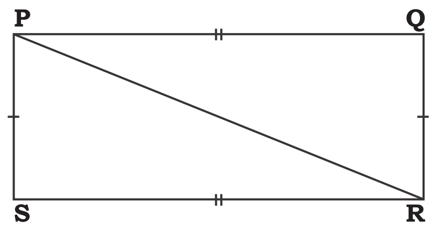
مشق 10.4

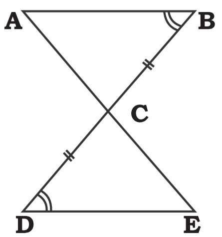
هيٺ ڏنل شڪلين ۾ انهن جا يڪسان حصا، ساڳين نشانن سان ظاهر ڪيل آهن. اوهان هاڻي اُهي يڪسان حصا ترتيبوار لکو ۽ پوءِ ٻڌايو تہ ڪهڙي خاصيت مطابق اهي ٽڪنڊا پاڻ ۾ يڪسان ٿيندا.

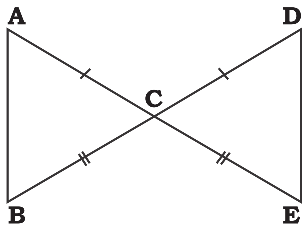
1.


2.


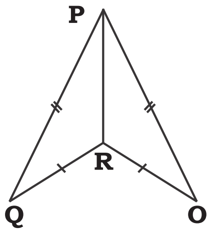
3.


4.


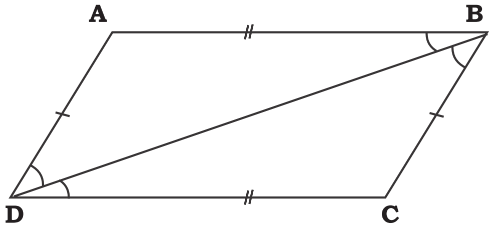
5.


6.


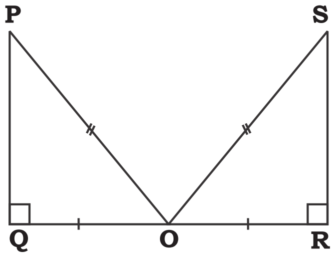
7.



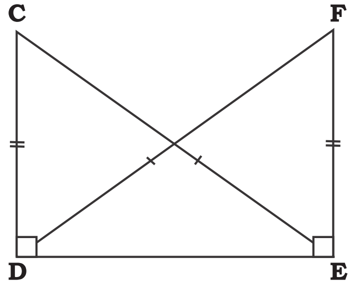
8.



9.



10.



10.4 گول (Circle)

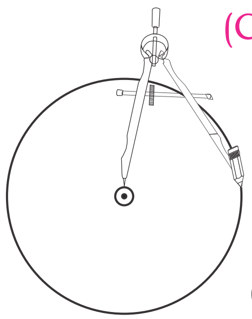
10.4.1 هڪ گول ۽ اُن جي هيٺين حصن متعلق بيان ڏيڻ:

گول جو مرڪز، گول جو نيم قطر، قطر، زهه، قوس، وڏي حصي وارو قوس، ننڍي حصي وارو قوس، اڌ گول ۽ گول جو ٽُڪر

اسان پهريائين ئي گول جي متعلق اڳين ڪلاس ۾ پڙهي آيا آهيون. گول عام ۽ تمام گهڻي مشهور جاميٽريءَ جي شڪل آهي. هڪ چوڙي گول کي ظاهر ڪري ٿي، هڪ رپئي جو سڪو، 2 رپئي جو سڪو ۽ 5 رُپين جو سڪو گول کي ظاهر ڪن ٿا.

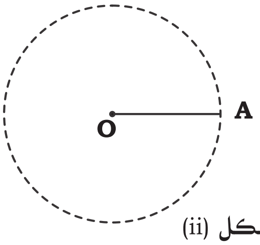
(i) هڪ گول ۽ اُن جو مرڪز (Circle and its centre)

ڪاغذ تي هڪ ٽبڪو O لڳايو. پلڪار ۾ پينسل وجهي ڪوليو. اُن جي لوهي چُهنب کي ٽبڪي O تي رکي، پلڪار جي پينسل واري پاسي کي گُهمايو. ڏسندا ته اسان کي هڪ گول شڪل ملندي. ٽُبڪي O کي گول جو مرڪز چئبو.


شڪل (i)

ان طرح گول ۾ فقط اُهي ٽبڪا اچي وڃن ٿا، جيڪي هڪ ٽبڪي کان: هڪ جيتري مفاصلي تي آهن. انهيءَ کي گول جو مرڪز چئجي ٿو.

(ii) گول جو نيم قطر (Radius)

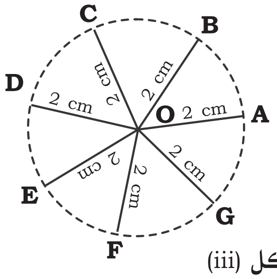


شڪل (ii)

گذريل صفحي تي شڪل (i) ۾ پلڪار جي ٻن ڇُهنبن جي وچ واري مفاصلي کي گول جو نيم قطر چئجي ٿو.

سامهون واري شڪل (ii) ۾، هڪ گول، مرڪز O مان ناهيو ويو آهي. ليڪ ٽڪر جيڪو گول جي مرڪز کي گول جي ڪنهن بہ ٽٻڪي سان ملائي، ان ليڪ ٽڪر کي گول جو نيم قطر چئجي ٿو. $\overline{OA}$، گول جو نيم قطر يا رداس آهي.

'گول جو نيم قطر' دراصل هڪ فاصلي کي ظاهر ڪري ٿو. مثال طور شڪل (iii) ۾ $\overline{OA}$ گول جي نيم قطر جي ڊيگھ ٻڌائي ٿو. يعني گول جو نيم قطر 2 س.م آهي.

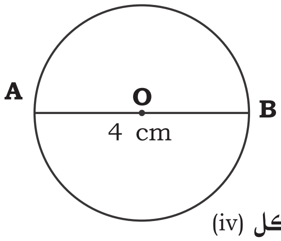


شڪل (iii)

ياد رکو: هڪ گول کي لاتعداد نيم قطر ٿين ٿا.
شڪل (iii) ۾ سڀ نيم قطر ڊيگھ ۾ برابر آهن.

$$m\overline{OA} = m\overline{OB} = m\overline{OC} = m\overline{OD} = m\overline{OE} = m\overline{OF} = m\overline{OG} = 2\text{ cm.}$$

(iii) قطر (Diameter)



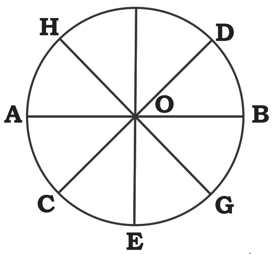
شڪل (iv)

هڪ ليڪ ٽڪر، جيڪو گول جي ڪن بہ ٻن ٽٻڪن کي پاڻ ۾ ملائي ۽ گول جي مرڪز مان گذري، اُن کي گول جو قطر چئجي ٿو. گول جي قطر کي ليڪ ٽڪر سان ظاهر ڪريون ٿا، جيڪو پڻ مفاصلو آهي.

مثال طور: شڪل (iv) ۾ $\overline{AB}$ گول جو قطر آهي.
هتي گول جي قطر جو مفاصلو 4 س م آهي.

ياد رکو: گول جو قطر مرڪز مان گذري ٿو ۽ اهو ماپ ۾ نيم قطر کان ٻيڻو آهي.

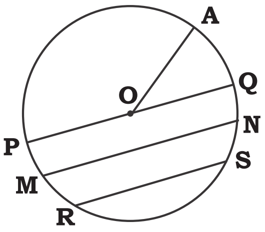
هڪ گول کي لاتعداد قطر ٿين ٿا ۽ اِهي سڀ قطر ماپ ۾ برابر ٿين ٿا. شڪل (v) مطابق:



شڪل (v)

$$m\overline{AB} = m\overline{CD} = m\overline{EF} = m\overline{GH}$$

(iv) زھ (Chord)

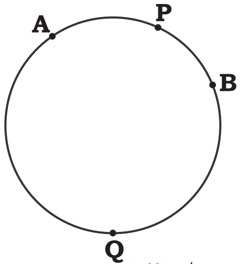


شڪل (vi)

ھڪ ليڪ ٽڪر جيڪو گول جي ڪن بہ ٻن ٽٻڪن کي پاڻ ۾ ملائي، اُن کي گول جو زھ چئجي ٿو.

ياد رکو: ھڪ گول ۾ لاتعداد زھ ٿين ٿا. گول جو ھرھڪ قطر پڻ وڏي ۾ وڏو زھ آھي.

(v) قوس (Arc)

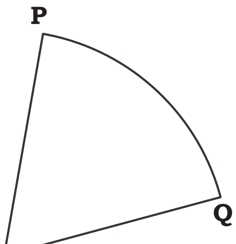


شڪل (vii)

سامھون شڪل (vii) ۾ گول شڪل تي غور ڪريو. اِن گول شڪل تي ڪي بہ ٽٻڪا A ۽ B ونو. اِھي بہ ٽٻڪا گول کي ٻن حصن ۾ ورھائن ٿا. ھرھڪ حصو گول جو قوس آھي. ٽٻڪا A ۽ B ھرھڪ قوس جا ڇيڙا آھن. اِن ڪري ھڪ قوس کي نالو ڏيڻ لاءِ ٽي اکر استعمال ڪريون ٿا.

سامھون شڪل (vii) ۾ بہ قوس آھن: (i) قوس $\overset{\frown}{APB}$ ۽ (ii) قوس $\overset{\frown}{AQB}$. ان طرح اسان کي ٻن قسمن جا قوس ملن ٿا: (a) ننڍو قوس (b) وڏو قوس.

ننڍو قوس: گول جو اُھو قوس، جيڪو پنھنجي اڌ گول کان ننڍو آھي، اُن کي ننڍو قوس چئجي ٿو. مٿي ڏنل شڪل (vii) ۾ $\overset{\frown}{APB}$ ننڍو قوس آھي، جنھن کي $\overset{\frown}{AB}$ سان بہ ظاھر ڪجي ٿو. ان طرح ننڍي قوس کي اُن جي فقط ٻن ڇيڙن جي نالن سان ظاھر ڪيو وڃي ٿو.

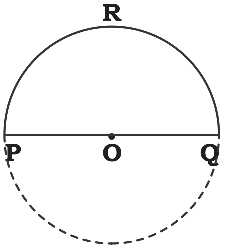


شڪل (viii)

وڏو قوس: گول جو اُھو قوس جيڪو پنھنجي اڌ گول کان وڏو آھي، اُن کي وڏو قوس چئجي ٿو. مٿي ڏنل شڪل (vii) ۾ $\overset{\frown}{AQB}$ وڏو قوس آھي.

سيڪٽر: اچو تہ گول جي ڪنھن بہ توري علائقي کي ڪٽي، گول کان ڌار ڪريون. اِھو اسان کي گولائي شڪل ۾ ملندو، جيئن شڪل (viii) ۾ ڏيکاريل آھي. اِھو گول جو ھڪ ٽڪر، سيڪٽر کي ظاھر ڪري ٿو. سيڪٽر ۾ ھڪ قوس ۽ بہ نيم قطر ٿين ٿا يعني $\overset{\frown}{PQ}$ ھڪ قوس آھي، $\overline{OP}$ ۽ $\overline{OQ}$ بہ نيم قطر يا رداس آھن.

(vi) اڌ گول (Semi Ciircle)

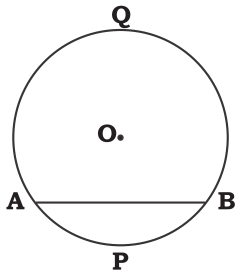


شڪل (ix)

ھي گول جو پورو پورو اڌ ٿئي ٿو.

سامھون ڏنل شڪل ۾ $\overset{\frown}{PRQ}$ گول جو اڌ آھي.

(vii) گول جو ٽُڪر (Segment of a Circle)



شڪل (x)

گول جو ٽُڪر هڪ اهڙي شڪل آهي، جنهن جي چوڌاري گول جو هڪ قوس ۽ هڪ زهه ٺئي ٿو.

مثال: گول جو هڪ زهه عام طور تي گول کي ٻن مختلف ماپن جي گول ٽُڪرن ۾ ورهائي ٿو. ننڍي گول ٽُڪر کي گول جو ننڍو ٽُڪر (Minor Segment of a circle) چئون ٿا جڏهن ته وڏي گول ٽڪر کي گول جو وڏو ٽُڪر (Major segment of a circle) چئجي ٿو.

سامهون ڏنل شڪل (x) کي ڏسو. اِن ۾ $\overline{AB}$ گول جو زهه آهي. اِهو زهه $\overline{AB}$، گول کي ٻن حصن ۾ ورهائي ٿو. هرهڪ حصو گول جو ٽُڪر سڏجي ٿو. اُهو ٽڪر جيڪو گول جي ننڍي قوس $\overset{\frown}{APB}$ ۽ زهه $\overline{AB}$ سان نهي، اُهو گول جو ننڍو ٽڪر سڏجي ٿو. اهڙي طرح اُهو ٽڪر جيڪو گول جي وڏي قوس $\overset{\frown}{AQB}$ ۽ زهه $\overline{AB}$ سان نهي، اُن کي گول جو وڏو ٽڪر سڏجي ٿو.

مشق 10.5

مناسب لفظ وجهي هينيان خال ڀريو:

1- گول تي ٻن ٽٻڪن کي ملائيندڙ هڪ ليڪ ٽڪر گول جو __________ آهي.

2- گول جي مرڪز ۽ گول جي ڪنهن بہ ٽٻڪي جي وچ واري مفاصلي کي __________ سڏجي ٿو.

3- اهو ليڪ ٽڪر جيڪو گول جي مرڪز کي، گول جي ڪنهن بہ ٽٻڪي سان ملائي، اُن کي __________ سڏجي ٿو.

4- گول جا سڀ ٽٻڪا، گول جي __________ کان هڪ جيتري فاصلي تي آهن.

5- اُهو زهه جيڪو گول جي مرڪز مان گذري اُن کي __________ سڏجي ٿو.

6- گول جو قطر، گول جي __________ مان گذري ٿو. اُن جي ڊيگهہ گول جي نيم قطر کان __________ ٺئي ٿي.

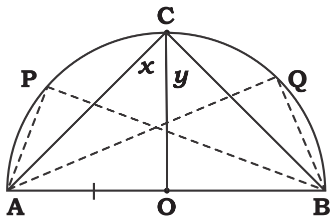
7- گول جو وڏي ۾ وڏو زهه، گول جو __________ آهي.

8- ڪنهن بہ گول جا نيم قطر ڳُڇپ ۾ __________ ٽين تا ۽ اُهي ڊيگهہ ۾ __________ ٽين تا.

9- گول جو رداس (Radius)، گول جي قطر جو __________ ٿئي ٿو.
10- ڪنهن به مليل گول جا قطر گِڏپ ۾ __________ آهن ۽ اُهي سڀ ڏيکاريل ۾ __________ تين تا.

10.4.2 هڪ اڌ گول ناهيو ۽ هن خاصيت جو مشاهدو ڪريو ته اڌ گول ۾ نهندڙ هرهڪ ڪند، گوني ڪند ٿئي ٿي.

اچو ته هن ڳالهه جو مشاهدو ڪريون ته اڌ گول ۾ نهندڙ ڪند هميشه گوني ڪند ٿئي ٿي.



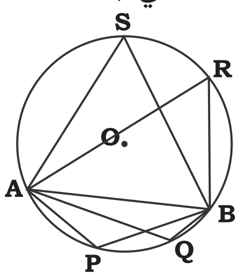
مناسب رداس سان، هڪ اڌ گول ڪڍو. اُن جي مرڪز کي نالو O ڏيو. $\overline{AB}$ قطر ناهيو، جيڪو مرڪز O مان گُذري. قطر $\overline{AB}$ کي، ٽڪنڊي جو هڪ پاسو بڻايو. ٽِبڪن A ۽ B مان ٽڪنڊي جا ٻيا به پاسا $\overline{AC}$ ۽ $\overline{BC}$ اهڙي طرح ناهيو، جيئن ٻئي گول جي گهيري تي هڪ ٽبڪي C تي پاڻ ۾ ملن. اهڙي طرح ΔABC نهندو، جنهن ۾ ٽبڪو C ٽڪنڊي جي چوٽي آهي. هاڻي ڪند ماپ جي مدد سان، نهيل ٽڪنڊي جي ڪند، $\angle ACB$ جي ماپ لهو. ڏسنداسين ته $m\angle ACB = 90°$ يعني $\angle ACB$ هڪ گوني ڪند آهي.

هاڻي وري ٻيا به ٽبڪا P ۽ Q اڌ گول تي ونو. ٽڪنڊا APB ۽ AQB ناهيو. $\angle APB$ ۽ $\angle AQB$ جي ماپ، ڪند ماپ سان لهو. اسان ڏسنداسين ته $m\angle APB = m\angle AQB = 90°$.

ان طرح اها ڳالهه ثابت ٿي ته هرهڪ اڌ گول ۾، نهندڙ ڪابه ڪند، گوني ڪند ٿئي ٿي.

10.4.3 گول جو ٽڪر (Segment of a circle) ناهيو ۽ هن خاصيت جو مشاهدو ڪريو ته ساڳي گول جي ٽڪر ۾ نهندڙ ڪندون، پاڻ ۾ يڪسان ٿين ٿيون

اچو ته هن خاصيت جو مشاهدو ڪريون ته ’ساڳي گول ٽڪر ۾ جيڪي به ڪندون نهن ٿيون، اُهي پاڻ ۾ يڪسان آهن.‘



مشاهدي جا ڏاڪا:

i- مناسب رداس سان هڪ گول ناهيو.
ii- گول جو زهه $\overline{AB}$ اهڙي طرح ناهيو، جيئن اهو گول جو قطر نه ٿئي.

iii- ڏسنداسين ته اسان کي ٻه گول جا ٽُڪر ملندا: (i) ننڍو گول جو ٽڪر
(ii) وڏو گول جو ٽڪر

iv- گول جي ننڍي ٽُڪر ۾ ٻه اندريون ڪنڊون $\angle APB$ ۽ $\angle AQB$، اسڪيل جي مدد سان ناهيو.

v- هاڻي انهن کي ڪند ماپ جي مدد سان ماپيو. اسان ڏسنداسين ته:
$m\angle APB = m\angle AQB$

vi- اهڙي طرح ٻيهر وري ٻيون ٻه ڪنڊون $\angle ASB$ ۽ $\angle ARB$، اسڪيل جي مدد سان گول جي وڏي ٽڪر ۾ ناهيو.

vii- انهن ٻنهي ڪنڊن کي، ڪند ماپ جي مدد سان ماپيو. ڏسنداسين ته $m\angle ASB = m\angle ARB$

انهيءَ مان اهو نتيجو نڪتو ته گول جي هرهڪ ننڍي ٽڪر (چاهي وڏي ٽڪر) ۾ ٺهندڙ ڪندون، پاڻ ۾ يڪسان ٿين ٿيون.

مشق 10.6

1- ٻه مختلف ماپ جا اڌ گول ناهيو. فرض ڪريو هڪ 2.5 س م رداس سان ۽ ٻيو وري 3 س م رداس سان. هرهڪ اڌ گول ۾ ڪاٻه ڪند ناهيو ۽ ماپ ڪري تصديق ڪريو ته اها ڳوني ڪند آهي.

2- هڪ اڌ گول 3.3 س م رداس سان ناهيو ۽ اڌ گول جي هن خاصيت جو مشاهدو ڪريو ته: 'اڌ گول ۾ ٺهندڙ هرهڪ ڪند جي ماپ °90 ٿئي ٿي'.

3- هڪ گول 2.7 س م رداس سان ناهيو. هن خاصيت جو مشاهدو ڪريو ته: 'گول جي ساڳين ٽُڪرن ۾ ٺهندڙ ڪندون ماپ ۾ پاڻ ۾ برابر يعني يڪسان ٿين ٿيون'.

4- هڪ گول 2.8 س م رداس سان ناهيو. هرهڪ گول جي ٽڪر چاهي وڏي يا ننڍي ۾ ٻه ٻه ڪندون ناهيو. چڪاس ڪريو ته: 'ساڳي گول ٽڪر ۾ ٺهندڙ ڪندون ماپ ۾ پاڻ ۾ برابر يعني يڪسان ٿين ٿيون'.

5- هڪ گول 3.4 س م رداس سان ناهيو. گول جي ساڳين ٽُڪرن ۾ اسڪيل جي مدد سان ڪندون ناهيو ۽ چڪاس ڪريو ته: 'اهي ڪندون ماپ ۾ برابر آهن'.

جائزي واري مشق 10

1- ير وارين ڪندن جي وصف لکو ۽ شڪل جي مدد سان ير وارين ڪندن جا جوڙا ناهي ڏيکاريو.

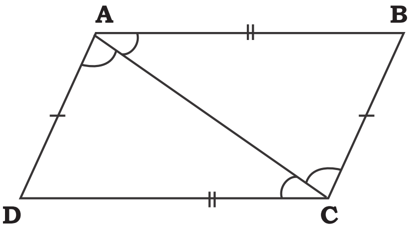
2- ڪامپليمينٽري ۽ سپليمينٽري ڪندن جي وصف لکو. شڪل جي مدد سان ڪامپليمينٽري ۽ سپليمينٽري ڪندن جا جوڙا ناهي ڏيکاريو.

3- آمهون سامهون چوٽيءَ واريون ڪندون ڇا آهن؟ شڪل جي مدد سان ٻه جوڙا آمهون سامهون چوٽيءَ وارين ڪندن جا ناهي ڏيکاريو.

4- هڪ جهڙيون شڪليون ڇا آهن؟ شڪل جي مدد سان ناهي ڏيکاريو ۽ ان جي نشانين ۾ پڻ لکو.

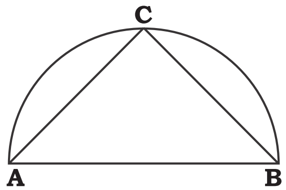
5- يڪسان شڪليون ڇا آهن؟ شڪل جي مدد سان ناهي ڏيکاريو ۽ انهن جي نشانين ۾ پڻ لکو.

6- گول جي هڪ شڪل ناهيو. انهيءَ گول ۾ مرڪز، رداس (نيم قطر)، قطر، زهه، ننڍو قوس، وڏو قوس نالا ڏيئي هرهڪ ظاهر ڪريو. اڌ گول ۽ گول جو ٽڪر پڻ شڪل جي مدد سان ڏيکاريو.



7- ABCD هڪ پورروچوٽ چوڪندو آهي، جنهن ۾ $\overline{AC}$ هڪ اُريب (Diagonal) آهي. ان طرح سان نهندڙ ٻن ٽڪنڊن جي يڪسان ٿيڻ جون مختلف خاصيتون بيان ڪريو.

8- هڪ اڌ گول 3.3 س م رداس سان ناهيو. اڌ گول جي ان خاصيت جو مشاهدو ڪريو ته: 'اڌ گول ۾ ڪاٻه نهندڙ ڪند گوني ڪند ٿئي ٿي'.



9- هڪ اڌ گول 4.4 س م رداس سان ناهيو. ان ۾ هڪ ٽڪنڊو ΔABC ناهيو، جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي. نهيل ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪندن جي ماپ، ڪند ماپ سان لهو. ڇا ڪند ∠ABC هڪ گوني ڪند آهي؟

10- هڪ گول 3.6 س م رداس سان ناهيو. گول جو ٽڪر ناهيو ۽ هن خاصيت جو مشاهدو ڪريو ته:'گول جي ننڍي ٽڪر ۾ نهندڙ سڀ ڪندون پاڻ ۾ برابر ٿين ٿيون'.

11- هڪ گول 4 س م رداس سان ناهيو. گول ۾ هڪ زهه اهڙي طرح ناهيو جيڪو گول جو قطر نه هجي. هن خاصيت جو مشاهدو ڪريو ته: 'گول جي وڏي ٽڪر ۾ نهندڙ ٻه ڪندون ماپ ۾ پاڻ ۾ برابر يعني يڪسان آهن'.

12- هيٺيان خال ڀريو:

(i) اُهي ڪندون جنهن ۾ هڪ چوٽي ۽ هڪ پاسو عام آهي اُهي ______ ڪندون آهن.

(ii) جيڪڏهن ٻن ڪندن جو جوڙ 90° آهي ته اُهي ڪندون ______ سڏبيون.

(iii) ٻه هڪ جهڙيون شڪليون تڏهن سڏبيون، جڏهن اُهي ______ ۽ ______ آهن.

(iv) جيڪڏهن ٻه سڌيون ليڪون پاڻ ۾ هڪ ٻئي کي هڪ ٽٻڪي تي ڪپين ٿيون ته اُهي نهندڙ ______ ڪندون آهن ۽ پاڻ ۾ ______ ٿين ٿيون.

(v) هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ ______ ۽ هڪ پاسو (پايو يا عمود) يڪسان آهي ته ٻئي گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي ______ ۽ نسبتي پاسي جي ته ٽڪنڊا ______ ٿيندا.

خلاصو

- ٻه ڪندون پر واريون سڏبيون، جيڪڏهن انهن کي هڪ چوٽي ۽ هڪ پاسو عام آهي.
- جيڪڏهن ٻن ڪندن جو جوڙ 90° آهي ته اُهي ڪامپليمينٽري ڪندون سڏبيون. هرهڪ ڪند ٻئي جي ڪامپليمينٽ آهي.
- جيڪڏهن ٻن ڪندن جو جوڙ 180° آهي ته اُهي سپليمينٽري ڪندون آهن. هرهڪ ڪند ٻئي جي سپليمينٽ آهي.
- ٻه سڌيون ليڪون پاڻ ۾ هڪ ٻئي کي هڪ ٽٻڪي تي ڪپين ته اهڙي طرح ٺهندڙ ڪندون آمهون سامهون واريون چوٽيءَ واريون ڪندون آهن.
- ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪندن جو جوڙ 180° ٿئي ٿو. انهيءَ خاصيت جي مدد سان ٽڪنڊي ۾ اڻ ڄاتايل ڪندن جي ماپ معلوم ڪري سگهون ٿا.
- جاميٽريءَ جون اُهي شڪليون جيڪي شڪل شبيهه ۾ بلڪل ساڳيون آهن ۽ اُهي ماپ ۾ به هڪ جيتريون آهن ته انهن کي يڪسان شڪليون چئجي ٿو. شڪلين کي يڪسان لکڻ لاءِ نشاني ≅ استعمال ڪريون ٿا.
- جاميٽريءَ جون اُهي شڪليون جيڪي شڪل شبيهه ۾ بلڪل ساڳيون آهن، اُنهن کي هڪ جهڙيون شڪليون چئجي ٿو. هڪجهڙين شڪلين کي لکڻ لاءِ نشاني ~ استعمال ڪريون ٿا.
- ٻه ٽڪنڊا پاڻ ۾ يڪسان ٿڌهن ٿيندا، جڏهن هينئن مان ڪابه هڪ خاصيت لاڳو ٿئي:
  - (a) پاسو – پاسو – پاسو ≅ پاسو – پاسو – پاسو (SSS ≅ SSS)
  - (b) پاسو – ڪند – پاسو ≅ پاسو – ڪند – پاسو (SAS ≅ SAS)
  - (c) ڪند – پاسو – ڪند ≅ ڪند – پاسو – ڪند (ASA ≅ ASA)
  - (d) هيپاٽينيوز – پاسو ≅ هيپاٽينيوز – پاسو (HS ≅ HS)
- گول جاميٽريءَ جي بنيادي عام سجاتل شڪل آهي. اها هڪ ڪاغذ تي اهڙيءَ طرح چوڏاري پينسل گهمائڻ سان ناهي سگهجي ٿي ته جيئن سندس مفاصلو هڪ خاص ٽٻڪي کان هڪ جيترو رهي.

•••

يونٽ 11

عملي جاميٽري

11.1 ليڪ ٽڪر

شڪل (i)

شڪل (ii)

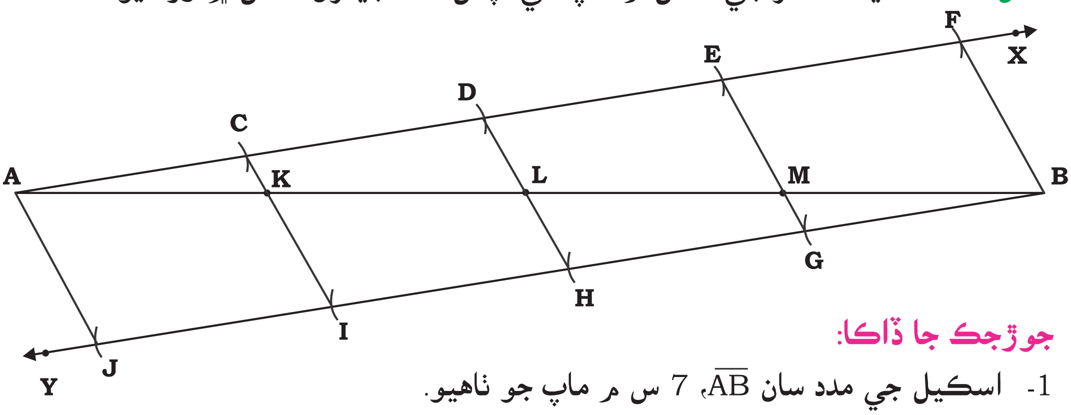
اسان پڙهي آيا آهيون ته ليڪ کي ڪيترو به اڳتي يا پوئتي وڌائي سگهجي ٿو. هتي شڪل (i) ۾ $\overleftrightarrow{AB}$ هڪ ليڪ آهي. ليڪ کي ڪوبه ڇيڙو نه ٿو ٿئي.

ليڪ جي ڪجهه حصي کي ليڪ ٽڪر چئجي ٿو. هتي شڪل (ii) ۾ $\overline{CD}$ هڪ ليڪ ٽڪر آهي. ليڪ ٽُڪر کي ٻه ڇيڙا ٿين ٿا، تنهن ڪري ليڪ ٽڪر کي ڊيگهه ٿئي ٿي.

جاميٽريءَ ۾ **'Construction'** جي معنيٰ آهي جوڙجڪ يعني مليل مواد مان صحيح ۽ مڪمل طور تي شڪل ناهڻ. اسان کي انهيءَ تعليم جي ضرورت زندگيءَ جي هر موڙ ۾ پوي ٿي. اِهو هُنر حاصل ڪرڻ لاءِ اسان سڪنداسين ته ڪيئن شڪليون ناهي سگهجن ٿيون. اِن ڪم ۾ اسڪيل، سيٽ اسڪوائر، پلڪار (ڪمپاس)، ڪند ماپ وغيره استعمال ڪنداسين.

11.1.1 هڪ مليل ليڪ ٽڪر کي ڪنهن خاص تعداد ۾ هڪ جيترن حصن ۾ ورهائڻ

مثال 1: هڪ ليڪ ٽڪر جي 7 س م ماپ ڪري، ڇئن هڪ جيترن حصن ۾ ورهايو.



جوڙجڪ جا ڏاڪا:

1- اسڪيل جي مدد سان $\overline{AB}$، 7 س م ماپ جو ناهيو.

2- ڪند ماپ جي مدد سان $\overline{AB}$ تي ٽپڪي A وٽ هڪ سوڙهي ڪند $\angle BAX$ ناهڻ لاءِ مناسب ماپ (فرض ڪيو $40°$) جي نشان سان $\overrightarrow{AX}$ ناهيو.

3- ساڳي طرح وري بيهر ڪنڊ ماپ جي مدد سان، $\overline{AB}$ سان، ٽبڪي B تي به ساڳي ماپ جي سوڙهي ڪنڊ ABY ناهڻ لاءِ °40 جي نشان سان $\overrightarrow{BY}$ اهڙي طرح ناهيو جو:

$$m\angle ABX = m\angle ABY = 40^\circ$$

4- پلڪار جي استعمال سان $\overrightarrow{AX}$ تي چار قوس مناسب ماپ تي هڪ جيتري رداس سان، اهڙي طرح ناهيو جو، $\overrightarrow{AX}$ کي ٽبڪن C، D، E ۽ F تي ڪٽي.

5- ساڳي طرح پلڪار جي استعمال سان $\overline{BY}$ تي چار قوس ساڳي رداس جا اهڙي طرح ناهيو جو $\overrightarrow{BY}$ کي ٽبڪن G، H، I ۽ J تي ڪٽي.

6- ٽبڪن A کي J سان، C کي I سان، D کي H سان، E کي G سان ۽ F کي B سان ترتيبوار ملائي $\overline{AJ}$، $\overline{CI}$، $\overline{DH}$، $\overline{EG}$ ۽ $\overline{FB}$ اهڙي طرح ناهيو جو مليل $\overline{AB}$ کي ٽبڪن A، K، L، M ۽ B تي ڪٽي.

7- اهڙي طرح مليل $\overline{AB}$ گهربل ڇئن هڪ جيترن حصن ۾ ورهائجي ويندو يعني:

$$m\overline{MB} = m\overline{LM} = m\overline{KL} = m\overline{AK}$$

11.1.2 هڪ ليڪ ٽڪر کي اندروني طور تي مليل نسبت ۾ ورهائڻ

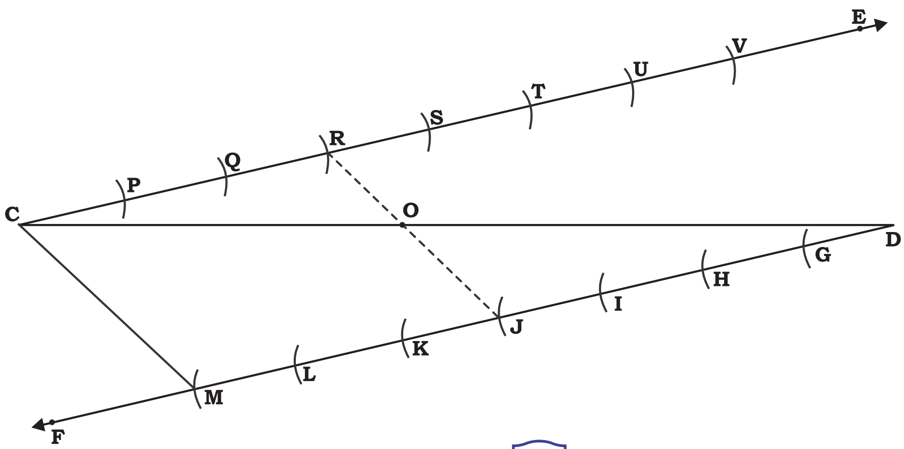
مثال 1: هڪ ليڪ ٽڪر $\overline{CD}$، 7 س م ماپ جو ونو ۽ اُن کي 3:4 نسبت ۾ ورهايو.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

1- هڪ ليڪ ٽڪر CD، 7 س م ماپ جو ناهيو.

2- ڪنڊ ماپ جي مدد سان، $\overline{CD}$ تي، ٽبڪي C وٽ هڪ سوڙهي ڪنڊ $\angle DCE$ ناهڻ لاءِ مناسب ماپ (فرض ڪريو °40) جي نشان سان $\overrightarrow{CE}$ ناهيو.

3- ساڳي طرح وري بيهر ڪنڊ ماپ جي مدد سان، $\overline{CD}$ جي مخالف پاسي، ٽبڪي D وٽ هڪ سوڙهي ڪنڊ $\angle CDF$ ناهڻ لاءِ مناسب ماپ (فرض ڪريو °40) جي نشان سان $\overrightarrow{DF}$ اهڙي طرح ناهيو جو: $m\angle DCE = m\angle CDF = 40^\circ$



4- پلڪار جي استعمال سان $\overrightarrow{CE}$ تي ست (7 = 3+4) نسبتن جو جوڙ قوس مناسب ماپ پر هڪ جيتري رداس جا اهڙي طرح ناهيو جو $\overrightarrow{CE}$ کي ٽبڪن P، Q، R، S، T، U ۽ V تي ڪپين.

5- ساڳي طرح پلڪار جي مدد سان $\overrightarrow{DF}$ تي به ست قوس ساڳي رداس سان، اهڙي طرح ناهيو جو $\overrightarrow{DF}$ کي ٽبڪن G، H، I، J، K، L ۽ M تي ڪپين.

6- ٽبڪي C کان پوءِ ٽئين نمبر ٽبڪي R تي، ٽبڪي جو نشان ڏيو.

7- ٽبڪي D کان پوءِ چوٿين نمبر ٽبڪي J تي، ٽبڪي جو نشان ڏيو.

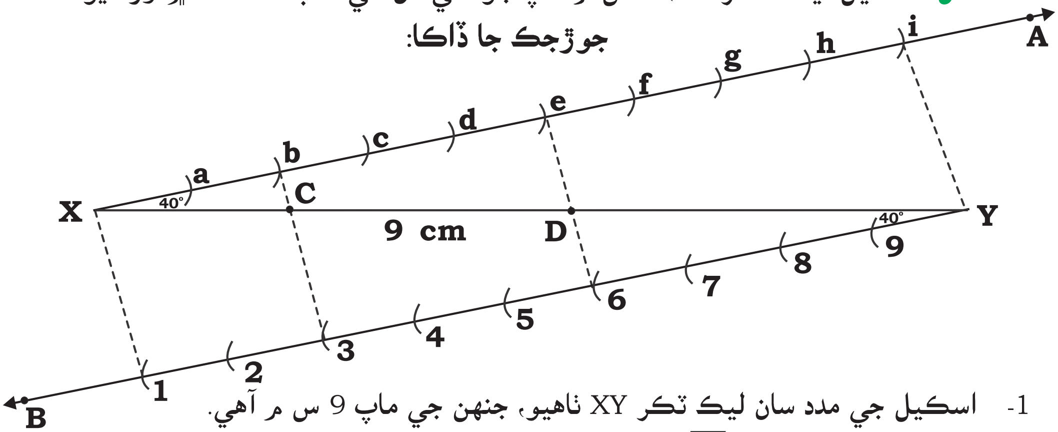
8- هاڻي ٽبڪا R ۽ J پاڻ ۾ ملائي $\overline{RJ}$ ناهيو، جيڪو $\overline{CD}$ کي ٽبڪي O تي ڪپي.

9- ان طرح اسان کي حاصل ٿيندو: $\overline{CO} : \overline{OD} = 3:4$

مطلب ته مليل $\overline{CD}$ جيڪو 7 س م ماپ جو آهي، اُهو گهربل نسبت 3:4 ۾ ٽبڪي O وٽ ورهائجي ويو. يعني $m\overline{CO} : m\overline{OD} = 3:4$

مثال 2: مليل ليڪ ٽڪر XY، 9 س م ماپ جو آهي. اُن کي نسبت 2:3:4 ۾ ورهايو.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:



1- اسڪيل جي مدد سان ليڪ ٽڪر XY ناهيو، جنهن جي ماپ 9 س م آهي.

2- ڪنڊ ماپ جي مدد سان $\overline{XY}$ تي ٽبڪي X وٽ سوڙهي ڪنڊ YXA (فرض ڪريو 40°) جي نشان سان $\overrightarrow{XA}$ ناهيو.

3- ساڳي طرح وري بيهر ڪنڊ ماپ جي مدد سان $\overline{XY}$ جي مخالف پاسي ٽبڪي Y وٽ ساڳي ماپ جي بي هڪ سوڙهي ڪنڊ XYB، شعاع YB سان اهڙي طرح ناهيو، جو : $m\angle YXA = m\angle XYB = 40°$.

4- پلڪار جي مدد سان $\overrightarrow{XA}$ تي نو (2+3+4=9) يعني نسبتن جو جوڙ قوس مناسب پر هڪ جيتري رداس سان ناهيو، جيڪي $\overrightarrow{XA}$ کي ٽبڪن a، b، c، d، e، f، g، h ۽ i تي ڪپين ٿا.

5- هاڻي وري به پلڪار جي مدد سان ۽ ساڳي رداس سان نو بيا قوس $\overrightarrow{YB}$ تي ڪيو، جيڪي $\overrightarrow{yB}$ کي ٽبڪن 9، 8، 7، 6، 5، 4، 3، 2 ۽ 1 تي ڪپيندا.

6- هاڻي ٽبڪن b کي 3 سان ۽ e کي 6 سان ملايو، جيڪو $\overline{XY}$ کي ٽبڪن C ۽ D تي ڪٽي ٿو.

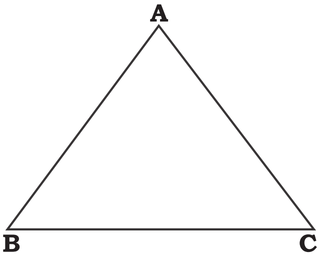
7- ان طرح مليل Xy گهربل ٽن نسبتي حصن 2:3:4 ۾ ورهائجي ويندو.

مطلب ته $m\overline{XC} : m\overline{CD} : m\overline{DY} = 2:3:4$

مشق 11.1

-1 هڪ ليڪ ٽڪر جنهن جي ماپ 6 س م آهي، اُن کي ٽن هڪ جيترن حصن ۾ ورهايو.
-2 ڏنل ماپ واري هڪ ليڪ ٽڪر س م $m\overline{AB} = 7.5$ کي پنجن برابر حصن ۾ ورهايو.
-3 ڏنل ماپ واري هڪ ليڪ ٽڪر س م $m\overline{CD} = 9$ کي ڇهن برابر حصن ۾ ورهايو.
-4 هڪ ليڪ ٽڪر جنهن جي ماپ 5 س م آهي، اُن کي 2:3 نسبت ۾ ورهايو.
-5 هڪ ليڪ ٽڪر جنهن جي ماپ 8.4 س م آهي، اُن کي 1:5 نسبت ۾ ورهايو.
-6 ڏنل ماپ واري هڪ ليڪ ٽڪر س م $m\overline{MN} = 7$ کي 3:5 نسبت ۾ ورهايو.
-7 مليل ماپ واري هڪ ليڪ ٽڪر 6.6 س م کي 1:2:3 نسبت ۾ ورهايو.
-8 ڏنل ماپ واري هڪ ليڪ ٽڪرس م $m\overline{XY} = 7$ کي 2:2:3 نسبت ۾ ورهايو.
-9 هڪ ليڪ ٽڪر جنهن جي ماپ 8.4 س م آهي، اُن کي 4:2:1 نسبت ۾ ورهايو.

11.2 ٽڪنڊا



اسان کي ڄاڻ آهي ته هڪ ٽڪنڊي کي ٽي پاسا ۽ ٽي ڪنڊون ٿين ٿيون.
سامهون هڪ ٽڪنڊي ABC جي شڪل ڏنل آهي، جنهن ۾ $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ ۽ $\overline{CA}$ ٽڪنڊي جا ٽي پاسا آهن.
$\angle A$، $\angle B$ ۽ $\angle C$ ٽڪنڊي جون ٽي ڪنڊون آهن.
هڪ ٽڪنڊو ناهڻ لاءِ اسان کي گهٽ ۾ گهٽ اُن جي ٽن جزن جي ڄاڻ هئڻ گهرجي.
اچو ته هاڻي هڪ ٽڪنڊي ناهڻ جي ڪجهه وڌيڪ طريقن جي سکيا ڪريون.

11.2.1 هڪ ٽڪنڊو ناهيو، جڏهن سندس احاطو (پيريميٽر) ۽ اُن جي ٽن پاسن جي ماپن جي پاڻ ۾ نسبت مليل آهي

مثال 1: هڪ ٽڪنڊو ABC ناهيو، جڏهن سندس احاطو (پيريميٽر) 9 س م آهي ۽ اُن جي ٽنهي پاسن جي ماپن ۾ نسبت 1:2:3 آهي.

مليل: ABC هڪ ٽڪنڊو آهي، جنهن جو احاطو (پيريميٽر) 9 س م آهي. ٽڪنڊي جي ٽنهي پاسن جي ماپن جي پاڻ ۾ نسبت آهي: $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 1:2:3$

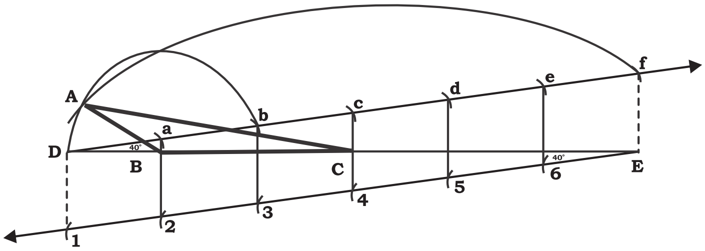
گهربل: مليل مواد مان ΔABC ناهڻ.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

-1 اسڪيل جي مدد سان ليڪ ٽڪر $\overline{DE}$، ٽڪنڊي جي احاطي (پيريميٽر) جي ماپ جيترو يعني 9 س م ناهيو.
-2 $\overline{DE}$ کي اُن جي مليل نسبت 1:2:3 ۾ ورهايو. اِن طرح اسان کي ٽنهي پاسن جي ماپ ملندي يعني: $m\overline{AB} = m\overline{DB}$ (ننڍي ۾ ننڍو پهريون پاسو) $m\overline{BC} = m\overline{BC}$ ٻيو پاسو ۽ $m\overline{CA} = m\overline{CE}$ (وڏي ۾ وڏو ٽيون پاسو)

-3 پلڪار جي مدد سان ٽپڪي B کي مرڪز وٺي، $m\overline{DB}$ جيتري ماپ جي رداس سان هڪ قوس ڪڍو.

-4 ٽپڪي C کي مرڪز وٺي، $m\overline{CE}$ جيتري ماپ جي رداس سان هڪ ٻيو قوس اهڙي طرح ڪڍو، جيڪو پهرين قوس کي ٽپڪي A وٽ ڪپي.



-5 ٽپڪي A کي B سان ۽ ٽپڪي A کي C سان ملائي $\overline{AB}$ ۽ $\overline{AC}$ ناهيو.

ان طرح اسان کي گهربل ٽڪنڊو ABC ملندو، جنهن جو احاطو (پيريميٽر) 9 س م ۽ سندس پاسن جي ڏيگهه ۾ نسبت 1:2:3 آهي.

مثال 2: هڪ ٻيور پاسو ٽڪنڊو ناهيو، جنهن جو احاطو (پيريميٽر)10.5 س م آهي ۽ سندس پاسن جي نسبت 2:3:3 آهي.

مليل: ΔPQR هڪ ٻيور پاسو ٽڪنڊو آهي. اُن جو احاطو (پيريميٽر)10.5 س م آهي. اُن جي پاسن جي ڏيگهه ۾ نسبت 2:3:3 آهي.

گهربل: مليل مواد مان ΔPQR هڪ ٻيور پاسو ٽڪنڊو ناهيو.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

-1 اسڪيل جي مدد سان 10.5 س م ماپ جو هڪ ليڪ ٽڪر $\overline{XY}$ ڪڍو.

-2 $\overline{XY}$ کي نسبت 2:2:3 ۾ اهڙي طرح ورهايو جيئن اسان کي ٽڪنڊي جا ٽي پاسا ترتيبوار $\overline{XP}$، $\overline{PQ}$ ۽ $\overline{QY}$ ملن.

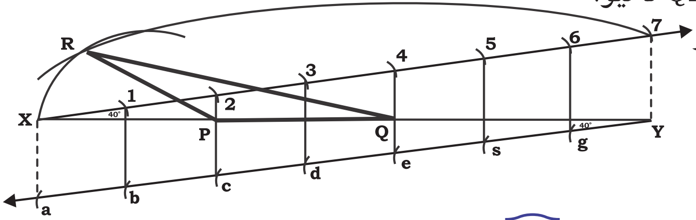
-3 پلڪار جي مدد سان ٽپڪي P کي مرڪز وٺي، $m\overline{XP}$ جيتري ماپ جي رداس سان هڪ قوس ڪڍو.

-4 ٽپڪي Q کي مرڪز وٺي، $m\overline{QY}$ جيتري ماپ جي رداس سان هڪ ٻيو قوس، اهڙي طرح ڪڍو، جيئن پهرين قوس کي ٽپڪي R وٽ ڪپي.

-5 ٽپڪي P کي R سان ملائي $\overline{PR}$ ناهيو.

-6 ٽپڪي R کي Q سان ملائي $\overline{QR}$ ناهيو.

-7 ان طرح اسان کي گهربل ٻيور پاسو ٽڪنڊو PQR ملندو.



مشق 11.2

هيٺ ڏنل ماپن سان ٽڪنڊا ناهيو:

1- هڪ ٽڪنڊو ABC ناهيو، جنهن جي پاسن جي ڊيگهه ۾ نسبت 1:2:3 آهي ۽ احاطو (پيريميٽر) 9.6 س م آهي.
2- هڪ ٽڪنڊو DEF آهي، جنهن جو احاطو (پيريميٽر) 8.4 س م آهي ۽ سندس پاسن جي ڊيگهه ۾ نسبت 2:3:3 آهي.
3- هڪ ٽڪنڊو LMN آهي جنهن جو احاطو (پيريميٽر) 90 ملي ميٽر آهي ۽ سندس پاسن جي ڊيگهه ۾ نسبت 2:3:4 آهي.
4- هڪ ٽڪنڊو PQR آهي، جنهن جي پاسن جي ڊيگهه ۾ نسبت 5:3:2 آهي ۽ احاطو (پيريميٽر) 10 س م آهي.
5- هڪ ٽڪنڊو XYZ آهي، اُن جي پاسن جي ڊيگهه ۾ نسبت 3:3:2 آهي ۽ سندس احاطو (پيريميٽر) 88 ملي ميٽر آهي.

11.2.2 ٽيور پاسو ٽڪنڊو ناهڻ

(a) ٽيور پاسو ٽڪنڊو ناهيو جڏهن اُن جي ٽري واري پاسي جي ماپ مليل آهي

اسان کي ڄاڻ آهي ته جڏهن ڪنهن ٽڪنڊو جا ٽيئي پاسا يڪسان آهن ته اُهو ٽڪنڊو ٽيور پاسو ٽڪنڊو سڏبو.

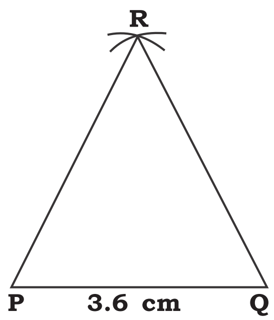
ٽيور پاسو ٽڪنڊو هميشه سوڙهي ڪند ٽڪنڊو ٿئي ٿو. اُن جون ٽيئي ڪندون سوڙهيون ۽ يڪسان ٿين ٿيون. يعني اُن جي هرهڪ ڪند $60°$ جي ٿئي ٿي.

مثال: هڪ ٽيور پاسو ٽڪنڊو PQR ناهيو،جنهن جي ٽري واري پاسي جي ڊيگهه 3.6 س م آهي.

مليل: ΔPQR هڪ ٽيور پاسو ٽڪنڊو آهي. اُن جي ٽري واري پاسي جي ڊيگهه 3.6 س م آهي.

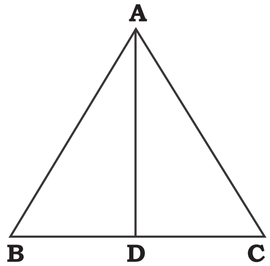
گهربل: ٽيور پاسو ٽڪنڊو ΔPQR ناهيو، جنهن جا ٽيئي پاسا يڪسان آهن.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:



1- هڪ ليڪ ٽڪر PQ ناهيو،جنهن جي ماپ 3.6 س م آهي.
2- ٽبڪي P کي مرڪز وٺي 3.6 س م رداس سان هڪ قوس ڪڍو.
3- بيهر وري ٽبڪي Q کي مرڪز وٺي،3.6 س م رداس سان هڪ ٻيو قوس ڪڍو، جيڪو پهرين قوس کي ٽبڪي R وٽ ڪپي.
4- ٽبڪن P ۽ R کي ملائي $\overline{PR}$ ناهيو.
5- ٽبڪن Q ۽ R کي ملائي $\overline{QR}$ ناهيو.
6- ان طرح ٽيور پاسو ٽڪنڊو PQR ٺهندو جنهن جو هرهڪ پاسو 3.6 س م ماپ جو آهي.

(b) هڪ ٽيور پاسو ٽڪنڊو ناهيو، جڏهن اُن جي عمودي اوچائي مليل آهي.



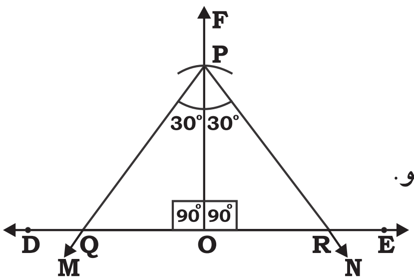
ٽڪنڊي جي عمودي اوچائي هڪ عمودي ليڪ ٽڪر آهي، جيڪو ٽڪنڊي جي چوٽيءَ مان نڪري، ٽڪنڊي جي ٽري ٽائين پهچي ٿو. سامهون شڪل ۾ ΔABC هڪ ٽيور پاسو ٽڪنڊو آهي جنهن ۾ $\overline{AD}$ عمودي فاصلو، ٽڪنڊي جي پايي $\overline{BC}$ تي آهي.

نشانين ۾ لکنداسين: $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ۽ پڙهنداسين: $\overline{AD}$ عمودي اوچائي آهي ٽيور پاسي ٽڪنڊي ABC جي پايي $\overline{BC}$ تي.

ياد رکو: ٽيور پاسي ٽڪنڊي ۾ چوٽيءَ مان نڪتل عمود، اُن جي پايي واري پاسي ۽ چوٽيءَ واري ڪنڊکي اڌو اڌ ڪري ٿو. ٽيور پاسي ٽڪنڊي جي هرهڪ ڪنڊ $60°$ جي ٿئي ٿي.

مثال: هڪ ٽيور پاسو ٽڪنڊو PQR ناهيو، جڏهن $\overline{PO} \perp \overline{QR}$ ۽ س م $m\overline{PO} = 4.3$.

مليل: ΔPQR هڪ ٽيور پاسو ٽڪنڊو آهي، جنهن ۾ $\overline{PO}$ عمودي اوچائي آهي يعني: $\overline{PO} \perp \overline{QR}$ ۽ س م $m\overline{PO} = 4.3$.



گهربل: هڪ ٽيور پاسو ٽڪنڊو PQR ناهيو.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

1- اسڪيل جي مدد سان ليڪ DE مناسب ماپ جي ناهيو.

2- ڪوبہ ٽٻڪو O، ليڪ DE تي وٺو.

3- ڪنڊ ماپ جي مدد سان، $\overrightarrow{OF} \perp \overline{DE}$ تي ناهيو.

4- ٽٻڪي O کي مرڪز وٺي، رداس 4.3 س م سان هڪ قوس ناهيو، جيڪو $\overrightarrow{OF}$ کي ٽٻڪي P تي ڪپي. اِن طرح $\overline{OP}$ هڪ عمود آهي.

5- اسان کي ڄاڻ آهي تہ ٽيور پاسي ٽڪنڊي جي هرهڪ ڪنڊ $60°$ جي ٿئي ٿي ۽ ٽيور پاسي ٽڪنڊي جو عمود سندس چوٽيءَ واري ڪنڊ کي اڌو اڌ ڪري ٿو. ڪنڊ ماپ جي مدد سان ٽٻڪي P مان $\overline{OP}$ جي ٻنهي طرفن ۾ $30°$، $30°$ جون بہ ڪنڊون، اهڙي طرح ناهيو جو: $m\angle OPM = m\angle OPN = 30°$

6- ڏسون ٿا تہ $\overrightarrow{PM}$ ڪٽي ٿو $\overleftrightarrow{DE}$ کي ٽٻڪي Q تي ۽ $\overrightarrow{PN}$ ڪٽي ٿو $\overleftrightarrow{DE}$ کي ٽٻڪي R تي. اهڙي طرح ΔPQR گهربل ٽيور پاسو ٽڪنڊو آهي.

مشق 11.3

1- ٽپور پاسو ٽڪنڊو ٺاهيو،جڏهن ته اُن جي پايي جي ماپ هيٺ ڏنل آهي:

(i) 2.9 س م (ii) 3.2 س م (iii) 4.1 س م
(iv) 3.8 س م (v) 2.8 س م (vi) 4.3 س م

2- ٽپور پاسو ٽڪنڊو ٺاهيو، جڏهن ته اُن جي عمودي اوچائيءَ جو فاصلو هيٺ ڏنل آهي:

(i) 3.6 س م (ii) 3.9 س م (iii) 4.3 س م
(iv) 4.5 س م (v) 4.7 س م (vi) 4.8 س م

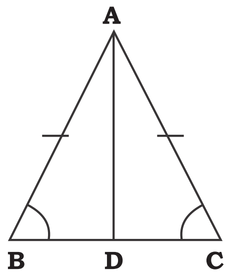
3- **هڪ ٽپور پاسو ٽڪنڊو PQR ٺاهيو، جنهن جي پايي جي ماپ 50 ملي ميٽر آهي.**

4- **هڪ ٽپور پاسو ٽڪنڊو MNO ٺاهيو، جنهن ۾ عمودي اوچائي 36 ملي ميٽر آهي.**

11.2.3 هڪ ٻپور پاسو ٽڪنڊو ٺاهڻ

(a) هڪ ٻپور پاسو ٽڪنڊو ٺاهيو، جڏهن اُن جي پايي جي ماپ ۽ پايي واري هڪ ڪنڊ جي ماپ مليل آهي.

اسان اڳ ۾ پڙهيو آهي ته جڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جا ٻه پاسا پاڻ ۾ يڪسان آهن ته اُهو ٽڪنڊو ٻه پور پاسو ٽڪنڊو سڏبو.



سامهون شڪل ۾ ABC هڪ ٻپور پاسو ٽڪنڊو آهي، جنهن ۾ $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ ۽ پڻ $m\angle ABC \cong m\angle ACB$.

اِن طرح ٻپور پاسي ٽڪنڊي ۾ ٻن يڪسان پاسن کي ٻپور پاسي ٽڪنڊي جون ٻه ٻانهون سڏجي ٿو، جڏهن ته ٽئين پاسي کي ٻپور پاسي ٽڪنڊي جو پايو سڏجي ٿو.

اسان ٻپور پاسو ٽڪنڊو ٺاهي سگهون ٿا، جڏهن اُن جي پايي جي ماپ ۽ پايي وارين ٻن ڪندن جي ماپ مليل هجي.

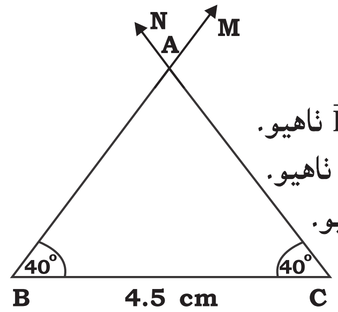
اسان کي ڄاڻ آهي ته ٻپور پاسي ٽڪنڊي ۾ ٻه پاسا يڪسان ٿين ٿا. تنهن ڪري يڪسان پاسن سان لاڳاپيل ٻه ڪندون به پاڻ ۾ يڪسان ٿين ٿيون.

مثال: هڪ ٻپور پاسو ٽڪنڊو ABC ٺاهيو، جنهن جي پايي جي ماپ 4.5 س م ۽ اُن جي پايي واري ڪند °40 آهي.

مليل: ΔABC مليل ٻيور پاسو ٽڪنڊو آهي، جنهن ۾ $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ ۽ $m\angle ABC = 40^\circ$.

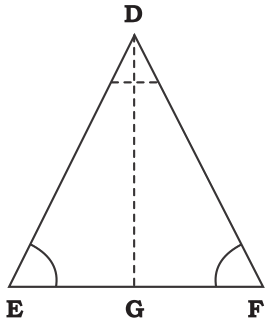
گهربل: هڪ ٻيور پاسو ٽڪنڊو ΔABC ناهيو.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:



1- اسڪيل جي مدد سان 4.5 س م ماپ جو هڪ ليڪ ٽڪر $\overline{BC}$ ناهيو.
2- ڪنڊ ماپ جي مدد سان، ٽٻڪي B تي 40° جي ڪنڊ $\angle CBN$ ناهيو.
3- ڪنڊ ماپ جي مدد سان ٽٻڪيCتي40° جي ڪنڊ $\angle BCM$ ناهيو.
4- ڏسون ٿا ته ٻنهي ڪندن جون ٻه ٻانهون $\overrightarrow{BM}$ ۽ $\overrightarrow{CN}$ پاڻ ۾ هڪ ٻئي کي ٽٻڪي A تي ڪپين ٿيون.
5- اهڙي طرح ΔABC هڪ گهربل ٻيور پاسو ٽڪنڊو آهي.

(b) هڪ ٻيور پاسو ٽڪنڊو ناهڻ، جڏهن اُن جي چوٽيءَ واري ڪند ۽ عمود جي ماپ مليل آهي.



سامهون ڏنل شڪل کي ڏسو. اِهو هڪ ٻيور پاسو ٽڪنڊو DEF آهي، جنهن ۾ $m\overline{DF} = m\overline{DE}$ ۽ $m\angle DFE = m\angle DEF$ (جيڪي پايي واريون ڪندون) آهن. انهيءَ ٽڪنڊي جي چوٽيءَ واري ڪند $\angle EDF$ آهي جڏهن ته $\overline{DG}$ اُن جو عمود آهي، جيڪو ٽٻڪي D مان $\overline{EF}$ ڏانهن نڪتل آهي. تنهن ڪري: $\overline{DG} \perp \overline{EF}$

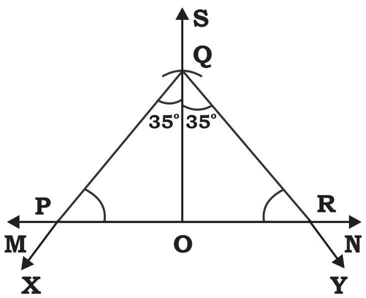
اسان اڳ ۾ اها ڳالهه پڙ سکي آيا آهيون ته ٻيور پاسي ٽڪنڊي ۾ چوٽيءَ مان پايي ڏانهن نڪتل عمود، چوٽيءَ واري ڪند کي اڌو اڌ ڪري ٿو. يعني: $m\angle EDG = m\angle FDG$

مثال: هڪ ٻيور پاسو ٽڪنڊو PQR ناهيو، جنهن ۾ يڪسان پاسا آهن: $\overline{QR} \cong \overline{QP}$ جيڪي ٻيور پاسي ٽڪنڊي جون ٻانهون آهن.$\overline{QO}$ هڪ عمود آهي، جنهن جي ماپ 3.9 س م آهي ۽ اِن جي چوٽيءَ واري ڪند جي ماپ 70° آهي.

مليل: ΔPQR هڪ ٻيور پاسو ٽڪنڊو آهي، جنهن ۾ $m\overline{QR} = m\overline{QP}$، $m\angle PQR = 70^\circ$ ۽ $\overline{QO} \perp \overline{PR}$

گهربل: ٻيور پاسو ٽڪنڊو PQR ناهيو.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:



1- اسڪيل جي مدد سان،هڪ ليڪ $\overleftrightarrow{NM}$ مناسب ڊيگهه جي ناهيو.
2- ليڪ تي ڪوبه ٽٻڪو O ونو.

3- $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{OS}$ تي ناهيو.

4- ٽبڪي O کي مرڪز وٺي، 3.9 س م رداس سان هڪ قوس ڪيو، جيڪو $\overrightarrow{OS}$ کي ٽبڪي O تي ڪٽي.

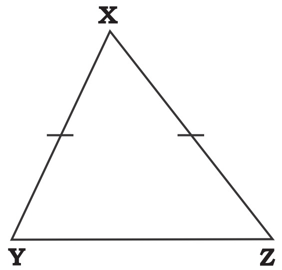
5- جيئن ته چوٽيءَ واري ڪنڊ °70 جي آهي ۽ ٽڪنڊي جو عمود، اِنهيءَ چوٽيءَ واري ڪنڊ کي اڌو اڌ ڪري ٿو، تنهن ڪري عمود $\overline{QO}$ جي ٻنهي پاسي ڪنڊ جي ماپ ٿيندي: $\frac{70}{2}$ =°35.

6- عمود $\overline{QO}$ جي ٻنهي پاسن تي °35 جي ماپ جون ٻه ڪنڊون $\angle OQY$ ۽ $\angle OQX$ ناهيو.

7- فرض ڪيو $\overrightarrow{QX}$ ۽ $\overrightarrow{OM}$ هڪ ٻئي کي ٽبڪي P تي ڪپين ٿا ۽ $\overrightarrow{QY}$ ۽ $\overrightarrow{ON}$ هڪ ٻئي کي ٽبڪي R تي ڪپين ٿا.

8- اهڙي طرح ΔPQR گهربل ٻيور پاسو ٽڪنڊو آهي.

(c) هڪ ٻيور پاسو ٽڪنڊو ناهڻ، جڏهن ٽڪنڊي جي هڪ عمود ۽ سندس پايي واري هڪ ڪنڊ جي ماپ مليل آهي.



سامهون شڪل ۾ هڪ ٻيور پاسو ٽڪنڊو ڏيکاريل آهي.
انهيءَ ٽڪنڊي جون ٻئي پاسون پاڻ ۾ يڪسان آهن
يعني $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$ يا $m\overline{XY} = m\overline{XZ}$
تنهنڪري $m\angle XYZ = m\angle XZY$ يعني پايي واريون ڪندون پاڻ ۾ يڪسان آهن. $(\angle XYZ \cong \angle XZY)$

اسان کي ڄاڻ آهي ته ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪندن جو جوڙ °180 آهي. انهيءَ خاصيت جي وسيلي، اسان سولائيءَ سان ٽڪنڊي جي چوٽيءَ واري ڪند جي ماپ هينئين ريت معلوم ڪري سگهون ٿا:

چوٽيءَ واري ڪند جي ماپ = °180 ڪاٽو [پايي وارين ٻنهي ڪندن جي ماپن جو جوڙ]

مثال: هڪ ٻيور پاسو ٽڪنڊو XYZ ناهيو، جڏهن سندس عمود $\overline{XR}$ جي ماپ 3.8 س م ۽ ان جي پايي واري هڪ ڪند جي ماپ °55 آهي.

مليل: ΔXYZ هڪ ٻيور پاسو ٽڪنڊو آهي، جنهن ۾ $\overline{YZ} \perp \overline{XR}$، $m\overline{XR} = 3.8$ س م ۽

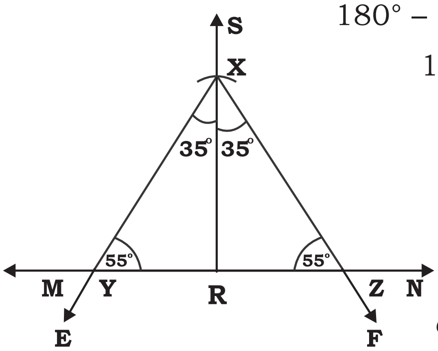
$\angle XYZ \cong \angle XZY$ يا $m\angle XYZ = m\angle XZY = 55°$

گهربل: هڪ ٻيور پاسو ٽڪنڊو XYZ ناهيو.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

پهريائين اسان چوٽيءَ واري ڪند جي ماپ معلوم ڪنداسين.

(ٽڪنڊي جي پايي وارين ٻنهي ڪندن جي ماپن جو جوڙ) – °180 = چوٽيءَ واري ڪند جي ماپ



چوٽيءَ واري ڪنڊ جي ماپ = $180° - (55° + 55°)$

چوٽيءَ واري ڪنڊ جي ماپ = $180° - 110°$

مطلب تہ چوٽيءَ واري ڪنڊ جي ماپ = $70°$

1- اسڪيل جي مدد سان $\overline{MN}$، مناسب ماپ جي ناهيو.

2- $\overleftrightarrow{MN}$ تي ڪوبہ ٽپڪو R وٺو.

3- ($\overrightarrow{RS} \perp \overleftrightarrow{MN}$) تي ڪيو.

4- ٽپڪي R کي مرڪز وٺي، 3.8 س م رداس سان هڪ قوس ڪيو، جيڪو RS کي ٽپڪي X تي ڪپي.

5- ٽپڪي X تي ڪنڊ $\angle RXE$ ناهيو يعني

$$m\angle RXE = \frac{\text{(ٽڪنڊي جي چوٽيءَ واري ڪنڊ جي ماپ)}}{2} = \frac{70°}{2} = 35°$$

6- ساڳي طرح ٽپڪي X تي $\angle RXF$ ناهيو يعني:

$$m\angle RXF = \frac{\text{(ٽڪنڊي جي چوٽيءَ واري ڪنڊ جي ماپ)}}{2} = \frac{70°}{2} = 35°$$

7- ڏسون ٿا تہ $\overrightarrow{XE}$، ليڪ $\overleftrightarrow{MN}$ کي، Y ٽپڪي تي ڪپي ٿو.

8- $\overrightarrow{XF}$، ليڪ $\overleftrightarrow{MN}$ کي Z ٽپڪي تي ڪپي ٿو.

9- اهڙي طرح ΔXYZ گهربل پيور پاسو ٽڪنڊو حاصل ٿئي ٿو.

مشق 11.4

1- هيٺ ڏنل مواد مان پيور پاسا ٽڪنڊا ناهيو.

(i) پايو = 4.2 س م ۽ پايي واري ڪنڊ = $42°$

(ii) پايو = 4.8 س م ۽ پايي واري ڪنڊ = $48°$

(iii) پايو = 38 ملي ميٽر ۽ پايي واري ڪنڊ = $38°$

(iv) پايو = 45 ملي ميٽر ۽ پايي واري ڪنڊ = $45°$

2- هيٺيان پيور پاسا ٽڪنڊا ناهيو، جڏهن اِنهن جي چوٽيءَ واري ڪنڊ جي ماپ ۽ عمود جي ڊيگهہ مليل آهي:

(i) چوٽيءَ واري ڪنڊ جي ماپ = $76°$ ۽ عمود = 4 س م

(ii) چوٽيءَ واري ڪنڊ جي ماپ = $80°$ ۽ عمود = 5 س م

(iii) چوٽيءَ واري ڪنڊ جي ماپ = $90°$ ۽ عمود = 5.3 س م

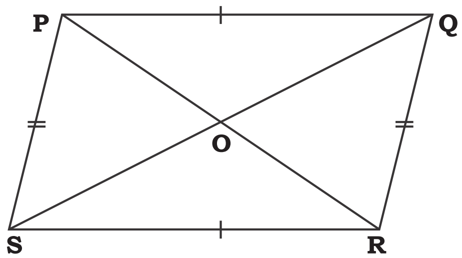
(iv) چوٽيءَ واري ڪنڊ جي ماپ = $100°$ ۽ عمود = 60 ملي ميٽر

3- هيٺيان ٻپور پاسا ٽڪنڊا ٺاهيو، جڏهن عمودي اوچائي ۽ پايي واري ڪنڊ جي ماپ مليل آهي.

(i)	عمودي اوچائي = 4.5 س م ،	پايي واري ڪنڊ = 54°
(ii)	عمودي اوچائي = 39 ملي ميٽر،	پايي واري ڪنڊ = 65°
(iii)	عمودي اوچائي = 4.7 س م ،	پايي واري ڪنڊ = 70°
(iv)	عمودي اوچائي = 59 ملي ميٽر،	پايي واري ڪنڊ = 75°

11.3 پورروچوٽ پاسو چوڪندو

پورروچوٽ پاسو چوڪندو، هڪ چوڪندي شڪل ٿئي ٿي، جنهن جا آمهون سامهون وارا پاسا يڪسان ۽ پورروچوٽ ٿين ٿا.



سامهون شڪل کي ڏسو.

PQRS هڪ پورروچوٽ پاسو چوڪندو آهي،

جنهن ۾ $\overline{SR} \parallel \overline{PQ}$ ۽ $\overline{QR} \parallel \overline{PS}$.

$\overline{SR} \cong \overline{PQ}$ ۽ $\overline{QR} \cong \overline{PS}$. $\overline{PR}$ ۽ $\overline{QS}$ اُريب (Diagonals) آهن.

خاصيتون:

(i) پورروچوٽ پاسي چوڪندي جا اُريب هڪ ٻئي کي اڌو اڌ ڪن ٿا. يعني $\overline{PR}$ ۽ $\overline{QS}$ هڪ ٻئي کي اڌو اڌ ڪن ٿا. مطلب ته $\overline{RO} \cong \overline{PO}$، $\overline{QO} \cong \overline{SO}$.

(ii) $\overline{PQ}$ ۽ $\overline{QR}$ ٻه پر وارا پاسا آهن. $\angle PQR$ مٿي ڄاڻايل پر وارن پاسن جي وچ واري ڪنڊ آهي. ساڳي طرح $\overline{QR}$ ۽ $\overline{SR}$ ٻه پر وارا پاسا آهن. $\angle SRQ$ اِنهن ٻنهي پر وارن پاسن جي وچ واري ڪنڊ آهي.

(iii) پورروچوٽ پاسي چوڪندي جون آمهون سامهون واريون ڪنڊون يڪسان آهن.

يعني: $\angle PQR \cong \angle PSR$، $\angle SRQ \cong \angle SPQ$

11.3.1 پورروچوٽ پاسو چوڪندو ناهڻ

I. هڪ پورروچوٽ پاسو چوڪندو ناهيو، جڏهن اُن جي ٻن پر وارن پاسن ۽ اِنهن جي وچ واري ڪنڊ جي ماپ مليل آهي.

اسان ڪي هتي پورروچوٽ پاسو چوڪندو ناهڻو آهي، جنهن جي ٻن پر وارن پاسن ۽ اُنهن جي وچ واري ڪنڊ جي ماپ مليل آهي.

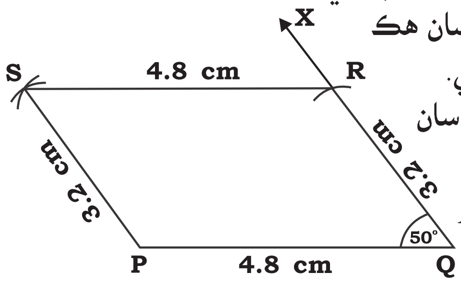
مثال: هڪ پورروچوٽ پاسو چوڪندو PQRS ناهيو، جنهن ۾ $m\overline{PQ} = 4.8$ س.م، $m\overline{QR} = 3.2$ س.م ۽ $m\angle PQR = 50°$

مليل: PQRS هڪ پورروچوٽ پاسو چوڪندو آهي جنهن ۾ $m\overline{PQ} = 4.8$ س.م، $m\overline{QR} = 3.2$ س.م ۽ $m\angle PQR = 50°$

گهربل: مليل مواد مان پورروچوٽ پاسو چوڪندو ناهيو.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

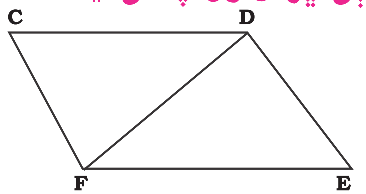
1- هڪ ليڪ ٽڪر $\overline{PQ}$، 4.8 س.م ماپ جو اسڪيل سان ناهيو.
2- ٽٻڪي Q تي ڪنڊ PQX، 50° جي ماپ جي، ڪنڊ ماپ جي مدد سان ناهيو.
3- ٽٻڪي Q کي مرڪز وٺي ۽ 3.2 س.م رداس سان هڪ قوس ڪڍو، جيڪو $\overrightarrow{QX}$ کي ٽٻڪي R تي ڪپي.



4- ٽٻڪي R کي مرڪز وٺي، 4.8 س.م رداس سان هڪ قوس ڪڍو.
5- هاڻي وري ٽٻڪي P کي مرڪز وٺي، 3.2 س.م رداس سان هڪ ٻيو قوس ڪڍو، جيڪو پهرين قوس کي ٽٻڪي S تي ڪپي.
6- ٽٻڪن P ۽ S کي پاڻ ۾ ملائي $\overline{PS}$ ناهيو.
7- ٽٻڪن R ۽ S کي پاڻ ۾ ملائي $\overline{RS}$ ناهيو.

انهيءَ طرح نهيل شڪل PQRS هڪ پورروچوٽ پاسو چوڪندو آهي.

II- هڪ پورروچوٽ پاسو چوڪندو ناهيو، جڏهن ٻن پر وارن پاسن ۽ هڪ اُريب جي ماپ مليل آهي.



پورروچوٽ پاسي چوڪندي CDEF تي غور ڪريو، جنهن ۾ $\overline{DF}$ اُريب آهي ۽ $\overline{CD}$، $\overline{CF}$ ٻه پر وارا پاسا آهن. اسان پورروچوٽ پاسو چوڪندو CDEF ناهي سگهون ٿا، جڏهن اُن جي اُريب $\overline{FD}$ ۽ ٻن پر وارن پاسن $\overline{CF}$ ۽ $\overline{CD}$ جي ماپ مليل آهي.

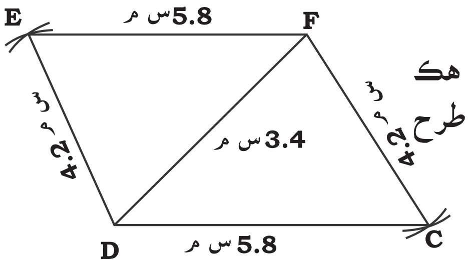
مثال: هڪ پورروچوٽ پاسو چوڪندو CDEF ناهيو، جنهن ۾ هڪ اُريب جي ماپ $m\overline{DF} = 5.8$ س.م ۽ ٻن پر وارن پاسن جي ماپ $m\overline{DE} = 3.4$ س.م ۽ $m\overline{EF} = 4.2$ س.م مليل آهي.

مليل: پورروچوٽ پاسو چوڪندو CDEF ناهيو، جنهن ۾ ٻن پر وارن پاسن جي ماپ $m\overline{EF} = 4.2$ س.م، $m\overline{DE} = 3.4$ س.م ۽ اِنهيءَ چوڪندي جي هڪ اُريب جي ماپ آهي $m\overline{DF} = 5.8$ س.م.

گهربل: مليل مواد مان پورروچوٽ پاسو چوڪندو CDEF ناهيو.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

-1 هڪ اُريب $\overline{DF}$ مليل ماپ 5.8 س م جو اسڪيل جي مدد سانترڇو ڪري ناهيو.



-2 ٽبڪي D کي مرڪز وٺي، 3.4 س م رداس سان هڪ قوس، اُريب $\overline{DF}$ جي متين پاسي ڪيو.

-3 ٽبڪي F کي مرڪز وٺي، 4.2 س م رداس سان هڪ ٻيو قوس، اُريب $\overline{DF}$ جي متين پاسي، اِهڙي طرح پايو، جيئن پهرين قوس کي ٽبڪي E وٽ ڪپي.

-4 ٽبڪن D ۽ E کي پاڻ ۾ ملائي $\overline{DE}$ ناهيو.

-5 ٽبڪن E ۽ F کي پاڻ ۾ ملائي $\overline{EF}$ ناهيو.

-6 هاڻي وري ٽبڪي D کي مرڪز وٺو ۽ 4.2 س م رداس جو هڪ قوس اُريب $\overline{DF}$ جي هينين پاسي ناهيو.

-7 وري ٻيهر ٽبڪي F کي مرڪز وٺو ۽ 3.4 س مرداس سان ٻيو قوس، اُريب $\overline{DF}$ جي هينين پاسي اِهڙي طرح ناهيو، جيئن پهرين قوس کي ٽبڪي C تي ڪپي.

-8 ٽبڪن D ۽ E کي پاڻ ۾ ملائي $\overline{ECD}$ ناهيو.

-9 ٽبڪن E ۽ F کي پاڻ ۾ ملائي $\overline{ECF}$ ناهيو.

-10 اِن ريت اسان کي گهربل چوڪندو CDEF ملندو.

مشق 11.5

A. هيٺيان پورروچوٽ پاسا چوڪندا ناهيو، جڏهن ٻن پر وارن پاسن جي ماپ ۽ اُنهن ٻنهي پاسن جي وچ ۾ اينڊز وچين ڪند جي ماپ مليل آهي.

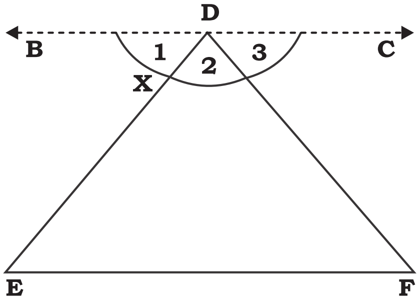
.1 PQRS هڪ چوڪندو آهي، جنهن ۾ $m\overline{PQ} = 5.9$ س م، $m\overline{QR} = 4.1$ س م ۽ $m\angle PQR = 65°$.

2. پوروچوٽ پاسو چوڪندو CDEF، جنهن ۾ ملي ميٽر $m\overline{CD} = 63$،
ملي ميٽر $m\overline{DE} = 39$ ۽ $m\angle CDE = 70°$
3. پوروچوٽ پاسو چوڪندو ABCD، جنهن ۾ س م $m\overline{AB} = 6.6$، س م $m\overline{AD} = 4$
۽ $m\angle BAD = 50°$
4. پوروچوٽ پاسو چوڪندو RSTU، جنهن ۾ ملي ميٽر $m\overline{RS} = 70$،
ملي ميٽر $m\overline{ST} = 45$ ۽ $m\angle RST = 80°$
5. پوروچوٽ پاسو چوڪندو ACEG، جنهن ۾ س م $m\overline{AC} = 7.5$، س م $m\overline{CE} = 3.4$
۽ $m\angle ACE = 75°$
6. پوروچوٽ پاسو چوڪندو LMNO، جنهن ۾ س م $m\overline{ON} = 6$، س م $m\overline{MN} = 3.5$
۽ $m\angle MNO = 55°$

B. هيٺيان پوروچوٽ پاسا چوڪندا ٺاهيو، جنهن ۾ ٻن پير وارن پاسن ۽ هڪ اُريب جي ماپ مليل آهي.

1. پوروچوٽ پاسو چوڪندو ABCD، س م $m\overline{BC} = 6$، س م $m\overline{CD} = 4$ ۽
س م $m\overline{BD} = 7.3$
2. پوروچوٽ پاسو چوڪندو BDFH، ملي ميٽر $m\overline{BD} = 50$، ملي ميٽر $m\overline{BH} = 30$ ۽
ملي ميٽر $m\overline{HD} = 64$
3. پوروچوٽ پاسو چوڪندو ACEG، س م $m\overline{AC} = 6.6$، س م $m\overline{AG} = 3.3$ ۽
س م $m\overline{CG} = 7.9$
4. پوروچوٽ پاسو چوڪندو PQRS، س م $m\overline{RS} = 4.8$، س م $m\overline{RQ} = 2.9$ ۽
س م $m\overline{SQ} = 7$
5. پوروچوٽ پاسو چوڪندو RSTU، م م $m\overline{RS} = 59$، م م $m\overline{ST} = 36$ ۽
س م $m\overline{TR} = 7.5$
6. پوروچوٽ پاسو چوڪندو UVWX، س م $m\overline{UX} = 7$، س م $m\overline{UV} = 5$ ۽
س م $m\overline{VX} = 9$

11.3.2 (a) مشاهدو ڪري ثابت ڪريو ته ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪنڊن جو جوڙ 180° آهي.



مليل: DEF هڪ ٽڪندو آهي.
(i) $\angle DEF$, (ii) $\angle DFE$ and (iii) $\angle EDF$.
ΔDEF ۾ ٽي ڪندون آهن:

$$m\angle DEF + m\angle DFE + m\angle EDF = 180°.$$

گهربل مشاهدو:
مليل ΔDEF جي ٽنهي ڪندن جو جوڙ 180° آهي.
يعني اسان کي ثابت ڪرڻو آهي ته:

ثابتيءَ جا ڏاڪا:

ڏاڪو 1: $\overline{EF} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ اهڙي طرح ناهيو، جيئن اِها ٽپڪي D مان گذري.

ڏاڪو 2: پوروچوٽ ليڪن جي خاصيتن مطابق:

(a) $m\angle BDE = m\angle DEF$ يا $\angle 1 \cong \angle E$

(b) $m\angle CDF = m\angle DFE$ يا $\angle 3 \cong \angle F$

ڏاڪو 3: مليل ٽڪنڊي جي شڪل مان اِهو صاف ظاهر آهي ته:

$$m\angle DEF + m\angle EDF + m\angle DFE = m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3$$

يا $m\angle E + m\angle D + m\angle F = m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3$

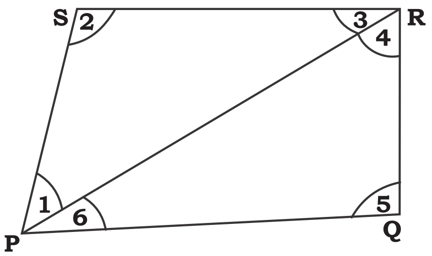
ڏاڪو 4: اسان کي ڄاڻ آهي ته هڪ سڌي ليڪ تي ٺهندڙ ڪندون، سپليمينٽري ڪندون آهن.

يعني: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$

تنهنڪري: $m\angle D + m\angle E + m\angle F = m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$

اِن ريت اِن ڳالهه جي تصديق ٿي ته هڪ ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪندن جو جوڙ 180° آهي.
هاڻي اسان پيا به ڪيترا ئي ٽڪنڊا ناهيون، اِنهن جي ٽنهي ڪندن جي ماپ، ڪند ماپ سان ماپيو، پوءِ اُنهن کي جوڙ ڪري اِنهيءَ ڳالهه جي تصديق ڪري سگهون ٿا ته هرهڪ ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪندن جو جوڙ هميشه 180° ٿئي ٿو.

11.3.2 (b) مشاهدو ڪري ثابت ڪريو ته چوڪندي جي چئني ڪندن جو جوڙ 360° ٿئي ٿو.



مليل: PQRS هڪ چوڪندو آهي. مليل چوڪندي PQRS جون چارئي ڪندون هن ريت آهن:

(i) $\angle SPQ$ (ii) $\angle PQR$ (iii) $\angle QRS$ ۽

(iv) $\angle RSP$ يا $\angle P$، $\angle Q$، $\angle R$ ۽ $\angle S$

اسان کي تصديق ڪرڻي آهي ته:

$$m\angle SPQ + m\angle PQR + m\angle QRS + \angle RSP = 360^\circ$$

يا $m\angle P + m\angle Q + m\angle R + m\angle S = 360^\circ$

گهربل ثابتي: مليل چوڪندي PQRS جي چئني ڪندن جي ماپن جو جوڙ 360° آهي.

ثابتيءَ جا ڏاڪا:

ڏاڪو 1: پهريائين متي مليل چوڪندي PQRS جي ٽپڪن R ۽ P کي ملائي، چوڪندي PQRS جي اُريب $\overline{RP}$ ناهيو.

ڏاڪو 2: چوڪندي PQRS جي اُريب $\overline{RP}$ نهڻ سان، چوڪندي PQRS کي ٻن ٽڪنڊن ΔPSR ۽ ΔPQR ۾ ورهائي ٿو.

ڏاکو3: اسان کي ڄاڻ آهي ته هڪ ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪندن جو جوڙ 180° ٿئي ٿو.
اِنهيءَ ڪري چوڪنڊي جي سين ئي ڪندن جو جوڙ آهي:
(ٽڪنڊي PSR جي ٽن ڪندن جو جوڙ) + (ٽڪنڊي PQR جي ٽن ڪندن جو جوڙ)
ڏاکو4: ٽڪنڊي PSR ۾ اسان ڏسون ٿا ته:

$$m\angle SPR + m\angle PSR + m\angle SRP = 180^\circ$$

يا $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$ -------------------- (A)

ساڳي طرح ٽڪنڊي PQR ۾ اسان ڏسون ٿا ته:

$$m\angle QPR + m\angle PRQ + m\angle PQR = 180^\circ$$

يا $m\angle 6 + m\angle 4 + m\angle 5 = 180^\circ$ -------------------- (B)

هاڻي اسان چوڪنڊي PQRS جي سيني ڪندن جو جوڙ لهون ٿا.
نتيجن (A) ۽ (B) کي گڏ ڪندي، اسان کي ملي ٿو:

يا $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 6 + m\angle 4 + m\angle 5 = 180^\circ + 180^\circ$

يا $m\angle 1 + m\angle 6 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 = 360^\circ$

يا $m\angle P + m\angle S + m\angle R + m\angle Q = 360^\circ$

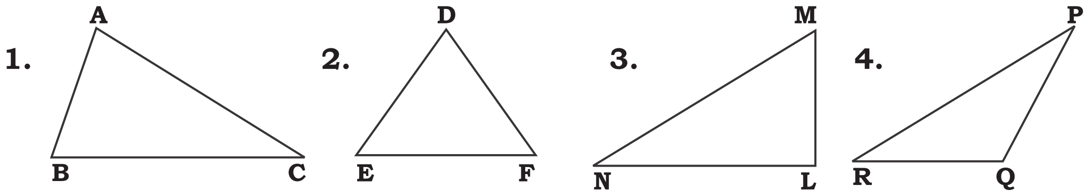
يا $m\angle P + m\angle Q + m\angle R + m\angle S = 360^\circ$

انهيءَ طرح هن ڳالهه جي تصديق ٿي ته چوڪنڊي PQRS جي چئن ئي ڪندن جو جوڙ 360° آهي.

اسان ان ڳالهه جو وڌيڪ عملي مشاهدو به يا ٻن ڪان وڌيڪ ٻيا چوڪندا ناهي، اِنهن جي چئني ڪندن جي ماپ، ڪند ماپ سان ماپي وٺنداسين. هرهڪ چوڪنڊي جي چئني ڪندن جي ماپ پاڻ ۾ جوڙ ڪري ڏسون ٿا ته هرهڪ چوڪنڊي جي چئني ڪندن جو جوڙ هر حالت ۾ 360° ٿئي ٿو.

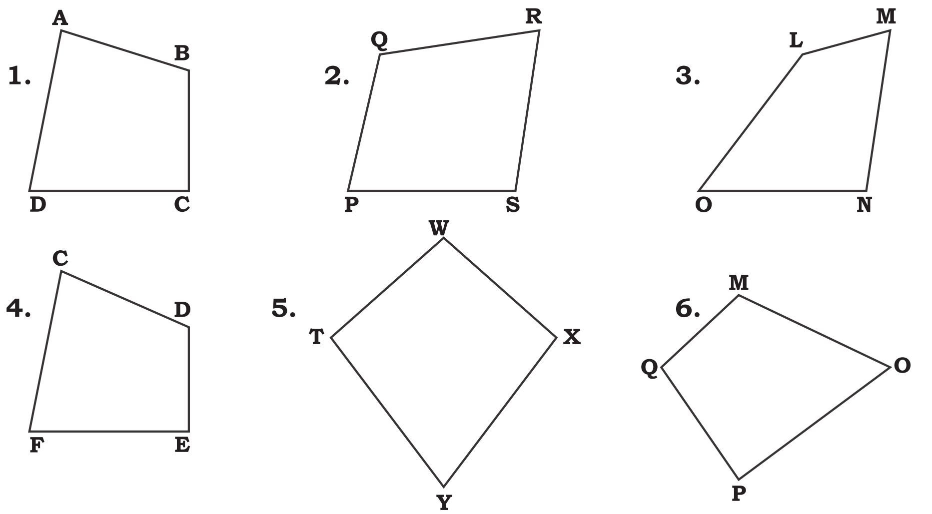
مشق 11.6

I- هيٺ ڏنل ٽڪنڊن جي تصويرن ۾ هرهڪ ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪندن جي ماپ، ڪند ماپ سان معلوم ڪريو. مشاهدو ڪري هن ڳالهه کي ثابت ڪريو ته هرهڪ ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪندن جي ماپ جو جوڙ هر حالت ۾ 180° ٿئي ٿو.



II- مختلف قسمن جا ڪي ٻه ٽي ٽڪنڊا ناهيو. هرهڪ ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪنڊن جي ماپ، ڪنڊ ماپ سان لهو. هرهڪ ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪنڊن جو جوڙ معلوم ڪري، ثابت ڪريو ته ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪنڊن جو جوڙ هر حالت ۾ 180° ٿئي ٿو.

III- مشاهدو ڪري ثابت ڪريو ته هرهڪ چوڪنڊي جي چئن ئي ڪنڊن جو جوڙ هر حالت ۾ 360° ٿئي ٿو. مشاهدو ڪرڻ لاءِ پهريائين هيٺ ڏنل هرهڪ چوڪنڊي جي چئن ئي ڪنڊن جي ماپ، ڪنڊ ماپ وسيلي لهو. پوءِ هرهڪ چوڪنڊي جي چئن ئي ڪنڊن جي ماپ جو جوڙ لهو.



IV- ڪي ٻه ٻه چوڪنڊا ناهيو. پهريائين هرهڪ چوڪنڊي جي چئن ئي ڪنڊن جي ماپ، ڪنڊ ماپ وسيلي لهو. اُن ڪان پوءِ هرهڪ چوڪنڊي جي چئن ئي ڪنڊن جي ماپ جو جوڙ معلوم ڪري ثابت ڪريو ته هر حالت ۾ چوڪنڊي جي چئن ئي ڪنڊن جو جوڙ 360° ٿئي ٿو.

جائزي واري مشق 11

A. هيٺ ڏنل ننڍن سوالن جا جواب ڏيو:

1. ليڪ ٽڪر ڇا آهي؟ اِن جون خاصيتون بيان ڪريو.
2. ٽڪنڊو ڇا آهي؟ اِن جون خاصيتون بيان ڪريو.
3. ٽڪنڊن جي قسمن جا نالا لکو.
4. ٻه ليڪ ٽڪر ڪڏهن يڪسان ٿي سگهن ٿا؟
5. ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪنڊن جو جوڙ ڪيترو آهي؟ ڪنڊ ماپ جي مدد سان اِنهيءَ ڳالهه کي ثابت ڪريو.
6. چوڪنڊو ڇا آهي؟ چوڪنڊي جي مختلف قسمن جا نالا لکو.
7. ٽيور پاسي ٽڪنڊي جون خاصيتون بيان ڪريو.
8. ڇا چورس، هڪ مستطيل، هڪ پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو يا رامبس آهي؟

9. چوڪندي جي سيني ڪندن جو جوڙ ڪيترو آهي؟ مشاهدو ڪري ثابت ڪريو.
10. هڪ ٽڪنڊي جي عمودي اوچائي (Altitude) ۽ چوٽيءَ واري ڪند جي وصف بيان ڪريو.

B. هيٺيان عمل صاف ۽ چٽين شڪلين وسيلي ظاهر ڪريو:

1. هڪ ليڪ ٽڪر 10.5 س م ماپ جو ڪڍي، اُن کي 3:4 نسبت ۾ ورهايو.
2. هڪ ليڪ ٽڪر 11.9 س م ماپ جو ڪڍي، اُن کي 2:4:2 نسبت ۾ ورهايو.
3. هڪ ٻيور پاسو ٽڪنڊو ناهيو، جنهن ۾ پايو 52 ملي ميٽر ۽ اُن جي پايي واري ڪُند جي ماپ $70°$ آهي.
4. پوروچوٽ پاسو چوڪندو PQRS ناهيو، جنهن ۾ س م $m\overline{SR} = 4.1$، س م $m\overline{QR} = 3.1$ ۽ $m\angle QRS = 70°$.
5. هڪ ٽيور پاسو ٽڪنڊو ناهيو، جنهن جي عمودي اُوچائي (Altitude) 6 س م آهي.
6. هڪ ٽڪنڊو ناهيو، جنهن جو احاطو (Perimeter) 129 ملي ميٽر آهي ۽ اُن جي پاسن جي پاڻ ۾ نسبت 3:4:5 آهي.
7. هڪ ٻيور پاسو ٽڪنڊو ناهيو، جنهن جي عمودي اُوچائي 6.2 س م آهي ۽ چوٽيءَ واري ڪند $40°$ آهي.
8. هڪ پوروچوٽ پاسو چوڪندو ناهيو، جنهن جي ٻن پر وارن پاسن جي ماپ 43 ملي ميٽر ۽ 32 ملي ميٽر آهي ۽ اُن جي هڪڙي اُريب جي ماپ 6.4 س م آهي.

C. صحيح جواب تي (✓) نشان لڳايو.

1. هڪ گهڻ ڪندو جنهن کي ٽي پاسا ۽ ٽي چوٽيون آهن ۽ اُن جي اندرين ڪندن جو جوڙ $180°$ آهي ته اُن شڪل کي ______ چئجي ٿو.

(a) چوڪندو (b) ليڪ ٽڪر (c) ٽڪنڊو (d) گول

2. ٻيور پاسي ٽڪنڊي جي پايي واري ڪند ______ ماپ جي آهي، جڏهن سندس چوٽيءَ واري ڪند $56°$ آهي.

(a) $67°$ (b) $70°$ (c) $60°$ (d) $90°$

3. جڏهن هڪ پوروچوٽ پاسي چوڪندي جي هرهڪ ڪند $90°$ جي آهي ته اُها ______ شڪل آهي.

(a) گول (b) مستطيل (c) ٽريپيزيم (d) ٽڪنڊو

4. ٻہ ليڪ ٽڪر OP ۽ QR پاڻ ۾ يڪسان آهن جڏهن:

(a) $m\overline{OP} = m\overline{QR}$ (b) $m\overline{OP} > m\overline{QR}$ (c) $m\overline{OP} < m\overline{QR}$ (d) $m\overline{OP} \neq m\overline{QR}$

5. چوڪندي جي اندرين ڪندن جو جوڙ ______ آهي.

(a) $90°$ (b) $180°$ (c) $270°$ (d) $360°$

6. هڪ چوڪنڊو جنهن جا آمهون سامهون وارا پاسا يڪسان ۽ پورروچوٽ آهن، اُن کي ________ سڏجي ٿو.
(a) ٽريپيزيم (b) پورروچوٽ پاسو چوڪنڊو (c) چورس (d) مستطيل

7. هڪ ٽڪنڊو جنهن جي پايي وارين ٻن ڪندن جو جوڙ 90° آهي ته چوٿيءَ واري ڪند جي ماپ ________ ٿيندي.
(a) 45° (b) 90° (c) 135° (d) 180°

8. هڪ چوڪنڊي جي ٽن ڪندن جو جوڙ 270° آهي ته سندس چوٿين ڪند جي ماپ ____ ٿيندي.
(a) 90° (b) 180° (c) 270° (d) 360°

خلاصو

- ٻه ليڪ ٽڪر يڪسان ٿيندا، جڏهن اُهي ماپ ۾ برابر آهن. يعني: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ جيڪڏهن $m\overline{AB} = m\overline{CD}$
- هڪ ليڪ ٽڪر کي ڪيترن ئي هڪ جيترن ٽُڪرن ۾ ورهائي سگهجي ٿو.
مثال طور: ملي ميٽر 120 = $m\overline{CD}$ يا س م $mCD = 12$
(i) جڏهن اِنهيءَ کي هڪ جيترن ڇهن ليڪ ٽڪرن ۾ ورهايو وڃي ٿو ته هرهڪ ليڪ ٽڪر جي ماپ ٿيندي: 12/6 س م = 2 س م
(ii) جڏهن مٿي ڏنل CD کي نسبتي حصن 1:2:3 ۾ ورهايو وڃي ٿو ته، اسان کي ٽي نئا ليڪ ٽڪر l_1، l_2 ۽ l_3 هينئين ريت ملندا:

C 2 cm E 4 cm F 6 cm D

$$\text{ليڪ ٽڪر } l_3 \text{ جي نسبت} = \frac{\text{ليڪ ٽڪر } l_3 \text{ جي نسبت} \times m\overline{CD}}{\text{مليل سڀني نسبتن جو جوڙ}} ,\quad \frac{\text{ليڪ ٽڪر } l_2 \text{ جي نسبت} \times m\overline{CD}}{\text{مليل سڀني نسبتن جو جوڙ}} ,\quad \frac{\text{ليڪ ٽڪر } l_1 \text{ جي نسبت} \times m\overline{CD}}{\text{مليل سڀني نسبتن جو جوڙ}}$$

- هڪ ٽڪنڊو اُهو گهڻ ڪندو آهي، جنهن کي ٽي پاسا ۽ ٽي ڪندون ٿين ٿيون.
(i) اسان هڪ ٽڪنڊو ناهي سگهون ٿا، جڏهن اُن جي گهٽ ۾ گهٽ ٽن جزن جي ماپ مليل هجي.
(ii) اسان هڪ ٽڪنڊو پڻ ناهي سگهون ٿا، جڏهن اُن جي احاطي جي ماپ ۽ سندس ٽن پاسن جي پاڻ ۾ نسبت مليل هجي.
- هڪ ٽيور پاسي ٽڪنڊي ۾ ٽنهي پاسن جي ماپ يڪسان آهي.
(i) اسان ٽيور پاسو ٽڪنڊو ناهي سگهون ٿا، جڏهن اُن جي ڪنهن ٻه هڪ پاسي يعني پايي جي ماپ مليل هجي.
(ii) اسان ٽيور پاسو ٽڪنڊو ناهي سگهون ٿا، جڏهن اُن جي عمودي اوچائيءَ (Altitude) جي ماپ مليل هجي.

ياد رکو: ٽڪنڊي جي عمودي اوچائي (Altitude)، هڪ اهو عمودي ليڪ ٽڪر آهي، جيڪو ٽڪنڊي جي چوٽيءَ مان نڪري، ٽڪنڊي جي پايي تائين پهچي ٿو.

عملي جاميٽري

- ٻيور پاسي ٽڪنڊي ۾ ڪي ٻه ٻه پاسا پاڻ ۾ يڪسان ٿين ٿا.

(i) اسان ٻه پور پاسو ٽڪنڊو ناهي سگهون ٿا، جڏهن اِن جي پايي جي ماپ ۽ اِن جي پايي وارين ٻن ڪندن جي ماپ مليل هجي.

(ii) اسان ٻيور پاسو ٽڪنڊو پڻ ناهي سگهون ٿا، جڏهن سندس چوٽيءَ واري ڪنڊ جي ماپ ۽ عمودي اوچائي مليل هجي. اِها ڳالهه ياد رکو ته ٻيور پاسي ٽڪنڊي ۾ عمود، چوٽيءَ مان نڪري پايي تائين اچي ٿو ۽ اِهو چوٽيءَ واري ڪند کي اڌو اڌ ڪري ٿو.

ٻيور پاسي ٽڪنڊي ۾ اسان اڻ ڄاڻايل چوٽيءَ واري ڪند جي ماپ سولائيءَ سان هيٺين نموني معلوم ڪري سگهون ٿا:

چوٽيءَ واري ڪند = $180°$ − (پايي وارين ٻن برابر ڪندن جو جوڙ)

ساڳي طرح ٻيور پاسي ٽڪنڊي ۾ اڻ ڄاتل پايي واري ڪند جي ماپ پڻ معلوم ڪري سگهون ٿا:

(پايي واري ڪند جي ماپ) = $\dfrac{180° - \text{چوٽيءَ واري ڪند جي ماپ}}{2}$

- پورروچوت پاسو چوڪندو اُهو چوڪندو آهي، جنهن جا آمهون سامهون وارا پاسا پاڻ ۾ يڪسان ۽ پورروچوت ٿين ٿا.

پورروچوت پاسي چوڪندي جون خاصيتون هن ريت آهن:

(i) پورروچوت پاسي چوڪندي جا اُريب هڪ ٻئي کي اڌو اڌ ڪن ٿا.

(ii) پورروچوت پاسي چوڪندي ۾ آمهون سامهون واريون ڪندون پاڻ ۾ يڪسان ٿين ٿيون.

(iii) هڪ چورس، هڪ مستطيل ۽ رامبس پڻ پورروچوت پاسو چوڪندو آهن.

پر هرهڪ پورروچوت پاسو چوڪندو چورس، مستطيل يا رامبس نه ٿو ٿئي.

ذهني ذخيرو: تمام گهڻي عمدي ۽ ڪارائتي ڄاڻ

اچو ته عدد 12345679 جي جادوءَ جو مشاهدو ڪريون.

انهيءَ عدد کي پهريائين 9 سان ضرب ڪريون ٿا ۽ پوءِ 9 جي ضرب اُپت (9×2)، (9×3)، (9×4)، (9×5)، (9×6)، (9×7)، (9×8) ۽ (9×9) يعني 18، 27، 36، 45، 54، 63، 72 ۽ 81 سان ضرب ڪري مشاهدو ڪريون ٿا:

$$\begin{array}{r} 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 9 \\ \times\ 9 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}$$

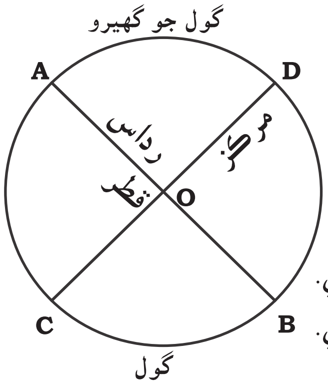
12345679 ۽ 18, ...

يعني $12345679 \times 18 = 222222222$

یونٽ 12

گول جو گهيرو، ايراضي ۽ مقدار

12.1 گول جو گهيرو ۽ گول جي ايراضي



12.1 گول جو گهيرو

گول هڪ عام شڪل آهي. گول جو مرڪز O آهي. $\overline{OA}$ رداس آهي. $\overline{AB}$ قطر آهي. گول هڪ بند شڪل آهي، جنهن جو هرهڪ ٽپڪو مرڪز O کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي. گول جي حدن جي چوڏاري ڊيگهه کي گول جو گهيرو چئبو آهي.

جڏهن ته AOD، BOD، AOC ۽ BOC گول جا سيڪٽر آهن. $\overline{OA}$، $\overline{OB}$، $\overline{OC}$ ۽ $\overline{OD}$، اِهي سڀ رداس کي ظاهر ڪن ٿا.

$\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ قطر آهن. جيئن ته قطر هڪ ليڪ ٽڪر آهي. تنهن ڪري اِهو آساني سان ماپي سگهجي ٿو.

12.1.1 گول جي گهيري ۽ قطر جي نسبت کي π سان ظاهر ڪرڻ

عملي ڪم: اچو ته گول جي گهيري ۽ قطر جي وچ ۾ نسبت معلوم ڪرڻ لاءِ ڪنهن ساٿيءَ سان گڏ يا ٽولي ۾ ڪم ڪريون.

اسان کي مختلف گول شين، ڪيلڪيوليٽر، اسڪيل، ماپڻ واري پٽي ۽ ڌاڳي جي ضرورت پوندي.

ڏاڪو 1:

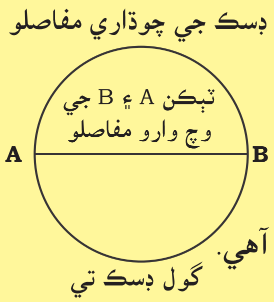
هڪ گول ڊسڪ کڻو ۽ هيٺين سوالن جا جواب ڏيو.

پهريائين گول ڊسڪ تي غور ڪريو.

(الف) اوهان جي خيال ۾ ڪهڙو مفاصلو وڏو آهي؟

گول ڊسڪ جي چوڌاري مفاصلو يا

ٽپڪن A ۽ B جي وچ وارو مفاصلو؟



ڏسنداسين ته گول جي گهيري وارو فاصلو، گول جي قطر کان وڌيڪ آهي.

اچو ته ٻئي سوال جو جواب معلوم ڪرڻ جي ڪوشش ڪريون.

(ب) اوهان جي خيال ۾ اهو ڪيترا ڀيرا وڌيڪ آهي؟

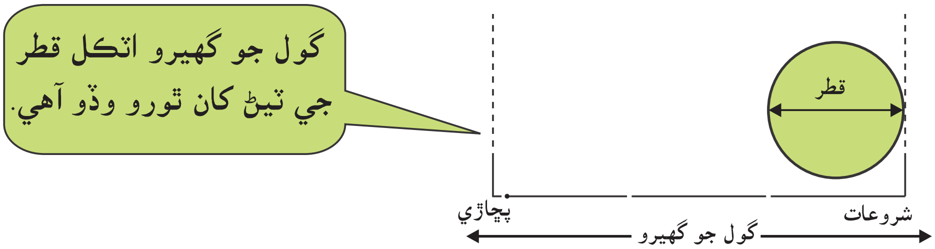
ڏاڪو2: ڌاڳو استعمال ڪندي، هرهڪ گول ڊسڪ جي چوڌاري مفاصلو (اُن جو گهيرو اٽڪل ملي ميٽرن ۾ ماپي لکو.

ڏاڪو3: اسڪيل يا ماپ پٽي استعمال ڪندي هرهڪ ڊسڪ جي آر پار مفاصلو (اُن جو قطر) ملي ميٽرن ۾ ماپي لکو.

1- ٻين گول ڊسڪن لاءِ به ڏاڪي 2 ۽ 3 جو عمل وري ڪريو. پنهنجا نتيجا هيٺ ڏنل جدول ۾ لکو. پنهنجي ساٿيءَ يا ٽولي جي ٻين ساٿين جا نتيجا به شامل ڪريو.

2- انهن عددن جي ڀيٽ به ڪريو. جيڪي گول جي گهيري واري ڪالم ۽ قطر واري ڪالم ۾ آهن.

مٿين سڀني حالتن ۾ اسين گول جي گهيري جي، گول جي قطر سان نسبت معلوم ڪريون ٿا.



هيٺين جدول چار گولن جي گهيرن جي اٽڪل ماپ ۽ قطر جي ماپ ڏيکاري ٿي. هرهڪ گول جي لاءِ نسبت $\left(\frac{\text{گول جوگهيرو}}{\text{گول جو قطر}}\right)$ جو ملهه لهو. اوهان کي ڇا خبر پئي؟

گول	گول جو قطر	گول جو گهيرو (اٽڪل مُلهه)	$\frac{\text{گهيرو}}{\text{قطر}}$ = (اٽڪل مُلهه)
(i)	3.5 س م	11 س م	
(ii)	28 ملي ميٽر	88 ملي ميٽر	
(iii)	4.2 س م	13.2 س م	
(iv)	21 ملي ميٽر	66 ملي ميٽر	

جيڪڏهن اسين مختلف رداسن وارا گول ڪٽون ۽ اُنهن جا گهيرا معلوم ڪريون ته اسين ڏسنداسين ته هرهڪ گهيري جي،اُن جي قطر سان نسبت لڳ ڀڳ ساڳي آهي. اِن نسبت کي π سان ظاهر ڪبو آهي.

سيني گولن لاءِ $\left(\frac{\text{گهيرو}}{\text{قطر}}\right)$ يا π جو ملهه ساڳيو آهي. اِهو هميشه اٽڪل 3.14 يا $\frac{22}{7}$ هوندو آهي.

انهيءَ ڪري **قطر × π = گهيرو**

يعني گول جو گهيرو قطر جي π ڀيرن جي برابر آهي.

12.1.2 فارمولي جو استعمال ڪندي،گول جو گهيرو معلوم ڪرڻ

گول جي گهيري کي ماپڻ جا مختلف طريقا آهن.

(الف) عملي ڪم وسيلي گول جي گهيري جي ماپ

عملي ڪم 1:

ڏاڪا:
(i) فرض ڪريو ته سلينڊر يا ويلڻ جي اُفقي ٽُڪر جو متاچرو گول آهي.
(ii) اسين هن گول جو گهيرو معلوم ڪرڻ چاهيون ٿا.
(iii) سلينڊر جي چوڌاري ڪاغذ جي پٽي يا ڌاڳو ويڙهيو.
(iv) جڏهن پٽي يا ڌاڳو شروعاتي چيڙي تي پهچي ته اُن جاءِ تي نشان لڳايو.
(v) شروعاتي چيڙي کان، نشان لڳل جاءِ تائين پٽي يا ڌاڳي جي ڊيگهه جي ماپ ڪريو.
(vi) اِها گهيري جي ڊيگهه جي ماپ آهي.

فارمولي جي وسيلي گول جي گهيري جي ماپ

گول جو گهيرو معلوم ڪرڻ لاءِ اسين هيٺين فارمولو استعمال ڪري سگهون ٿا:

قطر جي ڊيگهه × π = گول جو گهيرو

اسان کي خبر آهي ته قطر = $2r$ = رداس جي ٻيڻ آهي

گول جو گهيروC = 2π r ۽ C = π d جڏهن ته قطر جي ڊيگهه d آهي.

مثال 1: هڪ گول جو رداس 35 ملي ميٽر آهي. معلوم ڪريو:

(الف) اُن جو قطر (ب) اُن جو گهيرو $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

حل: (الف) رداس × 2 = قطر

= 2 × 35 ملي ميٽر

= 70 ملي ميٽر

ان جو قطر 70 ملي ميٽر آهي.

قطر × π = گهيرو

$= \frac{22}{7} \times \frac{70}{1}$ ملي ميٽر

$= \frac{22 \times \cancel{70}^{10}}{\cancel{7}_{1}} = 220$ ملي ميٽر

ان جو گهيرو 220 ملي ميٽر آهي.

مثال 2: گول جي قطر جي ڊيگهه 14 س م آهي. گول جو گهيرو معلوم ڪريو.

حل: قطر جي ڊيگهه = 14 س م ۽ $\pi = \frac{22}{7}$

اهڙي طرح $= \pi \times d$ گول جو گهيرو

$$= 14 \times \frac{22}{7} = \frac{22 \times \cancel{14}^{2}}{\cancel{7}_{1}} = 44 \text{ س م}$$

مثال 3: گول جو قطر ۽ رداس معلوم ڪريو، جڏهن اُن جو گهيرو 99 س م آهي.

حل: اسان کي خبر آهي ته

گول جو گهيرو $= \pi \times d$

يا $C = \pi d$

يا $\frac{C}{\pi} = d$

قطر $= d = \frac{C}{\pi} = \frac{99}{\frac{22}{7}} = \frac{99 \times 7}{22}$

يا $d = \frac{\cancel{99}^{9} \times 7}{\cancel{22}_{2}} = \frac{63}{2} = 31.5$ س م

رداس ۽ $= r = \frac{d}{2} = \frac{63/2}{2} = \frac{63}{4} = 15.75$ س م

مشق 12.1

A. گول جو گهيرو معلوم ڪريو، جڏهن اُن جو قطر آهي:

(1) d = 28 س م (2) d = 35 س م (3) d = 42 ملي ميٽر (4) d = 56 ملي ميٽر

B. گول جو گهيرو معلوم ڪريو، جڏهن اُن جو رداس آهي:

(1) 10.5 س م (2) 28 س م (3) 38.5 س م (4) 49 س م

(5) 59.5 س م (6) 63 س م (7) 80.5 س م (8) 77 س م

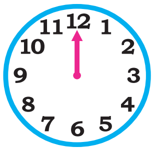
C. گول جو رداس معلوم ڪريو، جڏهن اُن جو گهيرو آهي:

(1) 22 cm (2) 66 cm (3) 88 cm (4) 110 cm
(5) 132 cm (6) 176 cm (7) 220 cm (8) 198 cm

D. گول جو قطر معلوم ڪريو جڏهن ان جو گهيرو آهي:

(1) 44 cm (2) 154 cm (3) 242 mm (4) 264 mm
(5) 48.4 mm (6) 30.8 cm (7) 52.8 cm (8) 39.6 mm

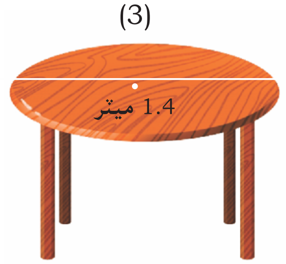
E. جدول (چارٽ) مڪمل ڪريو. منٽن جي سُئي هڪ چڪر هڪ ڪلاڪ ۾ پورو ڪري ٿي.

سلسليوار نمبر	گهڙيال جي منٽن جي سُئي جي ڊيگھ r آهي	مفاصلو معلوم ڪريو جيڪو منٽن جي سُئي پورو ڪيو
.1	$r = 1.4$ س م	(i) حل $= 2\pi r$ مفاصلو = گول جو گهيرو $= \frac{2\times22\times1.4}{7} = 8.8$ س م 
.2	$r = 21$ ملي ميٽر	
.3	$r = 35$ ملي ميٽر	
.4	$r = 2.8$ س م	
.5	$r = 42$ ملي ميٽر	
	(نوٽ: منٽن جي سُئي هڪ چڪر 1 ڪلاڪ ۾ پورو ڪري ٿي)	

F. هيٺين ۾ هرهڪ جي گولائي واري حد ماپڻ لاءِ ڊاڳي جي گهٽ ۾ گهٽ ڊيگھ معلوم ڪريو:

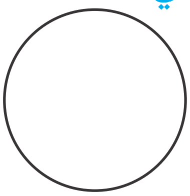
(1)


(2)


(3)


12.1.3 فارمولي کي استعمال ڪندي گول جي ايراضي معلوم ڪريو

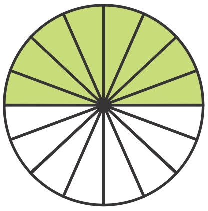
اچو ته عملي ڪم ذريعي گول جي ايراضي معلوم ڪريون.



عملي ڪم:

(i) ڪنهن مناسب رداس سان هڪ گول ڪڍو.

(ii) قينچيءَ سان گول کي ڪتريو.



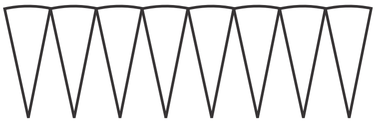
(iii) گول کي ٻن حصن ۾ ويڙهيو.

(iv) ويڙهيندا رهو، جيستائين جو اسان کي 16 برابر حصا حاصل ٿين.

(v) گول کي کوليو.

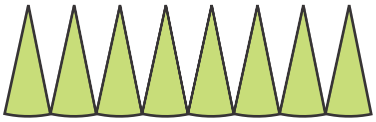
(vi) اڌ گول کي شيڊ ڪريو جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.

(vii) هاڻي 16 حصن سان نهيل نشانن سان گول کي قينچيءَ سان ڪتريو.



(viii) گول جي هرهڪ سيگمينٽ جي ڊيگهه، رداس جي برابر آهي.

(ix) انهن 16 حصن کي ٻن برابر ٽڪرن ۾ ورهايو.

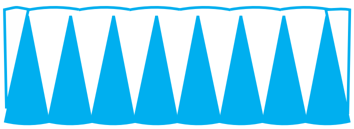


(x) 8 حصن کي اڇو ۽ 8 حصن کي ڪارو ڪريو.

(xi) اڇي حصن کي مٿين اڌ ۾ ترتيب ڏيو ۽ ڪاري حصن کي هيٺين اڌ ۾ ترتيب ڏيو.

(xii) ائين نهيل شڪل، ذري گهٽ مستطيل آهي.

(xiii) اِن مستطيل جي ڊيگهه، گول جي گهيري جي اڌ جي برابر آهي.



(xiv) مستطيل جي ويڪر گول جي رداس جي برابر آهي.

(xv) مستطيل جي ايراضي گول جي ايراضيءَ جي برابر آهي.

اهڙي طرح   گول جي ايراضي = مستطيل جي ايراضي

= مستطيل جي ويڪر × مستطيل جي ڊيگهه

= ويڪر × ڊيگهه

= (گول جو رداس) × (گهيري جو اڌ)

$$= \left[\frac{1}{2}(2\pi r)\right] \times r$$

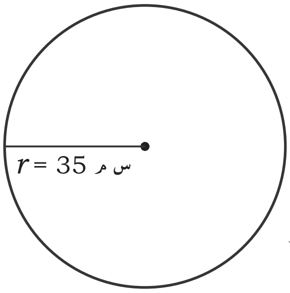
$$= \frac{1 \times \cancel{2} \times \pi r \times r}{\cancel{2}} = \pi r^2$$

اهڙي طرح گول جي ايراضي معلوم ڪرڻ جو فارمولو آهي:

$$\boxed{\text{گول جي ايراضي} = \pi r^2}$$

جڏهن ته گول جو رداس r آهي.

مثال 1: هڪ گول جو رداس 35 س م آهي. اِن جي ايراضي معلوم ڪريو.



حل: گول جي ايراضي $= \pi r^2$

هتي رداس $= r = 35$ س م ۽ $\pi = \frac{22}{7}$

ايراضي $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times (35)^2 = \frac{22 \times 35 \times 35}{7}$

$= \frac{22 \times 35 \times \cancel{35}^{5}}{\cancel{7}_{1}} = 3,850$ چورس س م

مثال 2: هڪ گول جي ايراضي 1386 چورس س م آهي. اِن جو رداس معلوم ڪريو.

حل: گول جي ڏنل ايراضي A، 1386 چورس س م آهي.

اسان ڄاڻون ٿا ته گول جي ايراضي معلوم ڪرڻ جو فارمولو آهي: $A = \pi r^2$

انهيءَ ڪري $\pi r^2 = 1,386$

يا $\frac{22}{7} r^2 = 1386$

يا $r^2 = 1386 \div \frac{22}{7}$

تنهنڪري $r^2 = \frac{1386 \times 7}{22} = \frac{11 \times 63 \times 2 \times 7}{22}$

انهيءَ ڪري $r^2 = 63 \times 7 = 3 \times 3 \times 7 \times 7$

اهڙي طرح رداس $= r = 3 \times 7 = 21$ س م

مشق 12.2

A. گول جي ايراضي معلوم ڪريو، جڏهن اِن جو رداس آهي:

(1) 14 س م (2) 10.5 س م (3) 21 س م (4) 17.5 ملي ميٽر
(5) 35 ملي ميٽر (6) 24.5 س م (7) 71.4 س م (8) 38.5 س م

B. گول جو رداس معلوم ڪريو جڏهن ان جي ايراضي آهي:

(1) 154 چورس ملي ميٽر (2) 2,464 چورس س م
(3) 7,546 چورس ملي ميٽر (4) 5,544 چورس ملي ميٽر
(5) 6.16 چورس ملي ميٽر (6) 962.5 چورس س م
(7) 38.5 چورس ميٽر (8) 75.46 چورس ملي ميٽر (9) 13.86 چورس ميٽر

C. گول جي ايراضي معلوم ڪريو، جڏهن اُن جو قطر آهي:

(1) 21 س م (2) 28 س م (3) 42 س م (4) 56 س م

(5) 8.4 س م (6) 9.8 س م (7) 11.2 س م (8) 12.6 س م

D. گول جو قطر معلوم ڪريو، جڏهن اُن جي ايراضي هيٺين ريت آهي:

(1) 154 چورس س م (2) 1,386 چورس ملي ميٽر

(3) 3,850 چورس ملي ميٽر (4) 9,856 چورس ملي ميٽر

(5) 124.74 چورس س م (6) 186.34 چورس س م

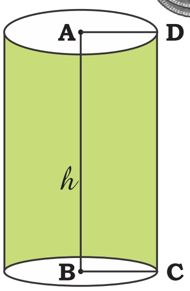
(7) 221.76 چورس س م (8) 260.26 چورس س م

12.2 سلينڊر جي مٿاڇري جي ايراضي ۽ مقدار

سلينڊر: اسين گذريل ڪلاس ۾ سلينڊر جي باري ۾ اڳيئي سکي چڪا آهيون. گيهه جا ڊبا، تيل جا ڊبا، ڪولڊ ڊرنڪ جا ٽِن (ڊبا)، ڊامر جا ڊبا وغيره سلينڊر جا مثال آهن.

عملي ڪم: سڪا گڏ ڪرڻ. (سلينڊر)

اچو ته هڪ رُپئي جي سڪي، ٻن رُپين جي سڪن ۽ پنج رُپين جي سڪن کي ڌار ڌار هڪ ٻئي جي مٿان رکون. اسان کي ڪهڙي قسم جي شڪل ملندي؟



12.2.1 فارمولي جو استعمال ڪندي سلينڊر جي مٿاڇري جي ايراضي معلوم ڪرڻ

سلينڊر جي مٿاڇري جا ٽي حصا هوندا آهن.

ٻه برابر گول مٿاڇرا ۽ هڪ ٽيون مڙيل يا گولائي وارو مٿاڇرو.

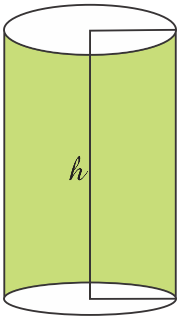
اچو ته اِنهن ٽنهي مٿاڇرن جي ايراضي معلوم ڪريون.

فرض ڪريو ته هرهڪ گول مٿاڇري جو رداس r آهي ۽ سلينڊر جي اوچائي h آهي.

(i) سلينڊر جي ٻن گول ترن جي ايراضي = سلينڊر جي مٿين تري جي ايراضي + سلينڊر جي هيٺين تري جي ايراضي

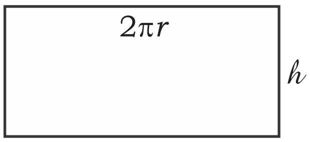
$= \pi r^2 + \pi r^2 = 2\pi r^2$

(ii) سليندر جي مڙيل متاچري جي ايراضي معلوم ڪرڻ



اسين هڪ ڪاغذ جو ٽڪر ڪٽون ٿا، جنهن جي ويڪر سليندر جي اُوچائيءَ جي برابر آهي. اُن کي سليندر جي چوڌاري ويڙهيو ۽ بچيل ٽڪر کي ڪٽيو تہ اِهو مستطيل جي شڪل ۾ ايندو. هن ڪاغذ جي ويڪر h ٿيندي ۽ اِن جي ڊيگهہ سليندر جي گول تري جي گهيري جي برابر ٿيندي.

مستطيل جي ايراضي = سليندر جي مڙيل متاچري جي ايراضي



= ويڪر × ڊيگهہ

$= 2\pi r \times h$

$= 2\pi rh$

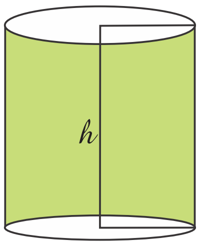
اهڙي طرح:

سليندر جي مڙيل متاچري جي ايراضي + ٻن گول ترن جي ايراضي = سليندر جي متاچري جي ڪُل ايراضي

$= 2\pi r^2 + 2\pi rh$

$= 2\pi r(r + h)$

اهڙي طرح: سليندر جي ڪُل ايراضي $= 2\pi r(r + h)$



مثال 1: سليندر جي گول تري جو رداس 14 س م آهي ۽ سليندر جي اُوچائي 20 س م آهي. سليندر جي متاچري جي ڪُل ايراضي معلوم ڪريو.

حل: گول تري جو رداس $= r = 14$ س م

سليندر جي اُوچائي $= h = 20$ س م $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

سليندر جي متاچري جي ڪُل ايراضي معلوم ڪرڻ لاءِ فارمولو آهي: $2\pi r(r + h)$

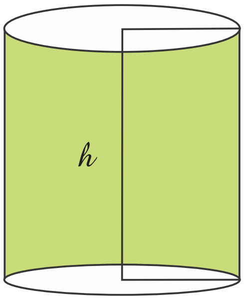
يعني سليندر جي متاچري جي ڪُل ايراضي $= 2\pi\ r(r + h) = 2 \times \frac{22}{7} \times 14\ (14 + 21)$

$= \frac{2 \times 22 \times \cancel{14}^{2}}{\cancel{7}_{1}} \times (35)$

ايراضي $= 35 \times 88 = 3,080$ چورس س م

اهڙي طرح سليندر جي متاچري جي ڪُل ايراضي 3,080 چورس س م آهي.

مثال 2: سلينڊر جي اُوچائي لهو، جڏهن اُن جو رداس 10.5 س م آهي. متاچري جي ڪُل ايراضي 1,650 چورس س م آهي.



حل: سلينڊر جي اوچائي $= h = ?$

گول تري جو رداس $= r = 10.5$ س م

متاچري جي ڪُل ايراضي $= A = 1,650$ چورس س م

فارمولو آهي: $A = 2\pi r\,(r + h)$

يا $1650 = 2 \times \frac{22}{7} \times 10.5\,(10.5 + h)$

يا $1650 = \frac{2 \times 22 \times \cancel{10.5}^{1.5}}{\cancel{7}_{1}} \times (10.5 + h)$

يا $1650 = 693 + 66h$

يا $1650 - 693 = 66h$

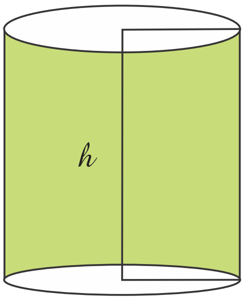
يا $957 = 66h$

يا $\text{or } h = \frac{957}{66} = \frac{\cancel{\cancel{957}^{319}}^{29}}{\cancel{\cancel{66}_{22}}_{2}} = \frac{29}{2} = 14.5$

يا $h = 14.5$ س م

اهڙي طرح سلينڊر جي گهربل اوچائي 14.5 س م آهي.

مثال 3: سلينڊر جي اُوچائي ۽ رداس معلوم ڪريو، جنهن جي متاچري جي ڪُل ايراضي 2,200 چورس س م آهي ۽ رداس ۽ اُوچائي جو جوڙ 35 س م آهي.



حل: متاچري جي ڪُل ايراضي $= A = 2,200$ چورس س م

۽ $r + h = 35$ س م

اسان کي سلينڊر جي اُوچائي ۽ رداس معلوم ڪرڻو آهي.

فارمولو: $A = 2\pi r\,(r + h)$

$2200 = 2 \times \frac{22}{7} \times r\,(35)$

يا $2200 = \left(\dfrac{2 \times 22 \times 35}{7}\right) r$

يا $2200 = \left(\dfrac{44 \times \cancel{35}^{5}}{\cancel{7}_{1}}\right) r$

يا $2200 = 220r$

يا $\dfrac{2200}{220} = r$

يا $10 = r$ يا $r = 10$ س م

انهيءَ ڪري رداس $= r = 10$ س م

وري $r + h = 35$

$10 + h = 35$

$h = 35 - 10 = 25$

انهيءَ ڪري $h = 25$ س م

اهڙي طرح سلينڊر جو گهربل رداس 10 س م آهي ۽ اُن جي اُوچائي 25 س م آهي.

مشق 12.3

A. سلينڊر جي متاڃري جي ڪُل ايراضي معلوم ڪريو، جڏهن ته سلينڊر جي تري جو رداس ۽ اُوچائي هيٺ ڏنل آهن:

(1) رداس = 14 س م ، اُوچائي = 26 س م

(2) رداس = 10 س م ، اُوچائي = 18 س م

(3) رداس = 21 س م ، اُوچائي = 29 س م

(4) رداس = 17.5 ملي ميٽر، اُوچائي = 22.5 ملي ميٽر

(5) رداس = 30 س م ، اُوچائي = 40 س م

(6) رداس = 25 ملي ميٽر ، اُوچائي = 41.5 ملي ميٽر

B. سلينڊر جي اُوچائي لهو، جڏهن ته رداس ۽ متاڃري جي ڪُل ايراضي هيٺ ڏنل آهي:

(1) رداس = 10.5 س م، متاڃري جي ڪُل ايراضي = 1980 چورس س م

(2) رداس = 17.5 س م، متاڃري جي ڪُل ايراضي = 4,400 چورس س م

(3) رداس = 12 ملي ميٽر، متاڃري جي ڪُل ايراضي = 2,112 چورس ملي ميٽر

(4) رداس = 15 س م، متاڃري جي ڪُل ايراضي = 3,960 چورس س م

(5) رداس = 28 س م، متاڃري جي ڪُل ايراضي = 10,560 چورس س م

c. هيٺيان حل ڪريو:

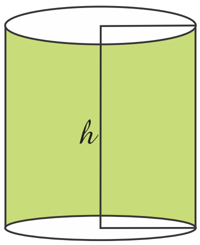
(1) سلينڊر جو رداس ۽ اُوچائي معلوم ڪريو. اِن جي رداس ۽ اُوچائيءَ جو جوڙ 28 س م آهي ۽ سلينڊر جي مٿاڇري جي ڪُل ايراضي 1408 چورس س م آهي.

(2) سلينڊر جي رداس ۽ اُوچائي جو جوڙ 35 س م آهي. سلينڊر جي ڪُل ايراضي 3,300 چورس س م آهي. اِن جو رداس ۽ اُوچائي ڌار ڌار معلوم ڪريو.

(3) سلينڊر جو رداس ۽ اُوچائي معلوم ڪريو، جڏهن اِن جي رداس ۽ اُوچائيءَ جو جوڙ 49 س م آهي ۽ مٿاڇري جي ڪُل ايراضي 5,852 چورس س م آهي.

(4) سلينڊر جي رداس ۽ اُوچائيءَ جو جوڙ 56 ملي ميٽر آهي. مٿاڇري جي ڪُل ايراضي 6,864 چورس ملي ميٽر آهي. سلينڊر جو رداس ۽ اُوچائي معلوم ڪريو.

12.2.2 فارمولو استعمال ڪندي سلينڊر جو مقدار معلوم ڪرڻ



اسان کي خبر آهي ته سلينڊر جو هيٺيون ترو گول هوندو آهي. اسين ان جي رداس کي r سان ظاهر ڪريون ٿا. اسين اڳيئي گول جي ايراضي معلوم ڪرڻ سکي چڪا آهيون.

سلينڊر جي هيٺين تري جي ايراضي = گول جي ايراضي

$$A = \pi r^2$$

جيڪڏهن سلينڊر جي اُوچائيءَ کي h سان ظاهر ڪجي ته:

سلينڊر جي اُوچائي × گول تري جي ايراضي = سلينڊر جو مقدار

$$V = \pi r^2 \times h = \pi r^2 h$$

اهڙي طرح: $\pi r^2 h$ سلينڊر جو مقدار آهي، جڏهن ته r هيٺين گول تري جي رداس ۽ h سلينڊر جي اُوچائيءَ کي ظاهر ڪري ٿو.

مثال 1: جيڪڏهن سلينڊر جي تري جي قطر جي ڊيگهه 84 س م آهي ۽ اُوچائي55 س م آهي ته سلينڊر جو مقدار ڇا ٿيندو؟

حل: ڏنل سلينڊر جو قطر = d = 84 س م

انهيءَ ڪري ڏنل سلينڊر جو رداس $r = \frac{d}{2} = \frac{84}{2}$ س م $= 42$ س م

اهڙي طرح $r = 42$ س م

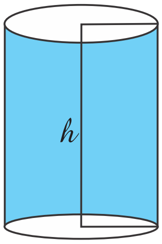
هاڻي سلينڊر جو مقدار معلوم ڪرڻ جو فارمولو آهي: $V = \pi r^2 h$

ان ڪان پوءِ: $V = \frac{22}{7} \times (42)^2 \times 55$

$$= \frac{22}{\cancel{7}_{1}} \times \overset{6}{\cancel{42}} \times 42 \times 55$$

$= 22 \times 6 \times 42 \times 55 = 304,920$ ڪعب سينٽي ميٽر

مثال 2: سلينڊر جو مقدار 184,800 ڪعب سينٽي ميٽر آهي ۽ سلينڊر جي گول تري جو رداس 35 س م آهي. سلينڊر جي اُوچائي معلوم ڪريو.



حل: سلينڊر جي مقدار جو فارمولو آهي: $V = \pi r^2 h$

V = 184,800 ڪعب سينٽي ميٽر

r = 35 سينٽي ميٽر

h = ؟

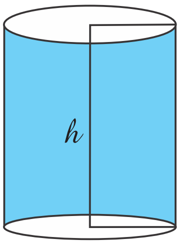
$$184800 = \frac{22}{7} \times (35)^2 \times h$$

$$\frac{7 \times 184800}{22 \times 35 \times 35} = h$$

$$h = \frac{\cancel{7} \times \overset{48}{\cancel{\overset{528}{\cancel{\overset{1056}{\cancel{\overset{7392}{\cancel{184800}}}}}}}}}{\underset{1}{\cancel{\underset{11}{\cancel{22}}}} \times \underset{1}{\cancel{\underset{7}{\cancel{35}}}} \times \underset{1}{\cancel{\underset{7}{\cancel{35}}}}} = 48 \text{ cm}$$

اهڙي طرح ڏنل سلينڊر جي گهربل اُوچائي 48 س م آهي.

مثال 3: سلينڊر جو رداس معلوم ڪريو، جڏهن اِن جو مقدار 4,400 ڪعب سينٽي ميٽر آهي ۽ سلينڊر جي اُوچائي 14 س م آهي.



حل: سلينڊر جو مقدار = V = 4,400 ڪعب سينٽي ميٽر

سلينڊر جي اُوچائي = h = 14 س م

سلينڊر جي گول تري جو رداس = r = ?

سلينڊر جو مقدار معلوم ڪرڻ جو فارمولو آهي: $V = \pi r^2 h$

$$4,400 = \frac{22}{7} \times r^2 \times \overset{2}{14}$$

$$4,400 = \frac{22 \times \cancel{14}}{\cancel{7}_{1}} r^2$$

$$4400 = 44r^2$$

يا $r^2 = \frac{4400}{44} = 100$

انهيءَ ڪري $r = \sqrt{100} = 10$

اهڙي طرح سلينڊر جي گول تري جو رداس 10 س م آهي.

مشق 12.4

A. هيٺين ۾ هر هڪ، سلينڊر جي ٽري جو رداس ۽ اُن جي اُوچائي ڏنل آهي. هرهڪ جو مقدار معلوم ڪريو.

(1)	رداس	=	14 س م	۽	اُوچائي	=	20 س م
(2)	رداس	=	25 س م	۽	اُوچائي	=	35 س م
(3)	رداس	=	28 س م	۽	اُوچائي	=	40 س م
(4)	رداس	=	20 س م	۽	اُوچائي	=	28 س م
(5)	رداس	=	1.05 ميٽر	۽	اُوچائي	=	2.5 ميٽر
(6)	رداس	=	63.5 س م	۽	اُوچائي	=	75 س م
(7)	قطر	=	70 ملي ميٽر	۽	اُوچائي	=	50 ملي ميٽر
(8)	قطر	=	60 ملي ميٽر	۽	اُوچائي	=	63 ملي ميٽر

B. هيٺين ۾ هرهڪ، سلينڊر جي ٽري جو رداس ۽ اُن جو مقدار ڏنل آهي. هرهڪ جي اُوچائي معلوم ڪريو.

(1)	رداس	=	14 س م	۽	مقدار = 15,400 ڪعب سينٽي ميٽر
(2)	رداس	=	20 س م	۽	مقدار = 35,200 ڪعب سينٽي ميٽر
(3)	رداس	=	25 ملي ميٽر	۽	مقدار = 82,500 ڪعب ملي ميٽر
(4)	رداس	=	21.5 ملي ميٽر	۽	مقدار = 305,085 ڪعب ملي ميٽر
(5)	رداس	=	30ملي ميٽر	۽	مقدار = 99,000 ڪعب ملي ميٽر
(6)	رداس	=	28 س م	۽	مقدار = 98,560 ڪعب سينٽي ميٽر

C. هيٺين ۾هرهڪ، سلينڊر جي اُوچائي ۽ اُن جو مقدار ڏنل آهي. هرهڪ سلينڊر جي ٽري جو رداس ڇا ٿيندو؟

(1)	اُوچائي	=	25 س م	۽	مقدار = 24,650 ڪعب سينٽي ميٽر
(2)	اُوچائي	=	20 ميٽر	۽	مقدار = 12,320 ڪعب ميٽر
(3)	اُوچائي	=	28 س م	۽	مقدار = 35,200 ڪعب سينٽي ميٽر
(4)	اُوچائي	=	42 س م	۽	مقدار = 118,800 ڪعب سينٽي ميٽر
(5)	اُوچائي	=	56 ملي ميٽر	۽	مقدار = 281,600 ڪعب ملي ميٽر
(6)	اُوچائي	=	30 س م	۽	مقدار = 41,580 ڪعب سينٽي ميٽر

12.2.3 (الف) گول جي گهيري ۽ ايراضيءَ تي مشتمل عام زندگيءَ جا لکتي حساب حل ڪرڻ

مثال 1: هڪ مشين جي ڦيٿي جو رداس 84 س م آهي. ڦيٿي جي چوڌاري ڏهه پورا چڪر ويڙهڻ لاءِ ڪيتري تار گهرجي؟

حل: r = ڦيٿي جو رداس = 84 س م = 0.84 ميٽر

گول جي گهيري معلوم ڪرڻ جو فارمولو آهي: $C = 2\pi r$

$C = \left(2 \times \frac{22}{7}\, 0.84\right)$ ميٽر

يا $C = \left(\frac{2 \times 22 \times 0.84}{7}\right)$ ميٽر

يا $C = \left(\frac{2 \times 22 \times \cancel{0.84}^{\,0.12}}{\cancel{7}_{1}}\right)$ ميٽر

يا $C = 5.28$ ميٽر

اهڙي طرح اسان وٽ گول جو گهيرو آهي: 5.28 ميٽر

هڪ چڪر لاءِ گهربل تار آهي 5.28 ميٽر

انهيءَ ڪري ڏهه چڪرن لاءِ گهربل تار آهي:

(5.28 × 10) ميٽر = 52.8 ميٽر

اهڙي طرح گهربل تار جي ڊيگهه 528 ميٽر آهي.

مثال 2: هڪ گول ميز جو قطر 4.2 ميٽر آهي. اِن جي مٿان گول ڪپڙي جي چوڌاري زريءَ جا ڪيترا ميٽر گهرجن ۽ 40 رُپيا في ميٽر جي شرح سان اُن جي قيمت به معلوم ڪريو.

حل: پهريان اسان کي گول ميز جو گهيرو معلوم ڪرڻو آهي.

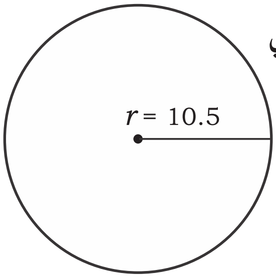
گهيرو = $\pi d = \frac{22}{7} \times 4.2$ ميٽر $= \frac{22}{\cancel{7}} \times \cancel{4.2}^{\,0.6} = 22 \times 06 = 13.2$ ميٽر

اهڙي طرح گول ڪپڙي جي چوڌاري گهربل زريءَ جي ڊيگهه 13.2 ميٽر آهي.

زريءَ جي ڊيگهه جي قيمت = ڊيگهه × شرح

= 13.2 × 40 رُپيا

= 528 رُپيا



مثال 3: گول پَٽ (floor) جي ايراضي ۽ اُن تي 150 رُپيا في چورس ميٽر جي شرح سان رنگدار فرش هڻڻ جي قيمت ڇا ٿيندي جڏهن گول پَٽ جو رداس 10.5 ميٽر آهي.

حل: گول پَٽ جو رداس 10.5 ميٽر آهي.

گول پَٽ جي ايراضي معلوم ڪرڻ جو فارمولو آهي: πr^2

يعني ايراضي $A = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 10.5 \times 10.5$

يا ايراضي $(A) = \frac{22 \times \overset{1.5}{\cancel{10.5}} \times 10.5}{\underset{1}{\cancel{7}}} = 346.5$ چورس ميٽر

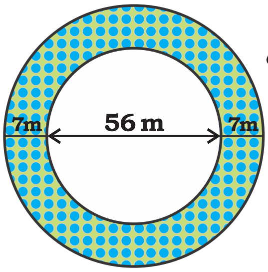
اهڙي طرح گول پَٽ جي ايراضي 346.5 چورس ميٽر آهي.

رنگدار فرش هڻڻ جي قيمت = ايراضي × شرح

= (150 × 346.5) رُپيا

= 51975.00 رُپيا

اهڙي طرح گول پَٽ تي فرش هڻڻ جي قيمت 51,975 آهي.



مثال 4: ٻن گول ميدانن جا قطر ۽ اُنهن جي چوڙاري رستي جي ويڪر شڪل ۾ ڏنل آهي. رستي جي ايراضي معلوم ڪريو ۽ 50 رُپيا في چورس ميٽر جي شرح سان اِن کي پڪو ڪرڻ جي قيمت پڻ معلوم ڪريو.

حل: اسان وٽ ٻہ گول ميدان آهن:

(i) ٻاهرين گول جو قطر = (56 + 14) ميٽر = 70 ميٽر

انهيءَ ڪري ٻاهرين گول جو رداس = R = $\frac{70}{2}$ ميٽر = 35 ميٽر

(ii) اندرين گول جو قطر = 56 ميٽر

انهيءَ ڪري اندرين گول جو رداس = r = 28 ميٽر

هاڻي اسين ٻنهي گولن جي ايراضي معلوم ڪريون ٿا:

ٻاهرين گول جي ايراضي $= \pi R^2 = \frac{22}{7} \times 35 \times 35 = \frac{22 \times \overset{5}{\cancel{35}} \times 35}{\underset{1}{\cancel{7}}} = 3,850$ چورس ميٽر

اندرين گول جي ايراضي $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 28 \times 28 = \frac{22 \times \overset{4}{\cancel{28}} \times 28}{\underset{1}{\cancel{7}}} = 2,464$ چورس ميٽر

اهڙي طرح (اندرين گول جي ايراضي – ٻاهرين گول جي ايراضي)= رستي جي ايراضي

1,386 چورس ميٽر = (2,464 چورس ميٽر – 3,850 چورس ميٽر)

رستي جي ايراضي × شرح = رستي کي پڪو ڪرڻ جي قيمت

= 1,386 × 50 رُپيا = 69,300 رُپيا

اهڙي طرح گول رستي کي پڪو ڪرڻ جي قيمت 69,300 رُپيا آهي.

مشق 12.5

1- هڪ گول باغيچي جو قطر 70 ميٽر آهي. باغيچي جي جهنگلي ۾ تار جا 5 چڪر آهن. جيڪڏهن تار جي قيمت 10 رُپيا في ميٽر آهي، ته تار جي ڪُل قيمت معلوم ڪريو.

2- هڪ گول ڪڙي جو رداس معلوم ڪريو، جيڪو اُن تار مان ٺهيو آهي جيڪا 22 س م ڊيگهه جي پاسي واري چورس ۾ استعمال ٿي آهي.

3- بائيسڪل جي ڦيٿي جو رداس 42 س م آهي. جڏهن احمد گهر کان اسڪول ڏانهن سفر ڪيائين ته هرهڪ ڦيٿي 1,000 چڪر پورا ڪيا. ميٽرن ۽ ڪلوميٽرن ۾ مفاصلو معلوم ڪريو.

4- هڪ تار جي قيمت 3,960 رُپيا آهي، جيڪا هڪ گول جهنگلي ۾ چار چڪرن لاءِ گهربل آهي. جيڪڏهن تار جي قيمت 5 رُپيا في ميٽر آهي، ته گول ميدان جو رداس معلوم ڪريو.

5- هڪ تار جي ٽُڪر کي موڙي ٽيور پاسو ٽڪنڊو ناهيو ويو آهي، جنهن جو هرهڪ پاسو 13.2 ميٽر ڊگهو آهي. اِهو وري موڙي هڪ گول ڪڙو ناهيو ويو آهي. اِن گول ڪڙي جو قطر ڇا ٿيندو؟

6- هڪ گول ٻنيءَ جي ايراضي ۾ 20 رُپيا في ميٽر جي شرح سان اُن ۾ باغ پوکڻ جي قيمت معلوم ڪريو، جڏهن ته گول ٻنيءَ جو رداس 14 ميٽر آهي.

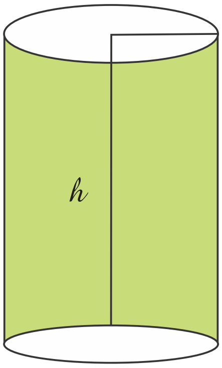
7- ٻه گول ميدان آهن. ٻاهرين گول ميدان جو قطر 49 ميٽر آهي. اندرين گول ميدان جو قطر 35 ميٽر آهي. رستي جي ايراضي ۾ 100 رُپيا في چورس ميٽر جي شرح سان اُن کي پڪو ڪرڻ جي قيمت معلوم ڪريو.

8- 2.8 ميٽر قطر جي هڪ گول ڪاٺ جي ميز آهي. ميز جي مٿاڇري جي ايراضي لهه ۾ 100 رُپيا في چورس ميٽر جي شرح سان اِن کي پالش ڪرڻ جي قيمت معلوم ڪريو.

9- ڇؤ واٽي جي مرڪز ۾ هڪ گول ڦوهارو ناهيو ويو آهي. اُن جو رداس 3.5 ميٽر آهي. ڦوهاري جي ايراضي ڇا ٿيندي؟ 75 رُپيا في چورس ميٽر جي شرح سان اُن کي رنگ ڪرڻ جي قيمت به معلوم ڪريو.

10- هڪ گول ڪاٺ جي ميز کي ڍڪڻ لاءِ هڪ ميز پوش ناهيو ويو آهي. ميز پوش جو قطر 3.5 ميٽر آهي. ميز پوش جي ايراضي ڇا ٿيندي؟ 80 رُپيا في چورس ميٽر جي شرح سان ڪپڙي جي قيمت به لکو.

12.2.3 (ب) سلينڊر جي متاچري جي ايراضي ۽ مقدار تي مشتمل عام زندگيءَ جا لکتي حساب حل ڪرڻ



مثال 1: هڪ ڪليل سلينڊر جي شڪل واري ٽانڪيءَ جي گول تري جو قطر 2.1 ميٽر آهي. ٽانڪيءَ جي اُوچائي 4 ميٽر آهي. معلوم ڪريو ته ٽانڪيءَ لاءِ ڪيترا چورس ميٽر اسٽيل جي چادر گهربل آهي؟ 400 رُپيا في چورس ميٽر جي شرح سان ٽانڪيءَ جي قيمت به لکو.

حل: گول تري جو قطر = 2.1 ميٽر

گول تري جو رداس = $r = \frac{2.1}{2}$ ميٽر

يا $r = 1.05$ ميٽر

گول جي ايراضي = گول تري جي ايراضي = πr^2

$A = \pi r^2$

چورس ميٽر $\left(\frac{22 \times \cancel{0.15}^{0.15} \times 1.05}{\cancel{7}_1}\right)$ = چورس ميٽر $\left(\frac{22}{7} \times 1.05 \times 1.05\right)$ =

چورس ميٽر 3.465 = چورس ميٽر (3.30×1.05) = چورس ميٽر $(22 \times 0.15 \times 1.05)$ =

سلينڊر جي مڙيل متاچري جي ايراضي = $2\pi rh$ = چورس ميٽر $\left(2 \times \frac{22}{7}\ 1.05 \times 4\right)$

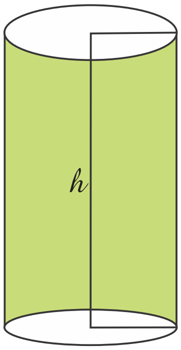
چورس ميٽر 26.40 = چورس ميٽر (44×0.60) = چورس ميٽر $\left(\frac{2 \times 22 \times \cancel{1.05}^{0.15} \times 4}{\cancel{7}_1}\right)$ =

هاڻي ٽانڪي ناهڻ لاءِ گهربل اسٽيل جي چادر جي ايراضي

= 26.40 چورس ميٽر + 3.465 چورس ميٽر

= 29.865 چورس ميٽر

ايراضي × شرح = ٽانڪيءَ جي قيمت = 29.865×400 = 11,946.00 رُپيا = 11,946 رُپيا



مثال 2: هڪ گول ڪوهہ جو رداس 1.4 ميٽر آهي ۽ اُن جي اُوچائي 20 ميٽر آهي. 300 رُپيا في ڪعب ميٽر جي شرح سان کوهہ کي ناهڻ جي قيمت معلوم ڪريو.

حل: گول ڪوهہ جي تري جو رداس = r = 1.4 ميٽر

ڪوهہ جي اوچائي = h = 20 ميٽر

ڪوهہ جو مقدار = $V = \pi r^2 h$

مقدار = $V = \frac{22}{7} \times 1.4 \times 1.4 \times 20 = \frac{22 \times \overset{0.2}{\cancel{1.4}} \times 1.4 \times 20}{\underset{1}{\cancel{7}}} = (4.4 \times 28.0)$

= 123.2 ڪعب ميٽر

مقدار × شرح = ناهڻ جي قيمت

= 123.2 × 300 = 36,960 رُپيا

اهڙي طرح ڪوهہ جو مقدار = 123.2 ڪعب ميٽر ۽ ڪوهہ ناهڻ جي قيمت 36,960 رُپيا آهي.

مشق 12.6

1- هڪ سلينڊر جي شڪل جي ڪليل حوض جو رداس 10.5 ميٽر آهي ۽ اُوچائي 8 ميٽر آهي. 50 رُپيا في چورس ميٽر جي شرح سان اُن گول جي پَٽ ۽ مُڙيل مٿاڇري کي پڪو ڪرڻ جي قيمت معلوم ڪريو.

2- 8.4 ميٽر اُوچائي واري سلينڊر جي شڪل واري اسٽيل جي ٽانڪيءَ جي مٿاڇري جي ڪُل ايراضي معلوم ڪريو. ان جي گول تري جو رداس 7 ميٽر آهي. 100 رُپيا في چورس ميٽر جي شرح سان اُن جي قيمت بہ لهو.

3- هڪ سلينڊر جي شڪل جي ڪليل ٽانڪيءَ جي تري جو قطر 2.8 ميٽر آهي. ٽانڪيءَ جي اُوچائي 5 ميٽر آهي. معلوم ڪريو تہ ٽانڪيءَ لاءِ اسٽيل جي چادر جا ڪيترا چورس ميٽر گهرجن؟ 300 رُپيا في چورس ميٽر جي شرح سان ٽانڪيءَ جي قيمت بہ معلوم ڪريو.

4- هڪ اسٽيل جو پائيپ جنهن جي ڊيگهہ 2.8 ميٽر ۽ رداس 7 ميٽر آهي. اُن جي مٿاڇري جي ايراضي لهو، جيڪڏهن پائيپ ٻنهي چيڙن کان ڪليل آهي.

5- هڪ تيل جي ڊرم جي مٿاڇري جي ايراضي لهو، جنهن جي ڊيگهہ 1.5 ميٽر آهي ۽ قطر 70 سينٽي ميٽر آهي.

6- هڪ گول پاڻيءَ جي ٽانڪيءَ جي گنجائش لٽرن ۾ معلوم ڪريو، جڏهن ته ٽانڪيءَ جي اُوچائي 5 ميٽر ۽ اُن جو قطر 4.2 ميٽر آهي. (اشارو: ميٽرن کي سينٽي ميٽرن ۾ بدلايو ۽ 1 لٽر = 1,000 ڪعب سينٽي ميٽر)

7- هڪ سلينڊر جي شڪل جي دٻي جي اُوچائي 63 س م ۽ رداس 25 س م آهي. معلوم ڪريو، ته دٻي ۾ ڪيترا لٽر تيل اچي سگهي ٿو؟

8- هڪ کوهه 16 ميٽر اُونهو آهي ۽ اُن جو قطر 7 ميٽر آهي. اُن کي پورڻ لاءِ گهٽي مٽي گهرجي؟

9- هڪ سافٽ ڊرنڪ جي دٻي جي ڊيگهه 10.5 س م ۽ رداس 3.5 س م آهي. دٻي جي گنجائش لٽرن ۾ معلوم ڪريو.

10- هڪ گول کوهه جو قطر 3.5 ميٽر ۽ اُونهائي 24 ميٽر آهي. 250 رُپيا في ڪعب ميٽر جي شرح سان اُن کي کوٽڻ جي قيمت ڇا ٿيندي؟

11- هڪ تيل جي ڊرم جو رداس معلوم ڪريو، جنهن جو مقدار 11 ڪعب ميٽر آهي.

12- هڪ تيل جي ڊرم جي گنجائش 3,850 لٽر آهي. اُن جو مقدار ڪعب س م ۾ ڇا ٿيندو؟ اُن جي اُوچائي ميٽرن ۾ معلوم ڪريو، جڏهن اُن جو رداس 70 س م آهي.

13- هڪ گول سلينڊر جي شڪل واري مسجد جو اندريون قطر 28 ميٽر آهي ۽ مٿيل پٿين جي اُوچائي 8.75 ميٽر آهي. 200 رُپيا في چورس ميٽر جي شرح سان پٿين تي ٽائل لڳائڻ جو خرچ معلوم ڪريو.

14- ترڻ واري تلاءَ (Swimming Pool) جو قطر 42 ميٽر آهي. اُونهائي 5 ميٽر آهي. 100 رُپيا في چورس ميٽر جي شرح سان پٿين جي چوڌاري ٽائل لڳائڻ جو خرچ معلوم ڪريو.

جائزي واري مشق 12

A. هيٺين جا جواب ڏيو:

1. گول جو گهيرو ڇا آهي؟ گهيرو معلوم ڪرڻ جو فارمولو لکو.
2. گول جي گهيري ۽ قطر جي وچ ۾ ڇا تعلق آهي؟
3. گول جو قطر ڇا آهي؟ قطر ۽ رداس جي وچ ۾ تعلق ٻڌايو.
4. گول جو رداس ڇا آهي؟ گول جي ايراضي معلوم ڪرڻ لاءِ فارمولو لکو.

5. سلينڊر جي متاچري جي ڪُل ايراضيءَ جو فارمولو لکو.
6. سلينڊر جو مقدار ڇا آهي؟ اُن جو فارمولو لکو.
7. گول جي گهيري مان قطر معلوم ڪرڻ جو فارمولو ڇا آهي؟
8. جيڪڏهن سلينڊر ۾ رداس = اُوچائي، ته سلينڊر جو مقدار معلوم ڪرڻ جو فارمولو ڇا آهي؟

B. خال ڀريو:

1. سلينڊر جي مڙيل متاچري جي ايراضي معلوم ڪرڻ جو فارمولو ________ آهي.
2. سافٽ ڊرنڪ جو ڊبو ________ جي مثال آهي.
3. 5 رُپين جا ڍير سڪا کڻو. هڪ ٻئي جي مٿان لڳايو ته ______ جي شڪل حاصل ٿيندي.
4. جڏهن سلينڊر جو رداس ميٽرن ۾ آهي. سلينڊر جي مقدار جو ايڪو ________ ٿيندو.
5. ڏهائيءَ جي ٽن درجن تائين π جو مُلهه ________ آهي.

C. هيٺيان زباني حل ڪريو ۽ دُرست جواب تي (✓) جو نشان لڳايو.

1. گول جو گهيرو ________ س م آهي، جيڪڏهن اُن جو قطر 7 س م آهي.

(i) $\frac{22}{7}$ (ii) $\frac{7}{22}$ (iii) 7 (iv) 22

2. گول جي ايراضي ________ چورس س م آهي، جيڪڏهن اُن جو رداس 1 س م آهي.

(i) $\frac{22}{7}$ (ii) $\frac{7}{22}$ (iii) $\frac{1}{7}$ (iv) $\frac{1}{22}$

3. سلينڊر جي گول تري جي ايراضي ________ چورس س م آهي.

(i) $\frac{1}{7}$ (ii) 7 (iii) $\frac{1}{22}$ (iv) 22

4. سلينڊر جي مڙيل متاچري جي ايراضي ________ چورس س م آهي، جيڪڏهن $r = 7$ س م ۽ $h = \frac{1}{22}$ س م

(i) 1 (ii) 2 (iii) 3 (iv) 4

5. سلينڊر جي متاچري جي ڪُل ايراضي ________ چورس س م آهي، جيڪڏهن: $r = 1$ س م ۽ $h = 1$ س م.

(i) 2π (ii) 3π (iii) 4π (iv) π

6. سلينڊر جو مقدار ________ ڪعب س م آهي، جڏهن ته $r = 1$ س م ۽ $h = 1$ س م.

(i) $\frac{22}{7}$ (ii) $\frac{7}{22}$ (iii) 22 (iv) 7

7. سلينڊر جي هيٺين گول تري ۽ مٿين گول تري جي ايراضي ______ چورس س م آهي،
جڏهن: س م $r = 1$.

(i) $\frac{22}{7}$ (ii) $\frac{44}{7}$ (iii) $\frac{7}{22}$ (iv) $\frac{7}{44}$

8. هڪ تيل جي ڊرم جي اُوچائي 1 ميٽر آهي ۽ ڊرم جو رداس 1 ميٽر آهي، ته اُن جو مقدار ______ ڪعب ميٽر آهي.

(i) 7 (ii) 22 (iii) $\frac{22}{7}$ (iv) $\frac{7}{22}$

9. هڪ گهڙيال جي منٽن واري سُئيءَ جي ڊيگهه 3.5 س م آهي. هڪ ڪلاڪ ۾ ______ مفاصلو پورو ٿيندو.

(i) 22 س م (ii) 7 س م (iii) 3.5 س م (iv) 2.2 س م

10. هڪ گول جو رداس ڊيگهه ۾ ٻيڻو وڌيو آهي. گول جي ايراضي ______ وڌندي.

(i) ٻيڻي (ii) ٽيڻي (iii) چوڻي (iv) ڪابه نه

خلاصو

- گول جو گهيرو، گول جي حدن جي چوڙاري ڊيگهه آهي:
  گهيرو گول جو = $C = \pi d$ يا $C = 2\pi r$
- گول جي گهيري ۽ قطر جي وچ ۾ نسبت کي π سان ظاهر ڪبو آهي. يعني:
  $$\frac{\text{گول جو گهيرو}}{\text{گول جو قطر}} = \frac{22}{7} = 3.14 = \pi$$
- گول جي ايراضي، گول جي علائقي جي ايراضي هوندي آهي، جيڪا گول جي اندر چورس ايڪن جو تعداد آهي: $A = \pi r^2$
- سلينڊر جي متاچري جا ٽي حصا ٿين ٿا. ٻه برابر گول متاچرا ۽ ٽيون مُڙيل متاچرو.
  سلينڊر جي متاچري جي ڪُل ايراضي = $\pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r+h)$
- سلينڊر جي اُوچائي × گول جي ايراضي = سلينڊر جو مقدار
  $$V = \pi r^2 \times h$$
  $$V = \pi r^2 h \text{ ڪعب ايڪا}$$

معلومات سهيڙڻ

تعارف:

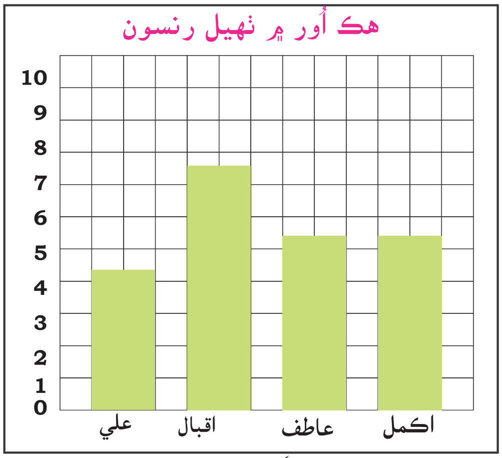
شماريات جي مضمون ۾ معلومات سهيڙڻ هڪ اهم ڪردار ادا ڪري ٿي. هي مضمون گذريل ڪجھ صدين دوران لاڳيتو وڌي رهيو آهي ۽ اِن جي وصف پڻ تبديل ٿي رهي آهي. قديم زماني ۾ اِهو مضمون حڪمرانن جي اِن خواهش تي شروع ٿيو ته اِنهن جي بادشاهت ۾ ماڻهن جو تعداد يا طاقت گهٽي آهي؟ اِن ڄاڻ لاءِ اُهي سني انتظامي نموني سان مردم شماري ڪرائيندا هئا. اهڙي طرح اُهي پنهنجي طاقت ۽ جنگ وڙهڻ جي صلاحيت جي باري ۾ چڱي طرح باخبر رهندا هئا. اِن ڪري شماريات کي حڪمرانن جو علم يا سياست وارو حسابي عمل به چئبو آهي.

13.1 تعددي تقسيم يا ورهاست (Frequency Distribution)

13.1.1 مواد يا معلومات کي پيش ڪري ڏيکارڻ

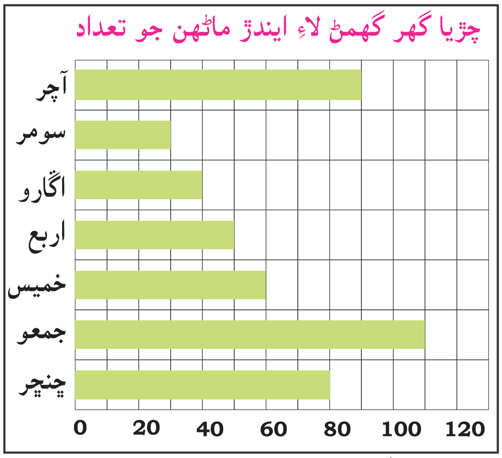
اسان پنهنجي عام زندگيءَ ۾ معلومات گڏ ڪندا آهيون ۽ اِن کي مختلف طريقن، ڪالمي گراف (Bar graph)، چارٽ وغيره ۾ پيش ڪندا آهيون. اِهو اِن ڪري ڪندا آهيون جو معلومات آسانيءَ سان سمجهي سگهجي ۽ ڪارائتا نتيجا حاصل ڪري سگهجن.

I



رانديگرن جو تعداد

II



گهمڻ لاءِ ايندڙ ماڻهن جو تعداد

گذريل ڪلاس ۾ سکي چڪا آهيون ته مواد جو مطلب آهي معلومات جي باري ۾ اُهي حقيقتون، جيڪي پيمائش، مشاهدي يا تجربي جا نتيجا هجن.

ماضيءَ جي ڪارڪردگيءَ ۽ مستقبل جي رٿابنديءَ جي نظر ثاني ڪرڻ ۾ اِهي نتيجا اسان جي مدد ڪندا آهن.

مواد گڏ ڪرڻ کان پوءِ سڀ کان اهم ڏاڪو اِن کي پيش ڪرڻ هوندو آهي. گروهي مواد کي ظاهر ڪرڻ ۽ اِن جي ڳڻپ ڪرڻ لاءِ مطابقت وارا چارٽ (Tally Chart) استعمال ٿيندا آهن.

هيٺين جدول ستين ڪلاس جي شاگردن جو اِهو مواد پيش ڪري ٿي، جنهن مان خبر پوي ٿي ته شاگرد اسڪول ڪيئن وڃن ٿا.

توهان اسڪول ڪيئن وڃو ٿا!		شاگردن جو تعداد
پيرين پنڌ	~~IIII~~ IIII	9
ڪار ۾	~~IIII~~ I	6
بس ۾	~~IIII~~ ~~IIII~~ III	13

13.1.2 تعددي تقسيم يا ورهاست بيان ڪرڻ (يعني تعدد، هيٺين جماعتي حد، مٿين جماعتي حد ۽ جماعتي وقفو)

1. تعدد (Frequency):

اِنهن مقدارن جو تعداد، جيڪي مواد جي ڪنهن خاص گروهه لاءِ اچن، تنهن کي تعدد چئبو آهي.

مثال 1: ستين ڪلاس جي ويهه شاگردن جي هڪ گروهه سائنس ٽيسٽ ۾ هيٺيون مارڪون حاصل ڪيون:

16، 11، 40، 27، 38، 55، 45، 70، 50، 65، 60، 41، 100، 71، 80، 75، 82، 85، 92 ۽ 89.

ڏاڪا:

(i) مواد کي ننڍي وڏائي ترتيب ۾ لکو.

11، 16، 27، 38، 40، 41، 45، 50، 55، 60، 65، 70، 71، 75، 80، 82، 85، 89، 92 ۽ 100.

(ii) ٽن گروهن جي مناسب تعداد جو وقفو ٺاهيو.

پهريون، اُنهن شاگردن جو، جن 11 کان 40 مارڪون حاصل ڪيون.

ٻيو، اُنهن شاگردن جو، جن 41 کان 70 مارڪون حاصل ڪيون.

ٽيون، اُنهن شاگردن جو، جن 71 کان 100 تائين مارڪون حاصل ڪيون.

(iii) تعددي چارٽ هيٺين ريت ناهيو:

جماعت جو نالو	جماعتي وقفو	حاصل ڪيل مارڪون	شاگردن جو تعداد	مطابقت جا نشان
پهرين	11-40	11، 16، 27، 38 ۽ 40	5	~~||||~~
ٻين	41-70	41، 45، 54، 55، 60، 65 ۽ 70	7	~~||||~~ II
ٽين	71-100	71، 75، 80، 82، 85، 89، 92 ۽ 100	8	~~||||~~ III

مٿين تعددي چارٽ جي وضاحت هيٺين ريت آهي:

(11-40) جو تعدد 5 آهي. هتي 5 شاگردن 11 کان 40 تائين مارڪون حاصل ڪيون.

(41-70) جو تعدد 7 آهي. هتي 7 شاگردن 41 کان 70 تائين مارڪون حاصل ڪيون.

(71-100) جو تعدد 8 آهي. هتي 8 شاگردن 71 کان 100 تائين مارڪون حاصل ڪيون.

جماعتي وقفا: مواد جي هرهڪ گروهه کي جماعتي وقفو به چئبو آهي. مثال طور: (11-40)، (41-70) ۽ (71-100) ٽي جماعتي وقفا آهن، جيڪي ڪنهن گروهه جي مقدارن کي ظاهر ڪن ٿا.

مٿين جماعتي حد: ڪنهن جماعتي وقفي جي وڏي ۾ وڏي مقدار کي مٿين جماعتي حد چئبو آهي. مثال طور: جماعتي وقفي (41-70) ۾ 70 مٿين جماعتي حد آهي.

هيٺين جماعتي حد: ڪنهن جماعتي وقفي جي ننڍي ۾ ننڍي مقدار کي هيٺين جماعتي حد چئبو آهي. مثال طور: جماعتي وقفي (71-100) ۾ 71 هيٺين جماعتي حد آهي.

جماعتي وقفي جي ڊيگهه (Size of Class Interval): جماعتي وقفي ۾ مقدارن جي تعداد کي جماعتي وقفي جي ڊيگهه چئبو آهي. مثال طور: جماعتي وقفي (11-40) جي ڊيگهه 30 آهي.

مثال: ستين ڪلاس ۾ 40 شاگرد آهن، جن انگريزيءَ جي ٽيسٽ ۾ هيٺيون مارڪون حاصل ڪيون. ساڳي ڊيگهه وارا 5 جماعتي وقفا استعمال ڪندي، تعددي جدول يا تعددي ورهاست جو چارٽ ناهيو.

26, 41, 17, 15, 18, 60, 46, 33, 24, 15, 52, 39, 28, 89, 74, 68, 56, 38, 92, 49, 28, 82, 19, 21, 34, 23, 43, 77, 65, 64, 21, 59, 15, 33, 66, 29, 33, 65, 35, 39.

حل: حاصل ڪيل مارڪن کي هيٺين ريت ننڍي وڏائي ترتيب ۾ لکو:

9, 15, 15, 15, 17, 18, 19, 21, 21, 23, 26, 26, 28, 28, 29, 33, 33, 33, 34, 35, 38, 39, 39, 43, 46, 49, 52, 56, 59, 60, 64, 65, 65, 66, 68, 74, 77, 82, 89, 92.

اسان کي خبر آهي ته:

$$\text{جماعتي وقفي جي ڊيگهه} = \frac{\text{سڀ کان ننڍو مقدار} - \text{سڀ کان وڏو مقدار}}{\text{جماعتي وقفن جو تعداد}}$$

اسان متين غير گروهي مواد (ننڍي وڏائي ترتيب ۾ لکيل) مان ڏسي سگهون ٿا ته:

سڀ کان وڏو مقدار = 92

سڀ کان ننڍو مقدار = 9

جماعتي وقفن جو تعداد = 5

اِنهيءَ ڪري جماعتي وقفي جي ڊيگهه $= \frac{92-9}{5} = \frac{83}{5} = 16.6 \approx 17$

جماعتي وقفو	مطابقت جون نشانيون	تعداد
9-25	𝍸 𝍸	10
26-42	𝍸 𝍸 III	13
43-59	𝍸 I	6
60-76	𝍸 II	7
77-93	IIII	4

مشق 13.1

1. هڪ ڪتابن جي دُڪاندار گذريل هفتي ڪهاڻين وارن ڪتابن جو روزاني وڪرو هيٺين ريت ڪيو. تعددي ورهاست واري جدول (چارٽ) ناهيو.

ڏينهن جو نالو	سومر	اڱارو	اربع	خميس	جمعو	ڇنڇر	آچر
وڪرو ٿيل ڪتابن جو تعداد	24	25	27	28	22	30	21

2. 12 بجلي واپرائيندڙن جا ادا ڪيل بجليءَ جا بل هيٺ ڏنل آهن. ساڳي ڊيگهه وارن 5 جماعتي وقفن جي تعددي ورهاست واري جدول ناهيو:
5100 رُپيا، 7000 رُپيا، 3560 رُپيا، 6030 رُپيا، 4220 رُپيا، 6740 رُپيا، 4810 رُپيا، 5450 رُپيا، 7180 رُپيا، 5920 رُپيا، 6850 رُپيا ۽ 5690 رُپيا.

3. هڪ ساليانَي امتحان ۾، هڪ اسڪول جي 20 شاگردن 850 مارڪن مان هيٺيون مارڪون حاصل ڪيون. جماعتي وقفي جي ڊيگهه 10 رکندي، تعددي ورهاست واري جدول (چارٽ) ناهيو.

551, 786, 678, 725, 788, 580, 720, 690, 750, 651, 599, 609, 719, 760, 625, 775, 646, 667, 753, 675.

4. هيٺيون مواد اُنهن ٻارن جو تعداد ڏيکاري ٿو، جيڪي گذريل مهيني چڙيا گهر گهمڻ آيا.

134, 167, 145, 130, 155, 142, 130, 180, 162, 130, 120, 165, 170, 110, 200, 185, 132, 140, 110, 170, 100, 160, 133, 150, 125, 110, 145, 155, 160, 200.

جماعتي وقفي جي ڊيگهه 10 ڪٽندي، تعددي ورهاست واري جدول (چارٽ) ناهيو.

5. ستين ڪلاس ۾ 30 شاگرد آهن، جن رياضيءَ جي ٽيسٽ ۾ هيٺيون مارڪون حاصل ڪيون:

45, 19, 49, 17, 37, 10, 25, 28, 50, 46, 43, 34, 25, 50, 48 46, 42, 34, 33, 11, 28, 19, 30, 17, 13, 11, 39, 41, 35, 34.

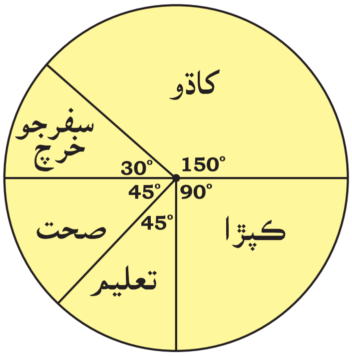
ساڳي ڊيگهه وارا 5 جماعتي وقفا استعمال ڪندي، عددي ورهاست جي جدول (چارٽ) ناهيو.

13.2 قطعاتي گراف يا گولائي گراف (Pie Graph)

گولائي گراف کي سمجهڻ ۽ ناهڻ

گولائي گراف عام طرح سان اُنهن عددي حقيقتن جي پيٽ لاءِ استعمال ٿيندو آهي، جيڪي مختلف جماعتن ۾ ورهايل هونديون آهن. اِن گراف ۾ مرڪزي ڪنڊ $360°$ جي هوندي آهي، جيڪا وري اِن گروهن جي مُلهن جي نسبت ۾ ورهائبي آهي، جيڪي گروهه اِن گراف وسيلي ظاهر ڪيا آهن. هيٺيون مثال گولائي گراف جي تصور کي سمجهڻ ۾ مدد ڪندو.

مثال 1: هڪ شاگرد جي هفتي جو خرچ 3600 رُپيا آهي. اِهو هيٺين گولائي گراف سان ظاهر ڪيل آهي.



گولائي گراف کي پڙهو ۽ جواب ڏيو.

(i) هرهڪ شيءِ جو خرچ ڏيکاريندڙ چارٽ ناهيو.

(ii) ڪهڙي شيءِ تي هن سڀ کان وڌيڪ خرچ ڪيو ۽ ڪيترو؟

(iii) ڪهڙي شيءِ تي هن سڀ کان گهٽ خرچ ڪيو ۽ ڪيترو؟

(iv) ڪهڙين شين تي هن ساڳيو خرچ ڪيو ۽ ڪيترو؟

حل: هتي سڄو گول 360° ۾ ورهايو ويو آهي. هتي پنج سيڪٽر آهن. سڀ کان وڏي سيڪٽر جي ڪُنڊ 150° آهي. اِها کاڌي تي استعمال ٿيل خرچ ڏيکاري ٿي. تعليم ۽ صحت وارا ٻئي سيڪٽر هڪ جيترا آهن. اِنهيءَ ڪري،

(i) کاڌي تي خرچ ڪيل رقم $= \frac{3600 \times 150^\circ}{360^\circ}$ رُپيا $= \frac{\cancel{3600}^{10} \times 150}{\cancel{360}_1}$ رُپيا $= 1500$ رُپيا

(ii) ڪپڙن تي خرچ ڪيل رقم $= \frac{3600 \times 90^\circ}{360^\circ}$ رُپيا $= \frac{\cancel{3600}^{10} \times 90^\circ}{\cancel{360}_1}$ رُپيا $= 900$ رُپيا

(iii) تعليم يا صحت تي استعمال ڪيل رقم $= \frac{3600 \times 45^\circ}{360^\circ}$ رُپيا $= \frac{\cancel{3600}^{10} \times 45}{\cancel{360}_1}$ رُپيا $= 4500$ رُپيا

(iv) سفر جو خرچ $= \frac{3600 \times 30^\circ}{360^\circ}$ رُپيا $= \frac{\cancel{3600}^{10} \times 30}{\cancel{360}_1}$ رُپيا $= 300$ رُپيا

شيءِ جو نالو	کاڌو	ڪپڙا	تعليم	صحت	سفر جو خرچ
خرچ ڪيل رقم	1500 رُپيا	900 رُپيا	450 رُپيا	450 رُپيا	300 رُپيا

گولائي گراف مان ظاهر ٿئي ٿو ته سڀ کان وڌيڪ رقم کاڌي تي خرچ ٿي يعني 1500 رُپيا.

گولائي گراف مان ظاهر ٿئي ٿو ته سڀ کان گهٽ رقم سفر لاءِ خرچ ٿي يعني 300 رُپيا.

گولائي گراف مان ظاهر ٿئي ٿو، تہ ساڳي رقم تعليم ۽ صحت تي خرچ ٿي يعني 450 رُپيا.

مثال 2: شاگردن جي ضلعي راندين جي مقابلي ۾ 750 رانديگرن ڪرڪيٽ راند ڪيڏي، 200 رانديگرن بيڊ منٽن راند ڪيڏي، 400 رانديگرن هاڪي راند ڪيڏي ۽ 450 رانديگر شاگردن فٽبال راند ڪيڏي. راند ڪيڏندڙ شاگردن جو گولائي گراف ناهيو.

حل: شاگردن جو ڪُل تعداد = 1800

(i) هينيون فارمولو استعمال ڪندي هرهڪ سيڪٽر جي ڪند معلوم ڪريو.

$$360^\circ \times \frac{\text{هڪ راند ڪيڏندڙ شاگردن جو تعداد}}{\text{رانديگر شاگردن جو ڪُل تعداد}} = \text{گهربل ڪند}$$

بيڊ منٽن راند سان جڙيل ڪند جي ماپ $= \frac{200}{1800} \times 360^\circ = 40^\circ$

ڪرڪيٽ راند سان جڙيل ڪند جي ماپ $= \frac{750}{1800} \times 360^\circ = 150^\circ$

هاڪي راند سان جڙيل ڪند جي ماپ $= \frac{400}{1800} \times 360^\circ = 80^\circ$

فٽبال راند سان جڙيل ڪند جي ماپ $= \frac{450}{1800} \times 360^\circ = 90^\circ$

(ii) گولائي گراف ناهڻ:

ڏاڪو 1: مناسب رداس جو هڪ گول ڪيو.

ڏاڪو 2: بيڊ منٽن راند کي ظاهر ڪندڙ 40° جي ڪند ناهيو. (40°)

ڏاڪو 3: ڪرڪيٽ راند کي ظاهر ڪندڙ 150° جي ڪند ناهيو. (150°)

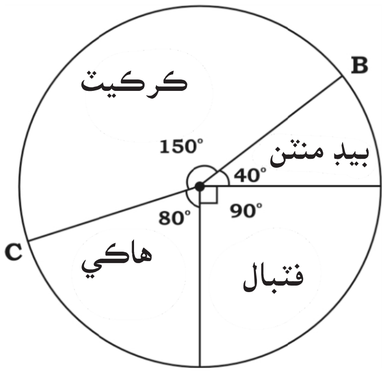
ڏاڪو 4: هاڪي راند کي ظاهر ڪندڙ 80° جي ڪند ناهيو. (80°)

ڏاڪو 5: فٽبال راند کي ظاهر ڪندڙ باقي بچيل ڪند 90° جي ٿيندي. (90°)

ڪُل = 360°

(iii) شڪل جي مطابق هرهڪ سيڪٽر کي نالو ڏيو.

(iv) هيٺين جا جواب ڏيو:



1- سڀ کان وڌيڪ وٽندڙ ۽ پسنديده راند ڪهڙي آهي؟
ڪرڪيٽ

2- شاگردن جي سڀ کان گهٽ تعداد ۾ وٽندڙ ۽ پسنديده راند ڪهڙي آهي؟
بيڊ منٽن

3- هاڪي راند جي مقابلي ۾ ڪيترن وڌيڪ شاگردن فٽبال راند ڪيڏي؟
50 شاگردن

4- هاڪي راند جي مقابلي ۾ ڪيترن گهٽ شاگردن بيڊ منٽن راند ڪيڏي؟
200 شاگردن

مشق 13.2

1- رياضيءَ جي زباني آزمائشي ٽيسٽ ۾ 80 شاگردن حصو ورتو. 60 شاگرد پاس ٿيا ۽ 20 شاگرد فيل ٿيا. ان کي گولائي گراف ۾ پيش ڪريو.

2- ستين ڪلاس ۾ 36 شاگرد آهن. 16 جو وٽندڙ رنگ ڳاڙهو آهي. 9 شاگردن جو نيرو، 7 شاگردن جو گلابي ۽ چار شاگردن جو وٽندڙ رنگ اڇو آهي. اِن جو گولائي گراف ناهيو.

3- سارا ۽ هن جي دوستن هفتي ۾ جيڪو ميوو کاڌو، اِهو هيٺين ريت جدول (چارٽ) ۾ ڏيکاريل آهي.

ميوي جو نالو	صوف	ڪيلو	انب	آڙو
ميون جو تعداد	12	24	16	8

جدول استعمال ڪندي، گولائي گراف ناهيو.

4- هڪ محفل ۾ جمال مهمانن کي هيٺيون کاڌي جون شيون پيش ڪيون:

کاڌي جي شيءِ	ڪولڊ ڊرنڪ	سينڊوچ	برگر	سموسا
تعداد	180	124	330	86

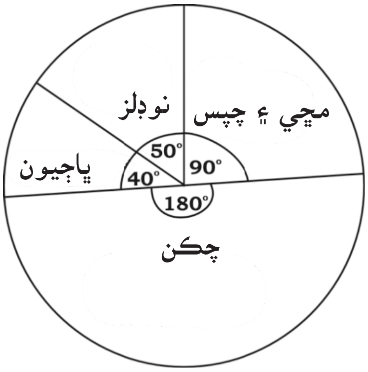
گولائي گراف ناهڻ لاءِ جدول (چارٽ) جو استعمال ڪريو.

5- هيٺيون مواد ڪلوميٽرن ۾ اِهو مفاصلو ظاهر ڪري ٿو، جيڪو هوريہ گڏريل مهيني سفر ڪري پورو ڪيو.

90, 44, 55, 49, 28, 9, 92, 27, 18, 84, 50, 60, 79, 69, 24, 89, 63, 74, 35, 48, 39, 80.

ساڳي ڊيگهہ جا 6 جماعتي وقفا استعمال ڪندي، عددي جدول (چارٽ) ٺاهيو. اِن جو گولائي گراف بہ ٺاهيو.

6- حنا 180 شاگردياڻين کان اِنهن جي وڻندڙ کاڌي جي باري ۾ پڇيو. هِن گولائي گراف ٺاهيو.



گولائي گراف پڙهو ۽ هيٺين جا جواب ڏيو.

(i) سڀ کان وڌيڪ وڻندڙ کاڌو ڪهڙو آهي ۽ ڪيترن شاگردن اِن کي پسند ڪيو؟

(ii) ڪهڙو کاڌو شاگردن جي سڀ کان گهٽ تعداد پسند ڪيو ۽ ڪيترن شاگردن اِن کي پسند ڪيو؟

(iii) ڪيترن شاگردن پستن واريون نوڊلز کي پسند ڪيو؟

(iv) گولائي گراف استعمال ڪريو ۽ جدول (چارٽ) مڪمل ڪريو.

وڻندڙ کاڌو	تعداد	ڪنڊ
چڪن	90	180°
پستن واريون نوڊلز		50°
پاڃيون		
مڇي ۽ چپس	40	
ڪُل	180	

جائزي واري مشق 13

1- خال پريو:

(i) معلومات اُهي ______ آهن، جيڪي عام طرح سان پيمائش، مشاهدي ۽ تجربي جا نتيجا آهن.

(ii) اُنهن مقدارن جي تعداد جيڪي مواد جي ڪنهن گروهه ۾ اچن، اِن تعداد کي ______ چئبو آهي.

(iii) مواد ______ شڪل ۾ گڏ ڪيو ويندو آهي ۽ اِهو شين يا ماڻهن جي باري ۾ معلومات مهيا ڪري ٿو.

(iv) جماعتي وقفي جي سڀ کان ننڍي مقدار کي ______ چئبو آهي.

(v) اِها جدول جيڪا جماعتي وقفن جي تعدد کي ظاهر ڪري، اِن کي ______ چئبو آهي.

(vi) مواد گڏ ڪرڻ کان پوءِ، سڀ کان اهم ڏاڪو ______ آهي.

(vii) اِن طريقي کي ______ چئبو آهي، جيڪو نتيجن کي لکي رکڻ لاءِ استعمال ٿيندو آهي.

(viii) جماعتي وقفي جي سڀ کان وڏي مقدار کي ______ چئبو آهي.

(ix) جماعتي وقفي ۾ مقدارن جي تعداد کي ______ چئبو آهي.

(x) گول جي سيڪٽرن جي شڪل ۾ عددي مواد جي اظهار کي ______ چئبو آهي.

2- دُرست جواب تي (✓) جو نشان لڳايو.

(i) گولائي گراف ۾ مرڪزي ڪنڊ جي ماپ ______ هوندي آهي.

(a) 90° (b) 180° (c) 24° (d) 360°

(ii) جماعتي وقفي (10-50) ۾، جماعتي وقفي جي مٿين حد ______ آهي.

(a) 11 (b) 10 (c) 50 (d) 51

(iii) جماعتي وقفي (9-12) ۾ جماعتي وقفي جي هيٺين حد ______ آهي.

(a) 9 (b) 8 (c) 13 (d) 14

(iv) گروهي مواد ۾، سڀ کان وڏو مقدار = 21، سڀ کان ننڍو مقدار = 3 ۽ جماعتي وقفن جو تعداد = 3 ته جماعتي وقفي جي ديگهه ______ ٿيندي.

(a) 3 (b) 6 (c) 18 (d) 21

3- هفتي جي دوران باغ ۾ گهمڻ لاءِ ايندڙ ماڻهن جي عمريون هيٺ ڏنل آهن. جماعتي وقفي جي ڊيگهه 10 ڪٽندي مواد کي گروهي شڪل ڏيو.

25, 50, 49, 47, 26, 10, 2, 1, 15, 17, 18, 19, 27, 28, 30, 35, 17, 32, 31, 3, 4, 9, 10, 15, 12, 13, 17, 24, 20, 22, 24, 26, 30, 17, 35, 40, 36, 32, 31, 37.

خلاصو

- مواد جو مطلب آهي معلومات جا گروهه جيڪي عام طرح سان پيمائش، مشاهدي يا تجربي جا نتيجا هوندا آهن.
- مواد پکريائين غير ترتيب واري شڪل ۾ گڏ ڪيو ويندو آهي ۽ اِهو اسان کي ماڻهن يا شين جي باري ۾ معلومات ڏيندو آهي. اِن قسم جي مواد کي غير گروهي مواد چئبو آهي.
- جماعتي وقفي ۾ ايندڙ مقدارن جي تعداد کي تعدد چئبو آهي.
- گروهي مواد ۾ هرهڪ گروهه کي جماعتي وقفو به چئبو آهي.
- جماعتي وقفي جي سڀ کان وڏي مقدار کي جماعتي وقفي جي مٿين حد چئبو آهي.
- جماعتي وقفي جي سڀ کان ننڍي مقدار کي جماعتي وقفي جي هيٺين حد چئبو آهي.
- اها جدول جيڪا جماعتي وقفن جي تعدد کي ظاهر ڪري، تنهن کي تعددي جدول چئبو آهي.
- گول جي منفرد سيڪٽرن جي شڪل ۾ عددي مواد جي اظهار کي گولائي گراف چئبو آهي.
- گولائي گراف ۾، مرڪزي ڪند $360°$ جي هوندي آهي، جيڪا وري گروهن جي مُلهن جي نسبت ۾ ورهائبي آهي.

دماغي ذخيرو: نهايت ئي دلچسپ ۽ عُمدي جاچ

هڪ اُستاد پنهنجي ڪلاس ۾ شاگردن کي چوي ٿو ته هڪ اٽپور $\frac{16}{64}$ کي سادي صورت ۾ آڻيو. عابد يڪدم هٿ مٿي ڪيو ۽ بورڊ تي هن ريت سمجهايو.

عابد بورڊ تي $\frac{16}{64}$ لکي،اُنس ۽ چيد بنهي ۽ $\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}$ جا 6 ۽ 6 پاڻ ۾ ڪٽي، درست جواب $\frac{1}{4}$ لکيو.

اِن ۾ شڪ بلڪل ناهي ته جواب درست آهي. پر استاد ڪيس زيرو مارڪون ڏنيون.

ساڳي قسم جي ٻئي سوال $\frac{19}{95}$ کي به اُنس ۽ چيد بنهي جا $\frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5}$ 9 ۽ 9 پاڻ ۾ ڪٽي درست جواب $\frac{1}{5}$ لکي سگهجي ٿو. اِنهيءَ نموني جا ڪجهه ٻيا سوال اوهان به ناهي ڏيکاريو.

اصطلاح

آلجبري اظهار: رياضيءَ جي چئن بنيادي عملن +، −، × ۽ ÷ سان گڏ بدلجندڙن ۽ مستقل جو پاڻ ۾ ميل يا ڳانڍاپو.

اُبتو تناسب: اِهڙو لاڳاپو جنهن ۾ هڪ مقدار جنهن نسبت سان وڌي، ته اُن جو لاڳاپيل مقدار به ساڳي نسبت سان گهٽجي ۽ اِن جو اُبتڙ عمل به ٿئي.

اڻ ڪُٽندڙ ڏهائي عدد: اِهڙو ڏهائي اٽيور، جنهن ۾ ڏهائيءَ کان پوءِ انگن جو لامحدود تعداد هجي.

اڌ گول: هڪ گول جو پورو اڌ ٿئي ٿو.

ٻه رقمي: اُها گهڻ رقمي، جنهن کي فقط ٻه رقمون هجن. مثال طور: $x+y$، $3a-bc^2$ ۽ y^2+z

ٻيو مول: اهو عدد جنهن کي جيڪڏهن پنهنجو پاڻ سان ضرب ڪجي ته اهو اصلي عدد ملي. ٻئي مول جي نشاني '$\sqrt{\ }$' آهي.

ٻن سيٽن جو ميلاپ: اُهو سيٽ جنهن ۾ سيٽ A ۽ سيٽ B جا سڀ رُڪن شامل هجن. سيٽن جي ميلاپ جي علامت '$\cup$' آهي.

پر واريون ڪندون: اُهي ٻه ڪندون، جن کي هڪ چوٽي ۽ هڪ ٻانهن عام آهي، پر ٻيو ڪوبه ٽپڪو اُن جي اندرين ۾ عام نه آهي.

تعدد: ڪنهن مُلهه جو تعداد جيڪو ڪنهن خاص گروهي مواد ۾ ظاهر ٿئي. مثال طور: [40-11] واري گروهي مواد ۾ تعدد 5 آهي، جنهن جو مطلب ته 11 کان 40 واري گروهي مواد ۾ فقط 5 مُلهه آهن.

ٽڪنڊي جي عمودي اُوچائي: ڪنهن به ٽڪنڊي ۾ اِها هڪ عمودي ڊيگهه (Altitude) آهي، جيڪا ٽڪنڊي جي چوٽيءَ مان نڪري ٽڪنڊي جي پايي تي پوي ٿي.

ٽه رقمي: اُها گهڻ رقمي، جنهن ۾ فقط ٽي رُڪن هجن. مثال: a^3+2a-b، x^2+2x+1 .

پايو: جڏهن ڪنهن عدد کي سگهه جي صورت ۾ لکون ٿا، ته اُهو عدد جيڪو پنهنجو پاڻ سان ضرب ٿيل آهي، اُهو پايو آهي. مثال طور: $2^3 = 8$، هتي 2، پايو آهي.

پورو چورس يا مڪمل چورس: اهڙو واڌو عدد، جيڪو ڪنهن عدد جو چورس هجي. مثال: 4، 9، 16، 25 وغيره.

پاءِ: گول جي گهيري ۽ قطر جي نسبت کي پاءِ چئبو آهي. اِن جي علامت π آهي ۽ $\pi = 3.14$ (تقريبًا)

جائداد ٽيڪس: اُها في آهي، جيڪا حڪومت ڪنهن شخص جي جائيداد يا ذاتي ملڪيت تي وٺي ٿي.

جدولي طريقو: سيٽن جي لکڻ جو اُهو طريقو، جنهن ۾ رُڪنن کي وچين ڏنگين { } جي اندر رکون ٿا ۽ رُڪن هڪ ٻئي کان ڪاما (، يا ,) جي ذريعي ڌار رکجن ٿا. مثال: $A = \{a, b, c, d\}$; $P = \{0, 1, 2, \ldots\}$

جماعتي وقفو: گروهي مواد ۾، هرهڪ گروهه، جماعتي وقفو آهي.

جنرل سيلز ٽيڪس (GST): اِهو هڪ ٽيڪس آهي، جيڪو حڪومت کي خدمتن ۽ ڪن خاص شين جي وڪري تي ادا ڪبو آهي. سال 2014 کان GST جي شرح 17% آهي.

ڏهائي عدد: اُهو عدد آهي، جنهن ۾ ڏهائيءَ جو نشان موجود هجي.

اصطلاح

زڪوات: اسلام جي پنجن رُڪنن مان هڪ آهي. اِها قرآن پاڪ ۾ نماز سان گڏ بيان ڪيل آهي. هڪ اسلامي ٽيڪس آهي، جنهن جي شرح 2.5% آهي.

سنگت واري خاصيت سيٽن جي ميلاپ تي: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

سنگت واري خاصيت سيٽن جي ڪاٽ تي: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

سيٽ A جو ڪامپليمينٽ: ڪائناتي سيٽ U جا سڀ رُڪن جيڪي سيٽ A ۾ موجود نہ هجن اِن کي A' سان ظاهر ڪجي ٿو. $(A' = U - A)$

سيٽن جو بياني طريقو: سيٽ جي ظاهر ڪرڻ جو اُهو طريقو، جنهن ۾ سيٽن جي رُڪنن کي خاصيتن ۽ خوبين جي بنياد تي عام ٻوليءَ ۾ لکجي. مثال طور: هفتي جي ڏينهن جا نالا = A

سيٽن جو فرق: ٻن سيٽن A ۽ B جا اُهي سڀ رُڪن، جيڪي سيٽ B ۾ شامل نہ آهن.

سڌو تناسب يا سُبتو تناسب: اهڙو لاڳاپو جنهن ۾ هڪ مقدار جنهن نسبت سان وڌي يا گهٽجي، تہ ٻيو لاڳاپيل مقدار بہ اُنهيءَ ئي نسبت سان وڌي يا گهٽجي.

سگهہ نما: اِهڙو عدد، جيڪو اِهو ظاهر ڪري تہ بنياد يا پايو پنهنجو پاڻ سان ڪيترا ڀيرا ضرب ٿيندو.

ٻن سيٽن جي ڪاٽ: اِهڙو سيٽ جيڪو اُنهن رُڪنن تي مشتمل هجي، جيڪي ٻنهي سيٽن ۾ موجود هجن. سيٽن جي ڪاٽ کي علامت ∩ سان ظاهر ڪبو آهي. $A \cap B = \{ x / x \in A \wedge \in B\}$.

سيٽن جي ڪاٽ جي ذاتي خاصيت: $A \cap U = A$

سيٽن جي ميلاپ جي ذاتي خاصيت: $A \cup U = A$

سيٽن جو علامتي نمونو: سيٽ جي علامتي نموني ۾ سيٽ جي سڀني رُڪنن جي عام خاصيتن ۽ خوبين کي علامت ۾ ظاهر ڪبو آهي. مثال: $A = \{ x / x \in \mathbb{N} \wedge 1 \le x \le 10 \}$.

عددي اکر يا حروف: اِهي الفابيٽ جا حروف يا اکر آهن، جيڪي اڻ ڄاتايل مقدارن کي ظاهر ڪن ٿا.

ڪائناتي سيٽ: زيرِ غور آيل سڀني رُڪنن تي مُشتمل سيٽ. ڪائناتي سيٽ جي علامت 'U' آهي.

ڪامپليمينٽري ڪنبون: ٻہ ڪنبون ڪامپليمييٽري سڏبيون، جڏهن ٻنهي ڪنڊن جو جوڙ 90° آهي.

ڪاٽو سگهہ نما: ڪنهن بہ عدد جي اُها سگهہ يا قوت، جيڪا ٻُڙيءَ کان گهٽ هجي. مثال: $5^{-7}, 3^{-2}$ وغيره.

قوس: گول جو حصو آهي.

ڪُننڊڙ ڏهائي عدد: هڪ ڏهائي عدد، جنهن ۾ ڏهائي کان پوءِ انگن جو تعداد محدود هجي.

گول جي ايراضي: گول جي ايراضي: $(A = \pi r^2)$

گول جو گهيرو: گول جي چوڌاري ڊگهو فاصلو: $C = 2\pi r$

گول جو ٽُڪر: گول جي قوس ۽ زهہ سان ٺجندڙ شڪل آهي. اِن جا ٻہ قسم آهن: گول جو ننڍو ٽُڪر ۽ گول جو وڏو ٽُڪر.

لاڳيتي نسبت ٽن شين جي: ٻن نسبتن جو لاڳاپو جڏهن گهٽ ۾ گهٽ هڪ عام شيءِ ساڳي ماپ ۾ هجي.

اصطلاح

ليڪي مساوات هڪ بدلجندڙ ۾: اها هڪ مساوات آهي، جنهن ڪي هڪ بدلجندڙ آهي ۽ اِن جي بدلجندڙ جي سگهه 1 آهي.

لاڳاپيل سيٽ: ٻن سيٽن کي لاڳاپيل سيٽ چئبو، جيڪڏهن اِنهن ۾ گهٽ ۾ گهٽ هڪ رُڪن مشترڪ يعني عام هجي ۽ اُنهن مان ڪوبہ سيٽ ٻئي جو ماتحت سيٽ نہ هجي. مثال: $A = \{1, 2, 3\}$ ۽ $B = \{3, 4, 5\}$

ناطق عددن جو جمعي اُبتڙ: ٻن ناطق عددن جن جو جوڙ ٻڙي آهي، تہ اُهي ٻئي هڪ ٻئي جا جمعي اُبتڙ آهن. مثال: $\frac{2}{3}$ جو جمعي اُبتڙ $-\frac{2}{3}$ آهي.

ناطق عددن جو ضربي اُبتڙ: ٻن غير ٻُڙي ناطق عددن جي ضرب اُپت 1 آهي تہ اُهي ٻئي ناطق عدد هڪ ٻئي جا ضربي اُبتڙ آهن. مثال $\frac{4}{3}$ ۽ $\frac{3}{4}$ هڪ ٻئي جا ضربي اُبتڙ آهن.

ننڍو قوس: اُهو قوس جيڪو گول جي اڌ کان ننڍو هجي.

ناطق عدد: اُهو عدد جيڪو $\frac{p}{q}$ جي صورت ۾ لکي سگهجي، جڏهن تہ p ۽ q پورا يا مڪمل عدد آهن ۽ $q \neq 0$ مثال: $\frac{2}{3}$، $\frac{4}{5}$، $\frac{6}{7}$، $\frac{0}{8}$ وغيره.

گهڻ رقمي: آلجبري اظهار جنهن ۾ هڪ رقم، بہ رقمون يا ٻن کان وڌيڪ رقمون موجود ٽين ٽيون. هڪ گهڻ رقميءَ ۾ بدلجندڙن جون سگهون مڪمل عدد ٽين ٽيون.

مٽا سٽا واري خاصيت سيٽن جي ميلاپ تي: $A \cup B = B \cup A$

مٽا سٽا واري خاصيت سيٽن جي ڪاٽ تي: $A \cap B = B \cap A$

منفرد سيٽ: اُهي سيٽ جن ۾ ڪوبہ رُڪن عام نہ هجي. مثال طور: $A = \{1, 2, 3\}$، $B = \{p, q, r\}$ ٻئي منفرد سيٽ آهن.

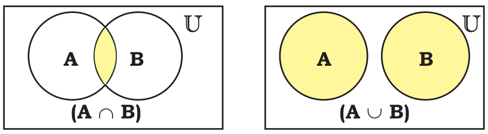
مارڪ اپ (Markup): عام زندگيءَ ۾ ڪجهہ بئنڪون ۽ ڪمپنيون خدمت مُهيا ڪن ٿيون ۽ اُن تي وڌيڪ رقم وٺن ٿيون، جنهن کي مارڪ اپ چئبو آهي.

مٿين جماعتي حد: جماعتي وقفي ۾ وڏي ۾ وڏو مُلهہ.

وتر: ڪوني ڪند ٽڪنڊي ۾، ڪوني ڪند جي سامهون وڏي ۾ وڏو پاسو وتر (Hypotenuse) آهي.

وڏو قوس: اُهو قوس جيڪو گول جي اڌ کان وڏو هجي.

وين ڊائياگرام (وين شڪليون): سيٽن ۽ اُنهن جي عملن کي گرافي صورت ۾ ظاهر ڪرڻ جو نمونو.



هيٺين جماعتي حد: اِهو جماعتي وقفي جو ننڍي ۾ ننڍو مُلهہ آهي.

هڪ رقمي: اُها گهڻ رقمي، جنهن ۾ فقط هڪ رقم هجي. اِهو هڪ سادو اظهار آهي.

هڪ جهڙيون شڪليون: ساڳي شڪل شبيهہ رکندڙ شڪليون، پر ضروري نہ آهي تہ ساڳي سائيز رکن.

اصطلاح

مشق 1.1

1. سيني قدرتي عددن جو سيٽ = $\mathbb{N}$
2. پهرين ڇئن ٻڏي عددن جو سيٽ = E
3. عدد 10جي سيني وندينڊڙن جو سيٽ = F
4. پهرين پنجن مفرد عددن جو سيٽ = J
5. پهرين ڇهن مڪمل يا پورن عددن جو سيٽ = $\mathbb{W}$
6. عدد 5 جون پهريون پنج ضرب اُپتون = S
7. عدد 3 جون سڀ ضرب اُپتون = T

II.
1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
2. $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$.
3. $C = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$.
4. $D = \{p, a, k, i, s, t, n\}$.
5. $E = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$.
6. $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$
7. $G = \{1, 3, 5, 15\}$.

III.
1. $A = \{x / x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 10\}$.
2. $B = \{x / x \in Z \wedge -2 \leq x \leq 5\}$.
3. C = {x/ پاڪستان جي نديءَ جو نالو آهي x}
4. $E = \{x / x \in \mathbb{E} \wedge 2 \leq x \leq 20\}$.
5. $D = \{x / x \in O^+\}$
6. S = {ڇنڇر}
7. $\{x / x \in \mathbb{Z}\}$
8. L = {x / عدد 4 جي ضرب اُپت آهي ،x}

IV.
1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
2. $B = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
3. $C = \{-2, -1, 0, 1, 2,\}$
4. $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

بياني طريقو	جدولي طريقو	سيٽن جو علامتي طريقو
انگريزي الفابيٽ جي واولز جو سيٽ = A	$A = \{a, e, i, o, u\}$	A = {x /انگريزي الفابيٽ جو واول x آهي}
سيني واڌو ٻڏي عددن جو سيٽ = B	$B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$	$B = \{x / x \in \mathbb{E}^+\}$
پهريان پنج قدرتي عددن جو سيٽ = C	$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$	$C = \{x / x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 5\}$
سيني قدرتي عددن جو سيٽ جيڪي عدد 50 کان وڏا يا 50 جي برابر آهن = D	$D = \{51, 52, \ldots\}$	$D = \{x / x \in N \wedge x \geq 50\}$
لفظ ‘Pakistan’ ۾ انگريزي الفابيٽ جي اکرن جو سيٽ = E	$E = \{p, a, k, i, s, t, n\}$	E = {x/لفظ Pakistan ۾ استعمال ٿيل انگريزي الفابيٽ آهي x}
هفتي جي ڏينهن جي نالن جو سيٽ = F	F = {سومر، اڱارو، اربع، خميس، جمعو، ڇنڇر، آچر}	F={x/هفتي جي ڏينهن جو نالو آهي x}

مشق 1.2

I.
1. $A \cup B = \{4, 5, 6, 8, 9\}$
2. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$
3. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
4. $X \cup Y = \{2,3,5,6,7,9,11,12,15,18\}$
5. $D \cup E \cup F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$
6. $(A \cup B) \cup C = \{1,2,3\}, A \cup (B \cup C) = \{1,2,3\}$

II.
1. $A \cap B = \{3\}$
2. $D \cap E = \{2, 4, 6, 8\}$
3. $P \cap Q = \{a\}$
4. $A \cap B = \{1, 2, 3, \ldots\}$
5. $(A \cap B) \cap C = \{\ \}$
6. $(D \cap E) \cap F = \{\ \}$

III.
1. $A - B = \{4\}$, $B - A = \{7, 8\}$
2. $A - B = \{9\}$, $B - A = \{7\}$
3. $A - B = \{0\}$, $B - A = \{\ \}$
4. $A - B = \{3, 6, 9, 15, 18\}$, $B - A = \{4, 8, 16, 20, 24\}$

مشق 1.3

A. 1. منفرد سيٽ 2. لاڳاپيل سيٽ 3. منفرد سيٽ 4. لاڳاپيل سيٽ
5. لاڳاپيل سيٽ 6. لاڳاپيل سيٽ 7. لاڳاپيل سيٽ

B. (i) منفرد سيٽ (ii) لاڳاپيل سيٽ (iii) لاڳاپيل سيٽ (iv) منفرد سيٽ
(v) منفرد سيٽ (vi) منفرد سيٽ (viii) لاڳاپيل سيٽ

جواب

مشق 1.4

I. **(i)** $A' = \{b, c, d\}$ **(ii)** $A \cup A' = \{a, b, c, d, e, f\}$ **(iii)** $A \cap A' = \{\ \}$
(iv) $U' = \{\ \}$ **(v)** $\varnothing' = \{a, b, c, d, e, f\}$

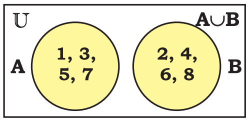
II. **(i)** $E' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ **(ii)** $E \cup E' = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ **(iii)** $E \cap E' = \varnothing$
(iv) $U' = \varnothing$ **(v)** $\varnothing' = \{1, 2, 3, ..., 10\}$

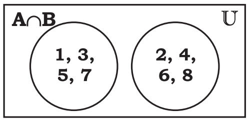
III. **(i)** $P' = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ **(ii)** $P \cup P' = \{0, 1, 2, 3, ..., 12\}$ **(iii)** $P' \cap P = \{\ \}$
(iv) $U \cap U' = \{\ \}$

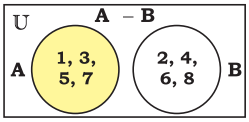
IV. **(i)** $B' = \{u, v, w\}$ **(ii)** $B' \cup B = \{u, v, w, x, y, z\}$ **(iii)** $B' \cap B = \{\ \}$
(iv) $U \cup U' = \{u, v, w, x, y, z\}$

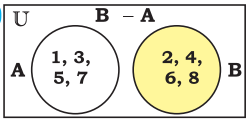
V. **(i)** $A' = \{8, 9, 10\}$ **(ii)** $B' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ **(iii)** $A' \cap A = \{\ \}$
(iv) $A \cup A' = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ **(v)** $B \cup B' = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ **(vi)** $B \cap B' = \{\ \}$

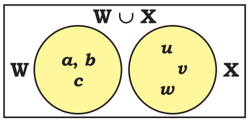
مشق 1.6

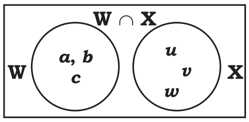
A. 1.(i)


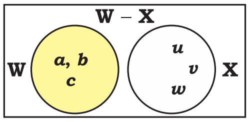
(ii)


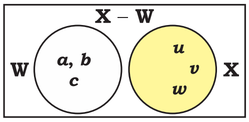
(iii)


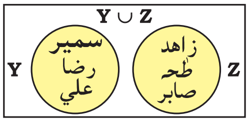
(iv)


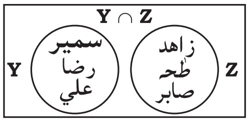
2. (i)


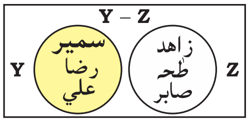
(ii)


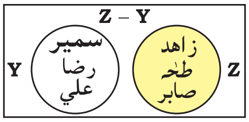
(iii)


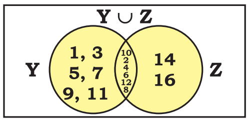
(iv)


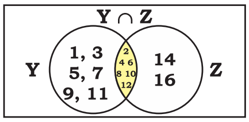
3. (i)


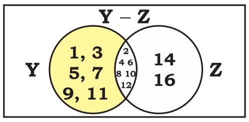
(ii)


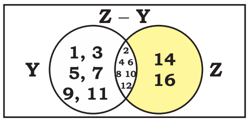
(iii)


(iv)


4. (i)


(ii)


(iii)


(iv)


شاگردن کي گهرجي تہ هرهڪ سوال جي وين شڪل پاڻ ناهين

جواب

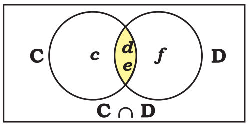
جائزي واري مشق1

2. **(a)** {0, 1, 2, 3, 4} **(b)** انگريزي الفابيٽ جو سيٽ

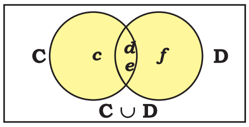
5. **(i)** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$ **(ii)** $A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
(iii) $A - B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ **(iv)** $(A \cap C)' = \{2, 4, 6, 8, 10, 11, 12\}$
(v) $(B \cup C)' = \{\ \}$ **(vi)** $B' \cap C' = \{2, 4, 6, 8\}$
(vii) $A - B' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ **(viii)** $B - A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
(ix) $A' - C = \{12\}$ **(x)** $(B - C)' = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
(xi) $(C - A)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$ **(xii)** $A' - C' = \{11\}$

7. **(i)** d **(ii)** b **(iii)** a **(iv)** c **(v)** c

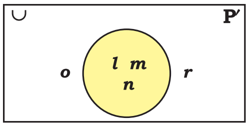
(i) $C \cap B = \{d, e\}$



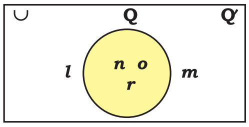
$C \cup D = \{c, d, e, f\}$



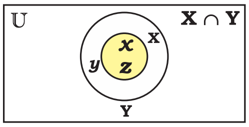
(ii) $P' = \{o, r\}$



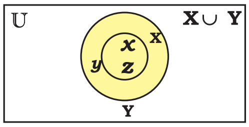
$Q' = \{l, m\}$



(iii) $X \cap Y = \{x, z\}$



$X \cup Y = \{x, y, z\}$

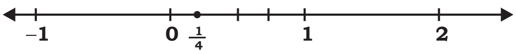


مشق 2.1

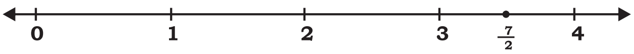
1. **(i)** صحيح **(ii)** غلط **(iii)** غلط **(iv)** غلط **(v)** صحيح
(vi) غلط **(vii)** صحيح **(viii)** صحيح **(ix)** غلط **(x)** غلط **(xi)** غلط

2. $2\frac{1}{2}$ ، $2\frac{1}{3}$ ، $2\frac{1}{4}$

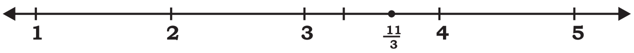
3. **(i)**



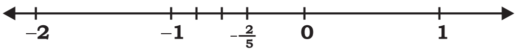
(ii)



(iii)

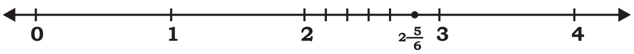


(iv)



(v)

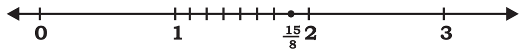
(vi)

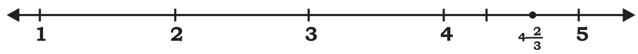


(vii)

(viii)

جواب

(ix) 

(x) 

.4 **(i)** غلط **(ii)** صحيح **(iii)** صحيح **(iv)** غلط **(v)** صحيح **(vi)** غلط

مشق 2.2

1. **(i)** $\frac{17}{19}$ **(ii)** $-\frac{1}{13}$ **(iii)** 10 **(iv)** $-\frac{25}{6}$

2. **(i)** $\frac{24}{7}$ **(ii)** $\frac{1}{3}$ **(iii)** 2 **(iv)** 1 **(v)** $-\frac{7}{40}$

(vi) $\frac{37}{42}$ **(vii)** $\frac{17}{14}$ **(viii)** $\frac{7}{10}$ **(ix)** $\frac{97}{72}$ **(x)** $\frac{29}{20}$

3. **(i)** $-\frac{17}{15}$ ۽ $\frac{15}{17}$ **(ii)** $+26$ ۽ $-\frac{1}{26}$ **(iii)** $+\frac{1}{20}$ ۽ -20 **(iv)** $+\frac{5}{19}$ ۽ $-\frac{19}{5}$

(v) جمعي اُبتڙ ٻُڙي ۽ ضربي اُبتڙ ٻُڙي جو نہ ٿو ٿئي. **(vi)** -8 ۽ $\frac{1}{8}$

(vii) $-\frac{1}{9}$ ۽ 9 **(viii)** $-\frac{200}{7}$ ۽ $\frac{7}{200}$

4. **(i)** $\frac{15}{16}$ **(ii)** $\frac{15}{7}$ **(iii)** $\frac{8}{105}$ **(iv)** $\frac{36}{49}$ **(v)** 10

(vi) $-\frac{2}{3}$ **(vii)** $-\frac{3}{16}$ **(viii)** $-\frac{1}{3}$

مشق 2.3

6. **(i)** $\frac{8}{9}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ **(ii)** $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ **(iii)** $\frac{5}{6}, \frac{4}{7}, \frac{1}{3}$

7. **(i)** $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ **(ii)** $\frac{1}{10}, \frac{2}{15}, \frac{4}{5}$ **(iii)** $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{6}$

.8 **(i)** ننڍي وڏائي $\frac{1}{4}, \frac{5}{7}, \frac{4}{3}$ **(ii)** ننڍي وڏائي $\frac{1}{11}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}$

وڏ ننڍائي $\frac{4}{3}, \frac{5}{7}, \frac{1}{4}$ وڏ ننڍائي $\frac{1}{20}, \frac{2}{5}, \frac{1}{11}$

(iii) ننڍي وڏائي $\frac{2}{9}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{3}$ **(iv)** ننڍي وڏائي $\frac{4}{2}, \frac{1}{2}, \frac{9}{7}, \frac{20}{15}$

وڏ ننڍائي $\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{2}{9}$ وڏ ننڍائي $\frac{20}{15}, \frac{9}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{20}$

جواب

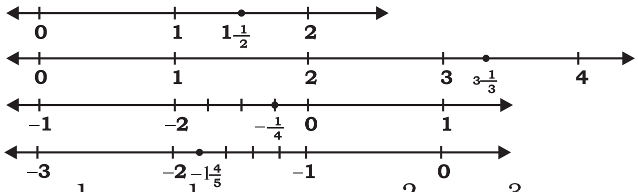
جائزي واري مشق 2

1. **(ii)** $-a$ **(iii)** $\frac{q}{p}$ **(iv)** $\frac{ps+qr}{qs}$ **(vi)** ڪٿ ۽ ونڊ

2. **(i)** ناطق عدد **(ii)** جمعي **(iii)** ناطق عدد **(iv)** ضربي أبتڙ **(v)** ضربي

3. **(i)** b **(ii)** a **(iii)** c **(iv)** d **(v)** d

4. **(i)** **(ii)** **(iii)** **(iv)**



5. **(i)** 14 ۽ $-\frac{1}{14}$ **(ii)** $-\frac{1}{5}$ ۽ 5 **(iii)** $\frac{2}{3}$ ۽ $-\frac{3}{2}$ **(iv)** $\frac{11}{27}$ ۽ $-\frac{27}{11}$

6. **(i)** $>$ **(ii)** $<$ **(iii)** $>$ **(iv)** $<$ **(v)** $<$ **(vi)** $>$

7. **(i)** 1 **(ii)** $\frac{4}{7}$ **(iii)** $-\frac{13}{40}$ **(iv)** $-\frac{1}{12}$ **(v)** $-\frac{1}{12}$ يا $\frac{-5}{60}$ **(vi)** $\frac{1}{5}$

8. **(i)** $\frac{1}{10}$ **(ii)** $\frac{-1}{11}$ **(iii)** $-\frac{27}{56}$ **(iv)** $\frac{32}{49}$ **(v)** $\frac{7}{11}$ **(vi)** $-\frac{6}{25}$

10. **(i)** مٽا سٽا واري خاصيت جوڙ جي لحاظ کان **(ii)** مٽا سٽا واري خاصيت ضرب جي لحاظ کان
(iii) سنگت واري خاصيت ضرب جي لحاظ کان **(iv)** سنگت واري خاصيت جوڙ جي لحاظ کان
(v) سنگت واري خاصيت جوڙ جي لحاظ کان **(vi)** ضرب جي ورهاست واري خاصيت جوڙ جي مٿان
(vii) مٽا سٽا واري خاصيت ضرب جي لحاظ کان **(viii)** ضرب جي ورهاست واري خاصيت ڪٽ جي مٿان
(ix) ضرب جي ورهاست واري خاصيت ڪٽ جي مٿان **(x)** ضرب جي ورهاست واري خاصيت جوڙ جي مٿان

مشق 3.1

A. **(1)** $\frac{1}{5}$ **(2)** $\frac{2}{5}$ **(3)** $\frac{3}{5}$ **(4)** $\frac{4}{5}$ **(5)** $\frac{9}{10}$

B. **(1)** $\frac{3}{20}$ **(2)** $\frac{7}{20}$ **(3)** $\frac{12}{25}$ **(4)** $\frac{3}{4}$ **(5)** $\frac{19}{20}$

(6) $1\frac{3}{10}$ **(7)** $2\frac{1}{2}$ **(8)** $5\frac{1}{2}$ **(9)** $5\frac{3}{5}$ **(10)** $6\frac{17}{20}$

C. **(1)** $\frac{3}{125}$ **(2)** $3\frac{1}{8}$ **(3)** $\frac{3}{8}$ **(4)** $4\frac{13}{200}$ **(5)** $5\frac{27}{40}$

(6) $-\frac{1}{1000}$ **(7)** $-\frac{1}{2000}$ **(8)** $-\frac{1}{200}$ **(9)** $-5\frac{1}{200}$ **(10)** $-11\frac{3}{8}$

(11) $-\frac{1}{800}$ **(12)** $-1\frac{87}{160}$

جواب

مشق 3.2

T = Terminating = کُتندڑ　　　　N = Non- terminating = اَڻ کتندڑ

I.	**(1)**	N	**(2)**	T	**(3)**	N	**(4)**	N	**(5)**	N	**(6)**	N	**(7)**	T
	(8)	N	**(9)**	T	**(10)**	T	**(11)**	N	**(12)**	T	**(13)**	N	**(14)**	T
	(15)	N	**(16)**	T	**(17)**	N	**(18)**	N	**(19)**	N	**(20)**	N		

R = Recurring = ورجندڑ　　　　N = Non- Recurring = نہ ورجندڑ

II.	**(1)**	N	**(2)**	R	**(3)**	N	**(4)**	N	**(5)**	R	**(6)**	R	**(7)**	R
	(8)	N	**(9)**	N	**(10)**	N								

مشق 3.3

Terminating = کُتندڑ

$\frac{12}{25}, \frac{17}{20}, \frac{117}{125}, -\frac{9}{40}$

$-\frac{96}{100}, \frac{101}{125}, \frac{125}{200}$

$\frac{372}{400}$

Non- Terminating = اَڻ کُتندڑ

$\frac{43}{21}, \frac{5}{12}, \frac{10}{33}, \frac{23}{60}$

$\frac{40}{35}, \frac{55}{75}, \frac{141}{144}$

$\frac{200}{201}, -\frac{210}{147}, -\frac{401}{333}$

مشق 3.4

I.	(1)	0357142...	(T)	(2)	– 0.722222...	(R)	(3)	0.95	(T)
	(4)	– 3.95454545...	(R)	(5)	6.566666...	(R)	(6)	0575	(T)
	(7)	– 0.735294117...	(T)	(8)	2.84375	(T)	(9)	– 3.98	(T)
	(10)	2.9375	(T)	(11)	1.4	(T)	(12)	– 1.8	(T)
	(13)	1.5555555...	(R)	(14)	0.944444444...	(R)			

مشق 3.5

I.	(1)	0.0575 = 0.058	(2)	0.421875 = 0.422	(3)	0.883333... = 0.883
	(4)	– 0.613333... = 0.613	(5)	0.98571428... = 0.986	(6)	0.9625 = 0.963
	(7)	0.47777778... = 0.478	(8)	0.99166667... = 0.992	(9)	0.82 = 0.820
	(10)	0.84375 = 0.844				
II.	(1)	0.26666... = 0.27	(2)	– 0.916666... = -0.92	(3)	0.888888...= 0.883
	(4)	3.142887143... = 3.14	(5)	1.3125... = 1.31	(6)	0.075 = 0.08
	(7)	– 0.4 = 0.40	(8)	0.3181818... = 0.32	(9)	0.366666...= 0.37
	(10)	– 0.801980198... = -0.80				
III.	(1)	0.90909090... = 0.909	(2)	– 0.455555... = -4.56	(3)	1.6183846...= 1.616
	(4)	0.894736... = 0.895	(5)	1.285714...= 1.286	(6)	0.6521735... = 0.652
	(7)	– 1.15625 = -1.156	(8)	0.75620689...= 0.759		

IV.	(1)	0.46	(2)	0.36	(3)	0.67	(4)	0.11	(5)	1.91
	(6)	3.25	(7)	2.05	(8)	8.34	(9)	10.10	(10)	4.00
	(11)	13.10	(12)	12.82						
V.	(1)	4.517	(2)	6.747	(3)	0.010	(4)	0.986	(5)	206.418
	(6)	3.407	(7)	102.999	(8)	11.123	(9)	55.123	(10)	4.105
	(11)	66.396	(12)	59.920						

جواب

جائزي واري مشق 3

1. (i) $\frac{13}{40}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $2\frac{1}{2}$ (iv) $7\frac{3}{4}$ (v) $\frac{39}{50}$
   (vi) $1\frac{297}{1000}$ (vii) $2\frac{87}{250}$

2. (i) 8.2 (T) (ii) 9.25 (T) (iii) 3.11111... (N) (iv) 1.428571 ... (N)
   (v) 3.142857... (N) (vi) 1.3125 (T) (vii) 7.3 (T)

3. (i) 14.58 (ii) 10.78 (iii) 5.79 (iv) 6.80 (v) 25.49

4. Terminating = ڪُتندڙ

   $\frac{13}{4}, \frac{17}{25}$

   Non- Terminating = اڻ ڪُتندڙ

   $\frac{80}{3}, \frac{15}{11}, \frac{19}{6}$

   $\frac{25}{15}, \frac{22}{7}, \frac{14}{9}$

5. (i) 0.21 (ii) 6.35 (iii) 0.52 (iv) 0.62 (v) 0.145
   (vi) 3.125 (vii) 1.4375 ... (viii) 1.375 (ix) 1.5

6. (i) 13.333... (ii) 2.8571 ... (iii) 4.54545... (iv) 6.153846 ... (v) 16.6666...
   (vi) 10.9090... (vii) 5.8333 (viii) 0.57142...

7. (i) 5.717 (ii) 11.604 (iii) 0.926 (iv) 3.409 (v) 0.744
   (vi) 23 158

9. **(i)** ڪُتندڙ ڏهائي عدد **(ii)** اڻ ڪُتندڙ ڏهائي عدد **(iii)** مڪمل يا پورو عدد- ڏهائي اٽيپور عدد
   (iv) ختم **(v)** اٽيپور **(vi)** بلاڪ يا ٽولو

10. **(i)** ب **(ii)** د **(iii)** الف **(iv)** ج

مشق 4.1

1. **(i)** $3 \times 3 = 9$ **(ii)** $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$
   (iii) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 648$ **(iv)** $5 \times 5 \times 7 \times 7 = 1225$
   (v) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 1800$
   (vi) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7 = 21168$

2. **(i)** 2, 5 ۽ 32 **(ii)** 5, 4 ۽ 625 **(iii)** 6, 3 ۽ 216 **(iv)** $\frac{2}{3}$, 6 ۽ $\frac{64}{729}$
   (v) $-\frac{1}{5}$, 7 ۽ $-\frac{1}{78125}$

4. **(i)** 10^3 **(ii)** 2^9 **(iii)** $(-7)^3$ **(iv)** 5^4 **(v)** $\left(-\frac{1}{10}\right)$ **(vi)** $\left(\frac{2}{3}\right)^5$
   (vii) $\left(-\frac{5}{7}\right)^3$ **(viii)** $\left(\frac{9}{4}\right)^3$ or $\left(\frac{3}{2}\right)^6$

مشق 4.2

1. **(i)** $\left(\frac{5}{7}\right)^6$ **(ii)** $\left(\frac{3}{20}\right)^6$ **(iii)** $\left(\frac{1}{7}\right)^{10} \times \left(\frac{5}{7}\right)^{16}$ **(iv)** p^{13} **(v)** $(xy)^{11}$ **(vi)** $\left(\frac{4}{3}\right)^{18}$
   (vii) $x^7 y^{13}$ **(viii)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{14}$ **(ix)** $(xyz)^5$ **(x)** $p^8 q^7$

جواب

مشق 4.3

1. (i) 5^3 يا 125 (ii) $\left(\frac{5}{7}\right)^3$ يا $\frac{125}{343}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ يا $\frac{1}{16}$ (iv) x^6

(v) $\left(\frac{5}{3}\right)^6$ يا $\frac{15625}{729}$ (vi) 5^5 يا 3125 (vii) $\left(\frac{7}{5}\right)^4$ يا $\frac{2401}{625}$

(viii) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ يا $\frac{64}{729}$ (ix) $\frac{7}{11}$ (x) $\frac{x^4}{y^4}$

مشق 4.4

1. (i) 5^{14} (ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{48}$ (iii) 3^{20} (iv) x^{100} (v) $\left(\frac{4}{7}\right)^{18}$ (vi) $\left(\frac{3}{4}\right)^{40}$

2. (i) 2^{-5} (ii) 3^{-7} (iii) x^{-6} (iv) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-6}$

3. (i) $\frac{1}{5^8}$ (ii) 3^7 (iii) $\frac{1}{x^5}$ (iv) $\frac{1}{y^7}$

4. (i) واڌو (ii) ڪاٽو (iii) واڌو (iv) واڌو (v) ڪاٽو (vi) واڌو

مشق 4.5

1. (i) 1 (ii) $\frac{4}{9}$ (iii) 2 (iv) 2 (v) $\frac{4}{5}$ (vi) 1

2. (i) 10 (ii) 1 (iii) 3 (iv) 5

جائزي واري مشق 4

1. (i) 3, 5 ۽ 243 (ii) 7, 4 ۽ 2401 (iii) $\frac{3}{4}$, 2 ۽ $\frac{9}{16}$ (iv) $\frac{1}{4}$, 3 ۽ $\frac{1}{64}$

(v) 8,0 ۽ 1 (vi) y, 0 ۽ 1 2. (i) $\frac{1}{64}$ (ii) $\frac{256}{625}$ (iii) 216 (iv) $\frac{4}{49}$ (v) 3^{10} (vi) 4^{10}

(vii) 1 (viii) −5

4. (i) ڪاٽو (ii) واڌو (iii) واڌو (iv) ڪاٽو (v) واڌو

5. (i) $\frac{4}{3}$ (ii) 5^4 (iii) $\left(\frac{2}{5}\right)^5$ يا $\frac{32}{3125}$ 6. (i) $\frac{3}{2}$ (ii) 4 (iii) 2

مشق 5.1

A. (1) 121 (2) 361 (3) 625 (4) 500 (5) 4356 (6) 6084
(7) 10000 (8) 250000

B. (i) پورو يا مڪمل چورس آهي. (ii) پورو يا مڪمل چورس نہ آهي. (iii) پورو يا مڪمل چورس آهي.
(iv) پورو يا مڪمل چورس آهي. (v) پورو يا مڪمل چورس نہ آهي. (vi) پورو يا مڪمل چورس آهي.
(vii) پورو يا مڪمل چورس نہ آهي. (viii) پورو يا مڪمل چورس نہ آهي.

جواب

C. **(1)**، **(2)**، **(4)** ۽ **(8)** اِڪي عددن جا پورا يا مڪمل چورس آهن.
(3)، **(5)**، **(6)** ۽ **(7)** ٻڌي عددن جا پورا يا مڪمل چورس آهن.

D. **(1)** $\frac{1}{25}$ ۽ $\frac{1}{25} < \frac{1}{5}$ **(2)** $\frac{9}{49}$ ۽ $\frac{9}{49} < \frac{3}{7}$ **(3)** $\frac{64}{81}$ ۽ $\frac{64}{81} < \frac{8}{9}$

(4) $\frac{25}{36}$ ۽ $\frac{25}{36} < \frac{5}{6}$ **(5)** $\frac{4}{9}$ ۽ $\frac{4}{9} < \frac{2}{3}$

E. **(1)** 0.01 ۽ $0.01 < 0.1$ **(2)** 0.25 ۽ $0.25 < 0.5$ **(3)** 0.0049 ۽ $0.0049 < 0.07$
(4) 0.0121 ۽ $0.012 < 0.11$ **(5)** 0.0225 ۽ $0.0225 < 0.15$

مشق 5.2

A. **(1)** 5 **(2)** 4 **(3)** 9 **(4)** 36 **(5)** a **(6)** y **(7)** 49 **(8)** 8

B. **(1)** 26 **(2)** 13 **(3)** 22 **(4)** 31 **(5)** 70 **(6)** 33 **(7)** 40 **(8)** 48
(9) 56 **(10)** 41 **(11)** 37 **(12)** 45

C. **(1)** $\frac{4}{5}$ **(2)** $\frac{6}{7}$ **(3)** $\frac{35}{99}$ **(4)** $1\frac{1}{12}$ **(5)** $1\frac{2}{11}$ **(6)** $1\frac{5}{6}$ **(7)** $\frac{31}{41}$ **(8)** $\frac{32}{35}$

(9) $1\frac{13}{24}$ **(10)** $2\frac{4}{13}$ **(11)** $1\frac{3}{9}$ **(12)** $1\frac{5}{6}$

D. **(1)** 1.8 **(2)** 2.1 **(3)** 2.3 **(4)** 2.7 **(5)** 2.5 **(6)** 6.1 **(7)** 2.8 **(8)** 3.2
(9) 5.5 **(10)** 10.0 **(11)** 5.8 **(12)** 5.9

مشق 5.3

(1) 28 قطارون ۽ هرهڪ قطار ۾ 28 ڪرسيون **(2)** 15.5 ميٽر
(3) ڊيگهه = 46.5 ميٽر ۽ ويڪر 15.5 ميٽر **(4)** 46 قطارون
(5) 41 ڪرسيون **(6)** 25 قطارون ۽ هرهڪ قطار ۾ 25 ترڪون آهن.
(7) 32 قطارون ۽ هرهڪ قطار ۾ 32 شاگرد آهن. **(8)** ويڪر = 18.22 ميٽر ۽ ڊيگهه 54.66 ميٽر
(9) 58.2 ميٽر **(10)** 123 تيلها

جائزي واري مشق5

2. **(i)** 961 **(ii)** 7 **(iii)** چورس **(iv)** پورو يا مڪمل چورس **(v)** $\frac{5}{6}$ **(vi)** 1

3. **(i)** غلط **(ii)** صحيح **(iii)** غلط **(iv)** غلط **(v)** صحيح **(vi)** غلط

4. **(i)** a **(ii)** c **(iii)** c

5. **(i)** 27 **(ii)** 84 **(iii)** 163 **(iv)** 205 **(v)** $2\frac{4}{11}$ **(vi)** $\frac{23}{49}$

(vii) $1\frac{4}{121}$ **(viii)** 0.16 **(ix)** 587 **(x)** $\frac{80}{99}$ **(xi)** $2\frac{3}{8}$ **(xii)** 11.15

(6) 110 ميٽر **(7)** 12 ميٽر **(8)** 62 ميٽر **(9)** ويڪر 2.5 ميٽر ۽ ڊيگهه 7.5 ميٽر
(10) 300 رُپيا

مشق 6.1

1. **(i)** 2 : 5 : 4 **(ii)** 24 : 56 : 63 **(iii)** 200 : 220 : 231
2. **(i)** 12 : 20 : 27 **(ii)** 55 : 77 : 65 **(iii)** 24 : 35 : 40
3. **(i)** 56 : 84 : 105 : 150 **(ii)** 140 : 105 : 147 : 180

4. **(i)** $\frac{5}{3}$ **(ii)** $\frac{7}{3}$ **(iii)** $\frac{28}{5}$ **5.** 40 : 72 : 99

جواب

6. سليم جو حصو = 400 رُپيا
عرفان جو حصو = 600 رُپيا
عمران جو حصو = 1000 رُپيا

7. 15 : 20 : 28

8. 90 : 36 : 48 : 56

9. بجليءَ جو بل = 14000 رُپيا
فون جو بل = 5600 رُپيا
گيس جو بل = 4200 رُپيا
پاڻيءَ جو بل = 3600 رُپيا

10. انگريزيءَ جي ڪتاب جي قيمت = 60 رُپيا
اردوءَ جي ڪتاب جي قيمت = 90 رُپيا
سائنس جي ڪتاب جي قيمت = 225 رُپيا
رياضيءَ جي ڪتاب جي قيمت = 300 رُپيا

مشق 6.2

1. 6000 رُپيا 2. 9 پائپ 3. 10 شخص 4. 750 رُپيا 5. 75صفحا
6. 32 سپاهي 7. $5\frac{1}{3}$ ڪلاڪ 8. 315 رُپيا 9. $\frac{392}{9}$ ڪلوگرام 10. 12750 رُپيا

مشق 6.3

1. 15 ڪم ڪندڙ 2. 4 مزدور 3. 10 پورهيت 4. $2\frac{2}{5}$ ڏينهن 5. ڪم جو $\frac{7}{15}$ حصو
6. $42\frac{2}{3}$ ڏينهن 7. (i) 1250 رڍون (ii) $93\frac{3}{4}$ ڏينهن

مشق 6.4

1. (i) 13.89 ميٽر في سيڪنڊ (ii) 20.83 ميٽر في سيڪنڊ (iii) 22.22 ميٽر في سيڪنڊ (iv) 14.03 ميٽر في سيڪنڊ
2. (i) 108 ڪلوميٽر في ڪلاڪ (ii) 43.2 ڪلوميٽر في ڪلاڪ (iii) 151.2 ڪلوميٽر في ڪلاڪ (iv) 91.8 ڪلوميٽر في ڪلاڪ
3. 40 ڪلوميٽر في ڪلاڪ 4. 3 ڪلاڪ 5. 225 ميٽر 6. $2\frac{4}{7}$ ڪلاڪ
7. (i) 70 ڪلوميٽر في ڪلاڪ (ii) $1\frac{1}{6}$ ڪلوميٽر في منٽ (iii) 19.4 ميٽر في سيڪنڊ (iv) 315 ڪلوميٽر (v) 5 ڪلاڪ

جائزي واري مشق 6

1. 4 : 10 : 7 2. 105 : 140 : 168 : 192 3. 425 رُپيا 4. 14 ڪم ڪندڙ (ورڪر)
5. 2 6. 21 7. 16.7 ميٽر في سيڪنڊ 8. 378 ڪلوميٽر في ڪلاڪ
9. 66 ڪلوميٽر ۽ اسپيڊ = 1.2 ڪلوميٽر في منٽ (i) 72 ڪلوميٽر في ڪلاڪ
(ii) 1.2 ڪلوميٽر في منٽ (iii) 1200 ميٽر في منٽ (iv) 20 ميٽر في سيڪنڊ
10. ڪار A = 42 لٽر، ڪار B = 54 لٽر، ڪار C = 66 لٽر 11. (i) 375 رُپيا (ii) 224 ڪلوميٽر

مشق 7.1

A. 1. 14,320 رُپيا 2. 33,158 رُپيا 3. 24,435 رُپيا 4. 9,360 رُپيا 5. 32,800 رُپيا
B. 1. 1,275,000 رُپيا 2. 897,500 رُپيا 3. 96,000 رُپيا 4. 283,333 رُپيا 5. 780,000 رُپيا
C. 1. 1.67% 2. 10% 3. 2% 4. 2% 5. 2%
D. جواب شاگرد پاڻ معلوم ڪندا.

مشق 7.2

1. 1,118.75 رُپيا 2. 824.50 رُپيا 3. 2,176 رُپيا
4. GST = 2, 584 رُپيا ۽ ڪُل قيمت 17,784 رُپيا 5. GST = 1,326 رُپيا ۽ ڪُل قيمت 9,126 رُپيا
6. 30,235 رُپيا 7. ڊش واشر جي قيمت 52,137 رُپيا ۽ GST = 8,863 رُپيا
8. 16,000 رُپيا 9. 17% 10. 17%

جواب

مشق 7.3

.1 نفعو 790 رُپيا، مارڪ اپ جي شرح 42.7% .2 نفعو 450 رُپيا، مارڪ اپ جي شرح 7.2%

.3 2,508 رُپيا .4 1,826 رُپيا .5 3503 رُپيا .6 3,300 رُپيا .7 820 رُپيا

.8 90 رُپيا .9 57.8% .10 77.34% .11 20.67%

عملي ڪم (صفحو 124)

.i 96,000 رُپيا .ii 0.2 سال .iii 30,000 رُپيا .iv 24,000 رُپيا .v 8% .vi 2,250,000 رُپيا

مشق 7.4

.1 613,088 رُپيا .2 188,662.50 رُپيا .3 1,431 رُپيا .4 113,333.30 رُپيا

.5 (i) 96,000 رُپيا (ii) 0.2 سال (iii) 30,000 رُپيا (iv) 24,000 رُپيا

مشق 7.5

.1 12,500 رُپيا .2 هي صاحبِ نصاب نه آهي. .3 16,250 رُپيا .4 820,000 رُپيا

.5 200,000 رُپيا .6 3937.50 رُپيا .7 250,000 رُپيا .8 5,850 رُپيا

جائزي واري مشق 7

.1 1445 رُپيا .2 47,692.308 رُپيا .3 2847.50 رُپيا .4 99,935.30 رُپيا

.5 318,750 رُپيا .6 47,500 رُپيا .7 12,500 رُپيا .8 778,518.52 رُپيا

.9 14,875 رُپيا .10 11,125 رُپيا .11 500,000 رُپيا .12 11,150 رُپيا .13 40,000 رُپيا

مشق 8.1

A. (1) 13 (2) $2a$ (3) $-12x$ (4) $2ab$ (5) $7y$ (6) $9x^2 + 7x + 4$

B. (1) $8a + 8b$ (2) $7x + 2y$ (3) $11a - 6b$

(4) $9ab + 9cd + 12ad$ (5) $8a + 7b + 6c$ (6) $12a + 16b + 11c$

(7) $27a + 27b + 27c$ (8) $14a + 18b + 17c$ (9) $11a + 13b + 11c$

(10) $22c - f + 12g$

مشق 8.2

(1) $3a$ (2) $-19ab$ (3) $12a$ (4) $4a+4b$

(5) $4a + 8b + 21c$ (6) $14c + 4d + 3c$ (7) $8x + 7y + 4z$ (8) $6a + 5b + 18c$

(9) $-x^2 + 7ab + 27bc$ (10) $a + ab + b$ (11) $12a + b$ (12) $4x + 3y$

مشق 8.3

I. (1) $120a^2$ (2) $54ab$ (3) $20a$ (4) $32c^6d^2$

(5) $-30a^2b^3$ (6) $18ab$ (7) $60m^9$ (8) $36x^5y^4$

II. (1) $9a + 9b$ (2) $-4xy + 4y^2$ (3) $-10m^3n + 15mn^4$

(4) $-18x^2y^3\ 12x^2y^4$ (5) $18l^3m^3n - 12l^2m^3n^2$ (6) $10bc^3d^2 - 6bc^3d$

III. (1) $24c^2 - 20cd + 24d^2$ (2) a^2b^2 (3) $a^4 - b^4$

(4) $6x^2 + 11xy - 10y^2$ (5) $-4lm^2 + 6lmn - 6m^2n + 9mn^2$ (6) $16p^2q^3 - 6p^3q^2$

IV. (1) $4a^2bc - 6ab^2c + 8abc^2$ (2) $a^3b + ab^3 - abc^2$ (3) $-m^2n^3 - m^3n^2 + m^3n^3$

(4) $-3x^3y + 18x^2y - 27xy^3$ (5) $8p^3qr - 12p^2q^2r + 4pq^3r$ (6) $x^2y^2z^2 + x^3y^3z - xy^3z^3$

جواب

V. **(1)** $1 + x - 5x^2 + 3x^3$ **(2)** $8c^3 - 8cd^2 + 12c^2d - 12d^3 - 6c^2e + 6d^2e$
(3) $a^3 - 2a^2b + b^3$ **(4)** $3x^3 - 19x^2 + 32x - 16$ **(5)** $a^4 - 2a^4b + 2a^2b^3 - b^4$
(6) $3p^4q - 3p^2q^3 + 2p^3q^2 - 2pq^4 - p^2q^2r + q^4r$

مشق 8.4

I. **(1)** $-a - 8ab$ **(2)** $-13m + 24mn$ **(3)** $36x^4 - 48x^2 - 36x^3 - 48xy$ **(4)** $3x + 3y^2$
(5) $12d^2l^2m^2 - 12l^2m^4 - 8lm^4n + 8lm^2n^3$ **(6)** $6p^4q^2 + 6p^2q^4 + 12p^2q^2r^2 - 12pq^2r^2$

مشق 8.8

(1) $5a\,(ax - 3)$ **(2)** $m^2\,(m^2 - m + 1)$ **(3)** $7\,(a^3 + 2a^2 - 1)$
(4) $mx\,(x - m - 1)$ **(5)** $n\,(13 - 2n^2 + 39n^4)$ **(6)** $abc\,(a + b + c)$
(7) $(b + c)\,(3a + 6d)$ **(8)** $(a + b)\,(xy + ay + by + x)$
(9) $(x - y)\,(4lm + 8mnx - 8mny + 12nl)$ **(x)** $(p^2 - q)^2\,(pq + pr + qr)$

مشق 8.9

(1) $(x + 6)\,(x + 6)$ **(2)** $(a + 2)\,(a + 2)$ **(3)** $(2a + 9)\,(2a + 9)$
(4) $(3x + 7y)\,(3x + 7y)$ **(5)** $(5a + 8b)\,(5a + 8b)$ **(6)** $(4b + 5)\,(4b + 5)$
(7) $(2x + \frac{1}{2})\,(2x + \frac{1}{2})$ **(8)** $(12x - \frac{1}{6})\,(12x - \frac{1}{6})$ **(9)** $2\,(3c + 5d)\,(3c + 5d)$
(10) $4\,(a + 6)\,(a + 6)$ **(11)** $5\,(y + 4)\,(y + 4)$ **(12)** $3\,(s - 8t)\,(s - 8t)$
(13) $(3at + 7s)\,(3at + 7s)$ **(14)** $(2a^2 - 3)\,(2a^2 - 3)$ **(15)** $2\,(5pq - 7r)\,(5pq - 7r)$

مشق 8.10

(1) $(b + c)\,(b - c)$ **(2)** $(a + 6)\,(a - 6)$ **(3)** $(a + 7)\,(a - 7)$
(4) $(5 + y)\,(5 - y)$ **(5)** $(2x + 3)\,(2x - 3)$ **(6)** $(3x + 4y)\,(3x - 4y)$
(7) $6\,(x + 2)\,(x - 2)$ **(8)** $2\,(10 + 3z)\,(10 - 3z)$ **(9)** $(9a + 11b)\,(9a - 11b)$
(10) $(ac + 4cd)\,(ac - 4cd)$ **(11)** $(6 + 3a - 2b)\,(6 - 3a + 2b)$
(12) $(2x + 3y + 10z)\,(2x + 3y\ 10z)$ **(13)** $(8b + 6b + d)\,(8b - 6b - d)$
(14) $-3b\,(6a - 5b)$ **(15)** $(10a - 29b)\,(18a - 13b)$ **(16)** $(22p - 8q)\,(8p - 22q)$
(17) $18\,(5c - d)\,(-c + 5d)$ **(18)** $31\,(4m - 4n + 5p - 5q)\,(4m - 4n - 5p + 5q)$

مشق 8.11

I. **(1)** $(x + 1)\,(5x + 4)$ **(2)** $(x + y)\,(a + b)$ **(3)** $(b + c^2)\,(b + 4)$
(4) $(p - 6q)\,(p - q)$ **(5)** $(a + b^2)\,(a + 5)$ **(6)** $(7x + py)\,(x + 1)$
(7) $2\,(cd - d)\,(c + 2d)$ **(8)** $2\,(y + 2)\,(y - 5)$ **(9)** $(xy - 1)\,(xy + 5)$
(10) $(p - q)\,(p - 1)$

II. **(1)** $(x + 2)\,(x + 4)$ **(2)** $(y + 2)\,(y + 6)$ **(3)** $(a + 2)\,(a + 5)$
(4) $(c + 1)\,(c + 6)$ **(5)** $(d + 1)\,(d + 5)$ **(6)** $(p - 1)\,(p - 3)$
(7) $(r + 4)\,(r + 3)$ **(8)** $(a - 2)\,(a + 5)$ **(9)** $(m + 2)\,(m - 7)$
(10) $(x + 3)\,(x + 7)$ **(11)** $(y - 2)\,(y + 9)$ **(12)** $(x + 3)\,(x + 7)$

جائزی واری مشق 8

2. **(i)** $a^2 + 2ab + b^2$ **(ii)** $a^2 - 2ab + b^2$ **(iii)** $x^2 + (a + b)\,x + b^2$
(iv) Letter of alphabet **(vi)** Monomial

جواب

3. (i) b (ii) c (iii) c (iv) a (v) a

4. (i) $2x^2 + 4y^2 + z^2$ (ii) $-2x^2 - 3z^2$ (iii) $4x^2 - 2y^2 - 3z^2$
(iv) $6y^2 + 7z^2$ (v) $2x^2 + 3z$ (vi) $-4x^2 + 2y^2 + 3z^2$

5. (i) $x^2 - 4y^2$ (ii) $12x^3 + 4x^2$ (iii) $2x^2 + 2y^2$
(iv) $2a^3b^3 - 3a^2b^4$ (v) $a^4 - b^4$ (vi) $a^4 - a^3 + a^2 - 2a - 1$
(vii) 0 (viii) 0

6. (i) $9x^2 + 30x - 25$ (ii) $4a^2 - 20ab + 25b^2$ (iii) $9x^4 + 24x^2y^2 + 16y^4$
(iv) $(3x)^2 - (5y)^2$

7. (i) $10a^2(1 - 20a^2b)$ (ii) $9xyz(4x^2y^2z^2 - 3x^3y - 7z^3)$
(iv) $(a^2 + 11)(x - 16)$ (v) $(ab + c)(x^2 + xy + z^2)$

8. (i) $(a - 13)(a - 13)$ (ii) $(1 - 3x^2y^2z)(1 - 3x^2y^2z)$ (iii) $7a(b + 7)(b - 7)$
(iii) $3xy(5x^3 + 7x^2y - 9xy - 11y^3)$ (iv) $3(5 + x - y)(5 - x + y)$ (v) $(11x + 3y)(3x + 11y)$
(vi) $\left(\frac{3}{4}a + \frac{2}{3}b\right)\left(\frac{3}{4}a + \frac{2}{3}b\right)$ (vii) $\left(\frac{a}{b}l - \frac{c}{d}m\right)\left(\frac{a}{b}l - \frac{c}{d}m\right)$
(viii) $\left(a - \frac{9}{5} + \frac{6}{5}m\right)\left(a - \frac{9}{5} - \frac{6}{5}m\right)$

مشق 9.1

A. (1) $x = 4$ (2) $x = 5$ (3) $x = \frac{3}{5}$ (4) $x = -4$ (5) $x = 3$ (6) $x = 2$
(7) $x = 2$ (8) $x = -1$ (9) $x = \frac{2}{3}$

B. (1) $x = 4$ (2) $x = -\frac{2}{3}$ (3) $x = 6\frac{2}{3}$ (4) $x = -1$ (5) $x = 2$

C. (1) $x = 3$ (2) $x = 9$ (3) $x = \frac{8}{15}$ (4) $x = 4$ (5) $x = 1\frac{1}{6}$ (6) $x = 1$

D. (1) $x = 6$ (2) $x = 12$ (3) $x = 12$ (4) $x = 4\frac{2}{13}$ (5) $x = \frac{7}{11}$ (6) $x = 3$
(7) $x = \frac{7}{10}$ (8) $x = -2\frac{5}{6}$

مشق 9.2

(1) $x = 3$ (2) $x = 7$ (3) $x = 4$ (4) $x = 10$ (5) $x = 6$ (6) $x = 5$
(7) $x = -1\frac{1}{2}$ (8) $x = -27$ (9) $x = \frac{1}{25}$ (10) $x = -11$ (11) $x = 2$ (12) $x = -5$

مشق 9.3

(i) هن 30 رُپيا ڏنا. (ii) 5 رُپيا (iii) 15 ميٽر ۽ 16.5 ميٽر
(iv) 2 س م = $m\overline{AB}$، 3 س م = $m\overline{BC}$، 6 س م = $m\overline{AC}$ (v) 8 س م
(vi) اصغر وٽ 160 رُپيا ۽ حُسين وٽ 640 رُپيا (vii) هائو (viii) 21 ۽ 22 عدد آهن.
(ix) 15، 16 ۽ 17 گهربل مڪمل يا پورا عدد آهن. (x) 24
(xi) گهربل عدد 4 ۽ 5 آهن. (xii) گهربل اِڪي عدد آهن: 27، 29، 31 ۽ 33

جواب

جائزي واري مشق9

1. (i) $x + (x + 2) = 42$ (ii) $x + (x + 2) = 21$ (iii) $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 46$

.4 (i) هڪ بدلجندڙ (ii) مول (iii) مول (iv) مُلھ

5. (i) a (ii) d (iii) a (iv) b
6. (i) $x = 12$ (ii) $x = 19$ (iii) $x = 3$ (iv) $x = 9$
   (v) $x = 5$ (vi) $x = -12$

.7 ڊيگھ = 35 س م ۽ ويڪر = 25 س م

مشق 10.1

1. (i) $(\angle POS, \angle SOR)$ (ii) $(\angle SOR, \angle QOR)$ (iii) $(\angle POR, \angle QOR)$ (iv) $\angle POS, \angle QOS$
2. $(\angle BOD, \angle AOD), (\angle AOC, \angle BOC)$ 3. $m\angle PON = 80^o$
4. $(49^o, 41^o), (62^o, 28^o), (54^o, 36^o), (36^o, 54^o), (67^o, 23^o), (81^o, 9^o), (15^o, 75^o)$
5. $(80^o, 100^o), (132^o, 48^o), (49^o, 131^o), (76^o, 104^o), (125^o, 55^o), (103^o, 77^o), (68^o, 112^o)$
6. $(m\angle AOP = m\angle COD = 55^o), (m\angle AOC = m\angle POD = 125^o)$
7. (i) $m\angle ACB = 55^o$, $m\angle BAC = 25^o$
   (ii) $m\angle PRQ = 38^o$, $m\angle PQR = 80^o$ $m\angle PRT = 142^o = m\angle QRS$

.8 (i) 45^o (ii) 90^o (iii) هڪ ويڪري ڪند (iv) گوني ڪند (v) سوڙهي ڪند (vi) گوني ڪند

مشق 10.2

A. هڪ جهڙيون شڪليون	يڪسان شڪليون
(ii), (v), (vi)	(i), (iii), (iv), (vii) (viii), (ix), (x)

C. (i) شڪل P ۽ R ڪي ساڳيو نمونو آهي. (ii) شڪل P ۽ R يڪسان نہ آهن.
(iii) شڪل P ۽ R ساڳئي سائيز جون نہ آهن. (iv) شڪل P ۽ R هڪ جهڙيون شڪليون آهن.
(v) شڪل P ۽ Q يڪسان آهن.

D. (i) صحيح (ii) غلط
(iii) نہ، اُهي يڪسان نہ آهن چاڪاڻ تہ انهن ڪي فقط ساڳيو نمونو آهي، پر اُنهن ڪي ساڳي ماپ نہ آهي.
(iv) هائو، اُهي يڪسان نہ آهن، چاڪاڻ جو اُنهن ڪي فقط ساڳيو نمونو آهي ۽ اُنهن ڪي ساڳي ماپ نہ آهي.
(v) هائو

مشق 10.3

.1 (iv) ساڳيو نمونو ۽ ساڳي ماپ (يڪسان) (v) ساڳيو نمونو پر ساڳي ماپ نہ آهي. (هڪ جهڙيون)
(vi) ساڳيو نمونو ۽ ساڳي ماپ (يڪسان) (vii) ساڳيو نمونو ۽ ساڳي ماپ (يڪسان)
(viii) ساڳيو نمونو نہ آهي ۽ نہ وري ساڳي ماپ آهي (نہ هڪجهڙا ۽ نہ وري يڪسان)
(ix) ساڳيو نمونو نہ آهي ۽ نہ وري ساڳي ماپ آهي (نہ هڪجهڙا ۽ نہ وري يڪسان)

2. $(\overline{AB} \cong \overline{XY}), (\overline{DE} \cong \overline{XZ}), (\overline{MN} \cong \overline{CD}), (\overline{YZ} \cong \overline{GH}), (\overline{RS} \cong \overline{PQ}), (\overline{YZ} \cong \overline{EF})$
3. $(\angle ABC \cong \angle PRQ), (\angle XYZ \cong \angle MNS), (\angle COD \cong \angle PQR), (\angle AOB \cong \angle DEF)$

.4 (i) $m\angle DEF = 100^o$ (ii) $\angle PQR \cong \angle XYZ$ (iii) يڪسان (iv) برابر (v) رداس

5. (i) $x = 15, y = 4$ (ii) $b = 12, x = 7$ (iii) $x = 6, y = 8$

جواب

مشق 10.4

(1) $\overline{AP} \cong \overline{BP}$
$\overline{CP} \cong \overline{BP}$
$\angle APC \cong \angle BPD$
SAS ≅ SAS

(2) $\overline{PO} \cong \overline{MO}$
$\overline{QO} \cong \overline{NO}$
$m\angle PQO = m\angle MNO = 90^o$
RHS ≅ RHS

(3) $\angle PRQ \cong \angle PSQ$
$\angle PQR \cong \angle PQS$
$\overline{RQ} \cong \overline{SQ}$
ASA ≅ ASA

(4) $\overline{PQ} \cong \overline{SR}$
$\overline{QR} \cong \overline{PS}$
$\overline{PR} \cong \overline{PR}$
SSS ≅ SSS

(5) $\angle ABC \cong \angle EDC$
$\overline{BC} \cong \overline{DC}$
$\angle ACB = m\angle DCE$
ASA ≅ ASA

(6) $\overline{AC} \cong \overline{DC}$
$\angle ACB \cong \angle DCE$
$\overline{BC} \cong \overline{EC}$
SAS ≅ SAS

(7) $\overline{PQ} \cong \overline{PO}$
$\overline{QR} \cong \overline{OR}$
$\overline{PR} \cong \overline{PR}$
SSS ≅ SSS

(8) $\angle ABD \cong \angle CDB$
$\overline{BD} \cong \overline{BD}$
$\angle ADB = m\angle DBC$
ASA ≅ ASA

(9) $\overline{PO} \cong \overline{SO}$
$\angle PQO \cong \angle SRO$
$\overline{QO} \cong \overline{RO}$
HS ≅ HS

(10) $\overline{CE} \cong \overline{FD}$
$\angle CDE = m\angle FED$
$\overline{CD} \cong \overline{FE}$
RHS ≅ RHS

مشق 10.5

(1) زھ **(2)** رداس يا نيم قطر **(3)** رداسي ٽڪرو **(4)** مرڪز **(5)** قطر
(6) مرڪز، بيٺ **(7)** قطر **(8)** لاتعداد، برابر **(9)** اڌ **(10)** لاتعداد، برابر

جائزي واري مشق 10

7. **(1)** $\overline{AB} \cong \overline{DC}$
$\overline{BC} \cong \overline{AD}$
$\overline{AC} \cong \overline{AC}$
SSS ≅ SSS

(2) $\overline{AB} \cong \overline{DC}$
$\angle BAC = m\angle ACD$
$\overline{AC} \cong \overline{AC}$
SAS ≅ SAS

(3) $\angle BAC \cong \angle ACD$
$\overline{AC} \cong \overline{AC}$
$\angle BCA \cong \angle DAC$
ASA ≅ ASA

.12 **(i)** پر واريون ڪنڊون **(ii)** ڪامپليمينٽري ڪنڊون **(iii)** ساڳيون (Same)، نموني ۾ (Shape)
(iv) چوٽيءَ واريون آمهون سامهون واريون، برابر **(v)** هيپاٽينيوز، هيپاٽينيوز، يڪسان

جائزي واري مشق11

.A **(viii)** هائو، هڪ چورس، مستطيل آهي، هڪ چورس، پورروچوٽ پاسو چوڪندو آهي ۽ هڪ چورس، هڪ رامبس آهي.

.C **(i)** ٽڪندو **(ii)** 67^o **(iii)** مستطيل **(iv)** (*a*) **(v)** (*d*)
(vi) (*b*) **(vii)** (*b*) **(viii)** (*a*)

جواب

مشق 12.1

A. (1) 88 س م (2) 110 س م (3) 132 ملي ميٹر (4) 176 ملي ميٹر

B. (1) 66 س م (2) 176 س م (3) 242 س م (4) 308 س م
(5) 374 س م (6) 396 س م (7) 506 س م (8) 484 س م

C. (1) 3.5 س م (2) 10.5 س م (3) 14 س م (4) 17.5 س م
(5) 21 س م (6) 28 س م (7) 35 س م (8) 31.5 س م

D. (1) 14 س م (2) 49 س م (3) 77 ملي ميٹر (4) 84 ملي ميٹر
(5) 15.4 ملي ميٹر (6) 9.8 س م (7) 16.8 س م (8) 12.6 س م

E. (1) 8.8 س م (2) 132 ملي ميٹر (3) 220 ملي ميٹر (4) 417.6 س م (5) 264 ملي ميٹر

F. (1) 66 س م (2) 176 س م (3) 4.4 ميٹر

مشق 12.2

A. (1) 616 چورس س م (2) 346.55 چورس س م (3) 1,386 چورس س م (4) 962.5 چورس ملي ميٹر
(5) 3,850 چورس ملي ميٹر (6) 1,886.5 چورس س م (7) 16,022.16 س م (8) 4,658.5 چورس س م

B. (1) 7 ملي ميٹر (2) 28 س م (3) 49 ملي ميٹر (4) 42 ملي ميٹر
(5) 1.4 ملي ميٹر (6) 17.5 س م (7) 3.5 ميٹر (8) 4.9 ملي ميٹر
(9) 2.1 ميٹر

C. (1) 346.5 چورس س م (2) 616 چورس س م (3) 1,336 چورس س م (4) 2462 چورس س م
(5) 55.44 چورس س م (6) 75.46 چورس س م (7) 98.568 چورس س م (8) 124.74 چورس س م

D. (1) 14 س م (2) 42 ملي ميٹر (3) 70 ملي ميٹر (4) 112 ملي ميٹر
(5) 12.6 س م (6) 15.4 س م (7) 16.8 س م (8) 18.2 س م

مشق 12.3

A. (1) 3,520 چورس س م (2) 1,760 چورس س م (3) 6,600 چورس س م (4) 4,400 چورس س م
(5) 13,200 چورس س م (6) 10,450 چورس س م

B. (i) 19.5 س م (ii) 22.5 س م (iii) 44 ملي ميٹر (iv) 27 س م (v) 32 س م

C. (i) $r = 8$ س م, $h = 20$ س م (ii) $r = 15$ س م, $h = 20$ س م
(iii) $r = 19$ س م, $h = 30$ س م (iv) $r = 19.5$ س م, $h = 36.5$ س م

مشق 12.4

A. (i) 12,320 كعب س م (ii) 68,750 كعب س م (iii) 98,560 كعب س م (iv) 35,200 كعب س م
(v) 8.6625 كعب ميٹر (vi) 956,455.5 كعب س م (vii) 192,500 كعب ملي ميٹر
(viii) 178,200 كعب ملي ميٹر

B. (i) 25 س م (ii) 28 س م (iii) 42 ملي ميٹر (iv) 210 ملي ميٹر (v) 35 ملي ميٹر

C. (i) 21 س م (ii) 14 س م (iii) 20 س م (iv) 30 س م (v) 40 ملي ميٹر (vi) 21 ملي ميٹر

مشق 12.5

(1) 11,000 رُپيا (2) 14 س م (3) 264,000 ميٹر يا 264 كلوميٹر (4) 31.5 س م (5) 1.8 ميٹر

(6) ايراضي = 616 چورس ميٹر، مُلھ=12,320 رُپيا (7) ايراضي=3696 چورس ميٹر، مُلھ=369,600 رُپيا

(8) ايراضي = 6.16 چورس ميٹر، مُلھ = 616 رُپيا

(9) ايراضي = 38.5 چورس ميٹر، مُلھ = 2,887.50 رُپيا

(10) ايراضي = 0.625 چورس ميٹر، مُلھ = 770 رُپيا

مشق 12.6

(1) ايراضي 874.5 چورس ميٹر، مُلھ 43,725 رُپيا (2) ايراضي 677.6 چورس ميٹر، مُلھ 67,760 رُپيا

(3) ايراضي 50.16 چورس ميٹر، مُلھ 15.048 رُپيا (4) ايراضي 1.232 چورس ميٹر

(5) ايراضي 4.07 چورس ميٹر (6) مقدار 69,300,000 كعب س م، گنجائش 69,300 لٽر

جواب

(7) مقدار = 123,750 ڪعب س م ۽ گنجائش 123.75 لٽر (8) مقدار = 616 ڪعب ميٽر = مٽي

(9) مقدار = 404.25 ڪعب س م ۽ گنجائش 0.40425 لٽر = 0.4 لٽر (اندازي طور)

(10) مقدار = 231 ڪعب ميٽر ۽ مُلھ 57,750 رُپيا (11) رداس = r = 1 ميٽر

(12) مقدار = 3,850,000 ڪعب س م، اوچائي = 2.5 ميٽر

(13) ايراضي (گولائي وارين پٽين جي) 770 چورس ميٽر ۽ مُلھ = 154,000 رُپيا

(14) ايراضي (پايو) 1386 چورس ، ايراضي (گولائي وارين پٽين جي = 660 چورس ميٽر

ڪُل ايراضي = 2046 چورس ميٽر ۽ مُلھ 204,600 رُپيا

جائزي واري مشق 12

A. (8) $v = \pi r^3$

B. (2) سليندر (3) سليندر (4) ڪعب ميٽر (5) 3.142

C. **1.** (i) **2.** (i) **3.** (ii) **4.** (ii) **5.** (iii)

6. (iv) **7.** (ii) **8.** (iii) **9.** (i) **10.** (iii)

مشق 13.1

(1)

گروپ	پيرڊ يا جماعتي وقفو	ٽيلي نشان	فريڪئنسي (تعدد)
پھريون 1st	21 – 22	||	2
ٻيو 2nd	23 – 24	|	1
ٽيون 3rd	25 – 26	|	1
چوٿون 4th	27 – 28	||	2
پنجون 5th	29 – 30	|	1

(2)

گروپ	پيرڊ يا جماعتي وقفو	ٽيلي نشان	فريڪئنسي (تعدد)
پھريون	3001 – 4000	|	1
ٻيو	4001 – 5000	||	2
ٽيون	5001 – 6000	||||	4
چوٿون	6001 – 7000	|||	3
پنجون	7001 – 8000	||	2

(3)

گروپ	پيرڊ يا جماعتي وقفو	ٽيلي نشان	فريڪئنسي (تعدد)
پھريون	551 – 650	~~||||~~ |	6
ٻيو	651 – 750	~~||||~~ ||||	9
ٽيون	751 – 850	~~||||~~	5

جواب

(4)

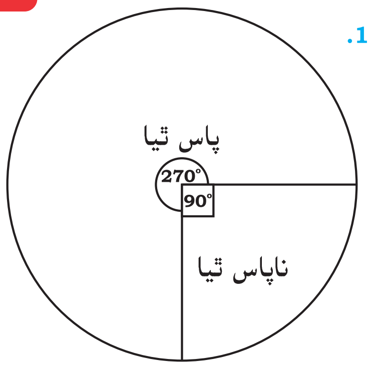
گروپ	پيرڊ يا جماعتي وقفو	ٽيلي نشان	فريڪئنسي (تعدد)
پهريون 1st	100 – 120	𝍸	5
ٻيو 2nd	121 – 140	𝍸 III	8
ٽيون 3rd	141 – 160	𝍸 III	8
چوٿون 4th	161 – 180	𝍸 I	6
پنجون 5th	181 – 200	III	3

(5)

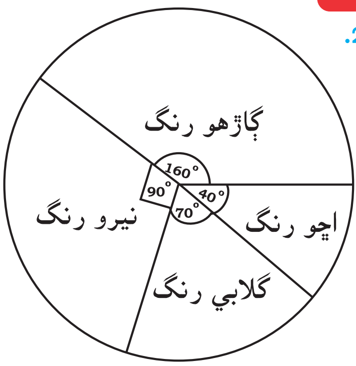
گروپ	پيرڊ يا جماعتي وقفو	ٽيلي نشان	فريڪئنسي (تعدد)
پهريون 1st	10 – 17	𝍸 I	6
ٻيو 2nd	18 – 25	IIII	4
ٽيون 3rd	26 – 33	IIII	4
چوٿون 4th	34 – 41	𝍸 II	7
پنجون 5th	42 – 50	𝍸 IIII	9

مشق 13.2

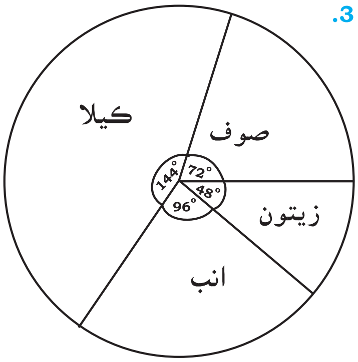
.1



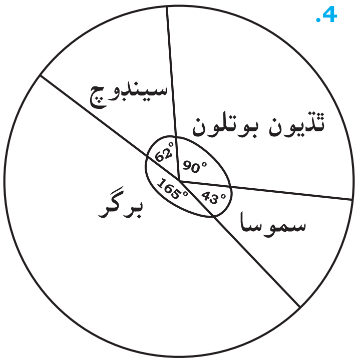
.2



.3



.4

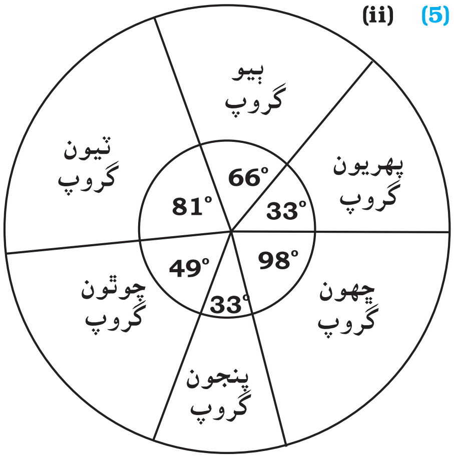


جواب

(5) **(i)**

گروپ	پيرڊ يا جماعتي وقفو	ٽيلي نشان	فريڪئنسي (تعدد)
پهريون 1st	9 – 22	II	2
ٻيو 2nd	23 – 36	IIII	4
ٽيون 3rd	37 – 50	卌	5
چوٿون 4th	51 – 64	III	3
پنجون 5th	65 – 78	II	2
ڇهون 6th	79 – 92	卌 I	6

(5) **(ii)**



.6 **(i)** مُرغي: 90 شاگرد
(ii) سبزيون: 20 شاگرد
(iii) 25 شاگرد

پسنديده ڪاڌا	فريڪئنسي	ڪنڊ
مُرغي	90	180°
پستن واريون نوڊلس	25	50°
سبزيون	20	40°
مڇي ۽ چپس	45	90°
ڪُل	180	360°

جائزي واري مشق 13

.1 **(i)** مواد **(ii)** فريڪئنسي **(iii)** اڻ سهيڙيل مواد **(iv)** هيٺين جماعتي حد
(v) فريڪئنسي چارٽ **(vi)** پيش ڪرڻ **(vii)** ٽيلي ڪرڻ **(viii)** مٿين جماعتي حد
(ix) سائيز يا ديگهه **(x)** پاءِ گراف

2. **(i)** d (ii) c (iii) a (iv) b

3.

گروپ	پيرڊ يا جماعتي وقفو	ٽيلي نشان	فريڪئنسي (تعدد)
پهريون 1st	1 – 10	卌 II	7
ٻيو 2nd	11 – 20	卌 卌 I	11
ٽيون 3rd	21 – 30	卌 卌	10
چوٿون 4th	31 – 40	卌 IIII	9
پنجون 5th	41 – 50	III	3