7

ریاضی

ساتویں جماعت کے لیے

سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جام شورو

طبع کنندہ

رائل کارپوریشن، کراچی

مفت تقسیم کے لیے

جملہ حقوق بحق سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جامشورو سندھ محفوظ ہیں

تیار کردہ: سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جامشورو

نظر ثانی شدہ: پراونشل رویو کمیٹی آف ٹیکسٹ بک، بیورو آف کیوریکیولم اینڈ ایکسٹینشن ونگ سندھ، جامشورو

منظور کردہ: ایجوکیشن اینڈ لٹریسی ڈپارٹمنٹ حکومت سندھ کراچی

نوٹیفکیشن نمبر SO(G-I) E&L/CURRICULUM-2014 بتاریخ 04-01-2016

صوبہ سندھ کے اردو میڈیم اسکولوں کے لئے واحد درسی کتاب کے طور پر شائع کی گئی۔

نگران اعلیٰ: عبدالعلیم لاشاری (چیئرمین سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جامشورو، سندھ)

مصنفین:
- محمد صغیر شیخ
- عطیہ تبسم بھٹو
- پروفیسر اعجاز علی صبحپوٹو
- اسماء بھٹی
- شمس الحق مغل
- سُمتر ارانی

پراونشل ریویو کمیٹی:
- محمد صغیر شیخ
- ہارون لغاری
- آفتاب علی
- عطیہ تبسم بھٹو
- سید آفاق احمد
- ارجن لعل۔ ایس۔ سدھریا

مدیر:
- پروفیسر اعجاز علی صبحپوٹو
- سُمتر ارانی

ٹیکنکل مدیر:
- ارجن لعل۔ ایس۔ سدھریا

مترجم:
- آفتاب علی

رضا کارانہ نظر ثانی کنندہ:
- علی ڈنو بھیو

کنسلٹنٹ:
- کامران لطیف لغاری؛ ای، ایس، ایس
- میر سرفراز خلیل ساند؛ جی، ایس، ایس

کمپوزنگ و لے آوٹ ڈیزائننگ:
- بختیار احمد بھٹو، حیدر آباد سندھ

طباعت:
- رائل کارپوریشن، کراچی

مفت تقسیم کے لیے

فہرست

یونٹ	عنوان	صفحہ نمبر
1	سیٹ	1
2	ناطق اعداد	24
3	اعشاریہ	49
4	قوت نما	63
5	مثبت عدد کا جذر المربع	78
6	تغیر راست اور معکوس	94
7	مالیاتی حساب	110
8	الجبری اظہاریے	130
9	یک درجی مساوات	154
10	جیومیٹری کے بنیادی تصورات	168
11	عملی جیومیٹری	193
12	محیط، رقبہ اور حجم	214
13	معلومات داری	230
14	فرہنگ اصطلاحات	247
15	جوابات	250

مفت تقسیم کے لیے

پیش لفظ

سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ ایک ایسا تعلیمی ادارہ ہے جس کا فریضہ درسی کتب کی تیاری و اشاعت ہے۔ اس کا اولین مقصد ایسی درسی کتب کی تیاری و فراہمی ہے جو نسلِ نو کو شعور آگہی اور ایسی صلاحیت بخشیں جن کے ذریعے وہ اسلام کے آفاقی نظریات، بھائی چارے، اسلام کے کارناموں اور اپنے ثقافتی ورثہ و روایات کی پاسداری کرتے ہوئے دؤرِ جدید کے نت نئے سائنسی، تکنیکی اور معاشرتی تقاضوں کا مقابلہ کر کے کامیاب زندگی گزار سکیں۔

اس اعلیٰ مقصد کی تکمیل کی غرض سے اہلِ علم، ماہرین مضامین، مدرسین کرام اور مخلص احباب کی ایک ٹیم ہر چار سمت سے حاصل ہونے والی تجاویز کی روشنی میں درسی کتب کے معیار، جائزے اور ان کی اصلاح کے لیے ہمارے ساتھ ہم مصروفِ عمل ہے۔

ہمارے ماہرین اور اشاعتی عملے کے لیے اپنے مطلوبہ مقاصد کا حصول اسی صورت میں ممکن ہے کہ ان کتب سے اساتذہ کرام اور طلبہ و طالبات کماحقہ استفادہ کریں۔ علاوہ ازیں ان کی تجاویز و آراء ان کتب کے معیار کو مزید بہتر بنانے میں ہمارے مُمِد و مُعاون ثابت ہوں گی۔

چیئرمین

سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جامشورو، سندھ

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

یونٹ 1 سیٹ

1.1 سیٹ

تعارف: علم کے میدان میں بہت سی انقلابی تبدیلیاں آ رہی ہیں۔ دوسرے مضامین کی طرح ریاضی میں بھی نئے نئے تصورات اور عنوانات کا اضافہ ہوا ہے اور نئی نئی اصطلاحات اور علامتوں کا ارتقاء ہوا ہے۔ سیٹ کے تصور کو سب سے پہلے اُنیسویں صدی میں جارج کنٹر (George Cantor) نے متعارف کروایا تھا۔ بیسویں صدی میں سیٹ کے تصورات کو ریاضی کی کئی شاخوں کو مربوط کرنے کے لئے استعمال کیا گیا۔

1.1.1 سیٹ کو ظاہر کرنا

- بیانیہ شکل میں
- اندراجی شکل میں
- ترقیم سیٹ ساز شکل میں

ہم جانتے ہیں کہ ریاضی میں سیٹ مختلف اشیاء کے واضح مجموعہ کو کہتے ہیں۔

سیٹ کو مندرجہ ذیل تین اشکال میں ظاہر کیا جاتا ہے:

(i) بیانیہ شکل (ii) اندراجی شکل (iii) ترقیم سیٹ ساز شکل

(i) بیانیہ شکل

ذیل کے سیٹوں کو غور سے دیکھیں:

A = ساتویں جماعت کے طلبہ کا سیٹ

B = پہلے دس قدرتی اعداد کا سیٹ

C = پہلے دس مکمل اعداد کا سیٹ

D = ڈبے میں موجود جیومیٹریکل آلات کا سیٹ

ہم اوپر دی گئی ہر عبارت سے سیٹ کے ممبران کو ظاہر کر سکتے ہیں۔ جیسا کہ یہ سیٹ اپنے ممبران کی خاصیتوں کی وضاحت کرتے ہیں، لہٰذا سیٹ کی وضاحت کرنے والی اس شکل کو بیانیہ شکل کہتے ہیں۔

ذیل میں دیئے گئے سیٹ بیانیہ شکل کی کچھ اور مثالیں ہیں۔

مثالیں:

A = ہفتے کے دنوں کے ناموں کا سیٹ

B = پہلے پانچ قدرتی اعداد کا سیٹ

C = پہلے چھ مکمل اعداد کا سیٹ

D = ج سے شروع ہونے والے مہینوں کے ناموں کا سیٹ

E = 1 سے 8 کے درمیان صحیح اعداد کا سیٹ

مفت تقسیم کے لیے

سرگرمی: مندرجہ ذیل سیٹوں کو بیانیہ شکل میں لکھیں۔

(i) D = {3, 6, 9, 12}

D = 3 کے پہلے چار عاد کا سیٹ

(ii) O = {a, e, i, o, u}

O = _______________ کا سیٹ

(iii) W= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

W = _______________ کا سیٹ

(iv) M = {مارچ، مئی}

M = _______________ کا سیٹ

(v) B = {خ، و، ب، ص، ر، ت}

B = _______________ کا سیٹ

یاد رکھیں:
سیٹ کی بیانیہ شکل میں ہم کسی بھی عام فہم زبان میں سیٹ کے ممبران کی خصوصیات بیان کرتے ہیں۔

(ii) اندراجی شکل

مثال 1: ذیل میں دیئے گئے سیٹ پر غور کریں جسے اندراجی شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔

A = { a, b, c, d, e}

یہاں سیٹ A کے ممبران چھوٹے انگریزی حروفِ تہجی کے پہلے پانچ حروف ہیں جیسے a، b، c، d اور e۔ ان کی بیانیہ شکل ہے: 'انگریزی حروف تہجی کے پہلے پانچ حروف کا سیٹ'۔

ذیل میں اندراجی شکل کی کچھ اور مثالیں دی گئی ہیں۔

(i) C = {1, 2, 3, 4, 5}

اس کی بیانیہ شکل ہے، 'گنتی کے پہلے پانچ قدرتی اعداد کا سیٹ'۔

(ii) G = { △, □ , ○ }

اس کی بیانیہ شکل ہے، 'تین جیومیٹریکل اشکال، مثلث، مربع اور دائرہ کا سیٹ'۔

(iii) F = {1, 2, 3, ..., 100}

اس کی بیانیہ شکل ہے، '1 سے 100 تک قدرتی اعداد کا سیٹ'۔

(iv) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ اس کی بیانیہ شکل ہے، 'تمام قدرتی اعداد کا سیٹ'۔

اوپر کی تمام مثالوں سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ:

اندراجی شکل میں سیٹ کے ممبران کو بریسز (Braces) یعنی کرلی بریکیٹس (Curly brackets) میں لکھتے ہیں اور ان کو قوما (,) سے علیحدہ کرتے ہیں۔

(iii) ترقیم سیٹ ساز شکل

ترقیم سیٹ ساز شکل میں سیٹ کو بذریعہ علامات تمام ممبران کی مشترک خصوصیات کے ذریعے ظاہر کرتے ہیں۔

ذیل کی مثالوں پر غور کریں۔

مثال 1: پہلے دس قدرتی اعداد کا سیٹ۔

اسے سیٹ کی اشکال میں یوں لکھتے ہیں:

بیانیہ شکل میں: A = پہلے دس قدرتی اعداد کا سیٹ

اندراجی شکل میں: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

ترقیم سیٹ ساز شکل میں: $A = \{x \,/\, x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 10\}$

اوپر دیئے گئے ترقیم سیٹ ساز شکل کو پڑھتے ہیں، x ممبر ہے قدرتی اعداد کے سیٹ $\mathbb{N}$ جو کہ 10 سے کم یا 10 تک ہیں۔

علامت ' / ' کو 'اس طرح' پڑھتے ہیں۔

یاد رکھنے کی علامت:
/ 'اس طرح'
$\in$ 'تعلق ہے'
$\geq$ 'بڑا ہے یا برابر ہے'
$\leq$ 'چھوٹا ہے یا برابر ہے'
$\wedge$ 'اور'
$\vee$ 'یا'
= 'برابر ہے'
$\neq$ 'برابر نہیں ہے'

مثال 2: تمام مثبت جفت اعداد کا سیٹ اندراجی اور ترقیم سیٹ ساز شکل میں لکھیں۔

اندراجی شکل میں ہم یوں لکھتے ہیں: $B = \{2, 4, 6, ...\}$

ترقیم سیٹ ساز شکل میں لکھتے ہیں: $B = \{x / x \in \mathbb{E}^+\}$

مثال 3: $X = \{a, b, c, d, ..., z\}$ کو ترقیم سیٹ ساز شکل میں لکھیں۔

ترقیم سیٹ ساز شکل میں: X = { x / x انگریزی حروف تہجی ہے }

مثال 4: سیٹ $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ کو ترقیم سیٹ ساز شکل اور بیانیہ شکل میں لکھیں۔

ترقیم سیٹ ساز شکل: $C = \{x \,/\, x \in \mathbb{W} \wedge 0 \leqslant x \leqslant 5\}$

بیانیہ شکل: پہلے چھ مکمل اعداد کا سیٹ

سرگرمی: ذیل میں دیئے گئے کالم A کے سیٹ کو کالم B کے درست ترقیم سیٹ ساز سے ملائیں۔

نمبر شمار	کالم A	کالم B
1.	پہلے پانچ مثبت جفت اعداد کا سیٹ	$\{x \,/\, x \in \mathbb{O}, 1 \leqslant x \leqslant 9\}$
2.	$\{1, 3, 5, 7, 9\}$	$\{x \,/\, x \in \mathbb{N}\}$
3.	پہلے دس مکمل اعداد کا سیٹ	$\{x \,/\, x \in \mathbb{E} \wedge 2 \leqslant x \leqslant 10\}$
4.	$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$	$\{x \,/\, x \in \mathbb{W} \wedge 0 \leqslant x \leqslant 9\}$
5.	تمام قدرتی اعداد کا سیٹ	$\{x \,/\, x \in \mathbb{Z} \wedge -2 \leqslant x \leqslant 2\}$

مشق 1.1

I- مندرجہ ذیل سیٹوں کو بیانیہ شکل میں لکھیں۔

1. $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$
2. $E = \{2, 4, 6, 8\}$
3. $F = \{1, 2, 5, 10\}$
4. $J = \{2, 3, 5, 7, 11\}$
5. $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
6. $S = \{5, 10, 15, 20, 25\}$
7. $T = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$

II- مندرجہ ذیل سیٹوں کو اندراجی شکل میں لکھیں۔

1. A = پہلے سات قدرتی اعداد کا سیٹ
2. B = پہلے آٹھ مثبت جفت اعداد کا سیٹ
3. C = -4 سے بڑے اور 2 سے چھوٹے صحیح اعداد کا سیٹ

4. لفظ ' Pakistan ' کے انگریزی حروف تہجی کے حروف کا سیٹ = D
5. 2 کے پہلے دس عاد کا سیٹ = E
6. پہلے دس مفرد اعداد کا سیٹ = F
7. 15 کے تمام جز کا سیٹ = G

III- ذیل میں دیئے گئے سیٹ کو ترقیم سیٹ ساز شکل میں لکھیں۔

1. $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$
2. $B = \{ -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5 \}$
3. C = { راوی، چناب، سندھ، جہلم، ستلج }
4. $E = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, ..., 20 \}$
5. $D = \{ 1, 3, 5, 7, 9, ... \}$
6. S = {ایس سے شروع ہونے والے ہفتے کے دنوں کے ناموں کا سیٹ}
7. Z = { تمام صحیح اعداد کا سیٹ }
8. $L = \{ 4, 8, 12, 16, 20, ... \}$

IV- ذیل میں دیئے گئے سیٹ کو اندراجی شکل میں لکھیں۔

1. $A = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 5 \}$
2. $B = \{ y \mid y \in \mathbb{E} \wedge 4 \leq y \leq 20 \}$
3. $C = \{ a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge -3 < a < 3 \}$
4. $D = \{ z \mid z \in \mathbb{W} \wedge z < 5 \}$

V- سیٹ کو ان کے درست کالم میں لکھیں اور ان کی دوسری دو اشکال بھی لکھیں۔

$A = \{ a, e, i, o, u)$ $D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 50\}$

$B = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ $E = \{p, a, k, i, s, t, n\}$

$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ F = ہفتے کے دنوں کے ناموں کا سیٹ

بیانیہ شکل	اندراجی شکل	ترقیم سیٹ ساز شکل

1.2 سیٹ پر عوامل

1.2.1 دو سیٹوں کا اتصال (یونین)، تقاطع اور فرق کی وضاحت کرنا

1- دو سیٹوں کا اتصال (یونین)

فرض کریں A اور B دو سیٹ ہیں۔ A اور B سیٹوں کا اتصال (یونین) دونوں سیٹوں کے تمام ممبران پر مشتمل ہوتا ہے۔ اتصال (یونین) کو علامت '$\cup$' سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 1: اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ اور $B = \{5, 6, 7\}$

حل: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{5, 6, 7\}$

یا $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

ہم $A \cup B$ کو A یونین B یا A اتصال B پڑھتے ہیں۔

2- دو سیٹوں کا تقاطع

فرض کریں A اور B دو سیٹ ہیں۔ A اور B سیٹوں کا تقاطع دونوں سیٹوں کے مشترک ممبران پر مشتمل ہوتا ہے۔ تقاطع کو علامت '$\cap$' سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 2: اگر $A = \{3, 4, 6, 8\}$ اور $B = \{3, 5, 6, 7\}$ تو $A \cap B$ معلوم کریں۔

حل: یہاں 3 اور 6 دونوں سیٹوں میں مشترک ممبر ہیں۔

لہٰذا $A \cap B = \{3, 6\}$ $A \cap B = \{3, 4, 6, 8\} \cap \{3, 5, 6, 7\}$

ہم $A \cap B$ کو A تقاطع B پڑھتے ہیں۔

3- دو سیٹوں کا فرق

دو سیٹوں A اور B کے فرق کو $A - B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ یہ ایسا سیٹ ہوتا ہے جو سیٹ A کے ایسے تمام ممبران پر مشتمل ہو جو سیٹ B میں موجود نہ ہوں۔ اسے $A \backslash B$ سے بھی ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 3: اگر $A = \{1 2, 3, 4, 5\}$ اور $B = \{2, 4, 6\}$

تو A-B اور B-A معلوم کریں

لہٰذا $A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{2, 4, 6\}$

$= \{1, 3, 5\}$

اور $= \{6\}$

ہم $A - B$ کو A مائنس B یا A فرق B پڑھتے ہیں۔
ہم $A \backslash B$ کو A ڈفرنس B یا A فرق B پڑھتے ہیں۔

1.2.2 (A) دو یا دو سے زائد سیٹوں کا اتصال (یونین) معلوم کرنا

(i) دو سیٹوں کا اتصال (یونین)

مثال 1: اگر $X = \{3, 4, 5, 6\}$ اور $Y = \{1, 2, 3, 8\}$ تو $X \cup Y$ معلوم کریں۔

حل:

$$X \cup Y = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{1, 2, 3, 8\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

مثال 2: اگر $E = \{2, 4, 6\}$ اور $Q = \{\ \}$ تو $E \cup Q$ معلوم کریں۔

حل:

$$E \cup Q = \{2, 4, 6\} \cup \{\ \}$$
$$= \{2, 4, 6\}$$

مثال 3: اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ اور $D = \{2, 4, 6, 8\}$ تو $A \cup D$ معلوم کریں۔

حل:

$$A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\} \cup \{2, 4, 6, 8\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...\}$$

(ii) تین سیٹوں کا اتصال (یونین)

تین سیٹوں کے اتصال (یونین) کی ذیل میں دی گئی مثال سے وضاحت کی گئی ہے۔

مثال: $A = \{1, 2\}$، $B = \{2, 3, 4\}$ اور $C = \{2, 3, 4, 5\}$ تو $A \cup B \cup C$ معلوم کریں۔

حل:

$A \cup B \cup C$ معلوم کرنے کے دو طریقے ہیں:

اگر ہمیں پہلے $A \cup B$ معلوم کرنا ہو تو $(A \cup B) \cup C$ لکھتے ہیں اور یوں معلوم کرتے ہیں:

$$A \cup B = \{1, 2\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

اگر ہمیں پہلے BUC معلوم کرنا ہو تو $A \cup (B \cup C)$ لکھتے ہیں اور یوں معلوم کرتے ہیں:

$$B \cup C = \{2, 3, 4\} \cup \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 3, 4, 5\}$$

اب $A \cup (B \cup C) = \{1, 2\} \cup (2, 3, 4, 5\}$

یا $A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

لہٰذا $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(B)1.2.2 دو یا دو سے زائد سیٹوں کا تقاطع معلوم کرنا

(i) دو سیٹوں کا تقاطع

مثال 1: $A = \{1, 2, 3, 10\}$ اور $B = \{2, 3, 8, 10\}$ تو $A \cap B$ معلوم کریں۔

حل: $A \cap B = \{1, 2, 3, 10\} \cap \{2, 3, 8, 10\}$

یہاں 2 اور 3 دونوں سیٹوں میں مشترک ممبر ہیں۔

اس طرح $A \cap B = \{2, 3, 10\}$

مثال 2: $C = \{a, b, e, f\}$ اور $D = \{2, 4, 8, 10\}$ تو $C \cap D$ معلوم کریں۔

حل: $C \cap D = \{a, b, e, f\} \cap \{2, 4, 8, 10\}$

اس طرح $C \cap D = \{\ \}$ یا $\varnothing$

کیونکہ دونوں سیٹوں C اور D میں کوئی ممبر مشترک نہیں ہے۔

(ii) تین سیٹوں کا تقاطع

دو سیٹوں کا تقاطع ہم پہلے ہی سیکھ چکے ہیں، اسی ہی طرح ہم تین سیٹوں کا تقاطع بھی معلوم کر سکتے ہیں۔

تین سیٹوں کے تقاطع کی مندرجہ ذیل مثال سے وضاحت کی گئی ہے:

مثال: اگر $A = \{1, 2\}$ ، $B = \{2, 3\}$ اور $C = \{2, 3, 4\}$ تو $A \cap B \cap C$ معلوم کریں۔

حل: ہم ان کا حل دو طریقوں سے معلوم کر سکتے ہیں۔

اگر ہمیں پہلے $A \cap B$ معلوم کرنا ہو تو $(A \cap B) \cap C$ لکھتے ہیں اور یوں معلوم کرتے ہیں۔

$$A \cap B = \{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$$

اب $$(A \cap B) \cap C = \{2\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2\}$$

لہٰذا $$A \cap B \cap C = \{2\}$$

اگر ہمیں پہلے $B \cap C$ معلوم کرنا ہو تو $A \cap (B \cap C)$ لکھتے ہیں اور یوں معلوم کرتے ہیں۔

$$B \cap C = \{2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$$

اب $$A \cap (B \cap C) = \{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$$

لہٰذا $$A \cap B \cap C = \{2\}$$

(C)1.2.2 دو سیٹوں کا فرق معلوم کرنا

مثال 1: اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ اور $B = \{2, 4, 5, 7\}$ تو $A - B$ معلوم کریں۔

حل: $A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{2, 4, 5, 7\}$

یہاں ممبران 1 اور $\{1, 3\}$ صرف سیٹ A میں ہیں۔

یہ صاف ظاہر ہے کہ سیٹ A اور سیٹ B کا فرق ممبران 1 اور 3 ہیں جو صرف سیٹ A سے تعلق رکھتے ہیں لیکن سیٹ B سے تعلق نہیں رکھتے ہیں۔ پھر سیٹ B اور سیٹ A کا فرق $B \setminus A$ اس طرح معلوم کرتے ہیں۔

یا $B-A = \{2, 4, 5, 7\} - \{1, 2, 3, 4, 5\}$

پس $B - A = \{7\}$ یا $B \setminus A$

یہاں سیٹ B اور سیٹ A کا فرق صرف ممبر 7 ہے جو کہ سیٹ B سے تعلق رکھتا ہے نہ کہ سیٹ A سے۔

اس طرح $A-B \neq B-A$ یا $A \setminus B \neq B \setminus A$

مثال 2: فرض کریں $P = \{2, 3, 4\}$ اور $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P - Q$ اور $Q - P$ معلوم کریں۔

حل: $P - Q = \{2, 3, 4\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{\ \}$

پس $P - Q = \{\ \}$ یا $\varnothing$

پھر $Q - P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{2, 3, 4\} = \{1, 5, 6\}$

اس طرح $Q - P = \{1, 5, 6\}$

معلوم ہوا کہ $P-Q \neq Q-P$ یا $P \setminus Q \neq Q \setminus P$

مشق 1.2

A- ذیل میں دیئے گئے سیٹوں کا اتصال (یونین) معلوم کریں:

1. $A = \{4, 5\}$ اور $B = \{4, 6, 8, 9\}$
2. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ اور $B = \{2, 4, 6, 8\}$
3. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ اور $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$
4. پہلے چھ مفرد اعداد کا سیٹ = X اور 3 کے پہلے چھ عاد کا سیٹ = Y

5. اگر $D = \{2,4,6\}$، $E = \{1,3,5,6\}$ اور $F = \{1,3,6,9,10\}$ تو معلوم کریں $D \cup E \cup F$
6. اگر $A = \{1, 2, 3\}$، $B = \{\ \}$ اور $C = \{2, 3\}$ تو
$(A \cup B) \cup C$ اور $A \cup (B \cup C)$ معلوم کریں۔

B- مندرجہ ذیل سیٹوں کا تقاطع معلوم کریں۔

1. $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{3, 6, 9, 12\}$
2. $D = \{2, 4, 6, 8\}$ اور $E = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
3. $P = \{a, b, c, d\}$ اور $Q = \{a, e, i, o, u\}$
4. صحیح اعداد کا سیٹ = A اور مثبت صحیح اعداد کا سیٹ = B
5. اگر $A = \{a, b, c, d\}$، $B = \{d, e, f\}$ اور $C = \{f, g, h\}$
تو $(A \cap B) \cap C$ اور $A \cap (B \cap C)$ معلوم کریں۔
6- اگر $D = \{2, 3\}$، $E = \{4, 5\}$ اور $F = \{\ \}$
تو $(D \cap E) \cap F$ اور $D \cap (E \cap F)$ معلوم کریں۔

C- مندرجہ ذیل سیٹوں کی مدد سے A – B اور B – A معلوم کریں اگر

1. $A = \{4, 5, 6\}$ اور $B = \{5, 6, 7, 8\}$
2. $A = \{1, 3, 5, 9, 11\}$ اور $B = \{1, 3, 5, 7, 11\}$
3. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$ اور $B = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
4. 3 کے پہلے چھ عاد کا سیٹ = A اور 4 کے پہلے چھ عاد کا سیٹ = B

1.2.3 غیر مشترک اور متراکب سیٹوں کی تعریف اور شناخت کرنا

(i) غیر مشترک سیٹ

دو سیٹ A اور B غیر مشترک سیٹ کہلاتے ہیں اگر ان میں کوئی بھی ممبر مشترک نہ ہو۔

فرض کریں: $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{4, 5\}$

ان میں کوئی ممبر مشترک نہیں ہے۔ لہٰذا A اور B غیر مشترک سیٹ ہیں۔

(ii) متراکب سیٹ

دو سیٹ A اور B متراکب کہلاتے ہیں اگر ان میں کم از کم ایک ممبر مشترک ہو اور کوئی بھی سیٹ دوسرے کا تحتی سیٹ نہ ہو۔

اگر $X = \{0, 1, 2, 4\}$ اور $Y = \{2, 3, 5, 7\}$

ہم دیکھتے ہیں کہ $2 \in X$ اور $2 \in Y$۔

لٰہذا 2 دونوں سیٹوں کا مشترکہ ممبر ہے اور کوئی سیٹ دوسرے سیٹ کا تحتی سیٹ نہیں ہے۔ پس X اور Y متراکب سیٹ ہیں۔

مشق 1.3

A- غیر مشترک اور متراکب سیٹ کی شناخت کریں:

1. $F = \{\Delta, \square, \bigcirc\}$ اور M = {کپ، جگ، پلیٹ}
2. $W = \{0, 1, 2, 3\}$ اور $N = \{1, 2, 3, 4\}$
3. $C = \{a, e, i, o, u\}$ اور $D = \{p, q, r\}$
4. $C = \{a, c, d, f\}$ اور $D = \{1, 2, 3\}$
5. $N = \{1, 2, 4, 6, 8, 12, 24, 48\}$ اور $M = \{6, 8, 12, 14, 16, 18\}$
6. 10 اور 40 کے درمیان قدرتی اعداد کا سیٹ = N اور 40 تک مکمل اعداد کا سیٹ = W
7. $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$ اور $O = \{5, 10, 15, \ldots\}$

B- مندرجہ ذیل سیٹوں میں غیر مشترک اور متراکب سیٹ کی شناخت کریں اور انہیں کالم میں لکھیں۔

.i	$F = \{2, 3\}$ اور $A = \{1, 4, 6, 8\}$	....
.ii	$H = \{2, 3, 5, 7, 9\}$ ، اور $C = \{1, 3, 5, \ldots\}$	....
.iii	$N = \{a, e, i, o, u\}$ اور $G = \{h, o, c, k, y\}$	....
.iv	$W = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ اور $B = \{x, y, z\}$	....
.v	P = {کپ، جگ، پلیٹ} اور $D = \{f, e, s, l\}$	....
.vi	$Q = \{\star, \Delta, \square, \bigcirc\}$ اور $E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$	....
.vii	$A = \{10, 20, 30, \ldots\}$ اور $B = \{4, 8, 12, \ldots\}$	....

1.2.4 کائناتی سیٹ اور کمپلیمنٹ سیٹ

(i) کائناتی سیٹ

کائناتی سیٹ ایسا سیٹ ہوتا ہے جو کسی زیر غور مسئلے سے تعلق رکھنے والے تمام ارکان (ممبران) پر مشتمل ہوتا ہے اور اسے $\mathbb{U}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

فرض کریں ہم قدرتی اعداد لیں تو یہ تمام قدرتی اعداد کائناتی سیٹ کے ممبر ہوں گے۔

اسی طرح اگر ہم پہلے چھ قدرتی اعداد کا کائناتی سیٹ لیں تو ہمارا کائناتی سیٹ پہلے چھ قدرتی اعداد پر مشتمل ہوگا:
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(ii) سیٹ کا کمپلیمنٹ

اگر U ایک کائناتی سیٹ اور A اس کا تحتی سیٹ ہے تو $U - A$، A کا کمپلیمنٹ سیٹ ہوگا اور اسے A' سے ظاہر کرتے ہیں۔ لہٰذا $A' = U - A$

سیٹ A کے کمپلیمنٹ کا مطلب ہے کہ U کے وہ تمام ممبران کا سیٹ جو سیٹ A سے تعلق نہیں رکھتے ہوں۔

مثال 1: اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ اور $A = \{1, 2, 3, 4\}$ تو A' معلوم کریں۔

حل:
$$A' = U - A$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} - \{1, 2, 3, 4\}$$
$$A' = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

مثال 2: اگر $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ اور $B = \{2\}$ تو B' معلوم کریں۔

حل:
$$B' = U - B$$
$$= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{2\}$$
$$B' = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

مشق 1.4

1- فرض کریں $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ اور $A = \{a, e, f\}$ تو معلوم کریں۔

(i) A' (ii) $A \cup A'$ (iii) $A \cap A'$ (iv) U' (v) $\varnothing'$

2- فرض کریں $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ اور $E = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ تو معلوم کریں۔

(i) E' (ii) $E \cup E'$ (iii) $E \cap E'$ (iv) U' (v) $\varnothing'$

3- اگر $U = \{0, 1, 2, 3, ..., 12\}$ اور $P = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ تو معلوم کریں۔

(i) P' (ii) $P \cup P'$ (iii) $P' \cap P$ (iv) $U \cap U'$

4- اگر $U = \{u, v, w, x, y, z\}$ اور $B = \{x, y, z\}$ تو معلوم کریں۔

(i) B' (ii) $B' \cup B$ (iii) $B' \cap B$ (iv) $U \cup U'$

5- اگر $U = \{1,2,3,4,...,10\}$، $A = \{1,2,3,5,6,7\}$ اور $B = \{2,4,6,8,10\}$ تو معلوم کریں۔

(i) A' (ii) B' (iii) $A' \cap A$ (iv) $A \cup A'$ (v) $B \cup B'$ (vi) $B \cap B'$

1.2.5 سیٹوں کا اتصال (یونین)، تقاطع، فرق اور سیٹ کے کمپلیمنٹ پر مشتمل مختلف خاصیتوں کو ثابت کریں مثلاً $A \cap A' = \varnothing$

(i) سیٹوں کے اتصال پر مشتمل خاصیتیں

(a) سیٹوں کے اتصال (یونین) کی خاصیت مبادلہ

فرض کریں A اور B دو سیٹ ہیں اور $A \cup B = B \cup A$ تو یہ خاصیت سیٹوں کے اتصال کی خاصیت مبادلہ کہلاتی ہے۔

مثال 1: اگر $A = \{1, 2\}$ اور $B = \{2, 3\}$ تو سیٹوں کی خاصیت مبادلہ ثابت کریں۔

حل:

$$A \cup B = \{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\} \quad \dots \text{(i)}$$
$$B \cup A = \{2, 3\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3\} \quad \dots \text{(ii)}$$

نتیجہ (i) اور (ii) ظاہر کرتے ہیں کہ $A \cup B = B \cup A$

اتصال (یونین) کا عمل سیٹوں میں مبادلہ ہے۔

(b) سیٹوں کے اتصال (یونین) کی خاصیت تلازم

فرض کریں A، B اور C تین سیٹ ہیں اور $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ تو یہ خاصیت سیٹوں کے اتصال کی خاصیت تلازم کہلاتی ہے۔

مثال 2: اگر $A = \{1, 2\}$، $B = \{2, 3\}$ اور $C = \{1, 2, 3, 4\}$ تو یونین کی خاصیت تلازم ثابت کریں۔

حل:

(a) $A \cup B = \{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$

$$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \quad \dots \text{(i)}$$

(b) $B \cup C = \{2, 3\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

$$A \cup (B \cup C) = \{1, 2\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \quad \dots \text{(ii)}$$

نتیجہ (i) اور (ii) ظاہر کرتے ہیں کہ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

لہٰذا یونین کا عمل سیٹوں میں تلازم ہے۔

(ii) سیٹوں کے تقاطع پر مشتمل خاصیتیں

(a) سیٹوں کے تقاطع کی خاصیت مبادلہ

فرض کریں A اور B دو سیٹ ہیں اور $A \cap B = B \cap A$ تو یہ خاصیت سیٹوں کے تقاطع کی خاصیت مبادلہ کہلاتی ہے۔

مثال 1: اگر $A = \{a\}$، $B = \{a, b\}$ اور $C = \{a, b, c\}$ تو ثابت کریں۔ $A \cap B = B \cap A$

حل:
$A \cap B = \{a\} \cap \{a, b\} = \{a\}$ ... (i)
$B \cap A = \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$ ... (ii)

نتیجہ (i) اور (ii) ظاہر کرتا ہے کہ $A \cap B = B \cap A$

لہٰذا سیٹوں میں تقاطع کا عمل مبادلہ ہے۔

(b) سیٹوں کے تقاطع کی خاصیت تلازم

فرض کریں A، B اور C تین سیٹ ہیں اور $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ تو یہ خاصیت سیٹوں کے تقاطع کی خاصیت تلازم کہلاتی ہے۔

مثال 2: اگر $A = \{a, b\}$، $B = \{a, b, c\}$ اور $C = \{a, c, d\}$ تو ثابت کریں کہ
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

حل:
$A \cap B = \{a, b\} \cap \{a, b, c\} = \{a, b\}$
$(A \cap B) \cap C = \{a, b\} \cap \{a, c, d\} = \{a\}$ ... (i)
$(B \cap C) = \{a, b, c\} \cap \{a, c, d\} = \{a, c\}$
$A \cap (B \cap C) = \{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\}$ ... (ii)

نتیجہ (i) اور (ii) ظاہر کرتے ہیں کہ $A \cap (B) = (A \cap B) \cap C$

لہٰذا سیٹوں میں تقاطع کا عمل مبادلہ ہے۔

(iii) سیٹوں کے فرق پر مشتمل خاصیتیں

مثال 1: اگر $A = \{1, 2, 3, 5\}$، $B = \{4, 6, 7, 8\}$ تو $A - B \neq B - A$ ثابت کریں۔

حل:
$A - B = \{1, 2, 3, 5\} - \{4, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 5\}$ ... (i)
$B - A = \{4, 6, 7, 8\} - \{1, 2, 3, 5\} = \{4, 6, 7, 8\}$ ... (ii)

نتیجہ (i) اور (ii) ظاہر کرتا ہے کہ $A - B \neq B - A$ یا $A \setminus B \neq B \setminus A$

لہٰذا دو سیٹوں کا فرق مبادلہ نہیں ہوتا ہے۔

(iv) سیٹوں کے کمپلیمنٹ پر مشتمل خاصیتیں

اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ اور $B = \{2, 4, 6, 8\}$ تو B' معلوم کریں اور ثابت بھی کریں:

(i) $B \cup B' = U$ (ii) $B \cap B' = \varnothing$ (iii) $\varnothing' = U$ (iv) $U' = \varnothing$

حل: $B' = U - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{2, 4, 6, 8\}$

اس طرح $B' = \{1, 3, 5, 7\}$

(i) $B \cup B' = \{2, 4, 6, 8\} \cup \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = U$

(ii) $B \cap B' = \{2, 4, 6, 8\} \cap \{1, 3, 5, 7\} = \{\ \}$ یا $\varnothing$

(iii) $\varnothing' = U - \varnothing = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{\ \} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = U$

(iv) $U' = U - U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{\ \} = \varnothing$

مشق 1.5

A- اگر $A = \{-1, -2, -3\}$ ، $B = \{-1, -4, -5, -6\}$ اور $C = \{0, -1, -2, -3, -4\}$ تو ذیل کو ثابت کریں۔

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $B - C \neq C - B$
3. $A \cup C = C \cup A$
4. $(A \cup B) \cup C = (B \cup C) \cup A$
5. $(A \cup C) \cup B = (C \cup B) \cup A$
6. $A \cap B = B \cap A$
7. $B \cap C = C \cap B$
8. $A - C \neq C - A$
9. $(A \cap B) \cap C = (B \cap C) \cap A$
10. $(A \cap C) \cap B = (A \cap B) \cap C$

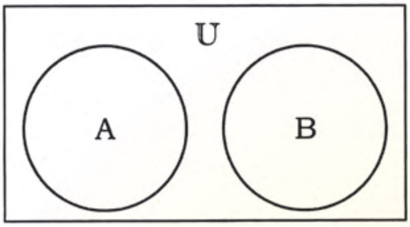
B- اگر $U = \{10, 11, 12, 13, 14, \ldots, 20\}$ اور $A = \{10, 12, 14, 16, 18\}$ ، $B = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ تو ذیل کو ثابت کریں۔

(i) $U' = \varnothing$ (ii) $\varnothing' = U$ (iii) $A \cup A' = U$

(iv) $B \cap B' = \varnothing$ (v) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (vi) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

1.3 وین اشکال

تعارف



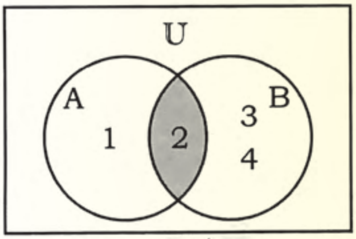
سیٹوں کو وین اشکال کے ذریعے بھی ظاہر کرسکتے ہیں جو کہ انگریزی ریاضی دان جون وین (John Venn) کے نام پر رکھا گیا تھا، جس نے وین اشکال کا استعمال 1881 عیسوی میں متعارف کروایا۔ وین اشکال میں کائناتی سیٹ U کو عموماً مستطیل سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس مستطیل کے اندر سیٹوں کو دائروی اور بعدی اشکال سے ظاہر کرتے ہیں۔ وین اشکال کو سیٹوں پر عوامل کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔

1.3.1 سیٹوں کو وین اشکال سے ظاہر کرنا

آئیں ذیل کے سیٹوں کو وین اشکال کے ذریعے ظاہر کریں۔

(i) متراکب سیٹ (ii) تحتی سیٹ

(iii) غیر مشترک سیٹ (iv) کائناتی سیٹ

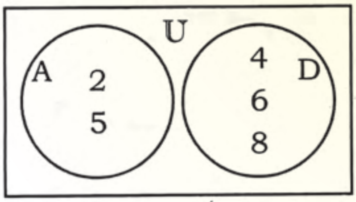


متراکب سیٹ

شکل (i)

(i) متراکب سیٹ

مثال 1: اگر A = {1, 2} اور B = {2, 3, 4} دو سیٹ دیئے گئے ہوں تو شکل (i) متراکب سیٹوں کو ظاہر کرتی ہے۔

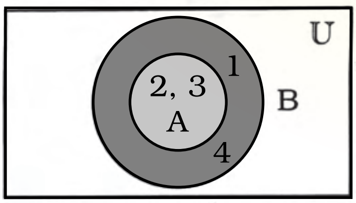


غیر مشترک سیٹ

شکل (ii)

(ii) غیر مشترک سیٹ

مثال 2: فرض کریں A = {2, 5} اور D = {4, 6, 8} تو شکل (ii) غیر مشترک سیٹوں کو ظاہر کرتی ہے۔



تحتی سیٹ

شکل (iii)

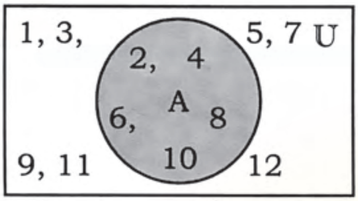
(iii) تحتی سیٹ

مثال 3: فرض کریں A = {2, 3} اور B = {1, 2, 3, 4} لٰہذا سیٹ A، سیٹ B کا تحتی سیٹ ہے جیسا کہ $A \subseteq B$ شکل (iii) $A \subseteq B$ کو ظاہر کرتی ہے۔

(iv) کائناتی سیٹ

مثال 4: فرض کریں U = {1, 2, 3, ...,12}
اور A = {2, 4, 6, 8, 10}

کائناتی سیٹ



شکل (iv)

شکل (iv) میں مستطیل کائناتی سیٹ کو ظاہر کرتا ہے اور مستطیل کے اندر دائرہ سیٹ A کو ظاہر کرتا ہے۔

1.3.2 دو سیٹ A اور B پر اتصال (یونین)، تقاطع، فرق اور کمپلیمنٹ کے عوامل کرنا

جبکہ:

- A تحتی سیٹ ہو B کا
- B تحتی سیٹ ہو A کا
- A اور B غیر مشترک سیٹ ہوں
- A اور B متراکب سیٹ ہوں

سیٹوں پر عوامل بذریعہ وین اشکال

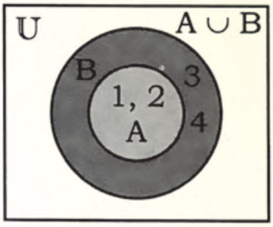
اب ہم سیٹوں پر ان عوامل کو وین اشکال کے ذریعے ظاہر کرتے ہیں۔

(I) سیٹوں کا اتصال (یونین)

(a) جب سیٹ A تحتی سیٹ ہو سیٹ B کا

مثال 1: اگر A = { 1, 2 } اور B = { 1, 2, 3, 4 }
تو A ∪ B = { 1, 2 } ∪ { 1, 2, 3, 4 } = { 1, 2, 3, 4 }

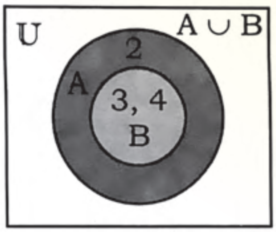
شکل (i) میں سایہ دار حصہ A ∪ B کو ظاہر کرتا ہے۔



شکل (i)

(b) جب سیٹ B تحتی سیٹ ہو سیٹ A کا

مثال 2: اگر A = { 2, 3, 4 } اور B = { 3, 4 }
تو A ∪B = { 2, 3, 4 } ∪ { 3, 4 } = { 2, 3, 4 }
سایہ دار حصہ A ∪ B ہے۔
شکل (ii) میں A ∪ B کو وین اشکال کے ذریعے ظاہر کیا گیا ہے۔



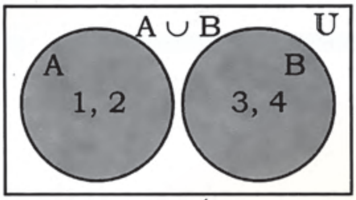
شکل (ii)

(c) جب سیٹ A اور سیٹ B غیر مشترک سیٹ ہوں

مثال 3: اگر A = {1, 2} اور B = { 3, 4 }
تو A ∪ B = { 1, 2 } ∪ { 3, 4 } = {1, 2, 3, 4}

سایہ دار حصہ $A \cup B$ ہے۔

اِسے وین اشکال سے ظاہر کیا گیا ہے جیسا کہ شکل (iii) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل (iii)

(d) جب سیٹ A اور سیٹ B متراکب سیٹ ہوں۔

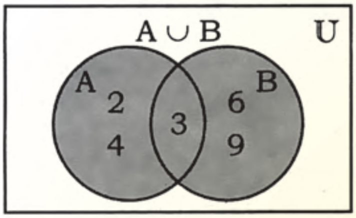
مثال 4: اگر $A = \{2, 3, 4\}$ اور $B = \{3, 6, 9\}$

تو $A \cup B = \{2, 3, 4\} \cup \{3, 6, 9\}$

$= \{2, 3, 4, 6, 9\}$

سایہ دار حصہ $A \cup B$ ہے۔

اِسے وین اشکال سے ظاہر کیا گیا ہے جیسا کہ شکل (iv) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل (iv)

(II) سیٹوں کا تقاطع

(a) جب سیٹ A، سیٹ B کا تحتی سیٹ ہو۔

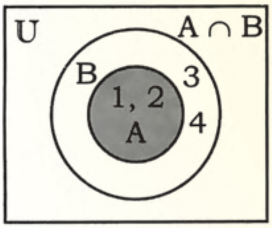
مثال 1: اگر $A = \{1, 2\}$ اور $B = \{1, 2, 3, 4\}$

تو $A \cap B = \{1, 2\} \cap \{1, 2, 3, 4\}$

$= \{1, 2\} = A$

$A \cap B$ کو شکل (i) میں دکھایا گیا ہے۔

$A \cap B$ سایہ دار حصہ ہے۔



شکل (i)

(b) جب سیٹ B، سیٹ A کا تحتی سیٹ ہو۔

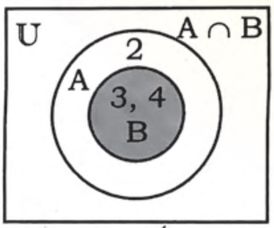
مثال 2: اگر $A = \{2, 3, 4\}$ اور $B = \{3, 4\}$

تو $A \cap B = \{2, 3, 4\} \cap \{3, 4\}$

$A \cap B = \{3, 4\} = B$

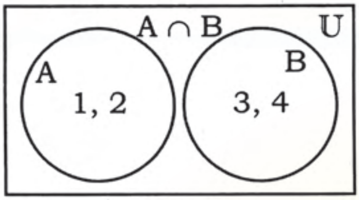
سایہ دار حصہ $A \cap B$ ہے۔

$A \cap B$ کو شکل (ii) میں وین اشکال سے ظاہر کیا گیا ہے۔



شکل (ii)

(c) جب سیٹ A اور سیٹ B غیر مشترک سیٹ ہوں



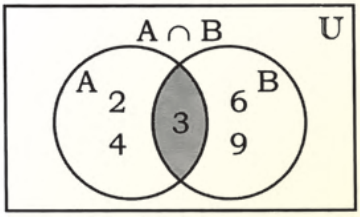
شکل (iii)

مثال 3: اگر $A = \{1, 2\}$ اور $B = \{3, 4\}$

تو $A \cap B = \{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \{\ \}$

$A \cap B$ کو شکل (iii) میں دکھایا گیا ہے اور اسے وین اشکال سے ظاہر کیا گیا ہے۔

(d) جب سیٹ A اور سیٹ B متراکب سیٹ ہوں



شکل (iv)

مثال 4: اگر $A = \{2, 3, 4\}$ اور $B = \{3, 6, 9\}$

تو $A \cap B = \{2, 3, 4\} \cap \{3, 6, 9\}$

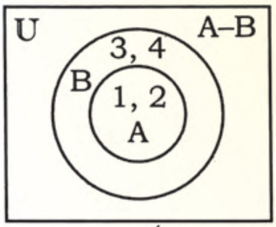
$= \{3\}$

سایہ دار حصہ $A \cap B = \{3\}$ ہے۔

$A \cap B$ کو شکل (iv) میں سایہ دار حصے سے ظاہر کیا گیا ہے۔

(III) دو سیٹ A اور B کا فرق

(a) جب سیٹ A، سیٹ B کا تحتی سیٹ ہو۔



شکل (i)

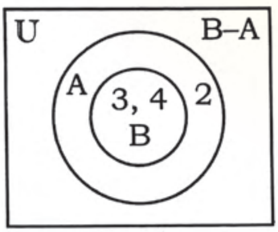
مثال 1: اگر $A = \{1, 2\}$ اور $B = \{1, 2, 3, 4\}$

تو $A - B = \{1, 2\} - \{1, 2, 3, 4\} = \{\ \}$

$A - B$ کو وین اشکال سے شکل (i) میں ظاہر کیا گیا ہے۔

سرگرمی: $B - A$ معلوم کریں اور وین اشکال کے ذریعے ظاہر کریں۔

(b) جب سیٹ B، سیٹ A کا تحتی سیٹ ہو۔



شکل (ii)

مثال 2: فرض کریں $A = \{2, 3, 4\}$ اور $B = \{3, 4\}$

تو $B - A = \{3, 4\} - \{2, 3, 4\} = \{\ \}$

$B - A$ کو وین اشکال سے شکل (ii) میں ظاہر کیا گیا ہے۔

سرگرمی: $A - B$ معلوم کریں اور وین اشکال کے ذریعے ظاہر کریں۔

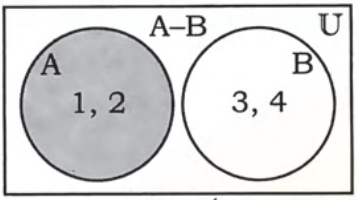
(c) جب سیٹ A اور سیٹ B غیر مشترک سیٹ ہوں۔

مثال 3: اگر $A = \{1, 2\}$ اور $B = \{3, 4\}$

تو $A-B = \{1, 2\} - \{3, 4\} = \{1, 2\}$

سایہ دار حصہ $A - B$ ہے۔

اسے وین اشکال کے ذریعے شکل (iii) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل (iii)

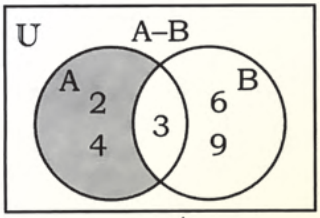
(d) جب سیٹ A اور سیٹ B متراکب سیٹ ہو۔

مثال 4: اگر $A = \{2, 3, 4\}$ اور $B = \{3, 6, 9\}$

تو $A-B = \{2, 3, 4\} - \{3, 6, 9\} = \{2, 4\}$

سایہ دار حصہ $A - B$ ہے۔

اسے شکل (iv) میں وین اشکال سے ظاہر کیا گیا ہے۔



شکل (iv)

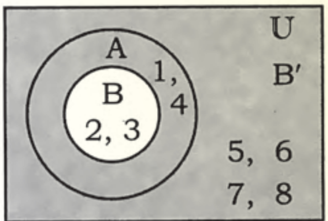
(IV) سیٹ کا کمپلیمنٹ

(a) جب سیٹ B اور سیٹ A دیا گیا ہو اور B تحتی سیٹ ہو سیٹ A کا، جیسے $B \subseteq A$

مثال 1: اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

اور $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{2, 3\}$، تو B' معلوم کریں۔



شکل (i)

حل: $B' = U-B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{2, 3\}$

$B' = \{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$

سایہ دار حصہ B' کو ظاہر کرتا ہے جیسا کہ شکل (i) میں دکھایا گیا ہے۔

(b) جب کائناتی سیٹ اور سیٹ A دیئے گئے ہوں۔

مثال 2: اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

اور $A = \{1, 2, 3, 4\}$ دیئے گئے ہوں تو A' معلوم کریں۔

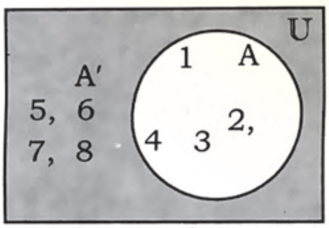
$A' = U - A$

$A' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{1, 2, 3, 4\}$

$= \{5, 6, 7, 8\}$

سایہ دار حصہ A' ہے۔

A' کو شکل (ii) میں وین اشکال کے ذریعے دکھایا گیا ہے۔



شکل (ii)

مشق 1.6

A- معلوم کریں اور یونین اور تقاطع کے عوامل کو وین اشکال کے ذریعے ظاہر کریں۔

1- فرض کریں $A = \{1, 3, 5, 7\}$ اور $B = \{2, 4, 6, 8\}$

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ (iii) $A - B$ (iv) $B - A$

2- فرض کریں $W = \{a, b, c\}$ اور $X = \{u, v, w\}$

(i) $W \cup X$ (ii) $W \cap X$ (iii) $W - X$ (iv) $X - W$

3- فرض کریں Y = {علی، رضا، صوبان} اور Z = {طہٰ ، صابر ، زاہد}

(i) $Y \cup Z$ (ii) $Y \cap Z$ (iii) $Y - Z$ (iv) $Z - Y$

4- فرض کریں $Y = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ اور $Z = \{2, 4, 6, ..., 16\}$

(i) $Y \cup Z$ (ii) $Y \cap Z$ (iii) $Y - Z$ (iv) $Z - Y$

B- اگر $U = \{8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$، $A = \{8, 10, 12, 14, 16\}$ اور $B = \{8, 15\}$ تو ذیل کو معلوم کریں اور وین اشکال کے ذریعے ظاہر کریں۔

(1) A'	(2) B'	(3) $A-B$	(4) $(A-B)'$
(5) $A \cup B'$	(6) $A' \cup B'$	(7) $A' - B'$	(8) $(A \cap B)'$
(9) $A' \cap B$	(10) $(A \cup B)'$	(11) $A' \cup A$	(12) $B' \cap B$

جائزہ مشق 1

ذیل کے جوابات دیں:

1- سیٹ کو ظاہر کرنے والی تینوں اشکال کو بیان کریں۔

2- (a) پہلے پانچ مکمل اعداد کو اندراجی شکل میں ظاہر کریں۔

(b) $A = \{a, b, c, d, ...\}$ کو بیانیہ شکل میں ظاہر کریں۔

3- ترقیم سیٹ ساز شکل کی کوئی سی تین مثالیں دیں۔

4- غیر مشترک سیٹ اور متراکب سیٹ کیا ہوتے ہیں؟ مثالوں سے واضح کریں۔

5- اگر $U = \{1, 2, 3,...,12\}$، $A = \{1, 2, 3, 10\}$، $B = \{2, 4, 6,...,12\}$ اور $C = \{1, 3, 5,...,11\}$ تو ذیل کو معلوم کریں۔

(i) $A \cup B$	(ii) $A \cap B$	(iii) $A - B$	(iv) $(A \cap C)'$
(v) $(B \cup C)'$	(vi) $B' \cap C'$	(vii) $A - B'$	(viii) $B - A'$
(ix) $A' - C$	(x) $(B - C)'$	(xi) $(C - A)'$	(xii) $A' - C'$

6- $A = \{a, b, c, d\}$، $B = \{a, c, d\}$ اور $C = \{b, d, e\}$ تو ذیل کو ثابت کریں۔

(i) $A \cup B = B \cup A$ (ii) $B \cap C = C \cap B$

(iii) $C \cup A = A \cup C$ (iv) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(v) $(A \cap C) \cap B = A \cap (C \cap B)$ (vi) $(B \cup A) \cup C = B \cup (A \cup C)$

7- درست جواب پر (✓) لگائیں۔

(i) اگر $A = \{a, b, c\}$ اور $U = \{a, b, c, d, e\}$ تو A' ہے۔

(a) $\{a, b\}$ (b) $\{b, c\}$ (c) $\{c, d\}$ (d) $\{d, e\}$

(ii) اگر $A = \{l, m, n\}$ اور $B = \{l, m, n, o\}$ تو $B - A$ ہے۔

(a) $\{l\}$ (b) $\{o\}$ (c) $\{n\}$ (d) $\{m\}$

(iii) اگر $P = \{1, 2, 3\}$ اور $Q = \{2, 3, 4\}$ تو $P \cap Q$ ہے۔

(a) $\{2, 3\}$ (b) $\{1, 3\}$ (c) $\{3, 4\}$ (d) $\{1, 4\}$

(iv) اگر $X = \{2,3,4\}$، $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ اور $Y = \{4,5,6\}$ تو $(X \cup Y)'$ ہے۔

(a) $\varnothing$ (b) $\{2, 3\}$ (c) $\{1\}$ (d) $\{6\}$

(v) اگر $A = \{x, y, z\}$ اور $B = \{y, z, x\}$ تو $A - B$ ہے۔

(a) A (b) B (c) $\varnothing$ (d) $A \cap B$

8- ذیل کو معلوم کریں اور وین اشکال سے ظاہر کریں۔

(i) $C \cap D$ اور $C \cup D$ اگر $C = \{c, d, e\}$ اور $D = \{d, e, f\}$

(ii) P' اور Q' اگر $Q = \{n, o, r\}$، $P = \{l, m, n\}$ اور $U = \{l, m, n, o, r\}$

(iii) $X \cap Y$ اور $X \cup Y$ اگر $X = \{x, z\}$ اور $Y = \{x, y, z\}$

خلاصہ

- مختلف اشیاء کے واضح اجتماع کو سیٹ کہتے ہیں۔
- سیٹ کو ظاہر کرنے کے تین طریقے ہوتے ہیں۔ وہ یہ ہیں:
  (i) بیانیہ شکل (ii) اندراجی شکل (iii) ترقیم سیٹ ساز شکل
- اندراجی شکل میں ہم سیٹ کے ممبران کو بریسز (Braces) یعنی کرلی بریکیٹس (Curly Brackets) میں رکھتے ہیں۔
- دو سیٹ غیر مشترک ہوں گے، اگر ان میں کوئی ممبر مشترک نہ ہو۔

- اگر A اور B دو سیٹ ہیں، تو سیٹ A اور سیٹ B کے یونین کو $A \cup B$ اور تقاطع کو $A \cap B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔
- دو سیٹ A اور B کا اتصال (یونین) ایسا سیٹ ہوتا ہے جس میں A یا B یا دونوں کے ممبران ہوتے ہیں۔ A اور B کا تقاطع ایسا سیٹ ہوتا ہے، جس میں A اور B کے مشترک ممبران ہوتے ہیں۔
- اگر A اور B دو سیٹ ہیں تو سیٹ B، سیٹ A کا تحتی سیٹ ہوگا اگر سیٹ B کا ہر ممبر سیٹ A کا ممبر ہو۔
- دو سیٹ متراکب سیٹ کہلاتے ہیں اگر کم از کم ایک ممبر دونوں میں مشترک ہو اور کوئی بھی دوسرے کا تحتی سیٹ نہ ہو۔
- ایسا سیٹ جو کسی زیر غور مسئلے سے تعلق رکھنے والے تمام ارکان پر مشتمل ہو، کائناتی سیٹ U کہلاتا ہے۔
- یونین کی خاصیت مبادلہ: اگر A اور B کوئی سے دو سیٹ ہیں تو $A \cup B = B \cup A$.
- تقاطع کی خاصیت مبادلہ: اگر A اور B کوئی سے دو سیٹ ہیں تو $A \cap B = B \cap A$
- اگر A، B اور C کوئی سے تین سیٹ ہیں تو $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$۔
یہ تین سیٹوں کے یونین کی خاصیت تلازم کہلاتی ہے۔
- اگر A، B اور C کوئی سے تین سیٹ ہیں تو $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ۔
یہ تین سیٹوں کے تقاطع کی خاصیت تلازم کہلاتی ہے۔
- اگر A اور B کوئی سے دو سیٹ ہیں تو سیٹ A اور سیٹ B کا فرق ایسا سیٹ ہوتا ہے جس میں سیٹ A کے تمام ممبران ہوتے ہیں، لیکن سیٹ B کا کوئی ممبر نہیں ہوتا اور اسے یوں لکھا جاتا ہے $A - B$ یا $A \backslash B$
- اگر U ایک کائناتی سیٹ ہے اور A اس کا تحتی سیٹ ہے، تو $U - A$، A کا کمپلیمینٹ کہلائے گا اور A' سے ظاہر کرتے ہیں۔
- سیٹ A اور سیٹ A' کا یونین، کائناتی سیٹ ہوتا ہے۔ A اور سیٹ A' کا تقاطع خالی سیٹ ہوتا ہے۔

یونٹ 2

ناطق اعداد

2.1 ناطق اعداد

2.1.1 ناطق اعداد کی تعریف بیان کریں۔

ہم قدرتی اعداد اور صحیح اعداد کو گننے، پیمائش کرنے اور مقداروں کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کرتے ہیں۔ کئی ایسی مقداریں بھی ہیں جو ان اعداد سے ظاہر نہیں کی جاسکتی ہیں۔ مثال کے طور پر:

اگر ایک کلو گرام آلو کی قیمت = 15 روپے

تو آدھا کلو گرام آلو کی قیمت = $\frac{15}{2}$ روپے

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $\frac{15}{2}$ نہ تو قدرتی عدد ہے اور نہ ہی صحیح عدد۔ یہ ناطق عدد ہے۔

اعداد $\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{7}, \frac{3}{4}, \frac{-15}{17}\right)$ کچھ مزید ناطق اعداد کی مثالیں ہیں۔ اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ "ناطق عدد کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں بھی ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$"،

یاد رکھیں

صفر سے کسی بھی عدد کی تقسیم غیر واضح ہوتی ہے۔ لہٰذا صفر کسی بھی کسر کا نسب نما (مخرج) نہیں ہوسکتا ہے۔

ناطق اعداد میں شمار کنندہ اور نسب نما (مخرج) ہمیشہ صحیح اعداد ہوتے ہیں اور نسب نما کبھی بھی صفر نہیں ہوسکتا ہے۔ مثلاً $\frac{6}{6}$ ناطق عدد ہے جب کہ $\frac{6}{0}$ ناطق عدد نہیں ہے کیونکہ ناطق عدد کا نسب نما صفر نہیں ہوسکتا ہے۔

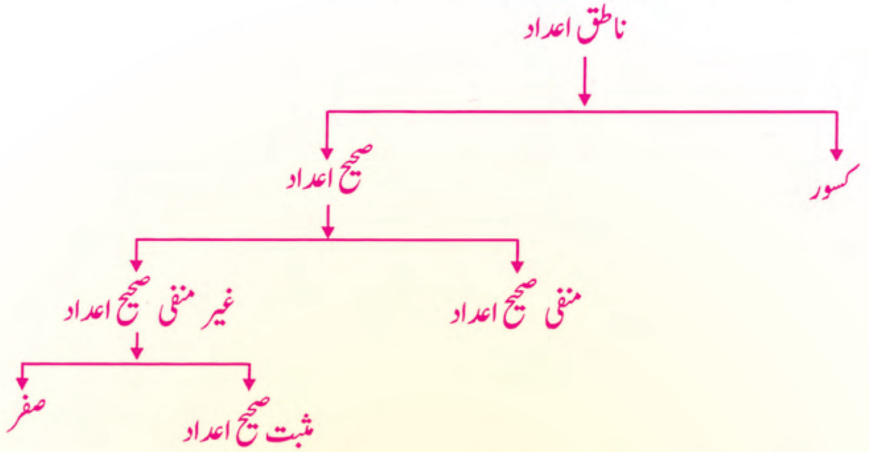
اسی طرح 6، 7- بھی ناطق اعداد ہیں کیونکہ ان اعداد کا نسب نما (مخرج) 1 ہے۔

جیسے $\frac{6}{1} = 6$ اور $\frac{-7}{1} = -7$

یاد رکھیں:

- ہر قدرتی عدد اور صحیح عدد، ناطق عدد بھی ہوتا ہے۔
- کسی بھی دو اعداد کے درمیان، لا متناہی ناطق اعداد ہوتے ہیں۔

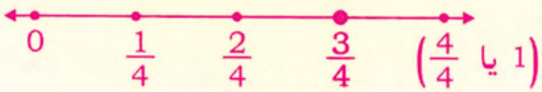
ذیل میں دیا گیا ڈائی گرام مختلف اقسام کے اعداد کے تعلق کو ظاہر کرتا ہے۔



2.1.2 ناطق اعداد کو عددی خط پر ظاہر کرنا

ہم پہلے ہی پچھلی جماعت میں سیکھ چکے ہیں کہ صحیح اعداد کو عددی خط پر کیسے ظاہر کرتے ہیں۔ اب ہم سیکھیں گے کہ ناطق اعداد کو عددی خط پر کیسے ظاہر کرتے ہیں۔

آئیں $\frac{3}{4}$ کو عددی خط پر ظاہر کریں۔ اس کے لئے ہمیں عددی خط بنانا پڑے گا اور 0 سے 1 تک کے حصے کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرنا پڑے گا۔ ہر حصہ $\frac{1}{4}$ کو ظاہر کرتا ہے، جیسا کہ نیچے شکل میں دکھایا گیا ہے۔



تیسرا حصہ کے سر پر نقطہ مطلوبہ عدد ہے جیسا کہ عددی خط میں دکھایا گیا ہے۔

آئیں غیر واجب کسر $\frac{11}{4}$ کو عددی خط پر ظاہر کرنا سیکھیں۔

ذیل کے مطابق عمل کریں۔

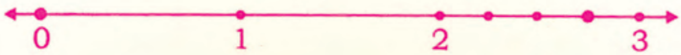
مرحلہ 1: $\frac{11}{4}$ کو مخلوط کسر میں تبدیل کریں جیسے:

$$\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$$

$$4\,\overline{)\,11\,}^{\;2}\quad -8 \quad\Rightarrow\quad 3$$

مرحلہ 2: مخلوط کسر $2\frac{3}{4}$ کے مکمل حصہ 2 کو عددی خط پر ظاہر کریں۔

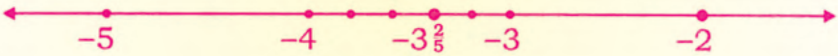
مرحلہ 3: عددی خط پر 2 اور 3 کے درمیانی حصے کو چار برابر حصوں میں تقسیم کریں جیساکہ کسر کا مخرج 4 ہے۔



مرحلہ 4: اب 2 سے گننا شروع کریں۔ تیسرا نقطہ مطلوبہ ناطق عدد $\frac{11}{4}$ ہے، جیساکہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

مثال: $-\frac{17}{5}$ کو عددی خط پر ظاہر کریں۔

جیساکہ $\left(-\frac{17}{5} = -3\frac{2}{5}\right)$ عددی خط پر 3− اور 4 − کے درمیانی حصے کو پانچ برابر حصوں میں تقسیم کریں۔



3− سے 4− کی طرف شروع کریں بائیں طرف کا دوسرا نقطہ مطلوبہ ناطق عدد $-\frac{17}{5}$ ہے۔

مشق 2.1

1- ذیل کی عبارات کے لئے درست یا غلط لکھیں:

(i) $\frac{0}{5}$ ناطق عدد ہے۔

(ii) $\frac{5}{0}$ ناطق عدد ہے۔

(iii) 0 ناطق عدد نہیں ہے۔

(iv) 5 اور 6 کے درمیان $2\frac{1}{5}$ ایک ناطق عدد ہے۔

(v) منفی اعداد ناطق اعداد ہوتے ہیں۔

(vi) مثبت اعداد ناطق اعداد نہیں ہوتے ہیں۔

(vii) ہر صحیح عدد ناطق عدد بھی ہوتا ہے۔

(viii) ہر قدرتی عدد ناطق عدد بھی ہوتا ہے۔

(ix) ناطق عدد $\frac{p}{q}$ میں، q ہمیشہ صفر ہوتا ہے۔

(x) 2 اور 3 کے درمیان صرف ایک ناطق عدد ہوتا ہے۔

(xi) ناطق عدد $\frac{p}{q}$ میں، p اور q ہمیشہ قدرتی اعداد ہوتے ہیں۔

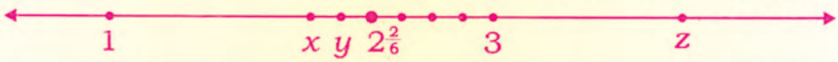
2- عدد 2 اور 3 کے درمیان تین ناطق اعداد لکھیں۔

3- مندرجہ ذیل میں دیئے گئے ناطق اعداد کو عددی خط پر ظاہر کریں۔

(i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{7}{2}$ (iii) $\frac{11}{3}$ (iv) $-\frac{2}{5}$ (v) $-\frac{12}{5}$

(vi) $2\frac{5}{6}$ (vii) $-3\frac{4}{7}$ (viii) $-\frac{13}{4}$ (ix) $\frac{15}{8}$ (x) $4\frac{2}{3}$

4- ذیل میں دی گئی عددی خط کے لحاظ سے درست یا غلط لکھیں۔



(i) x کی قیمت 0 ہے۔ (ii) x کی قیمت 2 ہے۔ (iii) y کی قیمت ہے $2\frac{1}{6}$ ۔

(iv) y کی قیمت $3\frac{2}{5}$ ہے۔ (v) z کی قیمت 4 ہے۔ (vi) z کی قیمت -4 ہے۔

2.2 ناطق اعداد پر عوامل

ناطق اعداد پر چار بنیادی عوامل جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم ہوتے ہیں۔
ہم پہلے ہی پچھلی جماعتوں میں دو کسور کے قانونِ جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم سیکھ چکے ہیں۔
آئیں اب ان اصولوں کا ناطق اعداد پر اطلاق کرتے ہیں۔

2.2.1 دو یا دو سے زائد ناطق اعداد کی جمع

دو یا دو سے زائد ناطق اعداد کی جمع کی دو صورتیں ہوتی ہیں۔

صورت 1: اگر ناطق اعداد کے مخرج یکساں ہو، تو دیئے گئے شمار کنندہ کو جمع یا تفریق کرتے ہیں، جیساکہ ذیل میں مثالوں سے وضاحت کی گئی ہے۔

مثال 1: مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو جمع کریں۔

(i) $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}$ (ii) $\frac{4}{5}+\frac{11}{5}$ (iii) $\frac{16}{7}+\left(-\frac{2}{7}\right)$

حل:

(i) $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}$

$= \frac{2+5}{3}$

$= \frac{7}{3}$

(ii) $\frac{4}{5}+\frac{11}{5}$

$= \frac{4+11}{5}$

$= \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{5}_{1}} = 3$

(iii) $\frac{16}{7}+\left(-\frac{2}{7}\right)$

$= \frac{16-2}{7}$

$= \frac{\cancel{14}^{2}}{\cancel{7}_{1}} = 2$

نوٹ: دو ہم مخرج ناطق اعداد کی جمع کے لئے ہم مندرجہ ذیل اصول استعمال کرتے ہیں۔

$$\boxed{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}}$$

مثال 2: مختصر کریں۔

(i) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)$ $\frac{17}{10}+\left(-\frac{3}{10}\right)+\frac{1}{10}$

حل:

(i) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)$

$= \frac{2+3-4}{5}$

$= \frac{5-4}{5}$

$= \frac{1}{5}$

(ii) $\frac{17}{10}+\left(-\frac{3}{10}\right)+\frac{1}{10}$

$= \frac{17-3+1}{10}$

$= \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{10}_{2}}$ (5 سے تقسیم کرنے سے)

$= \frac{3}{2}$

صورت 2: غیر ہم مخرج ناطق اعداد کی صورت میں ہم پہلے نسب نما (مخرج) کا ذو اضعاف اقل (LCM) معلوم کرتے ہیں۔

مثال 3: مختصر کریں۔ (i) $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$

حل: پہلے ہم نسب نما (مخرج) 6 اور 8 کا ذو اضعاف اقل (LCM) معلوم کرتے ہیں۔

2	6 , 8
2	3 , 4
2	3 , 2
3	3 , 1
	1, 1

$LCM = 2\times2\times2\times3 = 24$

لہٰذا 6 اور 8 کا LCM 24 ہے۔

(i) $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}$

$=\frac{5\times4+3\times3}{24}$ $\left(\text{جیسا کہ } \frac{24}{6}=4 \text{ اور } \frac{24}{8}=3\right)$

$=\frac{20+9}{24}$

$=\frac{29}{24}$

حل: پہلے ہم نسب نما (مخرج) 2، 4 اور 6 کا ذو اضعاف اقل (LCM) معلوم کرتے ہیں۔

2	2 , 4 , 6
2	1 , 2 , 3
3	1 , 1 , 3
	1 , 1 , 1

$LCM = 2\times2\times3 = 12$

لہٰذا 2، 4 اور 6 کا اضعاف اقل (LCM) 12 ہے۔

(ii) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$

$=\frac{1\times6+3\times3+5\times2}{12}$ $\left(\text{جیسا کہ } \frac{12}{2}=6,\ \frac{12}{4}=3,\ \frac{12}{6}=2\right)$

$=\frac{6+9+10}{12}$

$=\frac{25}{12}$

نوٹ: دو غیر ہم مخرج ناطق اعداد $\frac{a}{b}$ اور $\frac{c}{d}$ کی جمع کو ہم یوں حل کرتے ہیں: $\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}}$

مثال کے طور پر: $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\times5+4\times3}{3\times5}=\frac{10+12}{15}=\frac{22}{15}$

2.2.2 ایک ناطق عدد کو دوسرے ناطق عدد میں سے تفریق کرنا

دو یا دو سے زائد ناطق اعداد کی تفریق کی دو صورتیں ہوتی ہیں۔

صورت 1: اگر ناطق اعداد کے مخرج یکساں ہوں، تو دیئے گئے شمار کندہ کو صرف تفریق کرتے ہیں جیسا کہ ذیل کی مثالوں سے وضاحت کی گئی ہے۔

مثال (i) $\frac{2}{3}$ کو $\frac{5}{3}$ میں سے تفریق کریں۔

(ii) مختصر کریں۔ (a) $\frac{7}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)$ (b) $\frac{7}{8}-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}$

حل: (i) $\frac{5}{3}-\frac{2}{3}$ ($\frac{2}{3}$ کو $\frac{5}{3}$ میں سے تفریق کرنا ہے)

$=\frac{5-2}{3} = \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{3}_1} = 1$

(ii) (a) $\frac{7}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)$ (b) $\frac{7}{8}-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}$

حل:

$$\frac{7}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{7+1}{2}$$
$$=\frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{2}_{1}}=\frac{4}{1}$$
$$=4$$

حل:

$$\frac{7}{8}-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}$$
$$=\frac{7-1-3}{8}$$
$$=\frac{6-3}{8}$$
$$=\frac{3}{8}$$

نوٹ: ہم مخرج ناطق اعداد کی تفریق کو ہم یوں حل کرتے ہیں: $\boxed{\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}}$

صورت 2: غیر ہم مخرج ناطق اعداد کی صورت میں ہم نسب نما (مخرج) کا ذو اضعاف اقل (LCM) کا استعمال کرتے ہیں جیساکہ ذیل کی مثال میں وضاحت کی گئی ہے۔

مثال 2: مختصر کریں۔ (i) $\frac{4}{3}-\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{7}{4}-\frac{3}{8}-\frac{2}{3}$

حل: پہلے مخرج 3 اور 5 کا LCM معلوم کرتے ہیں۔

3	3 , 5
5	1 , 5
	1 , 1

LCM = 3 × 5 = 15

(i) $\frac{4}{3}-\frac{2}{5}$

$$=\frac{4\times5-2\times3}{15}$$ (جیساکہ $\frac{15}{3}=5$ اور $\frac{15}{5}=3$)

$$=\frac{20-6}{15}=\frac{14}{15}$$

حل: پہلے مخرج 4، 8 اور 3 کا ذو اضعاف اقل (LCM) معلوم کرتے ہیں۔

2	4 , 8 , 3
2	2 , 4 , 3
2	1 , 2 , 3
3	1 , 1 , 3
	1 , 1 , 1

LCM = 2 × 2 × 2 × 3 = 24

لہٰذا 4، 8 اور 3 کا اضعاف اقل 24 ہے۔

(ii) $\frac{7}{4}-\frac{3}{8}-\frac{2}{3}$

$$=\frac{7\times6-3\times3-2\times8}{24}$$ (جیساکہ $\frac{24}{8}=3$, $\frac{24}{4}=6$ اور $\frac{24}{3}=8$)

$$=\frac{42-9-16}{24}$$
$$=\frac{33-16}{24}$$
$$=\frac{17}{24}$$

نوٹ: دو ناطق اعداد $\frac{a}{b}$ اور $\frac{c}{d}$ کی تفریق کو ہم یوں حل کرتے ہیں۔ $\boxed{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}}$

مثال کے طور پر: $\frac{5}{3} - \frac{2}{5} = \frac{5 \times 5 - 2 \times 3}{15} = \frac{25 - 6}{15} = \frac{19}{15}$

2.2.3 ناطق عدد کا جمعی معکوس معلوم کرنا

اگر کسی دو ناطق اعداد کا مجموعہ صفر ہو تو وہ ایک دوسرے کے جمعی معکوس کہلاتے ہیں۔

ناطق اعداد $\frac{a}{b}$ اور $\left(-\frac{a}{b}\right)$ ایک دوسرے کے جمعی معکوس ہیں۔

کیونکہ $\left(\frac{a}{b}\right) + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$

مثال 1: (i) $\frac{5}{2}$ اور $-\frac{5}{2}$ ایک دوسرے کے جمعی معکوس ہیں۔

کیونکہ $\left(\frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{5}{2}\right) = 0$

(ii) $\frac{-6}{7}$ اور $\frac{6}{7}$ ایک دوسرے کے جمعی معکوس ہیں۔

کیونکہ $\left(\frac{-6}{7}\right) + \left(\frac{6}{7}\right) = 0$

نوٹ: کسی بھی ناطق عدد (سوائے صفر کے) کا جمعی معکوس اُس کی علامت تبدیل کر کے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

یاد رکھیں: صفر کا جمعی معکوس ہمیشہ صفر ہوتا ہے۔

مثال 2: ذیل میں دیئے گئے اعداد کا جمعی معکوس معلوم کریں:

(i) $-\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{5}{4}$ (iii) $\frac{11}{13}$ (iv) $-\frac{1}{7}$ (v) 8

حل:

ناطق عدد	$-\frac{3}{7}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{11}{13}$	$-\frac{1}{7}$	8
جمعی معکوس	$\frac{3}{7}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{11}{13}$	$\frac{1}{7}$	-8

2.2.4 دو یا دو سے زائد ناطق اعداد کو ضرب کرنا

دو ناطق اعداد کی حاصل ضرب ان کے مخرج اور شمار کنندہ کو علیحدہ علیحدہ ضرب کرکے معلوم کی جاسکتی ہے۔

جیسے:

$$\left(\frac{a}{b}\right) \times \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$$

مثال: حاصل ضرب معلوم کریں۔

(i) $\frac{2}{7}$ اور $\frac{3}{4}$ (ii) $-\frac{5}{6}$ اور $-\frac{3}{12}$

حل:

$-\frac{5}{6}$ اور $-\frac{3}{12}$ کا حاصل ضرب $=\left(-\frac{5}{6}\right)\times\left(-\frac{3}{12}\right)$

$$= \frac{(-5)\times(-3)}{6\times 12} = \frac{15}{72}$$

$$= \frac{{}^{5}\cancel{15}}{\cancel{72}^{24}} = \frac{5}{24}$$

حل:

$\frac{2}{7}$ اور $\frac{3}{4}$ کا حاصل ضرب $= \frac{2}{7} \times \frac{3}{4}$

$$= \frac{2\times 3}{7\times 4}$$

$$= \frac{{}^{3}\cancel{6}}{\cancel{28}^{14}} = \frac{3}{14}$$

اس طرح ہم دو سے زائد ناطق اعداد کو ضرب کر سکتے ہیں۔

مثال کے طور پر:

$$\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{2\times 3\times 1}{3\times 5\times 4} = \frac{{}^{1}\cancel{6}}{\cancel{60}_{10}} = \frac{1}{10}$$

2.2.5 ناطق عدد کا ضربی معکوس معلوم کرنا

اگر کسی دو غیر صفر ناطق اعداد کا حاصل ضرب 1 ہو تو وہ ایک دوسرے کے ضربی معکوس کہلاتے ہیں۔

ناطق اعداد $\frac{b}{a}$ اور $\frac{a}{b}$ ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں کیونکہ $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a} = 1$

مثال 1: (i) $\frac{2}{3}$ اور $\frac{3}{2}$ ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

کیونکہ $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2} = 1$ یا $\frac{3}{2}\times\frac{2}{3} = 1$

(ii) $-\frac{5}{6}$ اور $-\frac{6}{5}$ ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

کیونکہ $\left(-\frac{5}{6}\right)\times\left(-\frac{6}{5}\right)=1$ اور $\left(-\frac{6}{5}\right)\times\left(-\frac{5}{6}\right)=1$

نوٹ: کسی بھی غیر صفر ناطق عدد کا ضربی معکوس اُس کے مخرج اور شمار کنندہ کو آپس میں تبدیل کرنے سے معلوم کر سکتے ہیں۔

یاد رکھیں: صفر کا ضربی معکوس نہیں ہوتا ہے کیونکہ ناطق عدد کا مخرج کبھی بھی صفر نہیں ہو سکتا ہے۔

مثال 2: ذیل میں دیئے گئے اعداد کا ضربی معکوس معلوم کریں۔

$$\frac{2}{9},\ -\frac{5}{8},\ \frac{111}{3},\ -6,\ \frac{1}{8}$$

حل:

ناطق عدد	$\frac{2}{9}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{111}{3}$	-6	$\frac{1}{8}$
ضربی معکوس	$\frac{9}{2}$	$-\frac{8}{5}$	$\frac{3}{111}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{8}{1}$

2.2.6 ناطق عدد کسی دوسرے غیر صفر ناطق عدد سے تقسیم کرنا

ناطق عدد کسی دوسرے غیر صفر ناطق عدد سے تقسیم کرنا دراصل ناطق عدد کو تقسیم کنندہ کے ضربی معکوس سے ضرب کرنا ہے۔ جیسے اگر ایک ناطق عدد $\frac{a}{b}$ ہے اور اس کو غیر صفر ناطق عدد $\frac{c}{d}$ سے تقسیم کرنا ہو تو:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

مثال: مختصر کریں۔

(i) $\frac{2}{5}\div\frac{7}{15}$ (ii) $\frac{2}{4}\div\frac{9}{8}$

حل:

(i) $\frac{2}{5}\div\frac{7}{15}$

$\frac{2}{5}\div\frac{7}{15}=\frac{2}{5}\times\frac{15}{7}$

$=\frac{\overset{6}{\cancel{30}}}{\underset{7}{\cancel{35}}}$

$=\frac{6}{7}$ (5 سے تقسیم کرنے سے)

حل:

(ii) $\frac{3}{4}\div\frac{9}{8}$

$\frac{3}{4}\div\frac{9}{8}=\frac{3}{4}\times\frac{8}{9}$

$=\frac{\overset{2}{\cancel{24}}}{\underset{3}{\cancel{36}}}$

$=\frac{2}{3}$ (12 سے تقسیم کرنے سے)

2.2.7 ناطق عدد کا معکوس معلوم کرنا

اگر $\frac{p}{q}$ ایک غیر صفر ناطق عدد ہے تو $\frac{1}{\frac{p}{q}}$ اس کا معکوس ہے اور $\boxed{\frac{1}{\frac{p}{q}}=\frac{q}{p}}$

کیونکہ $$\frac{1}{\frac{p}{q}}=1\div\frac{p}{q}=1\times\frac{q}{p}=\frac{q}{p}$$

لہٰذا کسی غیر صفر ناطق عدد کا معکوس ایسا ناطق عدد ہوتا ہے، جو ہم دیئے گئے ناطق عدد کے شمار کنندہ اور مخرج کو آپس میں تبدیل کرنے سے حاصل کرتے ہیں۔

مثال: $\frac{7}{2}$ کا معکوس $\frac{2}{7}$ ہوتا ہے اور 6 کا معکوس $\frac{1}{6}$ ہوتا ہے۔

نوٹ: (i) کسی ناطق عدد کے معکوس اور ضربی معکوس ہمیشہ ایک جیسے ہوتے ہیں۔

(ii) صفر کا معکوس نہیں ہوتا ہے۔

مشق 2.2

1- ذیل کے ناطق اعداد کا معکوس معلوم کریں۔

(i) $\frac{19}{17}$ (ii) -13 (iii) $\frac{1}{10}$ (iv) $\frac{-6}{25}$

2- مختصر کریں۔

(i) $\frac{9}{7}+\frac{15}{7}$ (ii) $\frac{5}{9}-\frac{2}{9}$ (iii) $\frac{3}{5}-\left(-\frac{7}{5}\right)$

(iv) $\frac{5}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}$ (v) $\frac{5}{8}-\frac{4}{5}$ (vi) $-\frac{2}{7}+\frac{7}{6}$

(vii) $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}-\frac{1}{6}$ (viii) $\frac{4}{5}-\frac{1}{7}+\frac{3}{70}$ (ix) $\frac{2}{9}-\left(-\frac{3}{6}\right)+\frac{5}{8}$

(x) $\frac{17}{10}+\frac{11}{20}-\frac{4}{5}$

3- ذیل میں دیئے گئے ہر ایک عدد کا جمعی معکوس اور ضربی معکوس معلوم کریں۔

(i) $\frac{17}{15}$ (ii) -26 (iii) $-\frac{1}{20}$ (iv) $\frac{-5}{19}$

(v) 0 (vi) 8 (vii) $\frac{1}{9}$ (viii) $\frac{200}{7}$

4- مختصر کریں۔

(i) $\frac{5}{8}\times\frac{3}{2}$ (ii) $\frac{6}{7}\div\frac{2}{5}$ (iii) $\frac{2}{3}\times\frac{1}{7}\times\frac{4}{5}$

(iv) $-\frac{6}{7}\div\left(-\frac{7}{6}\right)$ (v) $\frac{14}{5}\div\frac{7}{25}$ (vi) $\frac{9}{4}\times\left(-\frac{4}{9}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)$

(vii) $\frac{1}{8}\times\frac{2}{5}\times-\frac{15}{4}$ (viii) $\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{4}{6}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)$

2.2.8 ناطق اعداد کی خاصیت مبادلہ بالحاظ جمع اور ضرب ثابت کرنا

(a) خاصیت مبادلہ بالحاظ جمع

ہم جانتے ہیں کہ دو ناطق اعداد کو کسی بھی ترتیب سے جمع کیا جائے، تو حاصل جمع ہمیشہ ایک جیسا ہوتا ہے۔
جیسے $\frac{a}{b}$ اور $\frac{c}{d}$ دو ناطق اعداد ہیں۔

پس
$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}}$$

ناطق اعداد کی اس خاصیت کو خاصیت مبادلہ بالحاظ جمع کہتے ہیں۔

مثال 1: $\frac{2}{3}$ اور $\frac{7}{3}$ کے لئے خاصیت مبادلہ بالحاظ جمع ثابت کریں۔

حل: خاصیت مبادلہ بالحاظ جمع کے مطابق:

$$\frac{2}{3}+\frac{7}{3}=\frac{7}{3}+\frac{2}{3}$$

اب

LHS $= \frac{2}{3}+\frac{7}{3}$

$= \frac{2+7}{3} = \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{3}_{1}} = 3$

RHS $= \frac{7}{3}+\frac{2}{3}$

$= \frac{7+2}{3} = \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{3}_{1}} = 3$

چونکہ LHS = RHS

اس لئے $\frac{2}{3}+\frac{7}{3}=\frac{7}{3}+\frac{2}{3}$. پس $\frac{2}{3}$ اور $\frac{7}{3}$ کے لئے خاصیت مبادلہ بالحاظ جمع ثابت ہوئی ۔

(b) خاصیت مبادلہ بالحاظ ضرب

ہم جانتے ہیں کہ دو ناطق اعداد کو کسی بھی ترتیب سے ضرب کیا جائے تو حاصل ضرب ہمیشہ یکساں ہوتا ہے۔

جیسے $\frac{a}{b}$ اور $\frac{c}{d}$ دو ناطق اعداد ہیں۔

پس $\boxed{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\times\frac{a}{b}}$

ناطق اعداد کی اس خاصیت کو خاصیت مبادلہ بالحاظ ضرب کہتے ہیں۔

مثال 2: $\frac{3}{4}$ اور $\frac{1}{4}$ کے لئے خاصیت مبادلہ بالحاظ ضرب ثابت کریں۔

حل: خاصیت مبادلہ بالحاظ ضرب کے مطابق:

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$$

اب

LHS $= \frac{3}{4}\times\frac{1}{4}$

$= \frac{3\times1}{16} = \frac{3}{16}$

RHS $= \frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$

$= \frac{1\times3}{16} = \frac{3}{16}$

چونکہ LHS = RHS

اس لئے $\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$.

پس $\frac{3}{4}$ اور $\frac{1}{4}$ کے لئے خاصیت مبادلہ بالحاظ ضرب ثابت ہوئی۔

2.2.9 ناطق اعداد کی خاصیت تلازم بالحاظ جمع اور ضرب ثابت کرنا

(i) خاصیت تلازم بالحاظ جمع

ہم جانتے ہیں کہ اگر کسی بھی تین ناطق اعداد کو کسی بھی ترتیب سے جمع کیا جائے تو حاصل جمع ہمیشہ یکساں ہی ہوتا ہے۔ جیسے ناطق اعداد $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ اور $\frac{e}{f}$ کے لئے

$$\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}$$

ناطق اعداد کی اس خاصیت کو خاصیت تلازم بالحاظ جمع کہتے ہیں۔

مثال 1: $\frac{1}{2}$ ، $\frac{5}{3}$ اور $\frac{3}{4}$ کے لئے خاصیت تلازم بالحاظ جمع ثابت کریں۔

حل: خاصیت تلازم بالحاظ جمع کے مطابق

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{3}\right)+\frac{3}{4}$$

اب

$$\text{LHS} = \frac{1}{2}+\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}+\left(\frac{5\times4+3\times3}{3\times4}\right) = \frac{1}{2}+\left(\frac{20+9}{12}\right) = \frac{1}{2}+\frac{29}{12} = \frac{1\times6+29\times1}{12} = \frac{6+29}{12}=\frac{35}{12}$$

$$\text{RHS} = \left(\frac{1}{2}+\frac{5}{3}\right)+\frac{3}{4} = \left(\frac{1\times3+2\times5}{2\times3}\right)+\frac{3}{4} = \left(\frac{3+10}{6}\right)+\frac{3}{4} = \frac{13}{6}+\frac{3}{4} = \frac{13\times2+3\times3}{12} = \frac{26+9}{12}=\frac{35}{12}$$

چونکہ LHS = RHS

اس لئے $\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{3}\right)+\frac{3}{4}$

پس $\frac{1}{2}$ ، $\frac{5}{3}$ اور $\frac{3}{4}$ کے لئے خاصیت تلازم بالحاظ جمع ثابت ہوئی۔

(ii) خاصیت تلازم بالحاظ ضرب

ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی تین ناطق اعداد $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ اور $\frac{e}{f}$ کو کسی بھی ترتیب میں ضرب کیا جائے تو حاصل ضرب یکساں ہی رہتا ہے۔

جیسے:
$$\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)\times\frac{e}{f}$$

ناطق اعداد کی اس خاصیت کو خاصیت تلازم بالحاظ ضرب کہتے ہیں۔

مثال 2: $\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{5}$ اور $\frac{3}{4}$ کے لئے خاصیت تلازم بالحاظ ضرب ثابت کریں۔

حل: خاصیت تلازم بالحاظ ضرب کے مطابق:

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{4}$$

اب

$$\text{LHS} = \frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3}\times\left(\frac{2\times3}{5\times4}\right) = \frac{1}{3}\times\frac{6}{20} = \frac{\cancel{6}^{1}}{\cancel{60}_{10}} = \frac{1}{10}$$

$$\text{RHS} = \left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{4} = \left(\frac{1\times2}{3\times5}\right)\times\frac{3}{4} = \frac{2}{15}\times\frac{3}{4} = \frac{\cancel{6}^{1}}{\cancel{60}_{10}} = \frac{1}{10}$$

چونکہ LHS = RHS

اس لئے
$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{4}$$

پس $\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{5}$ اور $\frac{3}{4}$ کے لئے خاصیت تلازم بالحاظ ضرب ثابت ہوئی ۔

2.2.10 خاصیت تقسیمی

(i) ناطق اعداد کی ضرب کی خاصیت تقسیمی بالحاظ جمع

ہم جانتے ہیں کہ اگر دو ناطق اعداد کے مجموعہ کو کسی دیئے گئے ناطق عدد سے ضرب کیا جائے تو حاصل ضرب

وہی ہو گا جو پہلے دونوں ناطق اعداد کو دیئے گئے ناطق عدد سے ضرب کرکے ان کے حاصل ضرب کو جمع کیا جائے۔ جیسے

$\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ اور $\frac{e}{f}$ کوئی سے تین ناطق اعداد ہیں۔

$$\boxed{\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}}$$

ناطق اعداد کی اس خاصیت کو ضرب کی خاصیت تقسیمی بالحاظ جمع کہتے ہیں۔

مثال 1: $\frac{1}{7}$ ، $\frac{2}{7}$ اور $\frac{3}{7}$ کے لئے ضرب کی خاصیت تقسیمی بالحاظ جمع ثابت کریں۔

حل: ضرب کی خاصیت تقسیمی بالحاظ جمع کے مطابق

$$\frac{1}{7}\times\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\right)=\frac{1}{7}\times\frac{2}{7}+\frac{1}{7}\times\frac{3}{7}$$

اب

$$\text{LHS}=\frac{1}{7}\times\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\right)=\frac{1}{7}\times\left(\frac{2+3}{7}\right)=\frac{1}{7}\times\frac{5}{7}=\frac{5}{49}$$

$$\text{RHS}=\frac{1}{7}\times\frac{2}{7}+\frac{1}{7}\times\frac{3}{7}=\frac{1\times2}{7\times7}+\frac{1\times3}{7\times7}=\frac{2}{49}+\frac{3}{49}=\frac{2+3}{49}=\frac{5}{49}$$

چونکہ LHS = RHS

اس لئے $\frac{1}{7}\times\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\right)=\frac{1}{7}\times\frac{2}{7}+\frac{1}{7}\times\frac{3}{7}$.

پس $\frac{1}{7}$ ، $\frac{2}{7}$ اور $\frac{3}{4}$ کے لئے خاصیت تقسیمی بالحاظ جمع ثابت ہوئی۔

(ii) ناطق اعداد کی ضرب کی خاصیت تقسیمی بالحاظ تفریق

ہم جانتے ہیں کہ اگر دو ناطق اعداد کے فرق کو کسی دیئے گئے ناطق عدد سے ضرب کیا جائے تو حاصل ضرب وہی ہو گا جو پہلے دونوں ناطق اعداد کو دیئے گئے ناطق عدد سے ضرب کرکے ان کے حاصل ضرب کو تفریق کیا جائے۔

جیسے $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ اور $\frac{e}{f}$ کوئی بھی تین ناطق اعداد کے لئے

$$\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}$$

ناطق اعداد کی اس خاصیت کو ضرب کی خاصیت تقسیمی بالحاظ تفریق کہتے ہیں۔

مثال 2: $\frac{4}{5}$ ، $\frac{3}{5}$ اور $\frac{2}{5}$ کے لئے ضرب کی خاصیت تقسیمی بالحاظ تفریق ثابت کریں۔

حل: ضرب کی خاصیت تقسیمی بالحاظ تفریق کے مطابق

$$\frac{4}{5}\times\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}$$

اب

$$\text{LHS}=\frac{4}{5}\times\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5}\times\left(\frac{3-2}{5}\right)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$$

$$\text{RHS}=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4\times3}{5\times5}-\frac{4\times2}{5\times5}=\frac{12}{25}-\frac{8}{25}=\frac{12-8}{25}=\frac{4}{25}$$

چونکہ LHS = RHS

اس لئے $\frac{4}{5}\times\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}$

پس $\frac{4}{5}$ ، $\frac{3}{5}$ اور $\frac{2}{5}$ کے لئے خاصیت تقسیمی بالحاظ تفریق ثابت ہوئی۔

2.2.11 دو ناطق اعداد کا موازنہ کرنا

مخرج یکساں ہونے کی صورت میں ہم دو ناطق اعداد کا موازنہ کرنے کے لئے صرف شمار کنندہ کا موازنہ کرتے ہیں۔ اگر ان کے مخرج یکساں نہ ہوں تو اضعاف اقل کے ذریعے ان کے مخرج کو یکساں کرکے دوبارہ لکھتے ہیں۔ دو ناطق اعداد کے موازنے کی ذیل کی مثالوں سے وضاحت کی گئی ہے۔

مثال: موازنہ کریں: (i) $\frac{3}{4}$ اور $\frac{5}{4}$ (ii) $\frac{5}{7}$ اور $\frac{3}{8}$

حل: (i) $\frac{3}{4}$ اور $\frac{5}{4}$

چونکہ مخرج ایک جیسے ہیں اس لئے ہم صرف شمار کنندہ کا موازنہ کرتے ہیں۔

یہاں $3<5$ لٰہذا $\frac{3}{4} < \frac{5}{4}$

(ii) $\frac{5}{7}$ اور $\frac{3}{8}$

حل: چونکہ مخرج ایک جیسے نہیں ہیں، اس لئے پہلے ہم 7 اور 8 کا ذو اضعاف اقل (LCM) معلوم کریں گے۔

2	7 , 8
2	7 , 4
2	7 , 2
7	7 , 1
	1 , 1

$$\text{LCM} = 56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$$

اب $\frac{5}{7} = \frac{5 \times 8}{7 \times 8} = \frac{40}{56}$

اور $\frac{3}{8} = \frac{3 \times 7}{8 \times 7} = \frac{21}{56}$

یہاں $40 > 21$

چونکہ $\frac{40}{56} > \frac{21}{56}$

اس لئے $\frac{5}{7} > \frac{3}{8}$

2.2.12 ناطق اعداد کو ترتیب صعودی یا ترتیب نزولی میں ترتیب دینا

(i) دو ناطق اعداد کو شمار کنندہ کے ذریعے ترتیب صعودی اور ترتیب نزولی میں ترتیب دیا جاسکتا ہے، اگر ان کے مخرج یکساں ہوں۔

(ii) اگر مخرج یکساں نہ ہوں تو اضعاف اقل کی مدد سے ان کے مخرج ایک جیسے بنا کر انہیں ہم دوبارہ لکھتے ہیں جیساکہ ذیل میں دی گئی مثالوں سے وضاحت کی گئی ہے۔

مثال 1: ذیل میں دیئے گئے اعداد کو ترتیب صعودی اور ترتیب نزولی میں لکھیں:

$\frac{2}{5}$ ، $\frac{7}{5}$ اور $\frac{1}{5}$

حل: یہاں مخرج یکساں ہیں۔

ہم صرف ان کے مخرجوں کا موازنہ کرتے ہیں۔

کیونکہ $7 > 2 > 1$. اس لئے $\frac{1}{5} < \frac{2}{5} < \frac{7}{5}$

لٰہذا ترتیب صعودی: $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{7}{5}$ ترتیب نزولی: $\frac{7}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}$

مثال 2: ذیل میں دیئے گئے اعداد کو ترتیب صعودی اور ترتیب نزولی میں لکھیں۔

$\frac{3}{7}$ ، $\frac{4}{5}$ اور $\frac{1}{2}$

حل: یہاں مخرج یکساں نہیں ہیں۔ لٰہذا ہم پہلے 2، 5 اور 7 کا اضعاف اقل (LCM) معلوم کرتے ہیں۔

اب $\frac{3}{7} = \frac{3 \times 10}{7 \times 10} = \frac{30}{70}$, $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 14}{5 \times 14} = \frac{56}{70}$

اور $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 35}{2 \times 35} = \frac{35}{70}$

یہاں $30 < 35 < 56$

لٰہذا $\frac{30}{70} < \frac{35}{70} < \frac{56}{70}$

اس لئے $\frac{3}{7} < \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$

2	2 , 5 , 7
5	1 , 5 , 7
7	1 , 1 , 7
	1 , 1 , 1

$\text{LCM} = 2 \times 5 \times 7 = 70$

لٰہذا ترتیب صعودی: $\frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}$ اور ترتیب نزولی: $\frac{4}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{7}$

مشق 2.3

1- ثابت کریں:

(i) $\frac{2}{3} + \left(-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{2}{3}$

(ii) $\frac{4}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{7}$

(iii) $\frac{3}{4} + \left(\frac{5}{6} + \frac{4}{8}\right) = \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) + \frac{4}{8}$

(iv) $\frac{7}{15} \times \left(\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}\right) = \left(\frac{7}{15} \times \frac{3}{4}\right) \times \frac{5}{7}$

(v) $\frac{2}{7} \times \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{7} \times \frac{3}{4} - \frac{2}{7} \times \frac{1}{2}$

(vi) $\frac{4}{5} \times \left(\frac{7}{8} + \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5} \times \frac{7}{8} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{5}$

-2 $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{4}$ کے لئے خاصیت تلازم بالحاظ جمع ثابت کریں۔

-3 $\frac{2}{7}$، $\frac{4}{5}$ اور $\frac{3}{4}$ کے لئے خاصیت تلازم بالحاظ ضرب ثابت کریں۔

-4 $\frac{3}{4}$، $\frac{4}{5}$ اور $\frac{7}{8}$ کے لئے ضرب کی خاصیت تقسیمی بالحاظ جمع ثابت کریں۔

-5 $\frac{5}{7}$، $\frac{3}{4}$ اور $\frac{1}{5}$ کے لئے ضرب کی خاصیت تقسیمی بالحاظ تفریق ثابت کریں۔

-6 ذیل میں دیئے گئے ناطق اعداد کو ترتیب نزولی میں لکھیں۔

(i) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}$ (ii) $\frac{1}{6}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ (iii) $\frac{4}{7}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}$

-7 ذیل میں دیئے گئے ناطق اعداد کو ترتیب صعودی میں لکھیں۔

(i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ (ii) $\frac{4}{5}, \frac{1}{10}, \frac{2}{15}$ (iii) $\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}$

-8 ذیل میں دیئے گئے ناطق اعداد کو ترتیب صعودی اور ترتیب نزولی میں لکھیں۔

(i) $\frac{4}{3}, \frac{5}{7}, \frac{1}{4}$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{11}$ (iii) $\frac{2}{9}, \frac{5}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$ (iv) $\frac{4}{20}, \frac{20}{15}, \frac{1}{2}, \frac{9}{7}$

جائزہ مشق 2

-1 ذیل کے سوالات کے جوابات دیں:

(i) ناطق عدد کی وضاحت کریں اور مثالیں بھی دیں۔

(ii) ناطق عدد 'a' کا جمعی معکوس لکھیں۔

(iii) $\frac{p}{q}$، $(q \neq 0)$ کا معکوس کیا ہے؟

(iv) دو ناطق اعداد $\frac{p}{q}$ اور $\frac{r}{s}$ کا مجموعہ لکھیں۔ (جبکہ q اور s غیر صفر ہیں)

(v) دو ناطق اعداد کی حاصل ضرب معلوم کرنے کے اصول کیا ہیں؟

(vi) جمع اور ضرب کے اُلٹ عوامل کیا ہیں؟

2- خالی جگہیں پُر کریں:

(i) ہر کسر اور صحیح عدد __________ بھی ہوتا ہے۔

(ii) ناطق اعداد $\frac{p}{q}$ اور $\frac{-p}{q}$ ایک دوسرے __________ معکوس کہلاتے ہیں۔

(iii) عدد جیسے $\frac{p}{q}$ کی صورت میں لکھا جاسکیں۔ جب کہ p اور q صحیح اعداد ہو اور $q \neq 0$ وہ __________ عدد کہلاتا ہے۔

(iv) 0 جمعی ذاتی عنصر کہلاتا ہے، جب کہ 1 __________ عنصر کہلاتا ہے۔

(v) ناطق عدد 0 کوئی __________ نہیں رکھتا ہے۔

(vi) کسی ناطق عدد کا __________ معکوس اس کا معکوس ہوتا ہے۔

3- درست جواب پر (✓) کا نشان لگائیں۔

(i) ایک عدد جیسے $\frac{p}{q}$ کی صورت میں ظاہر کیا جاسکے جب کہ $p, q \in Z$ اور $q \neq 0$ وہ کہلاتا ہے:

(a) صحیح عدد (b) ناطق عدد (c) مکمل عدد (d) مثبت عدد

(ii) $\frac{2}{3}$ کا جمعی معکوس ہے:

(a) $-\frac{2}{3}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $-\frac{3}{2}$

(iii) $-\frac{4}{7}$ کا ضربی معکوس ہے:

(a) $\frac{4}{7}$ (b) $\frac{7}{4}$ (c) $-\frac{7}{4}$ (d) $\frac{1}{7}$

(iv) $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=$ ______

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{2}{5}$ (d) $\frac{5}{6}$

(v) $\frac{2}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)=$ ______

(a) 2 (b) -2 (c) $-\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{2}{5}$

4- عددی خط بنائیں اور ذیل میں دیئے گئے ناطق اعداد کو عددی خط پر ظاہر کریں۔

(i) $1\frac{1}{2}$ (ii) $3\frac{1}{3}$ (iii) $-\frac{1}{4}$ (iv) $-1\frac{4}{5}$

5- ذیل میں دیئے گئے ناطق اعداد کے جمعی معکوس اور ضربی معکوس معلوم کریں۔

(i) -14 (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $-\frac{2}{3}$ (iv) $-\frac{11}{27}$

6- ذیل میں دیئے گئے ناطق اعداد کے جوڑے کے درمیان > یا < کی درست علامت لگائیں۔

(i) $\frac{2}{3},\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{10}{13},\frac{11}{14}$ (iii) $\frac{1}{4},-\frac{1}{2}$

(iv) $-\frac{11}{17},\frac{3}{8}$ (v) $-\frac{4}{9},-\frac{2}{5}$ (vi) $-\frac{5}{22},-\frac{11}{25}$

7- حل کریں۔

(i) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{2}{7}+\frac{1}{2}-\frac{3}{14}$ (iii) $\frac{5}{8}-\frac{1}{5}-\frac{3}{4}$

(iv) $\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}$ (v) $\left(-\frac{11}{15}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{5}{4}$

(vi) $\left(-\frac{19}{55}\right)+\frac{51}{55}+\left(-\frac{21}{55}\right)$

8- مختصر کریں۔

(i) $\left(-\frac{1}{100}\right) \div \left(-\frac{1}{10}\right)$

(ii) $\frac{1}{5} \times \frac{2}{3} \times \left(-\frac{30}{44}\right)$

(iii) $\frac{2}{3} \div \frac{16}{21} \times \frac{27}{49}$

(iv) $\frac{8}{21} \div \frac{7}{12}$

(v) $\frac{1}{6} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \div \left(-\frac{11}{63}\right)$

(vi) $-\frac{2}{7} \div \frac{3}{4} \times \frac{63}{100}$

9- ثابت کریں۔

(i) $(-1) + \frac{35}{54} = \frac{35}{54} + (-1)$

(ii) $\left(-\frac{121}{169}\right) \times \left(-\frac{13}{11}\right) = \left(-\frac{13}{11}\right) \times \left(-\frac{121}{169}\right)$

(iii) $\frac{4}{9} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}\right) = \left(\frac{4}{9} \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{5}{7}$

(iv) $-\frac{4}{5} \times \left(\frac{1}{8} + \frac{11}{12}\right) = \left(-\frac{4}{5} \times \frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{4}{5} \times \frac{11}{12}\right)$

(v) $-\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{5}\right) = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) + \frac{3}{5}$

(vi) $\frac{5}{12} \times \left(-\frac{2}{7} - 2\right) = \left(\frac{5}{12} \times -\frac{2}{7}\right) - \left(\frac{5}{12} \times 2\right)$

10- ذیل میں استعمال ہونے والی خاصیت کا نام لکھیں۔

(i) $\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)$

(ii) $-\frac{10}{11} \times \left(-\frac{5}{44}\right) = \left(-\frac{5}{44}\right) \times \left(-\frac{10}{11}\right)$

(iii) $-\frac{2}{3} \times \left(\frac{7}{8} \times \frac{9}{14}\right) = \left(-\frac{2}{3} \times \frac{7}{8}\right) \times \frac{9}{14}$

(iv) $-\frac{3}{5} + \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{10}\right) = \left(-\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right) + \frac{7}{10}$

(v) $-\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right) + \frac{1}{4}$

(vi) $\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{6}\right)$

(vii) $\left(-\frac{12}{105}\right) \times \left(-\frac{15}{84}\right) = \left(-\frac{15}{84}\right) \times \left(-\frac{12}{105}\right)$

(viii) $\frac{1}{4} \times \left(\frac{8}{9} - \frac{12}{15}\right) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{8}{9}\right) - \left(\frac{1}{4} \times \frac{12}{15}\right)$

(ix) $-\frac{5}{8} \times \left(\frac{4}{7} - \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{5}{8} \times \frac{4}{7}\right) - \left(-\frac{5}{8} \times \frac{2}{3}\right)$

(x) $\frac{24}{49} \times \left(\frac{7}{8} + \frac{14}{6}\right) = \left(\frac{24}{49} \times \frac{7}{8}\right) + \left(\frac{24}{49} \times \frac{14}{6}\right)$

خلاصہ

- ہر صحیح عدد کو دوسرے غیر صفر صحیح عدد سے تقسیم کیا جاسکتا ہے اور جو عدد حاصل ہوتا ہے وہ ناطق عدد کہلاتا ہے اور علامتی طور پر $\frac{a}{b}$ لکھتے ہیں جب کہ $b \neq 0$

- ناطق اعداد کی جمع

ہم مخرج کے ساتھ، یوں حل کرتے ہیں

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

غیر ہم مخرج کے ساتھ، یوں حل کرتے ہیں

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

- ناطق اعداد کی تفریق

ہم مخرج کے ساتھ، یوں حل کرتے ہیں

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

غیر ہم مخرج کے ساتھ، یوں حل کرتے ہیں

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

- دو ناطق اعداد کی حاصل ضرب معلوم کرنے کے لئے شمار کنندہ کو شمار کنندہ سے اور مخرج کو مخرج سے ضرب کرتے ہیں۔

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

- تقسیم ضرب کا اُلٹ عمل ہوتا ہے۔ لٰہذا کوئی دو اعداد $\frac{a}{b}$ اور $\frac{c}{d}$ $(d \neq 0)$ کے لئے

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

- 0 جمع کا ذاتی عنصر کہلاتا ہے اور 1 ضرب کا ذاتی عنصر کہلاتا ہے۔
- $\frac{a}{b}$ معکوس کہلاتا ہے $\frac{b}{a}$ کا
- اگر $\frac{a}{b}$ اور $\frac{c}{d}$ دو ناطق اعداد ہیں تو خاصیت مبادلہ کے مطابق:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b} \qquad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\times\frac{a}{b}$$

- اگر $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ اور $\frac{e}{f}$ تین ناطق اعداد ہیں تو خاصیت تلازم کے مطابق:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$$ اور $$\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)\times\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\right)$$

- اگر $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ اور $\frac{e}{f}$ تین ناطق اعداد ہیں تو خاصیت تقسیمی کے مطابق:

(i) $\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}\right)$

(ii) $\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)-\left(\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}\right)$

•••

تھوڑا سوچو تو صحیح!

عدد 37 سے متعلق بہت عجیب معلومات کا مطالعہ کریں۔

$37 \times 9 = 333$ $\qquad 37 \times 6 = 222$ $\qquad 37 \times 3 = 111$

مکمل کریں:

$37 \times \square = 666$ $\qquad 37 \times (3 \times 5) = 555$ $\qquad 37 \times (3 \times 4) = 444$

$37 \times \square = \square$ $\qquad 37 \times \square = 888$ $\qquad 37 \times \square = 777$

یونٹ 3

اعشاریہ

3.1 اعشاریہ کو ناطق اعداد میں تبدیل کرنا

ہم پہلے ہی سیکھ چکے ہیں کہ اعشاریہ وہ اعداد ہوتے ہیں جن میں ہندسوں کی قیمت دسواں، سواں، ہزارواں وغیرہ ہوتی ہے۔

آئیں اعشاریہ عدد 2.5 پر غور کریں۔ یہ دو حصوں پر مشتمل ہے۔ پہلا حصہ '2' جوکہ مکمل حصہ ہے اور دوسرا حصہ '.5' ہے جو اعشاریہ ہے۔

یہ ایک درجہ اعشاریہ ہے کیونکہ اس میں نقطہ اعشاریہ کے بعد صرف ایک ہندسہ ہے۔ اعشاریہ مکمل عدد اور اعشاریہ دونوں حصوں پر مشتمل ہوسکتا ہے جیسے: 2.5، 14.57، 32.163 اور 103.0978 وغیرہ یا صرف اعشاریہ حصہ پر مشتمل ہوتے ہیں جیسے 0.6، 0.56، 0.10652 وغیرہ۔

3.1.1 اعشاریہ کو ناطق اعداد میں تبدیل کرنا

ہم اعشاریہ کو ناطق اعداد میں تبدیل کر سکتے ہیں جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے۔

مثال 1: اعشاریہ 0.5 کو ناطق عدد میں تبدیل کریں۔

حل:

$$0.5 = \frac{05}{10} = \frac{5}{2 \times 5} = \frac{\cancel{5}}{2 \times \cancel{5}_1} = \frac{1}{2}$$

یا

$$0.5 = \frac{\cancel{5}^1}{\cancel{10}_2} = \frac{1}{2}$$

مراحل: (i) نقطہ اعشاریہ کے نیچے 1 لکھیں اور نقطہ اعشاریہ ہٹادیں۔

(ii) اتنے ہی صفر لگائیں جتنے کہ نقطہ اعشاریہ کے بعد ہندسے ہیں (کیونکہ یہ یک درجہ اعشاریہ ہے۔ لہٰذا 1 کے بعد صرف ایک صفر لگائیں)

(iii) اسے مختصر ترین صورت میں تبدیل کریں۔

پس (ناطق عدد) $0.5 = \frac{1}{2}$ اعشاریہ

مثال 2: اعشاریہ 0.06 کو ناطق عدد میں تبدیل کریں۔

حل: جیساکہ 0.06 دو درجہ اعشاریہ ہے۔ لہٰذا ہم 1 کے بعد دو صفر لگائیں گے۔

اعشاریہ $0.06 = \frac{06}{100} = \frac{^3\cancel{6}}{\cancel{100}_{50}} = \frac{3}{50}$ (ناطق عدد)

لہٰذا اعشاریہ $0.6 = \frac{3}{50}$ (ناطق عد)

یہاں $\frac{1}{2}$ اور $\frac{3}{50}$ ناطق اعداد ہیں۔

مثال 3: اعشاریہ 2.40 کو ناطق عدد میں تبدیل کریں۔

حل: دیا گیا اعشاریہ 2.40 دو حصوں پر مشتمل ہے۔ '2' مکمل عدد اور '0.40' اعشاریہ حصہ۔

لہٰذا ہم سب سے پہلے اعشاریہ حصہ .04 کو ناطق عدد میں تبدیل کرتے ہیں۔

کیونکہ $\frac{40}{100} = .40$ (جیساکہ .40 دو درجہ اعشاریہ ہے لہٰذا ہم 1 کے بعد دو صفر لگاتے ہیں۔

لہٰذا: $2.40 = 2 + .40 = 2\frac{40}{100} = 2\frac{4}{10} = 2\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{10}_{5}} = 2\frac{2}{5} = \frac{12}{5}$

پس اعشاریہ $2.40 = \frac{12}{5}$ کسر عام یا ناطق عدد ہے۔

مثال 4: –1.60 کو ناطق عدد میں تبدیل کریں۔

یہاں مکمل عدد '–1' یوں ہی رکھیں گے اور اعشاریہ حصہ .60 کو کسر عام میں تبدیل کریں گے۔

لہٰذا

$$-1.60 = -(1 + .60)$$
$$= -\left(1 + \frac{60}{100}\right) = -\left(1 + \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{10}_{5}}\right)$$
$$= -\left(1 + \frac{3}{5}\right) = -1\frac{3}{5} = -\frac{8}{5}$$

پس اعشاریہ $-1.60 = -\frac{8}{5}$ جو کہ ناطق عدد ہے۔

مشق 3.1

A- یک درجہ اعشاریہ کو ناطق عدد میں تبدیل کریں۔

(1) 0.2 (2) 0.4 (3) 0.6 (4) 0.8 (5) 0.9

B- دو درجہ اعشاریہ کو ناطق عدد میں تبدیل کریں۔

(1) 0.15 (2) 0.35 (3) 0.48 (4) 0.75 (5) 0.95

(6) – 1.30 (7) – 2.50 (8) 5.05 (9) 5.60 (10) 6.85

C- تین درجہ اعشاریہ کو ناطق عدد میں تبدیل کریں۔

(1) 0.024 (2) 3.125 (3) 0.375 (4) 4.065 (5) 5.625
(6) −0.001 (7) −0.0005 (8) −0.005 (9) −5.005
(10) −11.375 (11) −0.00125 (12) −15.00625

3.2 مختتم اعشاریہ اور غیر مختتم اعشاریہ

بنیادی طور پر اعشاریہ دو اقسام کے ہوتے ہیں:

(i) مختتم اعشاریہ (ii) غیر مختتم اعشاریہ

3.2.1 مختتم اعشاریہ کی وضاحت بطور ایسی اعشاریہ کرنا جس میں نقطہ اعشاریہ کے بعد محدود تعداد میں ہندسے ہوتے ہیں۔

(i) مختتم اعشاریہ

آئیں کچھ ناطق اعداد $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{2}$ اور $\frac{3}{8}$ کی تبدیلی پر غور کریں۔

حل: (ii) $\frac{1}{5} = 1 \div 5$ $5 \overline{)\,10\,}$ = 0.2 -10 0 پس $(\frac{1}{5} = 0.2)$	حل: (i) $\frac{1}{4} = 1 \div 4$ $4 \overline{)\,10\,}$ = 0.25 -8 20 -20 0 پس $(\frac{1}{4} = 0.25)$
حل: (iv) $\frac{3}{8} = 3 \div 8$ $8 \overline{)\,30\,}$ = 0.375 -24 60 56 40 -40 0 اس طرح $(\frac{3}{8} = 0.375)$	حل: (iii) $\frac{1}{2} = 1 \div 2$ $2 \overline{)\,10\,}$ = 0.5 -10 0 اس طرح $(\frac{1}{2} = 0.5)$

اوپر دی گئی تحویل میں تقسیم کا عمل مکمل ہوگیا اور باقی صفر بچا۔ یہ ناطق اعداد، اعشاریہ میں تبدیل ہوگئے ہیں جس میں نقطہ اعشاریہ کے بعد محدود تعداد میں ہندسے ہیں۔ یہ اعشاریہ مختتم اعشاریہ ہیں۔

ایسی اعشاریہ جس میں نقطہ اعشاریہ کے بعد محدود تعداد میں ہندسے ہوتے ہیں وہ مختتم اعشاریہ کہلاتی ہیں۔
لہٰذا 0.5، 0.25، 0.75، 0.345، 1.7227، 5.023748 وغیرہ تمام مختتم اعشاریہ ہیں۔

3.2.2 متوالی اعشاریہ کو بطور غیر مختتم اعشاریہ وضاحت کرنا نقطہ اعشاریہ کے بعد ایک ہندسہ یا ہندسوں کی بلاک ٹکڑوں کی صورت میں لامحدود مرتبہ تکرار ہوتی ہے۔

مثال کے طور پر: $\frac{2}{7} = 0.\ 2\ 85\ 71\ 42\ 85\ 71\ 4\ ...$

(ii) غیر مختتم اعشاریہ

ناطق اعداد $\frac{7}{9}$، $\frac{1}{6}$ اور $\frac{10}{11}$ کی تبدیلی پر غور کریں۔

حل: (iii)	حل: (ii)	حل: (i)
$\frac{10}{11} = 10 \div 11$	$\frac{1}{6} = 1 \div 6$	$\frac{7}{9} = 7 \div 9$
11) 100 = 0.909090... ; −99 → 100 ; −99 → 100 ; −99 → 1	6) 10 = 0.1666... ; −6 → 40 ; −36 → 40 ; −36 → 4	9) 70 = 0.777... ; −63 → 70 ; −63 → 70 ; −63 → 7
لہٰذا $\frac{10}{11} = 0.909090...$	لہٰذا $\frac{1}{6} = 0.1666...$	لہٰذا $\frac{7}{9} = 0.777...$

جب ناطق اعداد کو اعشاریہ میں تبدیل کیا گیا تو:

(i) $\frac{7}{9} = 0.777...$ (ii) $\frac{1}{6} = 0.1666...$ اور (iii) $\frac{10}{11} = 0.909090....$

چوں کہ یہاں تقسیم کا عمل مکمل نہیں ہوا، یہ اعشاریہ ...0.777، ...0.1666 اور ...0.909090 نقطہ اعشاریہ کے بعد لاتعداد ہندسے رکھتے ہیں۔ لہٰذا یہ غیر مختتم اعشاریہ (Non-Terminating decimals) ہیں۔

لہٰذا

> ایسا اعشاریہ جس میں نقطہ اعشاریہ کے بعد لاتعداد ہندسے ہوں،
> وہ غیر مختتم اعشاریہ (Non-Terminating decimals) کہلاتی ہے۔

...0.777 میں ہندسہ 7 لامتناہی دفعہ بار بار آیا ہے۔

...0.1666 میں ہندسہ 6 لامتناہی دفعہ بار بار آیا ہے۔

...0.9090909 میں '90' لامتناہی دفعہ بار بار آیا ہے۔

> لہٰذا یہ متوالی اعشاریہ (Recurring decimals) ہیں۔
> غیر مختتم اعشاریہ جس میں نقطہ اعشاریہ کے بعد ایک ہندسہ یا ہندسوں کی بلاک کی شکل میں لاتعداد تکرار ہو تو اُسے متوالی اعشاریہ (Recurring decimals) کہتے ہیں۔

مثال 1: ناطق اعداد کو اعشاریہ میں تبدیل کریں اور معلوم کریں کہ حاصل شدہ اعشاریہ متوالی ہے یا نہیں۔

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{7}{6}$ (iv) $\frac{9}{10}$

حل: ہم دیکھ سکتے ہیں کہ:

(i) $\frac{2}{3} = 0.666\ldots$ اور (iii) $\frac{7}{6} = 1.1666\ldots$

(i) اور (iii) ان دونوں اعداد میں ہندسہ 6 لامتناہی دفعہ بار بار آیا ہے۔ لہٰذا یہ دونوں غیر مختتم اور متوالی اعشاریہ (Non-Terminating decimals and Recurring decimals) ہیں۔

(ii) $\frac{3}{4} = 0.75$ اور (iv) $\frac{9}{10} = 0.9$

چوں کہ (ii) اور (iv) کے اعداد میں تقسیم کا عمل مکمل ہوگیا اور باقی صفر بچا۔ یہ ناطق اعداد اعشاریہ میں تبدیل ہوگئے ہیں جس میں نقطہ اعشاریہ کے بعد محدود تعداد میں ہندسے ہیں۔ لہٰذا یہ اعشاریہ مختتم اعشاریہ (Terminating decimals) ہیں۔

مثال 2: دیئے گئے ناطق اعداد $\frac{1}{3}$، $\frac{4}{6}$ اور $\frac{2}{7}$ کو اعشاریہ میں تبدیل کریں اور معلوم کریں آیا حاصل شدہ اعشاریہ متوالی ہے یا نہیں۔

حل:

(i) $\frac{1}{3} = 1 \div 3$ $3 \overline{)10}$ = 0.333... -9, 10, -9, 10, -9, 1 $\frac{1}{3} = 0.333...$ یہاں 3 بار بار آیا ہے۔ لہٰذا یہ متوالی اعشاریہ (Recurring decimals) ہے۔	(ii) $\frac{4}{6} = 4 \div 6$ $6 \overline{)40}$ = 0.666... -36, 40, -36, 40, -36, 4 $\frac{4}{6} = 0.666...$ یہاں 6 بار بار آیا ہے۔ لہٰذا یہ متوالی اعشاریہ (Recurring decimals) ہے۔	(iii) $\frac{2}{7} = 2 \div 7$ $7 \overline{)20}$ = 0.285714... -14, 60, -56, 40, -35, 50, -49, 10, -7, 30, -28, 2 $= 2 \div 7$ $\frac{2}{7} = 0.285714285714...$

پس ...0.333، ...0.666 اور...0.285714 غیر مختتم اور متوالی اعشاریہ ہیں کیونکہ ہندسے یا ہندسے بلاک کی شکل میں لاتعداد بار آئے ہیں اور تقسیم کا عمل ختم نہیں ہوا۔

سرگرمی: مختتم اور غیر مختتم کی شناخت کریں

غیر مختتم (متوالی)	مختتم	اعشاریہ کی شکل میں	ناطق اعداد
غیر مختتم		1.333 ...	$\frac{4}{3}$
		0.444 ...	$\frac{4}{9}$
	مختتم	1.25	$\frac{5}{4}$
		3.5714285 ...	$\frac{25}{7}$
		0.2727 ...	$\frac{3}{11}$

مشق 3.2

1- مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو اعشاریہ میں تبدیل کریں اور مختتم یا غیر مختتم کی شناخت کریں۔

(1) $\frac{7}{3}$	(2) $\frac{11}{6}$	(3) $-\frac{13}{9}$	(4) $\frac{15}{7}$	(5) $\frac{14}{9}$
(6) $-\frac{17}{11}$	(7) $\frac{19}{12}$	(8) $\frac{21}{13}$	(9) $-\frac{23}{14}$	(10) $-\frac{29}{15}$
(11) $\frac{31}{17}$	(12) $-\frac{35}{18}$	(13) $\frac{47}{19}$	(14) $\frac{35}{23}$	(15) $-\frac{20}{21}$
(16) $\frac{39}{22}$	(17) $-\frac{41}{29}$	(18) $\frac{40}{31}$	(19) $-\frac{50}{37}$	(20) $\frac{101}{41}$

2- مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو اعشاریہ میں تبدیل کریں اور شناخت کریں کون سی متوالی اعشاریہ ہے اور کون سی نہیں ہے؟

(1) $\frac{19}{20}$	(2) $\frac{17}{6}$	(3) $\frac{15}{8}$	(4) $\frac{25}{10}$	(5) $\frac{2}{11}$
(6) $\frac{10}{3}$	(7) $\frac{11}{12}$	(8) $\frac{16}{7}$	(9) $\frac{2}{13}$	(10) $\frac{4}{25}$

3.2.3 ذیل میں دیئے اصول کو استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں کہ آیا دیئے گئے ناطق اعداد مختتم اعشاریہ ہیں یا نہیں۔

اصول: اگر ناطق عدد کا مخرج معیاری شکل میں ہے اور اس کے مفرد اجزائے ضربی 2 اور 5 یا صرف 2، 5 ہیں تو ایسا ناطق عدد مختتم اعشاریہ (Terminating decimal) ہوتا ہے۔

ہم ناطق عدد کی شناخت بغیر اصل تقسیم کرے اوپر دیئے گئے اصول کی مدد سے کر سکتے ہیں کہ آیا یہ مختتم ہیں یا غیر مختتم ہیں۔

مثال: ذیل میں دی گئی مثالوں پر غور کریں۔

ناطق عدد	طریقہ تقسیم	اصول کے استعمال سے	اعشاریہ کی قسم
$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20} = 9 \div 20$ $= 0.45$	$\frac{9}{20} = \frac{9}{2 \times 2 \times 5}$ مخرج 2 اور 5 مفرد اجزائے ضربی رکھتا ہے۔	مختتم
$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5} = 3 \div 5$ $= 0.6$	$\frac{3}{5} = \frac{3}{5 \times 1}$ مخرج 5 بطور مفرد اجزائے ضربی رکھتا ہے۔	مختتم
$\frac{27}{200}$	$\frac{27}{200} = 27 \div 200$ $= 0.135$	$\frac{27}{200} = \frac{27}{2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5}$ مخرج 2 اور 5 بطور مفرد اجزائے ضربی رکھتے ہیں۔	مختتم
$\frac{40}{90}$	$\frac{40}{90} = 40 \div 90$ $= 0.4444 \ldots$	$\frac{40}{90} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 5}{2 \times 3 \times 3 \times 5} = \frac{2 \times 2}{3 \times 3}$ مخرج 2 اور 5 بطور مفرد اجزائے ضربی نہیں رکھتا ہیں۔	غیر مختتم
$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7} = 4 \div 7$ $= 0.57142857\ldots$	$\frac{4}{7} = \frac{4}{7 \times 1}$ مخرج 2 اور 5 بطور مفرد اجزائے ضربی نہیں رکھتا ہیں۔	غیر مختتم
$\frac{27}{18}$	$\frac{27}{18} = 27 \div 18$ $= 1.5$	$\frac{27}{18} = \frac{3 \times 9}{6 \times 3} = \frac{3 \times 3 \times 3}{2 \times 3 \times 3} = \frac{3}{2}$ مخرج 2 بطور مفرد اجزائے ضربی رکھتا ہے۔	مختتم

مشق 3.3

اصل تقسیم کے بغیر مختتم اور غیر مختتم اعشاریہ کو علیحدہ علیحدہ کریں۔

(1) $\frac{12}{25}$	(2) $\frac{43}{21}$	(3) $\frac{5}{12}$	(4) $\frac{17}{20}$	(5) $\frac{117}{125}$
(6) $\frac{5}{7}$	(7) $-\frac{9}{40}$	(8) $\frac{10}{33}$	(9) $\frac{23}{60}$	(10) $\frac{40}{35}$
(11) $\frac{55}{75}$	(12) $-\frac{96}{100}$	(13) $\frac{101}{125}$	(14) $\frac{111}{96}$	(15) $\frac{125}{200}$
(16) $\frac{141}{144}$	(17) $\frac{200}{201}$	(18) $-\frac{210}{147}$	(19) $\frac{372}{400}$	(20) $-\frac{401}{333}$

3.2.4 دیئے گئے ناطق اعداد کو بطور اعشاریہ ظاہر کرنا اور نشاندہی کرنا کہ آیا وہ مختتم یا متوالی اعشاریہ ہے

ذیل کے اعداد کی تحویل پر غور کریں۔

(i) $\frac{7}{20}$ (ii) $2\frac{1}{100}$ (iii) $\frac{1}{7}$ (iv) $\frac{5}{9}$

حل: (i) $\frac{7}{20} = 0.35$ (ii) $2\frac{1}{100} = 2.01$

جیساکہ $\frac{7}{20}$ اور $\frac{1}{100}$ دونوں میں باقی صفر ہے اس لئے یہ مختتم اعشاریہ ہیں۔

آئیں اب $\frac{1}{7}$ اور $\frac{5}{9}$ کو اعشاریہ میں تبدیل کریں۔

(iii) $\frac{1}{7} = 1 \div 7$

$$\begin{array}{r} 0.1428\ldots \\ 7\overline{)\,10} \\ -7 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 20 \\ -14 \\ \hline 60 \\ -56 \\ \hline 4 \end{array}$$

لہٰذا $\frac{1}{7} = 0.1428571\ldots$ اور تقسیم کا عمل مکمل نہیں ہوا ہے۔

(iv) $\frac{5}{9} = 5 \div 9$

$$\begin{array}{r} 0.555\ldots \\ 9\overline{)\,50} \\ -45 \\ \hline 50 \\ -45 \\ \hline 50 \\ -45 \\ \hline 5 \end{array}$$

لہٰذا $\frac{5}{9} = 0.555\ldots$ اور تقسیم کا عمل مکمل نہیں ہوا ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{1}{7}$ اور $\frac{5}{9}$ غیر مختتم اور متوالی اعشاریہ (Non-Terminating and Recurring decimals) ہیں۔

مشق 3.4

ذیل میں دیئے گئے ناطق اعداد کو اعشاریہ میں ظاہر کریں اور یہ بھی نشاندہی کریں کہ آیا یہ مختتم ہیں یا متوالی اعشاریہ۔

(1) $\frac{5}{16}$	(2) $-\frac{13}{18}$	(3) $\frac{19}{20}$	(4) $-3\frac{21}{22}$	(5) $6\frac{17}{30}$
(6) $\frac{23}{40}$	(7) $-\frac{25}{34}$	(8) $2\frac{15}{26}$	(9) $3\frac{27}{32}$	(10) $-1\frac{29}{45}$
(11) $2\frac{31}{38}$	(12) $\frac{39}{46}$	(13) $-3\frac{49}{50}$	(14) $2\frac{45}{48}$	(15) $\frac{91}{65}$
(16) $-\frac{153}{85}$	(17) $\frac{266}{171}$	(18) $-\frac{102}{210}$	(19) $\frac{111}{228}$	(20) $\frac{272}{288}$

3.3 تقریباً قیمت (Approximate value)

مطلوبہ درجے اعشاریہ تک کسی عدد کی مناسب قیمت لینا 'درست' کہلاتا ہے۔

حساب کتاب میں ہمارا واسطہ ایسے ناطق اعداد سے پڑ سکتا ہے جو غیر مختتم (متوالی) اعشاریہ ہو سکتے ہیں۔ لہٰذا ہمیں انہیں کچھ درجے اعشاریہ تک درست لکھنا ہوتا ہے اور پھر ہم انہیں حل کرتے ہیں۔

اصول: (i) باقی ہندسوں کی پڑتال کریں اگر آگے والا ہندسہ 5 سے کم تو اسے چھوڑ دیں۔
(ii) اگر آگے والا ہندسہ 5 یا 5 سے زیادہ ہو تو عدد کے آخری ہندسے میں 1 جمع کریں۔

لہٰذا ہم 0.55 کے آخری ہندسے میں 1 جمع کر سکتے ہیں۔

تو یوں 5 بن جائے گا 6۔

مثال: اعشاریہ ...0.555 پر غور کریں۔ ...0.555 کو دو درجہ اعشاریہ تک 'درست' لکھیں۔

حل: ہمیں دو درجے اعشاریہ تک 'درست' لکھنا ہے۔

مرحلہ 1: لہٰذا ہمیں دیئے گئے اعشاریہ کے دو ہندسے رکھنے ہیں جیسا کہ 0.55۔

پس دیا گیا اعشاریہ ...0.555، دو درجے اعشاریہ تک 0.56 'درست' ہوگا۔

مثال 2: 2.333333 کو دو درجے اعشاریہ تک 'درست' لکھیں تو ہمیں 2.33 حاصل ہوتا ہے۔

مثال 3: 4.88889 کو دو درجے اعشاریہ تک درست لکھیں تو ہمیں 4.89 حاصل ہوتا ہے۔

سر گرمی: دیئے گئے ناطق اعداد کو مطلوبہ ہندسوں تک 'درست' لکھیں۔

سیریل نمبر	عدد	دو درجے اعشاریہ تک	تین درجے اعشاریہ تک	چار درجے اعشاریہ تک
1.	0.05753	0.06	0.058	0.575
2.	2.421875			
3.	0.83333			
4.	1.76794			
5.	0.9916667			
6.	0.96257			
7.	1.61538			
8.	8.08547			
9.	6.98677			
10.	15.47648			

مشق 3.5

I. دیئے گئے ناطق اعداد کو تین درجہ اعشاریہ تک مختتم اور غیر مختتم اعشاریہ میں تبدیل کریں۔

(1) $\frac{23}{400}$ (2) $\frac{27}{64}$ (3) $\frac{53}{60}$ (4) $-\frac{46}{75}$ (5) $\frac{69}{70}$

(6) $\frac{77}{80}$ (7) $-\frac{43}{90}$ (8) $\frac{119}{120}$ (9) $\frac{246}{300}$ (10) $-\frac{81}{96}$

II. دو درجہ اعشاریہ تک تقسیم کر کے مختتم اور غیر مختتم اعشاریہ کی شناخت کریں۔

(1) $\frac{4}{15}$ (2) $-\frac{11}{12}$ (3) $\frac{8}{9}$ (4) $\frac{22}{7}$ (5) $-\frac{21}{16}$
(6) $\frac{3}{40}$ (7) $-\frac{18}{45}$ (8) $\frac{21}{66}$ (9) $\frac{33}{90}$ (10) $-\frac{81}{101}$

III. تین درجہ اعشاریہ تک تقسیم کر کے مختتم اور غیر مختتم اعشاریہ کی شناخت کریں۔

(1) $\frac{10}{11}$ (2) $-\frac{41}{90}$ (3) $\frac{21}{13}$ (4) $\frac{17}{19}$ (5) $\frac{9}{7}$
(6) $\frac{15}{23}$ (7) $-\frac{111}{96}$ (8) $\frac{22}{29}$

IV. ذیل کے اعشاریہ کو دو درجہ اعشاریہ تک 'درست' لکھیں۔

(1) 0.4555 (2) 0.3648 (3) 0.6666 (4) 0.1054
(5) 1.9091 (6) 3.2479 (7) 2.0518 (8) 8.3381
(9) 10.1036 (10) 3.9995 (11) 13.0967 (12) 15.8159

V. ذیل کے اعشاریہ کو تین درجہ اعشاریہ تک 'درست' لکھیں۔

(1) 4.51689 (2) 6.7472 (3) 0.0098 (4) 0.9861
(5) 206.4176 (6) 3.4073 (7) 102.99909 (8) 11.1234
(9) 55.12345 (10) 4.10539 (11) 66.3957 (12) 59.9196

جائزہ مشق 3

1- ذیل اعشاریہ کو ناطق اعداد میں تبدیل کریں۔

(i) 0.325 (ii) 0.75 (iii) 2.5 (iv) 7.75
(v) 0.78 (vi) 1.297 (vii) 2.348

2- ذیل کو اعشاریہ میں تبدیل کریں اور مختتم اور غیر مختتم کی شناخت کریں۔

(i) $\frac{41}{5}$ (ii) $\frac{111}{12}$ (iii) $\frac{28}{9}$ (iv) $\frac{10}{7}$
(v) $\frac{22}{7}$ (vi) $\frac{21}{16}$ (vii) $\frac{73}{10}$

3- ذیل کو دو درجہ اعشاریہ تک 'درست' لکھیں۔

(i) 14.5828 (ii) 1078287 (iii) 5.7895
(iv) 6.7989 (v) 25.4897

4- اصل تقسیم کے بغیر مختتم اور غیر مختتم اعشاریہ علیحدہ علیحدہ کریں۔

(i) $\frac{13}{4}$ (ii) $\frac{17}{25}$ (iii) $\frac{80}{3}$ (iv) $\frac{15}{11}$

(v) $\frac{19}{6}$ (vi) $\frac{25}{15}$ (vii) $\frac{22}{7}$ (viii) $\frac{14}{9}$

5- مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو مختتم اعشاریہ میں ظاہر کریں۔

(i) $\frac{21}{100}$ (ii) $\frac{127}{20}$ (iii) $\frac{13}{25}$ (iv) $\frac{31}{50}$ (v) $\frac{145}{1000}$

(vi) $\frac{25}{8}$ (vii) $\frac{23}{16}$ (viii) $\frac{88}{64}$ (ix) $\frac{48}{32}$

6- مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو تین درجہ اعشاریہ تک غیر مختتم اعشاریہ میں ظاہر کریں۔

(i) $\frac{40}{3}$ (ii) $\frac{20}{7}$ (iii) $\frac{50}{11}$ (iv) $\frac{80}{13}$ (v) $\frac{100}{6}$

(vi) $\frac{240}{22}$ (vii) $\frac{70}{12}$ (viii) $\frac{52}{91}$

7- ذیل میں دیئے گئے اعشاریہ کو تین درجے اعشاریہ تک 'درست' لکھیں۔

(i) 5.71679 (ii) 11.60365 (iii) 0.92598

(iv) 3.40855 (v) 0.74396 (vi) 23.15847

8- مندرجہ ذیل سوالات کے جوابات دیں:

(i) مختتم اور غیر مختتم اعشاریہ کی وضاحت کریں۔

(ii) مختتم اعشاریہ لکھیں اور ہر ایک کی مثال بھی دیں۔

(iii) کون سے غیر مختتم اعشاریہ متوالی اعشاریہ کہلاتے ہیں؟ دو مثالیں دیں۔

(iv) معلوم کرنے کے اصول لکھیں کہ آیا دیا گیا ناطق عدد مختتم ہے یا نہیں؟ دو مثالیں دیں۔

(v) اعشاریہ میں اصطلاح 'درست' کا کیا مطلب ہے؟ دو مثالیں دیں۔

9- خالی جگہیں پُر کریں:

(i) $\frac{1}{2} = 0.5$ ________ ہے۔

(ii) $\frac{1}{3} = 0.333...$ ________ ہے۔

(iii) اعشاری عدد کے دونوں حصوں کو نقطہ اعشاریہ سے علیحدہ کرتے ہیں وہ ________ کہلاتا ہے۔

(iv) عشاریہ کو ختم کرنے میں تقسیم کی مراحل کی مکمل تعداد ________ ہوتی ہے۔
(v) کسر عام مختتم ہوگی اگر ________ 2 یا 5 یا دونوں بطور مفرد اجزائے ضربی رکھتا ہے۔
(vi) متوالی اعشاریہ میں کچھ ہندسے یا ہندسوں کی ________ کی شکل میں بار بار تکرار ہوتی ہے۔

10- درست جواب پر (✓) نشان لگائیں۔

(i) اعشاریہ میں مکمل عدد کو کسری حصے سے علیحدہ کرنے کے لئے ہم علامت استعمال کرتے ہیں۔
(الف) __ (ب) : (ج) . (د) -

(ii) اگر 3.8461 کو دو درجے اعشاریہ تک لکھا جائے تو ہمیں حاصل ہوگا۔
(الف) 3.48 (ب) 3.81 (ج) 3.86 (د) 3.85

(iii) ناطق عدد مختتم اعشاریہ ہوتا ہے اگر اُس کے مخرج ہیں مفرد اجزائے ضربی ہوں۔
(الف) 2 اور 5 (ب) 3 اور 6 (ج) 4 اور 5. (د) 5 اور 7

(iv) جب ہم 0.75 کو ناطق عدد میں تبدیل کرتے ہیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے۔
(الف) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{1}{7}$

خلاصہ

- **اعشاریہ بنیادی طور پر دو اقسام کے ہوتے ہیں:**
  (i) مختتم اعشاریہ (ii) غیر مختتم اعشاریہ
- ہر اعشاریہ جس میں نقطہ اعشاریہ کے بعد محدود تعداد میں ہندسے ہوں تو وہ مختتم اعشاریہ کہلاتا ہے۔
- مختتم اعشاریہ ناطق عدد کو ظاہر کرتا ہے۔
- ایسا اعشاریہ جس میں نقطہ اعشاریہ کے بعد لاتعداد ہندسے ہوں تو وہ غیر مختتم اعشاریہ کہلاتا ہے۔
- غیر مختتم اعشاریہ متوالی بھی ہوسکتی ہے اور غیر متوالی بھی۔
- کسر مختتم ہوگی اگر اس کا مخرج معیاری شکل میں 2 یا 5 یا دونوں اجزائے ضربی رکھتا ہو۔

یونٹ 4

قوت نما

4.1.1 اساس، قوت نما اور قیمت کی شناخت

ہم جانتے ہیں کہ اگر کسی عدد کو خود ہی سے بار بار ضرب کیا جاتا ہے، تو اسے قوت نمائی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

مثال کے طور پر: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

یا $\boxed{2^5 = 32}$

یہاں 2 اساس ہے۔

5 قوت نما ہے۔

32 قیمت ہے جو 2 کی قوت 5 ہے۔

اور ہم اسے یوں پڑھتے ہیں کہ 2 کی قوت 5 برابر ہوتی ہے 32 کے۔

اب ہم قوت نما سے متعلق اصطلاحات کی وضاحت کرتے ہیں۔

اساس: اساس وہ عدد ہوتا ہے، جو قوت نما کے مطابق خود سے ضرب ہوتا ہے۔

قوت نما: قوت نما وہ عدد ہوتا ہے، جو ظاہر کرتا ہے کہ اساس خود سے کتنی بار ضرب کی جائے گی۔

قوت نمائی شکل کی قیمت: اساس کی خود سے قوت نما کے مطابق حاصل ضرب قوت نمائی شکل کی قیمت کہلاتی ہے۔

مثال کے طور پر: $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

یا $3^4 = 81$

یہاں 3 کی قوت نما 4 ہے جس کی قیمت 81 ہے۔

مثال 1: ذیل میں اساس اور قوت نما کی شناخت کریں اور ان کی قیمت بھی معلوم کریں۔

(i) 2^4 (ii) 5^2 (iii) $\left(\frac{4}{7}\right)^3$ (iv) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

حل:

قیمت	قوت نما	اساس	اظہاریے	سیریل نمبر
16 کیونکہ $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$	4	2	2^4	(i)
25 کیونکہ $5^2 = 5 \times 5 = 25$	2	5	5^2	(ii)
$\frac{64}{343}$ کیونکہ $\left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{64}{343}$	3	$\frac{4}{7}$	$\left(\frac{4}{7}\right)^3$	(iii)
$\frac{16}{81}$ کیونکہ $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$	4	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4$	(iv)

مشق 4.1

-1 ہر قوت نمائی شکل کی قیمت معلوم کریں۔

(i) 3^2 (ii) 2^7 (iii) $2^3 \times 3^4$

(iv) $5^2 \times 7^2$ (v) $2^3 \times 3^2 \times 5^2$ (vi) $2^4 \times 3^3 \times 7^2$

-2 اساس اور قوت نما معلوم کریں اور ذیل میں دیئے گئے ہر اظہاریے کی قیمت معلوم کریں۔

(i) 2^5 (ii) 5^4 (iii) 6^3 (iv) $\left(\frac{2}{3}\right)^6$ (v) $\left(-\frac{1}{5}\right)^5$

-3 ثابت کریں کہ:

(i) $(-3)^3 = -27$ (ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$ (iii) $\left(-\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$

(iv) $\left(-\frac{1}{10}\right)^6 = \frac{1}{1000000}$ (v) $\left(-\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{625}{81}$ (vi) $\left(\frac{4}{5}\right)^5 = \frac{1024}{3125}$

-4 ہر ناطق عدد کو قوت نمائی صورت میں ظاہر کریں۔

(i) 1000 (ii) 512 (iii) –343 (iv) 625

(v) $-\frac{1}{100000}$ (vi) $\frac{32}{243}$ (vii) $-\frac{125}{343}$ (viii) $\frac{729}{64}$

4.2 قوانین قوت نما

4.2.1 بذریعے ناطق اعداد قوانین قوت نما کو اخذ کرنا

کچھ قوانینِ قوت نما ہیں جو قوت نمائی شکل کے اظہاریوں کو مختصر کرنے میں ہماری مدد کرتے ہیں۔ یہ قوانین ذیل میں دیئے گئے ہیں۔

حاصل ضرب کا قانون:

(I) جب اساس ایک جیسے ہوں لیکن قوت نما مختلف ہو، تو حاصل ضرب کا قانون یہ $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ہوتا ہے جس میں 'a' ایک ناطق عدد ہے اور m، n قدرتی اعداد ہیں۔

اس قانون کو اخذ کرنے کے لئے آئیں ذیل کی مثالوں پر غور کریں:

(i) $2^3 \times 2^2 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2)$

یعنی $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

پس $\boxed{2^3 \times 2^2 = 2^{3+2} = 2^5}$

(ii) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}\right)$

(تمام ناطق اعداد کو آپس میں ضرب کرنے سے) $= \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^7$

یعنی $\boxed{\left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^7 = \left(\frac{2}{5}\right)^{3+4}}$

لہٰذا ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ اگر دو ایسے ناطق اعداد جن کی اساس ایک جیسی ہوں، لیکن قوت نما مختلف ہو، تو صرف ان کی قوتوں کو جمع کرتے ہیں اور اساس ویسے ہی رہتی ہے۔

جیسے: $\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$

یہاں 'a' ناطق عدد اور m، n قدرتی اعداد ہیں۔

مثال: بذریعے قانون قوت نما مختصر کریں۔

(i) $\left(\frac{2}{7}\right)^4 \times \left(\frac{2}{7}\right)^5$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left(\frac{2}{5}\right)^5$

حل:

(i) $\left(\frac{2}{7}\right)^4 \times \left(\frac{2}{7}\right)^5$

$= \left(\frac{2}{7}\right)^{4+5}$ (قانون ضرب استعمال کرتے ہوئے)

$= \left(\frac{2}{7}\right)^9$

(ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left(\frac{2}{5}\right)^5$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^{5+6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{4+5}$ (قانون ضرب استعمال کرتے ہوئے)

$= \left(\frac{3}{4}\right)^{11} \times \left(\frac{2}{5}\right)^9$

(II) جب اساس مختلف اور قوت نما ایک جیسے ہو تو قانون ضرب یہ $a^n \times b^n = (ab)^n$ ہوتا ہے۔ یہاں a، b ناطق اعداد اور n قدرتی عدد ہے۔

قانون کو اخذ کرنے کے لئے آئیں ذیل کی مثالوں پر غور کریں۔

(i) $3^4 \times 2^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2)$

$= 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4$

یعنی $3^4 \times 2^4 = 6^4 = (3 \times 2)^4$

اسی طرح

(ii) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$

$= \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}\right)$

$= \left(\frac{2}{15}\right) \times \left(\frac{2}{15}\right) \times \left(\frac{2}{15}\right) = \left(\frac{2}{15}\right)^3$

یعنی $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{15}\right)^3 = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}\right)^3$

لہٰذا ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ اگر دو ایسے ناطق اعداد جن کی اساس مختلف اور قوت نما ایک جیسے ہوں، تو ان کی اساس کو ضرب کیا جاتا ہے اور قوت نما ویسے ہی رکھتی ہے۔

جیسے: $a^n \times b^n = (ab)^n$

یہاں a، b ناطق اعداد اور n ایک قدرتی عدد ہے۔

مثال: بذریعہ قانون ضرب مختصر کریں۔

(i) $\left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$ (ii) $x^3 \times y^3$

حل:

(i) $\left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{7} \times \frac{4}{5}\right)^2$$

$$= \left(\frac{12}{35}\right)^2$$

حل:

(ii) $x^3 \times y^3$

$$= (x \times x \times x) \times (y \times y \times y)$$

$$= (x \times y) \times (x \times y) \times (x \times y)$$

$$= (xy)(xy)\ (xy) = (xy)^3$$

$$= x^3\ y^3$$

مشق 4.2

1- بذریعہ قانون ضرب مختصر کریں۔

(i) $\left(\frac{5}{7}\right)^2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^4$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^6 \times \left(\frac{1}{5}\right)^6$

(iii) $\left(\frac{1}{7}\right)^5 \times \left(\frac{1}{7}\right)^5 \times \left(-\frac{5}{7}\right)^8 \times \left(-\frac{5}{7}\right)^8$ (iv) $p^6 \times p^7$

(v) $y^5 \times x^{11} \times y^6$ (vi) $\left(\frac{4}{3}\right)^5 \times \left(\frac{4}{3}\right)^6 \times \left(\frac{4}{3}\right)^7$

(vii) $x^5 \times y^6 \times x^2 \times y^7$ (viii) $\left(-\frac{1}{3}\right)^6 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3$

(ix) $x^5 \times y^5 \times z^5$ (x) $p^2 \times q^7 \times p^5$

2- ثابت کریں۔

(i) $2^5 \times 3^5 = 6^5$ (ii) $p^7 \times q^7 = (pq)^7$

(iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 = \left(\frac{3}{4}\right)^{12}$

(iv) $\left(\frac{1}{7}\right)^4 \times \left(\frac{1}{7}\right)^5 = \left(\frac{1}{7}\right)^9$

(v) $\left(-\frac{1}{8}\right)^6 \times \left(-\frac{3}{5}\right)^6 = \left(\frac{3}{40}\right)^6$

قانونِ حاصل تقسیم

1. جب اساس ایک جیسی اور قوت نما مختلف ہو، تو قانونِ حاصل تقسیم یہ $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ہوتا ہے۔
یہاں 'a' ناطق عدد اور m، n قدرتی اعداد ہیں۔ قانون اخذ کرنے کے لئے آئیں ذیل کی مثالوں پر غور کریں۔

(i) $3^6 \div 3^2$ (3^6 کو 3^2 سے تقسیم کرنے سے)

$$= \frac{3^6}{3^2} = \frac{3\times3\times3\times3\times\cancel{3}\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times\cancel{3}}$$

$$= 3\times3\times3\times3 = 3^4$$

یعنی $3^6 \div 3^2 = 3^4 = 3^{6-2}$

(ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \div \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

یعنی $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \div \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2}$

لہٰذا ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ جب ایسے دو ناطق اعداد جن کی اساس ایک جیسی اور قوت نما مختلف ہو تو ہم صرف ان کی قوت نماؤں کو تفریق کرتے ہیں اور اساس ویسے ہی رہتی ہے۔

یعنی $a^m \div a^n = a^{m-n}$

یہاں 'a' ناطق عدد اور m، n قدرتی اعداد ہیں۔

مثال: بذریعہ قانونِ حاصل تقسیم مختصر کریں:

$\left(\frac{2}{3}\right)^6 \div \left(\frac{2}{3}\right)^2$

حل:

$\left(\frac{2}{3}\right)^6 \div \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{6-2}$ (قانونِ تقسیم استعمال کرتے ہوئے)

$= \left(\frac{2}{3}\right)^4$

2. جب اساس مختلف اور قوت نما ایک جیسے ہو تو قانون حاصل تقسیم یہ $a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ ہوتا ہے
جہاں a، b ناطق اعداد جس میں $b \neq 0$ اور n قدرتی ہے۔
اس قانون کو اخذ کرنے کے لئے آئیں ذیل کی مثالوں پر غور کریں۔

$$\text{(i)} \quad 5^2 \div 3^2 = \frac{5^2}{3^2} = \frac{5 \times 5}{3 \times 3}$$

$$= \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

بھی

$$\text{(ii)} \quad 7^3 \div 2^3 = \frac{7^3}{2^3} = \frac{7 \times 7 \times 7}{2 \times 2 \times 2}$$

$$= \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \left(\frac{7}{2}\right)^3$$

پس ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ اگر دو ایسے ناطق اعداد کو تقسیم کیا جائے جن کی اساس مختلف ہو اور قوت نما ایک جیسے ہو تو ہم صرف ان کی اساس کو تقسیم کرتے ہیں اور قوت نما ویسی ہی رہتی ہے۔

جیسے:

$$a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

جہاں a، b ناطق اعداد جس میں $b \neq 0$ اور n قدرتی ہے۔

مثال 1: بذریعہ قانونِ حاصل تقسیم مختصر کریں: $5^7 \div 3^7$

حل:

$$5^7 \div 3^7 = \left(\frac{5}{3}\right)^7$$

مثال 2: بذریعہ قانونِ حاصل تقسیم مختصر کریں: $6^5 \div 2^5$

حل:

$$6^5 \div 2^5 = \left(\frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right)^5 = (3)^5$$

مشق 4.3

1- بذریعہ قانونِ حاصل تقسیم مختصر کریں۔

(i) $5^7 \div 5^4$ (ii) $\left(\frac{5}{7}\right)^5 \div \left(\frac{5}{7}\right)^2$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^6 \div \left(\frac{1}{2}\right)^2$

(iv) $x^{10} \div x^4$ (v) $(5)^6 \div (3)^6$ (vi) $(10)^5 \div (2)^5$

(vii) $(-7)^4 \div (-5)^4$ (viii) $\left(\frac{2}{5}\right)^6 \div \left(\frac{3}{5}\right)^6$ (ix) $\left(\frac{7}{11}\right)^6 \div \left(\frac{7}{11}\right)^5$

(x) $x^4 \div y^4$

2- ثابت کریں:

(i) $\left(\frac{2}{9}\right)^5 \div \left(\frac{2}{9}\right)^2 = 2^3 \div 9^3$

(ii) $(-3)^8 \div (-5)^8 = \left(\frac{3}{5}\right)^{10} \div \left(\frac{3}{5}\right)^2$

(iii) $\left(\frac{x}{y}\right)^7 \div \left(\frac{x}{y}\right)^5 = x^2 \div y^2$

(iv) $5^{11} \div 5^8 = (20)^3 \div (4)^3$

قانونِ قوت

(i) اگر 'a' ناطق عدد اور m، n قدرتی اعداد ہو تو قانونِ قوت یہ $(a^m)^n = a^{mn}$ ہوتا ہے۔
قانون کو اخذ کرنے کے لئے آئیں ہم ان مثالوں پر غور کریں:

(i)
$$(7^3)^2 = (7^3) \times (7^3)$$
$$= (7 \times 7 \times 7) \times (7 \times 7 \times 7) = 7^6$$
یعنی
$$(7^3)^2 = 7^6 = (7)^{3\times2}$$

اسی طرح

(ii)
$$\left\{\left(\frac{11}{12}\right)^2\right\}^4 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 \times \left(\frac{11}{2}\right)^2 \times \left(\frac{11}{2}\right)^2 \times \left(\frac{11}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{11}{2} \times \frac{11}{2}\right) \times \left(\frac{11}{2} \times \frac{11}{2}\right) \times \left(\frac{11}{2} \times \frac{11}{2}\right) \times \left(\frac{11}{2} \times \frac{11}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}\right)^8$$
یعنی
$$\left\{\left(\frac{11}{12}\right)^2\right\}^4 = \left(\frac{11}{2}\right)^8 = \left(\frac{11}{2}\right)^{2\times4}$$

پس ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ اگر کسی ناطق عدد کی قوت کو کسی دوسری قوت سے بڑھا دیا جائے، تو ہم ان کی اساس کو ویسے ہی رکھتے ہوئے دونوں قوتوں کو آپس میں ضرب کرتے ہیں۔

جیسے: $(a^m)^n = a^{mn}$

یہاں 'a' ناطق عدد اور m، n قدرتی اعداد ہیں۔

مثال: بذریعہ قانون قوت مختصر کریں: (i) $(2^5)^3$ (ii) $\left\{\left(\frac{3}{10}\right)^2\right\}^4$

حل:

(i) $(2^5)^3 = (2)^{5\times3} = 2^{15}$

(ii) $\left\{\left(\frac{3}{10}\right)^2\right\}^4 = \left(\frac{3}{10}\right)^{2\times4} = \left(\frac{3}{10}\right)^8$

قوت نمائی اظہاریے کی قیمت جب قوت نما صفر ہو۔

$a^0=1$۔ یہاں a ایک ناطق عدد ہے۔

ہم جانتے ہیں $\frac{a^2}{a^2} = \frac{a\times a}{a\times a} = 1$

بھی $\frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0$

پس $a^0 = 1$

اس ہی طرح $5^0 = 1,\ \left(\frac{5}{2}\right)^0 = 1$ ، $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

قوت نمائی اظہاریے کی قیمت جب قوت نما منفی ہو۔

قوت نما بطور منفی صحیح عدد: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

ہم جانتے ہیں کہ: $\frac{1}{a^2} = \frac{a^0}{a^2}$

$= a^{0-2}$

$= a^{-2}$ (بذریعہ قانون حاصل تقسیم)

یعنی $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ یا $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$

اس طرح $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$ اور $6^{-7} = \frac{1}{6^7}$

عموماً $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

لہٰذا $a^{-1} = \frac{1}{a}$

4.2.2 نفی صحیح عدد کی قوت کے تصور کا مظاہرہ کرنا جیسے $(-a)^n$ جب n جفت یا طاق صحیح عدد ہو۔

آئیں ذیل کی مثالوں پر غور کریں۔

$(-3)^2 = (-3 \times -3) = +9$ (قوت نما جفت ہے)

$(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$ (قوت نما طاق ہے)

$(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = +81$ (قوت نما جفت ہے)

$(-3)^5 = (-3)(-3)(-3)(-3)(-3) = -243$ (قوت نما طاق ہے)

اوپر دی گئی مثالوں سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ:

اگر $(-a)^n = +a^n$ جفت عدد ہو۔

اگر $(-a)^n = -a^n$ طاق عدد ہو۔

مثال: ذیل میں کون سے مثبت یا منفی ہیں؟

(i) $(-5)^{11}$ (ii) $(-3)^{20}$ (iii) $(-8)^{113}$ (iv) $(-5)^{40}$

(v) $(-8)^{o}$ (vi) $(-7)^{-5}$ (vii) $(-110)^{-40}$

حل:

سیریل نمبر	اظہاریے	مثبت یا منفی	وجہ
(i)	$(-5)^{11}$	منفی	قوت نما طاق ہے۔
(ii)	$(-3)^{20}$	مثبت	قوت نما جفت ہے۔
(iii)	$(-8)^{113}$	منفی	قوت نما طاق ہے۔
(iv)	$(-5)^{40}$	مثبت	قوت نما جفت ہے۔
(v)	$(-8)^{0}$	مثبت	قوت نما جفت ہے۔
(vi)	$(-7)^{-5}$	منفی	قوت نما طاق ہے۔
(vii)	$(-110)^{-40}$	مثبت	قوت نما جفت ہے۔

مشق 4.4

1- بذریعہ قانونِ قوت مختصر کریں۔

(i) $(5^2)^7$ (ii) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^6\right\}^8$ (iii) $\{(-3)^2\}^{10}$

(iv) $(x^5)^{20}$ (v) $\left\{\left(\frac{4}{7}\right)^9\right\}^2$ (vi) $\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)^{20}\right\}^2$

2- منفی قوت نما میں تبدیل کریں۔

(i) $\frac{1}{2^5}$ (ii) $\frac{1}{3^7}$ (iii) $\frac{1}{x^6}$ (iv) $\frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^6}$

3- مثبت قوت نما میں تبدیل کریں۔

(i) 5^{-8} (ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-7}$ (iii) x^{-5} (iv) y^{-7}

4- شناخت کریں کہ کون سا مثبت یا منفی ہے۔

(i) $(-7)^6$ (ii) $\left(-\frac{11}{2}\right)^{17}$ (iii) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-26}$

(iv) $(-3)^0$ (v) $\left(-\frac{1}{7}\right)^1$ (vi) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-100}$

4.2.3 قوانین قوت نما کا اطلاق کرتے ہوئے اظہاریوں کی قیمت معلوم کریں۔

قوانین قوت نما کا اطلاق کرتے ہوئے اظہاریوں کو با آسانی مختصر کیا جاسکتا ہے جیسا کہ نیچے مثالوں کے ذریعے وضاحت کی گئی ہے۔

مثال 1: مختصر کریں اور سادہ ترین شکل میں لکھیں:

(i) $(2^5 \div 2^3) \times 2^{-2}$ (ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times (3)^6$

(iii) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3$

حل:

(i) $(2^5 \div 2^3) \times 2^{-2}$

$= 2^{5-3} \times 2^{-2} = 2^{5-3-2} = 2^0 = 1$

(ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3^6$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^{4+2} \times 3^6$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^6 \times 3^6$

$= \left(\frac{1}{\cancel{3}} \times \cancel{3}\right)^6$

$= (1)^6 = 1$

(iii) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3$

$= \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{4} \times \frac{4}{5}\right)^3$

$= \left(\frac{6}{6}\right)^2 + \left(\frac{20}{20}\right)^3 = (1)^2 + (1)^3$

$= 1 + 1 = 2$

مثال 2: بذریعہ قوانین قوت نما، x کی قیمت معلوم کریں۔

(i) $2^5 \times 2^3 = 2^x$

(ii) $\left(\frac{4}{5}\right)^6 \div \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^{2x}$

(iii) $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}^x = \left(\frac{3}{4}\right)^8$

حل:

(i) $2^5 \times 2^3 = 2^x$

$2^{5+3} = 2^x$

$2^8 = 2^x$

$8 = x$

$\boxed{x = 8}$

(ii) $\left(\frac{4}{5}\right)^6 \div \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^{2x}$

$\left(\frac{4}{5}\right)^{6-2} = \left(\frac{4}{5}\right)^{2x}$

$\left(\frac{4}{5}\right)^4 = \left(\frac{4}{5}\right)^{2x}$

$4 = 2x$

$\frac{4}{2} = x$ $\boxed{x = 2}$

(iii) $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}^x = \left(\frac{3}{4}\right)^8$

یا $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{4}\right)^8$

$2x = 8$

$x = \frac{\cancel{8}^4}{\cancel{2}_1}$

$\boxed{x = 4}$

مشق 4.5

1- مختصر کریں اور سادہ ترین شکل میں لکھیں:

(i) $\left(\frac{5}{7}\right)^6 \times \left(\frac{5}{7}\right)^4 \times \left(\frac{7}{5}\right)^{10}$

(ii) $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}^3 \div \left(\frac{2}{3}\right)^4$

(iii) $\left(\frac{7}{9}\right)^3 \times \left(\frac{9}{7}\right)^3 + \left(\frac{11}{12}\right)^5 \times \left(\frac{12}{11}\right)^5$

(iv) $x^o + x^5 \times x^{-5}$

(v) $\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^7 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2\right\} \div \left(\frac{4}{5}\right)^8$

(vi) $\left\{\left(\frac{7}{8}\right)^6 \div \left(\frac{7}{8}\right)^4\right\} \times \left(\frac{8}{7}\right)^2$

2- ذیل میں x کی قیمت معلوم کریں:

(i) $3^6 \times 3^4 = 3^x$

(ii) $\left(\frac{11}{9}\right)^8 \div \left(\frac{11}{9}\right)^6 = \left(\frac{11}{9}\right)^{2x}$

(iii) $\left\{\left(\frac{4}{7}\right)^3\right\}^x = \left(\frac{4}{7}\right)^9$

(iv) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \times \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$

جائزہ مشق 4

1- اساس، قوت نما کی شناخت کریں اور قیمت معلوم کریں۔

(i) 3^5 (ii) 7^4 (iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ (iv) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$ (v) 8^0 (vi) y^0

2- بذریعہ قوانین قوت نما مختصر کریں۔

(i) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2$ (ii) $\left(-\frac{4}{5}\right)^2 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^2$ (iii) $6^7 \div 6^4$

(iv) $\left(\frac{2}{7}\right)^5 \div \left(\frac{2}{7}\right)^3$ (v) $(3^2)^5$ (vi) $\left\{(-4)^2\right\}^5$

(vii) $(6^0)^2$ (viii) $(5^0)^2 \times (-5) \times (a^0)^2$

3- ثابت کریں۔

(i) $\left(\frac{1}{5}\right)^4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \left(\frac{3}{5}\right)^9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^9$ (ii) $(6)^4 \div (2)^4 = 3^8 \div 3^4$

(iii) $6z^0 = 6 \times (z^0)^2$

4- کون سی مثبت اور کون سی منفی ہے؟

(i) $(-2)^7$ (ii) $(-5)^0$ (iii) $(-3)^8$ (iv) $(-6)^{-7}$ (v) $(-8)^{-10}$

5- مختصر کریں۔

(i) $6^2 \div 3^3$ (ii) $5^0 \div 5^{-2} \times 5^2$

(iii) $\left[\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^2\right\}^3 \div \left(\frac{2}{5}\right)^4\right] \times \left(\frac{2}{5}\right)^3$

6- x کی قیمت معلوم کریں۔

(i) $25^x = 125$ (ii) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \div \left(\frac{2}{3}\right)^2$

(iii) $\left\{\left(\frac{2}{7}\right)^x\right\}^5 = \left(\frac{2}{7}\right)^{10}$

خلاصہ

- **اساس:** یہ ایسا عدد ہوتا ہے جو قوت نما کے مطابق خود سے ضرب ہوتا ہے۔
- **قوت نما:** قوت نما وہ عدد ہے جو ظاہر کرتا ہے کہ اساس خود سے کتنی بار ضرب کی جائے گی۔

- **قانون حاصل ضرب:** (i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ii) $a^n \times b^n = (ab)^n$

یہاں a، b ناطق اعداد ہیں اور m، n قدرتی اعداد ہیں۔

- **قانونِ حاصل تقسیم:** (i) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (ii) $a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

یہاں a، b ناطق اعداد ہیں اور m، n قدرتی اعداد ہیں۔

- **قانونِ قوت:** $(a^m)^n = a^{mn}$

یہاں a ناطق عدد اور m، n قدرتی اعداد ہیں۔

- **خاصیتیں:** (i) $a^0 = 1$ (ii) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

(iii) $(-a)^n$ مثبت ہوگا اگر n جفت ہے۔

(iv) $(-a)^n$ منفی ہوگا اگر n طاق ہے۔

ذہنی ذخیرہ: بہت اچھی کارآمد معلومات

فرض کریں کوئی آپ کو کہے کہ 1 سے 10 تک تمام قدرتی اعداد کا مجموعہ معلوم کریں۔
آپ نیچے دیئے ہوئے طریقے سے ایسے مسائل کو تمام باآسانی اور تیزی سے حل کر سکتے ہو۔
عدد 10 اور اس کے بعد مسلسل آنے والے عدد 11 کو آپس میں جمع کر کے، 2 سے تقسیم کریں۔ یعنی:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = \frac{\overset{5}{\cancel{10}} \times 11}{\cancel{2}_1} = 55$$

اسی طرح ہم دوسرے سوال بھی حل کر سکتے ہیں۔ مثلاً:

(i) $1 + 2 + 3 + \ldots + 20 = \frac{20 \times 21}{2} = \frac{\overset{10}{\cancel{20}} \times 21}{\cancel{2}_1} = 210$

(ii) $1 + 2 + 3 + \ldots + 25 = \frac{25 \times 26}{2} = \frac{25 \times \overset{13}{\cancel{26}}}{\cancel{2}_1} = 325$

یونٹ 5

مثبت عدد کا جذر المربع

5.1 مکمل مربع

کئی اعداد ایسے ہیں جن کو 2 کی قوت نمائی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر: $16 = 4 \times 4 = 4^2$
اسے ہم یوں پڑھ سکتے ہیں کہ 4 کا مربع 16 ہے اور اس طرح 3 کا مربع 9 ہے کیونکہ $9 = 3 \times 3 = 3^2$

5.1.1 مکمل مربع کی وضاحت کرنا

اوپر کی مثالوں میں 9 اور 16 مکمل مربع کہلاتے ہیں کیونکہ یہ مثبت اعداد ہیں اور بالترتیب 3 اور 4 کے مربع ہیں۔
ایسا مثبت عدد جو کسی عدد کا مربع ہو وہ مکمل مربع کہلاتا ہے۔ 1، 4، 9، 16، 25، 36 مکمل مربع کی چند مثالیں ہیں۔

سرگرمی: کچھ اعداد کے مکمل مربع معلوم کر کے ذیل میں دی گئی جدول مکمل کریں:

عدد	مربع	مکمل مربع	یوں پڑھتے ہیں
1	$1^2 = 1 \times 1$	1	1 کا مربع 1 ہے
2	$2^2 =$ ______	4	2 کا مربع 4 ہے
-3	$(-3)^2 = (-3) \times (-3)$	9	___ کا مربع ___ ہے
5	$5^2 =$ ______	25	___ کا مربع 25 ہے
-6	___ $= (-6) \times (-6)$	___	(−6) کا مربع ___ ہے
___	$7^2 = 7 \times 7$	___	___ کا مربع ___ ہے
8	___ $= 8 \times 8$	___	___ کا مربع ___ ہے
___	___ $= (-9) \times (-9)$	___	___ کا مربع ___ ہے
___	___ = ___ × ___	100	___ کا مربع 100 ہے

5.1.2 جانچ کرنا کہ آیا عدد مکمل مربع ہے یا نہیں

ہم نیچے دیئے گئے طریقہ کار سے معلوم کر سکتے ہیں کہ آیا عدد مکمل مربع ہے یا نہیں؟

1. اس کے تمام مفرد اجزائے ضربی معلوم کریں اور فہرست بنائیں۔

2. ایک جیسے اجزائے ضربی کے جوڑے بنائیں۔

3. اگر ہر مفرد عدد جوڑے کی شکل میں ہے تو عدد مکمل مربع ہے۔

4. اگر کوئی اجزائے ضربی جوڑے کی شکل میں نہیں ہے تو عدد مکمل مربع نہیں ہے۔

مثال: جانچ کریں آیا ذیل میں دیئے گئے اعداد مکمل مربع ہیں یا نہیں۔

(i) 5625 (ii) 4563

حل: (i) سب سے پہلے ہم 5625 کے مفرد اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں

$5\times 5\times 5\times 5\times 3\times 3$

چونکہ ہر مفرد اجزائے ضربی جوڑے کی شکل میں ہے $= \underline{5\times 5}\times \underline{5\times 5}\times \underline{3\times 3}$

لہٰذا 5625 مکمل مربع ہے۔

5	5625
5	1125
5	225
5	45
3	9
3	3
	1

حل: (ii) سب سے پہلے ہم 4563 کے مفرد اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں

$3\times 3\times 3\times 13\times 13$

$\underline{3\times 3}\times 3\times \underline{13\times 13} =$ جیسا کہ 3 جوڑے کی شکل میں نہیں ہے۔

لہٰذا 4563 مکمل مربع نہیں ہے۔

3	4563
3	1521
3	507
13	169
13	13
	1

5.1.3 عدد کی مکمل مربع کی خاصیتیں

عدد اور مکمل مربع کی کچھ دلچسپ خاصیتوں کی شناخت کرنا اور ان کا اطلاق کرنا

(i) جفت عدد کا مکمل مربع جفت ہوتا ہے

ہم جانتے ہیں کہ جو اعداد 2 سے مکمل تقسیم ہو جاتے ہیں وہ جفت کہلاتے ہیں۔ کچھ جفت اعداد کے مکمل مربعے نیچے دیئے گئے ہیں۔

مکمل مربع	مربع	جفت عدد
4	$2^2 = 2 \times 2$	2
16	$4^2 = 4 \times 4$	4
36	$6^2 = 6 \times 6$	6
64	$8^2 = 8 \times 8$	8
100	$10^2 = 10 \times 10$	10

جفت اعداد اور ان کے مکمل مربع کا موازنہ کر کے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ تمام جفت اعداد کا مکمل مربع جفت عدد ہی ہوتا ہے۔

(ii) طاق عدد کا مربع طاق ہوتا ہے

ہم جانتے ہیں کہ طاق اعداد 2 سے مکمل تقسیم نہیں ہوتے ہیں۔ آئیں کچھ طاق اعداد کے مکمل مربعوں کی شناخت کریں۔

مکمل مربع	مربع	طاق عدد
1	$1^2 = 1 \times 1$	1
9	$3^2 = 3 \times 3$	3
25	$5^2 = 5 \times 5$	5
49	$7^2 = 7 \times 7$	7
81	$9^2 = 9 \times 9$	9

اوپر دی گئی جدول سے یہ صاف ظاہر ہے کہ طاق اعداد کا مربع طاق ہی ہوتا ہے۔

(iii) واجب کسر کا مربع خود اُس سے کم ہوتا ہے

ہم جانتے ہیں کہ اگر کسر کا مخرج اس کے شمار کنندہ سے بڑا ہو تو وہ واجب کسر کہلاتی ہے۔
آئیں واجب کسر کو مربع بنانے کے عمل اور موازنہ کو ذیل کی مثالوں سے سیکھیں:

مثال 1: $\frac{3}{4}$ کا مربع معلوم کریں خود اپنے آپ سے اُس کا موازنہ کریں۔

حل: آئیں $\frac{3}{4}$ کا مربع معلوم کریں۔

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3 \times 3}{4 \times 4} = \frac{9}{16}$$

متر ادف کسور کا موازنہ

دیا گیا عدد $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 4}{4 \times 4} = \frac{12}{16}$ اور $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

یہاں $\frac{12}{16} > \frac{9}{16}$ (لہٰذا دیئے گئے عدد کا مربع خود عدد سے چھوٹا ہے۔)

جیسے $\frac{9}{16} < \frac{3}{4}$ یا $\left(\frac{3}{4}\right)^2 < \frac{3}{4}$

اس لئے کسر کا مربع خود اس کسر سے چھوٹا ہوتا ہے۔

اس ہی طرح $\left(\frac{2}{9}\right)^2 = \left(\frac{2}{9}\right) \times \left(\frac{2}{9}\right) = \frac{2 \times 2}{9 \times 9} = \frac{4}{81}$ اور $\frac{4}{81} < \frac{2}{9}$

$\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \left(\frac{1}{7}\right) \times \left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1 \times 1}{7 \times 7} = \frac{1}{49}$ اور $\frac{1}{49} < \frac{1}{7}$

(iv) 1 سے چھوٹے اعشاریہ کا مربع خود اُس اعشاریہ سے چھوٹا ہوتا ہے

ذیل کی مثالوں پر غور کریں۔

مثال: 0.2 کا مربع معلوم کریں اور اس کا خود سے موازنہ کریں۔

حل: $(0.2)^2 = (0.2) \times (0.2) = \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{4}{100} = 0.04$

معلوم ہوا کہ $0.04 < 0.2$

یا $(0.2)^2 < 0.2$

اس لئے 1 سے چھوٹے اعشاریہ کا مربع ہمیشہ خود اُس اعشاریہ سے چھوٹا ہوتا ہے۔

اس ہی طرح $(0.03)^2 = (0.03) \times (0.03) = \frac{3}{100} \times \frac{3}{100} = \frac{9}{10000} = 0.0009$

لہٰذا $0.0009 < 0.03$

یا $(0.03)^2 < 0.03$

$$(0.12)^2 = (0.12) \times (0.12) = \frac{12}{100} \times \frac{12}{100} = \frac{144}{10000} = 0.0144$$

لہٰذا $0.0144 < 0.12$

یا $(0.12)^2 < 0.12$

مشق 5.1

A- ذیل کے مربع معلوم کریں۔

(1) 11 (2) 19 (3) 25 (4) 50
(5) 66 (6) 78 (7) 100 (8) 500

B- جانچ کریں کہ آیا ذیل میں دیا گیا ہر ایک مکمل مربع ہے یا نہیں؟

(1) 81 (2) 95 (3) 121 (4) 169
(5) 224 (6) 3969 (7) 3872 (8) 9845

C- جفت اور طاق اعداد کے مکمل مربعوں کو علیحدہ علیحدہ کریں۔

(i) 9 (ii) 25 (iii) 196 (iv) 441 (v) 2704
(vi) 3600 (vii) 9216 (viii) 9801

D- ذیل میں دی گئی واجب کسور کے مربعے معلوم کریں اور ان کا خود ان سے موازنہ کریں:

(1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{3}{7}$ (3) $\frac{8}{9}$ (4) $\frac{5}{6}$ (5) $\frac{2}{3}$

E- ذیل میں دیئے گئے اعشاریوں کا مربع معلوم کریں اور ان کا خود ان سے موازنہ کریں:

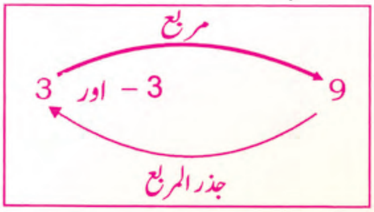
(1) 0.1 (2) 0.5 (3) 0.07 (4) 0.11 (5) 0.15

5.2 جذر المربع

5.2.1 قدرتی عدد کا جذر المربع معلوم کرنا اور اس کی علامت کو پہچاننا

کسی عدد کا جذر المربع ایسا عدد ہوتا ہے جس کو خود اُس ہی سے ضرب کیا جائے تو اصل عدد حاصل ہوتا ہے۔ روزمرہ زندگی سے متعلق مساوات کو حل کرنے کا یہ ایک اہم اوزار (tool) ہے۔ جذر المربع کو ایک قدیم مصری نے متعارف کروایا اور وہ اسے تعمیرات اور دوسری سرگرمیوں میں استعمال کرتا تھا۔

ہم مکمل مربع معلوم کرنا جانتے ہیں۔ جذر المربع معلوم کرنے کا عمل بالکل اس کا الٹ ہوتا ہے۔
جیسے: $9 = 3 \times 3 = 3^2$ اور $9 = (-3) \times (-3) = (-3)^2$ ہم اسے یوں پڑھتے ہیں کہ '3' اور (3-) کا مربع 9 ہے۔ جذر المربع کے لئے ہم یوں پڑھتے ہیں کہ '9' کے جذر المربع 3 اور (3-) ہیں۔



اس لئے ہر قدرتی عدد کے دو جذر المربع ہوتے ہیں ایک منفی اور دوسرا مثبت۔ اس مرحلے پر ہم صرف مثبت جذر لیتے ہیں۔

جذری علامت '$\sqrt{\ }$' کو کسی عدد کے جذر المربع کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ 9 کے جذر المربع کو یوں '$\sqrt{9}$' لکھا جاسکتا ہے اور یہ 9 'مجذور' کہلاتا ہے۔

عام طور پر جذر المربع کو اس قسم کی مساوات '$x^2 - y = 0$' یا '$x^2 = y$' کو حل کرنے کے لئے استعمال کرتے ہیں جب کہ x کا مربع y اور y کا جذر المربع x کہلاتا ہے۔

5.2.2 قدرتی عدد، کسر اور اعشاریہ کا جذر المربع بذریعہ طریقہ تقسیم اور طریقہ اجزائے ضربی معلوم کرنا

جذر المربع معلوم کرنے کے دو طریقے ہوتے ہیں جیسے بذریعہ طریقہ اجزائے ضربی اور بذریعہ طریقہ تقسیم۔

(i) جذر المربع بذریعہ طریقہ اجزائے ضربی

مثال 1: ذیل کے جذر المربع بذریعہ طریقہ اجزائے ضربی معلوم کریں۔

(i) 256 (ii) 3969

حل: **(i)** سب سے پہلے ہم 256 کے مفرد اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں۔

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

اب $\sqrt{256} = \sqrt{\underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}}$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2$ (اجزائے ضربی کے جوڑے بناکر)

$= 16$

اس لئے $\sqrt{256} = 16$

تصدیق: $16 \times 16 = 256$

حل: (ii) سب سے پہلے ہم 3969 کے مفرد اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں۔

3	3969
3	1323
3	441
3	147
7	49
7	7
	1

اس لئے $3969 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$

اب $\sqrt{3969} = \sqrt{\underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{7 \times 7}}$

$\sqrt{3969} = 3 \times 3 \times 7$ (اجزائے ضربی کے جوڑے بنا کر)

$= 63$

اس لئے $\sqrt{3969} = 63$

تصدیق: $63 \times 63 = 3969$

مثال 2: ذیل کی کسور کے جذر المربع بذریعہ طریقہ اجزائے ضربی معلوم کریں۔

(i) $\frac{64}{81}$ (ii) $2\frac{113}{256}$

حل: (i) مخرج اور شمار کنندہ کا جذر المربع علیحدہ علیحدہ معلوم کرتے ہیں۔

64 اور 81 کے مفرد اجزائے ضربی معلوم کرنے سے ہمیں حاصل ہوا

شمار کنندہ

2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

مخرج

3	81
3	27
3	9
3	3
	1

شمار کنندہ: $64 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}$

مخرج: $81 = \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3}$

$$\sqrt{\frac{64}{81}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{81}} = \frac{\sqrt{\underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}}}{\sqrt{\underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3}}}$$

$$= \frac{2 \times 2 \times 2}{3 \times 3} = \frac{8}{9}$$

حل: (ii) $2\frac{113}{256} = \frac{625}{256}$ (مرکب کسر کو غیر واجب کسر میں تبدیل کرنے سے)

625 اور 256 کے مفرد اجزائے ضربی معلوم کرنے سے ہمیں حاصل ہوا

شمار کنندہ:

5	625
5	125
5	25
5	5
	1

مخرج:

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

شمار کنندہ: $625 = \underline{5\times5}\times\underline{5\times5} = 5^2\times5^2$

مخرج: $256 = \underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}$

لہٰذا $\sqrt{2\frac{113}{256}} = \sqrt{\frac{625}{256}}$

یا $\sqrt{2\frac{113}{256}} = \frac{\sqrt{625}}{\sqrt{256}} = \frac{\sqrt{\underline{5\times5}\times\underline{5\times5}}}{\sqrt{\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}}}$

$= \frac{5\times5}{2\times2\times2\times2}$

یا $\sqrt{2\frac{113}{256}} = \frac{25}{16} = 1\frac{9}{16}$

مثال 3: ذیل کے اعشاریوں کا جذر المربع بذریعہ طریقہ مفرد اجزائے ضربی معلوم کریں:

(i) 1.44 (ii) 0.81

حل: (i) $1.44 = \frac{144}{100}$ (اعشاریہ کو کسر میں تبدیل کرنے سے)

شمار کنندہ:

2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

مخرج:

2	100
2	50
5	25
5	5
	1

اب $\sqrt{1.44} = \sqrt{\frac{144}{100}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}}$

یا $\sqrt{1.44} = \frac{\sqrt{\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{3\times3}}}{\sqrt{\underline{2\times2}\times\underline{5\times5}}} = \frac{2\times2\times3}{2\times5} = \frac{12}{10}$

$\sqrt{1.44} = 1.2$ (اعشاریہ میں تبدیل کرنے سے)

حل: (ii) $0.81 = \frac{81}{100}$

شمار کنندہ:

3	81
3	27
3	9
3	3
	1

مخرج:

2	100
2	50
5	25
5	5
	1

$\sqrt{0.81} = \sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{100}}$

یا $\sqrt{0.81} = \frac{\sqrt{\underline{3\times3}\times\underline{3\times3}}}{\sqrt{\underline{2\times2}\times\underline{5\times5}}} = \frac{3\times3}{2\times5}$

یا $\sqrt{0.81} = \frac{9}{10} = 0.9$

(ii) جذر المربع بذریعہ طریقہ تقسیم

کسی عدد کا جذر المربع معلوم کرنے کا یہ طریقہ بہت کار آمد ہے۔ سب سے پہلے مجذور کے تمام ہندسوں کے لازماً جوڑے بنائیں۔ آئیں ذیل کی مثالوں کے ذریعے قدرتی اعداد، کسور اور اعشاریوں کا مکمل مربعوں کا جذر المربع بذریعہ طریقہ تقسیم معلوم کرنا سیکھیں۔

مثال 1: ذیل کے قدرتی اعداد کا جذر المربع بذریعہ طریقہ تقسیم معلوم کریں:

(i) 256 (ii) 1024

حل: (i)

مرحلہ 1: اکائی کے ہندسے سے ہندسوں کے جوڑے ان پر خط کشید لگا کر بنانا شروع کریں اور آخر تک جوڑے بنائیں۔ (ہندسوں کی تعداد طاق ہونے کی صورت میں انتہائی بائیں طرف ہندسہ اکیلا رہ جائے تو خود اس کو جوڑا تصور کرتے ہیں جیسے $\hat{2}\overline{56}$)

مرحلہ 2: انتہائی بائیں جوڑے پر غور کریں جو '2' ہے۔ ایسا عدد معلوم کریں جس کا مربع 2 یا 2 سے کم لیکن 2 کے قریب ہو جو کہ 1 ہے۔

مرحلہ 3: 1 $(1^2 = 1 \times 1 = 1)$ کو جوڑے میں سے تفریق کریں جیسے 1 = 1 - 2 اور پھر آگے والا جوڑا لیں جو 56 ہے۔

مرحلہ 4: تقسیم کنندہ 1 کو خود میں جمع کریں اور پھر اسے نئے تقسیم کنندہ کے انتہائی بائیں طرف لکھیں۔

مرحلہ 5: پھر دوبارہ بڑے سے بڑا عدد معلوم کریں جو اکائی کے مقام پر خود سے اور تقسیم کنندہ سے ضرب کرنے سے لازماً مقسوم (156) کے برابر یا کم لیکن قریب ہو

جیسے: $26 \times 6 = 156$

جب باقی آجائے اور دیئے گئے عدد کے تمام ہندسے استعمال ہو جائیں تو عمل روک دیں۔

	16
1	$\hat{2}\overline{56}$
+ 1	−1
26	156
+ 6	−156
32	0

مرحلہ 6: تقسیم کے طریقے میں خارج قسمت مطلوبہ جذر المربع ہے جس کا مربع معلوم کرکے تصدیق کی جاسکتی ہے۔

پس $\sqrt{256} = 16$

حل: (ii)

	32
3	$\overline{10}\,\overline{24}$
+ 3	−9
62	124
+ 2	−124
64	0

لہٰذا $\sqrt{1024} = 32$

مثال 2: $1\frac{1089}{1936}$ کا جذر المربع بذریعہ طریقہ تقسیم معلوم کریں۔

حل:

جیسا کہ $1\frac{1089}{1936} = \frac{3025}{1936}$

مخرج $\left(\overline{19}\,\overline{36}\right)$

	44
= 4	$\overline{19}\,\overline{36}$
+ 4	− 16
84	336
+ 4	− 336
88	0

شمار کنندہ $\left(\overline{30}\,\overline{25}\right)$

	55
= 5	$\overline{30}\,\overline{25}$
+ 5	− 25
105	525
+ 5	− 525
110	0

پس $$\sqrt{1\frac{1089}{1936}} = \sqrt{\frac{3025}{1936}} = \frac{\sqrt{3025}}{\sqrt{1936}} = \frac{55}{44} = \frac{\cancel{55}^{5}}{\cancel{44}_{4}} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

لہٰذا $$\sqrt{1\frac{1089}{1936}} = 1\frac{1}{4}$$

مثال 3: ذیل کے اعشاریوں کا جذر المربع بذریعہ طریقہ تقسیم معلوم کریں۔

(i) 10.24 (ii) 249.64 (iii) 0.0441

حل:

(iii)

	0.21
2	$\overline{0.04}\,\overline{41}$
	−4
41	041
+ 1	− 41
42	0

پس $\sqrt{0.0441} = 0.21$

(ii)

	15.8
1	$\overline{2}\,\overline{49}.\overline{64}$
+ 1	−1
25	149
+ 5	− 125
308	2464
+ 8	− 2464
316	0

لہٰذا $\sqrt{249.64} = 15.8$

(i)

	3.2
3	$\overline{10}.\overline{24}$
+ 3	−9
62	124
+ 2	−124
64	0

لہٰذا $\sqrt{10.24} = 3.2$

نوٹ: اعشاریہ میں جوڑے بنانے کا عمل نقطہ اعشاریہ کے دونوں اطراف سے شروع کرتے ہیں۔ اعشاریہ حصے میں '0' لگا کر جوڑا مکمل کیا جاسکتا ہے۔

مشق 5.2

A- ذیل میں ہر ایک کا جذر المربع معلوم کریں۔

(1)	25	(2)	$(4)^2$	(3)	81	(4)	$(36)^2$
(5)	a^2	(6)	y^2	(7)	$(49)^2$	(8)	64

B- جذر المربع بذریعہ اجزائے ضربی اور تقسیم معلوم کریں۔

(1)	676	(2)	169	(3)	484	(4)	961
(5)	4900	(6)	1089	(7)	1600	(8)	2304
(9)	3136	(10)	1681	(11)	1369	(12)	2025

C- ذیل کی کسور کے جذر المربع بذریعہ طریقہ اجزائے ضربی اور تقسیم معلوم کریں۔

(1)	$\frac{144}{225}$	(2)	$\frac{324}{441}$	(3)	$\frac{1225}{9801}$	(4)	$1\frac{25}{144}$
(5)	$1\frac{48}{121}$	(6)	$3\frac{13}{36}$	(7)	$\frac{961}{1681}$	(8)	$\frac{1024}{1225}$
(9)	$2\frac{217}{576}$	(10)	$5\frac{55}{169}$	(11)	$1\frac{63}{81}$	(12)	$3\frac{325}{900}$

D- ذیل کے اعشاریوں کے جذر المربع بذریعہ طریقہ اجزائے ضربی اور تقسیم معلوم کریں۔

(1)	3.24	(2)	4.41	(3)	5.29	(4)	7.29
(5)	6.25	(6)	37.21	(7)	7.84	(8)	10.24
(9)	30.25	(10)	100.00	(11)	33.64	(12)	34.81

5.2.3 جذر المربع پر مشتمل روزمرہ زندگی کے مسائل حل کرنا

ہماری روزمرہ زندگی میں کئی ایسے مسائل ہوتے ہیں جن میں ہم (برائے راست یا بالواسطہ) جذر المربع کا استعمال کرتے ہیں۔ آئیں ذیل کی مثالوں پر غور کریں۔

مثال 1: جماعت ساتویں کے طلبہ نے پکنک کے لئے پیسے جمع کئے۔ ہر طالب علم نے اتنے ہی پیسے دیے جتنی کہ طلبہ کی تعداد تھی۔ اگر کل چندہ 4761 روپے ہو تو معلوم کریں کہ ہر طالب علم نے کتنے پیسے دیئے؟

حل: کل رقم = 4761 روپے

اس صورت میں ہر طالب کی دی ہوئی رقم = طلبہ کی تعداد = 4761 کے جذر المربع

طریقہ تقسیم

	69
6	$\overline{47}\ \overline{61}$
+6	−36
129	1161
+9	−1161
138	0

طریقہ مفرد تجزی

$$\sqrt{4761}=\sqrt{3\times3\times23\times23}$$
$$=3\times23$$
$$=69$$

3	4761
3	1587
23	529
23	23
	1

لہٰذا ہر طلبہ نے 69 روپے دیئے۔

مثال 2: اگر ایک اسکول میں 529 طلبہ ہیں۔ تمام طلبہ قطاروں میں کھڑے ہوئے ہیں۔ جتنی قطاریں ہیں اتنے طلبہ ہر قطار میں ہیں۔ قطاروں کی تعداد معلوم کریں۔

حل: طلبہ کی تعداد = 529

ہر قطار میں جتنے طلبہ ہیں اتنی ہی کل قطاریں ہیں۔

اس لئے ہم قطاروں کی تعداد، طلبہ کی تعداد کا جذر المربع معلوم کرکے کر سکتے ہیں۔

هتي $\sqrt{529}=23$

	23
2	$\hat{5}\ \overline{29}$
+2	−4
43	129
+3	−129
46	0

لہٰذا کل 23 قطاریں اور ہر قطار میں 23 طلبہ ہیں۔

مثال 3: 1225 پودوں کو اتنی ہی قطاروں میں لگایا گیا جتنے کہ ہر قطار میں پودے ہیں تو ہر قطار میں پودوں کی تعداد معلوم کریں۔

حل: پودوں کی کل تعداد = 1225 پودے

قطاروں کی تعداد = ہر قطار میں پودوں کی تعداد

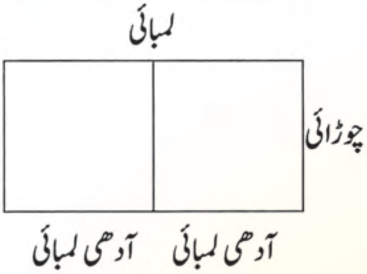
اس لئے ہر قطار میں پودوں کی تعداد = $\sqrt{1225}=35$

	35
3	$\overline{12}\ \overline{25}$
+3	−9
65	325
+5	−325
70	0

پس پودوں کی کل قطاریں 35 ہیں اور ہر قطار میں 35 پودے ہیں۔

مثال 4: ایک مستطیلی میدان کی لمبائی اُس کی چوڑائی کا دُگنا ہے۔ اگر اس کا رقبہ 96800 مربع میٹر ہے تو مستطیلی میدان کی لمبائی معلوم کریں۔

حل: اگر میدان کو دو برابر حصوں میں تقسیم کریں تو ہر حصہ ایک مربع ہوگا۔



ہر مربع کا رقبہ $= \frac{96800}{2}$ مربع میٹر

$=$ 48400 مربع میٹر

ہر مربع کی لمبائی $= \sqrt{\text{مربع کا رقبہ}}$

$= \sqrt{48400}$

$=$ 220 میٹر

پس میدان کی لمبائی $= 2 \times$ مربع کی لمبائی

$= 2 \times 220 = 440$ میٹر

	220
2	$\hat{4}\ \overline{84}\ \overline{00}$
+ 2	− 4
42	84
+ 2	− 84
440	000
+ 0	− 000
440	0

مشق 5.3

1- ایک امتحانی کمرے میں 784 کرسیاں اس طرح لگائیں گئیں ہیں کہ ہر قطار میں اتنی ہی کرسیاں ہیں جتنی کہ کل قطاریں ہیں۔ قطاروں کی تعداد معلوم کریں۔ ہر قطار میں کرسیوں کی تعداد بھی معلوم کریں۔

2- ایک مربعی میدان کا رقبہ 240.25 مربع میٹر ہے۔ اس کی ضلع کی لمبائی معلوم کریں۔

3- ایک کمرے کی لمبائی اُس کی چوڑائی کا تین گنا اور رقبہ 720.75 مربع میٹر ہے۔ اس کی لمبائی معلوم کریں۔

4- ایک کارٹن میں بسکٹ کے 2116 ڈبے رکھے جاتے ہیں۔ کارٹن میں ڈبوں کی کل اتنی ہی قطاریں ہیں جتنے کہ ہر قطار میں بسکٹ کے ڈبے ہیں تو قطاروں کی تعداد معلوم کریں۔

5- ایک اسکول کی تقریب میں 1681 طلبہ حصہ لیں گے۔ معلوم کریں کہ بیٹھنے کے لئے ایک قطار میں کتنی کرسیاں درکار ہوں گی کہ اگر ہر قطار میں اتنے ہی طلبہ ہوں جتنی کہ کل قطاریں ہوں۔

-6 625 ٹرک ہیں۔ تمام ٹرک قطاروں میں کھڑے ہیں۔ کل اتنی ہی قطاریں ہیں جتنے کہ ہر قطار میں ٹرک ہیں۔ قطاروں کی تعداد اور ہر قطار میں ٹرکوں کی تعداد معلوم کریں۔

-7 ایک ڈرل ٹیچر نے 1024 طلبہ کو قطاروں میں کھڑا کیا۔ قطاروں کی تعداد اتنی ہی ہے جتنے کہ ہر قطار میں طلبہ ہیں تو کل کتنی قطاریں ہیں اور ہر قطار میں کتنے طلبہ ہیں؟

-8 ایک مستطیلی میدان کی لمبائی اُس کی چوڑائی کا تین گنا ہے۔ اگر میدان کا رقبہ 995.9052 مربع میٹر ہے تو اس کی چوڑائی معلوم کریں۔

-9 مربعی شکل کے اسکول کی باؤنڈری کی لمبائی معلوم کریں اگر اُس کا رقبہ 3387.24 مربع میٹر ہو۔

-10 ایک شکر کی فیکٹری میں 15198 شکر کے تھیلوں کو مربعی شکل میں ترتیب دیا گیا تو 69 تھیلے زیادہ پائے گئے تو بتائیں کہ قطار میں کتنے تھیلے ہیں؟

جائزہ مشق 5

-1 ذیل کے مختصر جوابات دیں:

(i) جذر المربع معلوم کرنے کے مختلف طریقے کون سے ہیں؟

(ii) عدد کا مکمل مربع کیا ہوتا ہے؟ مثالیں دیں۔

(iii) عدد کے مکمل مربع کی دو خاصیتیں بیان کریں۔ مثالیں دیں۔

-2 خالی جگہیں پر کریں:

(i) 31 کا مربع __________ ہے۔

(ii) 49 کا جذر المربع __________ ہے۔

(iii) 1، 3، 9، 16، ... __________ اعداد کہلاتے ہیں۔

(iv) 144 __________ ہے 12 کا

(v) $\sqrt{\frac{25}{36}} =$ __________

(vi) 1 کا مربع __________ ہے۔

3- صحیح کے لئے 'ص' اور غلط کے لئے 'غ' لکھیں۔

(i) 235 کے مفرد اجزائے ضربی 2، 3 اور 5 ہیں۔ (ii) $19^2 = -361$

(iii) کسی بھی طاق عدد کا مربع جفت ہوتا ہے۔

(iv) $\frac{25}{49} > \frac{5}{7}$ (v) $(4.5)^2 > 4.5$ (vi) $0.7 < (0.7)^2$

4- درست جواب کا انتخاب کریں۔

(i) اگر $p = q^2$ تو q ______ کہلائے گا p کا۔

(الف) جذر المربع (ب) مربع (ج) مفرد اجزائے ضربی (د) مجذور

(ii) اعداد جن کے مربع ان کے جذر المربع کے برابر ہو وہ ______

(الف) 0 اور 2 (ب) 1 اور 3 (ج) 0 اور 1 (د) 2 اور 3

(ii) ______ مکمل مربع عدد ہے۔

(الف) 14 (ب) 15 (ج) 16 (د) 17

5- ذیل کے جذر المربع معلوم کریں۔

(i)	729	(ii)	7056	(iii)	26569	(iv)	42025
(v)	$5\frac{71}{121}$	(vi)	$\frac{2116}{9604}$	(vii)	$1\frac{984}{14641}$	(viii)	0.0256
(ix)	344569	(x)	$\frac{6400}{9801}$	(xi)	$5\frac{41}{64}$	(xii)	131.1025

6- ایک مربعی پارک کا رقبہ 12100 مربع میٹر ہے تو اس کی ضلع کی لمبائی معلوم کریں۔

7- ایک مربعی کمرے کے فرش کا رقبہ 144 مربع میٹر ہے۔ تو فرش کی لمبائی معلوم کریں۔

8- ایک مربعی گھر کا رقبہ 7688 مربع میٹر ہے تو چوڑائی معلوم کریں جبکہ لمبائی، چوڑائی کا دگنا ہے۔

9- ایک کھڑکی کی لمبائی اس کی چوڑائی کا تین گنا ہے۔ کھڑکی کی لمبائی اور چوڑائی دونوں معلوم کریں۔ جب کہ اس کا رقبہ 18.75 مربع میٹر ہے۔

10- نجیب نے جون کے مہینے میں 900 روپے اس طرح خرچ کئے کہ جتنے مہینے کے دن ہیں اُتنے ہی پیسے ایک دن میں خرچ کئے۔ تو بتائیں کہ اُس نے ایک دن میں کتنے پیسے خرچ کئے؟

خلاصہ

- کسی عدد کو خود اُس سے ضرب دے کر جو عدد ہمیں حاصل ہوتا ہے وہ اس کا مربع کہلاتا ہے۔
- مکمل مربع کے مفرد اجزائے ضربی ہمیشہ جوڑوں کی شکل میں ہوتے ہیں۔
- جفت عدد کا مربع جفت اور طاق عدد کا مربع طاق ہوتا ہے۔
- واجب کسر کا مربع خود اُس سے چھوٹا ہوتا ہے۔
- 1 سے چھوٹے اعشاریہ کا مربع خود اس سے چھوٹا ہوتا ہے۔
- کسی عدد کے جذر المربع کو خود اُس سے ضرب دیا جائے۔ تو اصل عدد ملتا ہے۔
- جذر المربع معلوم کرنے کا عمل مربع معلوم کرنے کے عمل کا الٹا ہے۔
- '$\sqrt{\ }$' کو جذر المربع کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کرتے ہیں۔ یہ جذر کی علامت کہلاتی ہے۔
- جذر کی اندر کے عدد کو مجذور کہتے ہیں۔
- ہم مرکب کسر کا جذر المربع اُس کو غیر واجب کسر میں تبدیل کرکے معلوم کر سکتے ہیں۔
- فرض کریں x، y کوئی دو عدد ہیں تو:

(i) $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$ (ii) $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

- مساوات $y = x^2$ میں y مربع کہلاتا ہے x کا اور x جذر المربع کہلاتا ہے y کا۔
- جذر المربع معلوم کرنے کے دو طریقے، اجزائے ضربی کا طریقہ اور تقسیم کا طریقہ ہوتے ہیں۔
- اعشاریہ کا جذر المربع اُس کو کسر میں تبدیل کرکے معلوم کر سکتے ہیں۔

یونٹ 6 تغیر راست اور معکوس

6.1 مسلسل نسبت

6.1.1 مسلسل نسبت کی وضاحت اور راست اور معکوس تناسب کو دیا کرنا

ہم جانتے ہیں کہ نسبت دو یا دو سے زائد مقداروں کے درمیان موازنہ ہے۔ مثال کے طور پر دانش اور رافع کی عمروں کی نسبت 4:1 ہے۔ اس ہی طرح بسمہ، ماریہ اور اومیما کی عمروں کی نسبت 2:3:5 ہے۔ یہ مسلسل نسبت کہلاتی ہے۔

تین مقداروں کی مسلسل نسبت در حقیقت دو مقداروں کا کم از کم ایک مشترک ایک جیسی جسامت والی مقدار کے ساتھ ملنا ہے۔ آئیں ذیل کی مثالوں سے دیکھیں کہ کیسے دو مقداریں مل کر مسلسل تناسب بناتی ہیں۔

تنویر اور طٰحہ کی عمروں میں نسبت = 2:5

طٰحٰہ اور رافع کی عمروں میں نسبت = 5:7

یہاں مشترک مقدار طٰحٰہ کی عمر 5 ہے۔

لہٰذا ان کی عمروں میں مسلسل نسبت ہوگی۔

رافع : طٰہٰ : تنویر = 2:5:7

لہٰذا تین مقداروں میں مسلسل نسبت کی وضاحت یوں کی جاسکتی ہے:

> اگر دو نسبتیں $A:B = x:y$ اور $B:C = y:z$، جو A، B اور C پر مشتمل ہیں تو ان کی مسلسل نسبت $A:B:C = x:y:z$ ہوگی۔

مثال 1: مسلسل نسبت A:B:C معلوم کریں۔ اگر $A : B = 5 : 6$ اور $B : C = 6 : 7$

حل: یہاں $A : B = 5 : 6$ اور $B : C = 6 : 7$

چونکہ دونوں نسبتوں میں مشترک مقدار B کی جسامت بھی ایک جیسی ہے

اس لئے $A : B : C = 5 : 6 : 7$

مشترک مقدار کی جسامت مختلف ہونے کی صورت میں بھی ہم مسلسل نسبت معلوم کر سکتے ہیں۔

جیساکہ ذیل کی مثالوں میں واضح کیا گیا ہے۔

مثال 2: مسلسل نسبت X : Y : Z معلوم کریں۔ اگر X : Y = 6 : 7 اور Y : Z = 8 : 9

حل: پہلا طریقہ

سب سے پہلے مشترکہ نسبت Y کا حاصل ضرب معلوم کرتے ہیں جو '56' ہے۔ اب ہم ہر نسبت کو Y کی جسامت '56' جیسا بناتے ہیں۔

یہاں $X : Y = 6 : 7$

یا $\frac{X}{Y} = \frac{6}{7}$

$= \frac{6 \times 8}{7 \times 8} = \frac{48}{56}$

اور $Y : Z = 8 : 9$

یا $\frac{Y}{Z} = \frac{8}{9}$

$= \frac{8 \times 7}{9 \times 7} = \frac{56}{63}$

پس $X : Y : Z = 48 : 56 : 63$

دوسرا طریقہ

X : Y : Z
6 7
8 9

(6×8) : (7×8) : (7×9)
48 : 56 : 63

پس $X : Y : Z = 48 : 56 : 63$

ہم چار مقداروں کی مسلسل نسبت بھی معلوم کر سکتے ہیں جیسا کہ نیچے وضاحت کی گئی ہے۔

مثال 3: A:B:C:D معلوم کریں۔ اگر A : B = 2 : 3 ، B : C = 4 : 5 اور C : D = 2 : 7

A : B : C : D
2 : 3
4 : 5

(2×4) (3×4) (3×5)

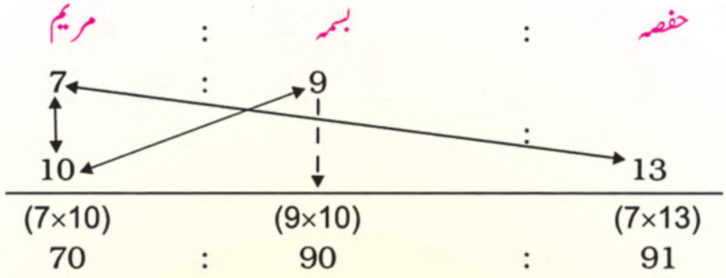
8 : 12 : 15
2 : 7

(8×2) (12×2) (15×2) (15×7)
16 24 30 105

پس $A : B : C : D = 16 : 24 : 30 : 105$

مثال 4: اگر مریم اور بسمہ کے جیب خرچ کی نسبت 7:9 اور مریم اور حفصہ کے جیب خرچ کی نسبت 10:13 ہے۔ ان کے جیب خرچوں کی مسلسل نسبت معلوم کریں۔

حل:



لہٰذا مطلوبہ نسبت (70 : 90 : 91) ہے۔

تناسب: پچھلی جماعت میں ہم تناسب اور اس کی اقسام کے بارے میں سیکھ چکے ہیں۔ آئیں اسے دہرائیں کہ دو نسبتوں کا برابر ہونا تناسب ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر: $2:3 = 4:6$ یا $2:3 :: 4:6$ تناسب ہیں۔

تناسب $a:b = c:d$ میں a, d طرفین کہلاتے ہیں اور b, c وسطین کہلاتے ہیں۔

یاد رکھیں: وسطین کا حاصل ضرب = طرفین کا حاصل ضرب

مثال 1: x معلوم کریں اگر $2 : 9 = x : 36$

حل: ہمارے پاس ہے $2:9 = x:36$

جیساکہ وسطین کا حاصل ضرب = طرفین کا حاصل ضرب

لہٰذا $9 \times x = 2 \times 36$

یا $\frac{\cancel{9} \times x}{\cancel{9}} = \frac{2 \times 36}{9} = \frac{2 \times \cancel{36}^{4}}{\cancel{9}_{1}} = 2 \times 4 = 8$

پس $x = 8$

تناسب دو اقسام کے ہوتے ہیں:

(i) راست تناسب (ii) معکوس تناسب

تغیر راست اور معکوس

راست تناسب: دو مقداروں کا آپس میں تعلق ایسا ہو کہ ایک مقدار میں اضافہ یا کمی ہو تو دوسری مقدار میں بھی اُس ہی نسبت سے اضافہ یا کمی ہو تو ان میں تغیر راست ہوتا ہے۔

معکوس تناسب: دو مقداروں کا آپس میں تعلق ایسا ہو کہ ایک مقدار میں اضافہ یا کمی ہو تو دوسری مقدار میں اس ہی نسبت سے کمی یا اضافہ ہو۔ تو ان مقداروں میں تغیر معکوس ہوتا ہے۔

مقدار کو تناسبی حصوں میں تقسیم کرنا

اگر کسی مقدار کو تناسبی حصوں میں تقسیم کرنا ہو۔ تو مقدار کے حصے معلوم کرنے کے لئے ہم ذیل کا فارمولہ استعمال کرتے ہیں:

$$\text{حصہ} = \frac{\text{نسبت} \times \text{کل مقدار}}{\text{نسبتوں کا مجموعہ}}$$

مثال 1: 180 روپوں کو A، B، C کی نسبت (2:3:4) میں تقسیم کریں۔

حل: یہاں کل مقدار 180 روپے ہے۔

$$\text{نسبتوں کا مجموعہ} = 2 + 3 + 4 = 9$$

$$A \text{ کا حصہ} = \frac{2\times180}{9} = \frac{2\times\cancel{180}^{20}}{\cancel{9}_1} = 2\times20 = 40 \text{ روپے}$$

$$B \text{ کا حصہ} = \frac{3\times180}{9} = \frac{3\times\cancel{180}^{20}}{\cancel{9}_1} = 3\times20 = 60 \text{ روپے}$$

$$C \text{ کا حصہ} = \frac{4\times180}{9} = \frac{4\times\cancel{180}^{20}}{\cancel{9}_1} = 4\times20 = 80 \text{ روپے}$$

لہٰذا A، B اور C کا کل رقم میں حصہ بالترتیب 40 روپے، 60 روپے اور 80 روپے ہے۔

مشق 6.1

-1 A:B:C معلوم کریں اگر:

(i) A : B = 2 : 5 اور B : C = 5 : 4

(ii) A : B = 3 : 7 اور B : C = 8 : 9

(iii) A : B = 10 : 11 اور B : C = 20 : 21

-2 $X:Y:Z$ معلوم کریں۔ اگر

(i) $X:Y=3:5$ اور $X:Z=4:9$

(ii) $X:Y=5:7$ اور $X:Z=11:13$

(iii) $X:Z=3:5$ اور $Y:Z=7:8$

-3 $A:B:C:D$ معلوم کریں۔ اگر

(i) $A:B=2:3$ ، $B:C=4:5$ اور $C:D=7:10$

(ii) $A:B=4:3$ ، $B:C=5:7$ اور $A:D=7:9$

-4 x معلوم کریں۔ اگر

(i) $x:2=5:6$ (ii) $3:x=9:7$ (iii) $4:5=x:7$

-5 شازیہ اور نازیہ کے وزنوں کی نسبت 5:9 ہے۔ نازیہ اور مریم کے وزنوں کی نسبت 8:11 ہے تو ان کے وزنوں میں مسلسل نسبت معلوم کریں۔

-6 2000 روپوں کو سلیم، عرفان اور عمران میں 2:3:5 کی نسبت سے تقسیم کریں۔

-7 تین دوستوں کے سالانہ امتحان میں حاصل کردہ مارکس کی نسبت نیچے دی گئی ہے:
اختر اور عزیز کی نسبت 3:4، عزیز اور انس کی نسبت 5:7 ہے تو ان کے مارکس میں مسلسل نسبت معلوم کریں۔

-8 خاندان کے افراد میں جائیداد کی تقسیم کی نسبت اس طرح ہے کہ والد اور والدہ کی نسبت 3:4، والدہ اور بیٹی کی نسبت 3:4، بیٹی اور بیٹے کی نسبت 6:7 ہے۔ ان کی جائیداد میں مسلسل نسبت معلوم کریں۔

-9 ایک آدمی کے بجلی، فون، گیس اور پانی کے بلوں میں 27400 روپے خرچ ہوئے۔ اگر بجلی اور فون کی رقم میں نسبت 5:2، فون اور گیس کی رقم میں 4:3 لیکن گیس اور پانی میں 4:3 ہے۔ تو بلوں کی اصل رقوم معلوم کریں۔

-10 ایک طالب علم نے ساتویں جماعت کی ریاضی، سائنس، انگریزی اور اردو کی کتابیں 675 روپے میں خریدیں۔ کتابوں کی قیمتوں میں نسبت نیچے دی گئی ہے:

انگریزی اور اردو میں نسبت 2:3

اردو اور سائنس میں نسبت 2:5

سائنس اور ریاضی میں نسبت 3:4 ہے۔ تو ہر کتاب کی قیمت معلوم کریں۔

6.1.2 راست تناسب اور معکوس تناسب پر مشتمل روزمرہ زندگی کے مسائل کو بذریعہ اکائی کا طریقہ اور تناسبی طریقہ حل کرنا

اب ہم تناسب پر مشتمل روزمرہ زندگی کے مسائل کو بذریعہ اکائی کا طریقہ اور تناسبی طریقہ پر حل کرنا سیکھتے ہیں۔ جیساکہ ذیل میں دی گئی مثالوں سے وضاحت کی گئی ہے:

مثال 1: اگر ایک جیسی 10 کتابوں کی قیمت 500 روپے ہے۔ تو ان جیسی 15 کتابوں کی قیمت معلوم کریں۔

حل: تناسبی طریقہ:

فرض کریں 15 کتابوں کی لاگت x روپے ہے۔

کتابیں	لاگت (روپے)	
10 ↓	500 ↓	
15	x	(راست تناسب)

$$10:15=500:x$$

جیساکہ وسطین کا حاصل ضرب = طرفین کا حاصل ضرب

لہٰذا $10\times x=15\times 500$

یا $\dfrac{\cancel{10}\times x}{\cancel{10}}=\dfrac{15\times 50\cancel{0}}{\cancel{10}}$

یا $x=750$ لہٰذا مطلوبہ قیمت 750 روپے ہے۔

اکائی کا طریقہ:

10 کتابوں کی قیمت = 500 روپے

1 کتاب کی قیمت = $\dfrac{500}{10}$ روپے

= 50 روپے

لہٰذا اس جیسی 15 کتابوں کی قیمت = 15×50

= 750 روپے

لہٰذا مطلوبہ 15 کتابوں کی قیمت 750 روپے ہے۔

مثال 2: تین ایک جیسے پائپ پانی کے ایک ٹینک کو 10 گھنٹوں میں بھرتے ہیں۔ تو ایسے 5 پائپ اس ٹینک کو کتنے گھنٹوں میں بھریں گے؟

حل: تناسبی طریقہ:

فرض کریں کہ مطلوبہ گھنٹے x ہیں۔

پائپ	گھنٹے	
3 ↓	10 ↑	
5	x	(معکوس تناسب)

$$3 : 5 = x : 10$$

جیسا کہ وسطین کا حاصل ضرب = طرفین کا حاصل ضرب

لہٰذا $5 \times x = 3 \times 10$

یا $\frac{\cancel{5} \times x}{\cancel{5}} = \frac{3 \times \cancel{10}^{2}}{\cancel{5}}$

یا $x = 6$

لہٰذا مطلوبہ گھنٹے 6 ہیں۔

اکائی کا طریقہ:

3 پائپ ایک ٹینک کو 10 گھنٹوں میں بھر سکتے ہیں۔

لہٰذا 1 پائپ اس ٹینک کو (3×10) گھنٹوں میں بھر سکے گا (کم پائپوں کو زیادہ وقت درکار ہے)

پس 5 پائپ اس ٹینک کو = $\left(\frac{3 \times 10}{5}\right)$ گھنٹے میں بھر سکیں گے (زیادہ پائپوں کو کم گھنٹے درکار ہوں گے)

$$= \frac{3 \times 10}{5} = \frac{3 \times \cancel{10}^{2}}{\cancel{5}_1} \text{ گھنٹے}$$

$= 6$ گھنٹے

مشق 6.2

ذیل کے مسائل کو اکائی کے طریقہ اور تناسبی طریقے سے حل کریں:

1- 15 کرسیوں کی قیمت 4500 روپے ہے تو ایسی 2 کرسیوں کی قیمت معلوم کریں۔

2- 3 ایک جیسے پائپ ایک ٹینک کو چھ گھنٹے میں بھر سکتے ہیں۔ تو ایسے 2 پائپ اس ٹینک کو کتنے گھنٹے میں بھریں گے؟

-3 اگر 5 آدمی کھانے کے ذخیرے کو 8 دنوں میں کھا سکتے ہیں۔ تو کھانے کے اُس ذخیرے کو 4 آدمی کتنے دنوں میں کھائیں گے؟

-4 اگر 4 کلو گرام آموں کی قیمت 300 روپے ہے۔ تو 10 کلو گرام آموں کی قیمت معلوم کریں۔

-5 ایک طالب علم ایک کتاب کے 30 صفحات 4 دنوں میں پڑھتا ہے۔ تو 10 دنوں میں وہ اس کتاب کے کتنے صفحات پڑھے گا؟

-6 20 سپاہی کھانے کے ایک ذخیرے کو 8 دنوں میں کھا سکتے ہیں۔ تو 5 دنوں میں اُس ذخیرے کو کتنے سپاہی کھائیں گے؟

-7 اگر 4 مزدور ایک کام کو 8 گھنٹے میں مکمل کرتے ہیں۔ تو 8 مزدور اُس ہی کام کو کتنے گھنٹوں میں مکمل کریں گے؟

-8 18 کلو گرام آلو کی قیمت معلوم کریں۔ اگر 6 کلو گرام آلو کی قیمت 105 روپے ہے۔

-9 اگر دھات کے $\frac{4}{7}$ ویں حصے کا وزن 28 کلو گرام ہے۔ تو اُس ہی دھات کے $\frac{8}{9}$ ویں حصے کا وزن کیا ہوگا؟

-10 35 مہمانوں کی تقریب کا خرچ 5250 روپے ہے۔ تو 85 مہمانوں کی تقریب کا خرچ معلوم کریں۔

6.2 وقت، کام اور فاصلہ

جب ہم وقت اور کام سے متعلق مسائل حل کرتے ہیں۔ تو ہم دیکھتے ہیں کہ:

(i) وقت اور کام راست تناسب ہوتے ہیں۔ کیونکہ زیادہ کام میں زیادہ لگتے ہیں اور کم وقت میں کم کام ہوتا ہے۔

(ii) مزدور کی تعداد اور وقت معکوس تناسب ہوتا ہے۔ کیونکہ زیادہ مزدور کم وقت میں ایک کام کو مکمل کرتے ہیں اور کم مزدور زیادہ وقت میں کام مکمل کرتے ہیں۔

6.2.1 وقت اور کام سے متعلق روزمرہ کے مسائل کو بذریعہ تناسب حل کرنا

آئیں وقت اور کام سے متعلق روزمرہ کے مسائل کو بذریعہ تناسب حل کرنا سیکھیں۔

مثال 1: دس آدمی کام کا $\frac{1}{2}$ حصہ ایک مخصوص وقت میں مکمل کر سکتے ہیں۔ تو بتائیں کہ کتنے آدمی اس کام کا $\frac{3}{4}$ واں حصہ اس ہی وقت میں مکمل کر سکیں گے؟

حل: فرض کریں کہ آدمیوں کی مطلوبہ تعداد x ہے۔

کام	آدمی
$\frac{1}{2}$ ↓	10 ↓
$\frac{3}{4}$	x

(راست تناسب)

ہمارے پاس

$$10 : x = \frac{1}{2} : \frac{3}{4}$$

جیساکہ وسطین کا حاصل ضرب = طرفین کا حاصل ضرب

لہٰذا $\frac{1}{2} \times x = 10 \times \frac{3}{4}$

یا $\frac{x}{2} = \frac{30}{4}$

یا $4x = 60$

یا $\frac{4x}{4} = \frac{60}{4}$

یا $x = 15$

لہٰذا آدمیوں کی مطلوبہ تعداد 15 ہے۔

مثال 2: چھ آدمی ایک کام کو 7 دنوں میں مکمل کرتے ہیں۔ تو اس ہی کام کو کتنے آدمی 6 دنوں میں مکمل کریں گے؟

حل: فرض کریں کہ آدمیوں کی مطلوبہ تعداد x ہے۔

دن	آدمی
7 ↑	6 ↓
6	x

(معکوس تناسب)

ہمارے پاس $\overbrace{6 : \underbrace{x = 6} : 7}$

جیساکہ وسطین کا حاصل ضرب = طرفین کا حاصل ضرب

لہٰذا $6 \times x = 6 \times 7$

یا $\frac{\cancel{6} \times x}{\cancel{6}} = \frac{\cancel{6} \times 7}{\cancel{6}}$

یا $x = 7$

لہٰذا آدمیوں کی مطلوبہ تعداد 7 ہے۔

مشق 6.3

-1 20 مزدور نصف کام کو ایک مخصوص وقت میں مکمل کرتے ہیں۔ تو کتنے مزدور تین چوتھائی کام اُس ہی وقت میں مکمل کریں گے؟

-2 6 مزدور ایک کام کو 10 دنوں میں مکمل کرتے ہیں۔ تو کتنے مزدور اُس ہی کام کو 15 دنوں میں مکمل کریں گے؟

-3 اگر 5 مزدور ایک کام کو 8 دنوں میں مکمل کرتے ہیں۔ تو کتنے مزدور اُس ہی کام کو 4 دنوں میں مکمل کریں گے؟

-4 اگر تین مستری ایک دیوار کو چار دنوں میں تعمیر کرتے ہیں۔ تو پانچ مستری اُس ہی دیوار کو کتنے دنوں میں تعمیر کریں گے؟

-5 اگر پانچ آدمی ایک تہائی کام کو ایک مخصوص وقت میں مکمل کرتے ہیں۔ تو 7 آدمی اُس ہی وقت میں کتنا کام مکمل کریں گے؟

-6 ایک بنگلے کو 64 دن میں تعمیر کرنے کے لئے بارہ مزدور درکار ہیں۔ اگر 18 مزدور مسلسل کام کریں تو بنگلہ کتنے دنوں میں مکمل تعمیر ہو جائے گا؟

-7 1500 بھیڑوں کے لئے چارے کا ذخیرہ 75 دنوں کے لئے ہے۔ اگر بھیڑیں مستقل رفتار سے چارہ کھائیں، تو معلوم کریں کہ:

(i) 80 دنوں میں اُس چارے کو کتنی بھیڑیں کھائیں گی؟

(ii) 1200 بھیڑیں اُس چارے کو کتنے دنوں میں کھائیں گی؟

6.2.2 وقت اور فاصلے کے درمیان تعلق (رفتار) معلوم کرنا

روزمرہ زندگی میں ہم دیکھتے ہیں کہ وقت کے تناسب سے فاصلہ بڑھتا اور کم ہوتا ہے۔ فرض کریں ایک کار 20 کلومیٹر کا فاصلہ 10 منٹ میں اور 30 کلومیٹر کا فاصلہ 15 منٹ میں طے کرتی ہے۔ اگر ہم فاصلے کا تعلق وقت کے ساتھ معلوم کریں تو ہمیں حاصل ہوگا:

$$\frac{20}{10} = \frac{\cancel{20}^2}{\cancel{10}_1} = 2 \quad \text{اور} \quad \frac{\cancel{30}^2}{\cancel{15}_1} = 2$$

ہم دیکھتے ہیں کہ نسبت یکساں ہے تو فاصلے کی وقت کے ساتھ یہ نسبت رفتار کہلاتی ہے۔

عام طور پر ہم یوں لکھتے ہیں: $\text{رفتار} = \frac{\text{فاصلہ}}{\text{وقت}}$

مثال 1: ایک کار 15 کلومیٹر کا فاصلہ 3 گھنٹے میں طے کرتی ہے۔ تو رفتار معلوم کریں۔

حل: فاصلہ = 15 کلومیٹر اور وقت = 3 گھنٹے

ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{رفتار} = \frac{\text{فاصلہ}}{\text{وقت}} = \frac{\overset{5}{\cancel{15}}\ \text{کلومیٹر}}{\underset{1}{\cancel{3}}\ \text{گھنٹے}} = 5\ \text{کلومیٹر فی گھنٹہ}$$

لہٰذا کار کی رفتار 5 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔

مثال 2: ایک بس کی رفتار 60 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔ تو وہ 4 گھنٹوں میں کتنا فاصلہ طے کرے گی؟

حل: رفتار = 60 کلومیٹر فی گھنٹہ،

وقت = 4 گھنٹے اور فاصلہ = ؟

ہم جانتے ہیں کہ $\text{رفتار} = \frac{\text{فاصلہ}}{\text{وقت}}$

یعنی $60\ \text{کلومیٹر فی گھنٹہ} = \frac{\text{فاصلہ}}{4\ \text{گھنٹے}}$

60 کلومیٹر فی گھنٹہ × 4 گھنٹے = فاصلہ

240 کلومیٹر = فاصلہ

لہٰذا بس 4 گھنٹے میں 240 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرتی ہے۔

6.2.3 رفتار کی اکائیوں کو تبدیل کرنا (کلو میٹر فی گھنٹہ کو میٹر فی سیکنڈ میں اور اس کا اُلٹ)

ہم جانتے ہیں:

1 کلو میٹر = 1000 میٹر اور 1 گھنٹہ = 3600 سیکنڈ

اوپر دیئے گئے تعلق کو استعمال کرتے ہوئے ہم رفتار کی اکائیوں کے درمیان تعلق معلوم کر سکتے ہیں۔ جیسے کلو میٹر فی گھنٹہ اور میٹر فی سیکنڈ کے درمیان۔

1 کلو میٹر فی گھنٹہ = $\frac{1000}{3600}$ میٹر فی سیکنڈ

رفتار کی اکائیوں کو تبدیل کرنے کے اصول: جیسے کلو میٹر فی گھنٹہ سے میٹر فی سیکنڈ میں اور اس کا اُلٹ۔

- کلو میٹر فی گھنٹہ کو میٹر فی سیکنڈ میں تبدیل کرنے کے لئے $\left(\frac{1000}{3600}\right)$ سے ضرب کیا جاتا ہے۔
- میٹر فی سیکنڈ کو کلو میٹر فی گھنٹہ میں تبدیل کرنے کے لئے $\left(\frac{1000}{3600}\right)$ سے تقسیم کیا جاتا ہے۔

مثال 1: 72 کلو میٹر فی گھنٹہ کو میٹر فی سیکنڈ میں تبدیل کریں۔

حل: 72 کلو میٹر فی گھنٹہ = $72 \times \left(\frac{1000}{3600}\right)$ میٹر فی سیکنڈ = $\frac{72000}{3600}$

$= \frac{720}{36} = \frac{\overset{20}{\cancel{720}}}{\underset{1}{\cancel{36}}} = 20$ میٹر فی سیکنڈ

مثال 2: 5000 میٹر فی سیکنڈ کو کلو میٹر فی گھنٹے میں تبدیل کریں۔

حل: 5000 میٹر فی سیکنڈ = $\left(5000 \div \frac{1000}{3600}\right)$ کلو میٹر فی گھنٹہ

$= \left(5000 \times \frac{3600}{1000}\right)$ کلو میٹر فی گھنٹہ

$= \left(\frac{\overset{5}{\cancel{5000}} \times 3600}{\underset{1}{\cancel{1000}}}\right) = 5 \times 3600$ کلو میٹر فی گھنٹہ

$= 5 \times 3600 =$ 18000 کلو میٹر فی گھنٹہ

6.2.4 وقت اور فاصلہ پر مشتمل تغیر سے متعلق مسائل حل کرنا

آئیں وقت اور فاصلہ پر مشتمل تغیر سے متعلق مسائل حل کرنا سیکھیں، جیسا کہ نیچے مثالوں سے وضاحت کی گئی ہے۔

مثال 1: ایک گاڑی 120 کلومیٹر کا فاصلہ 2 گھنٹے میں طے کرتی ہے۔تو یہ گاڑی 6 گھنٹوں میں کتنا فاصلہ طے کرے گی؟

حل: فرض کریں مطلوبہ فاصلہ x کلومیٹر ہے۔

کلومیٹر	گھنٹے	
120 ↓	2 ↓	
x	6	(راست تناسب)

ہمارے پاس $120 : x = 2 : 6$

جیسا کہ وسطین کا حاصل ضرب = طرفین کا حاصل ضرب

لہٰذا $2 \times x = 6 \times 120$

یا $\frac{2 \times x}{2} = \frac{6 \times 120}{2}$ یا $\frac{{}^{1}\cancel{2} \times x}{\cancel{2}_1} = \frac{{}^{3}\cancel{6} \times 120}{\cancel{2}_1}$

$x = 360$

لہٰذا مطلوبہ فاصلہ 360 کلومیٹر ہے۔

مثال 2: ایک کار 5 گھنٹوں میں 50 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے کچھ فاصلہ طے کرتی ہے۔ یہ ہی فاصلہ کار کتنے وقت میں 60 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے طے کرے گی؟

حل: فرض کریں مطلوبہ وقت x گھنٹے ہے۔

رفتار	گھنٹے	
50 کلومیٹر فی گھنٹہ ↓	5 ↑	
60 کلومیٹر فی گھنٹہ	x	(معکوس تناسب)

ہمارے پاس $50 : 60 = x : 5$

جیسا کہ وسطین کا حاصل ضرب = طرفین کا حاصل ضرب

لہٰذا $60 \times x = 50 \times 5$

یا $\frac{{}^{1}\cancel{60} \times x}{\cancel{60}_1} = \frac{5\cancel{0} \times 5}{6\cancel{0}} = \frac{25}{6}$

یا $x = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$

لہٰذا مطلوبہ وقت $4\frac{1}{6}$ گھنٹے ہے۔

مشق 6.4

1- مندرجہ ذیل کو میٹر فی سیکنڈ میں تبدیل کریں:

(i) 50 کلومیٹر فی گھنٹہ (ii) 75 کلومیٹر فی گھنٹہ

(iii) 80 کلومیٹر فی گھنٹہ (iv) 505 کلومیٹر فی گھنٹہ

2- مندرجہ ذیل کو کلومیٹر فی گھنٹہ میں تبدیل کریں:

(i) 30 میٹر فی سیکنڈ (ii) 12 میٹر فی سیکنڈ

(iii) 42 میٹر فی سیکنڈ (iv) 25.5 میٹر فی سیکنڈ

3- موٹر سائیکل کی رفتار معلوم کریں، جو 80 کلومیٹر کا فاصلہ 2 گھنٹے میں طے کرتی ہے۔

4- 60 کلومیٹر فی گھنٹے کی رفتار سے چلتی ہوئی گاڑی، 180 کلومیٹر کا فاصلہ کتنے وقت میں طے کرے گی؟

5- اگر ایک سائیکل 150 میٹر کا فاصلہ 30 سیکنڈ میں طے کرتی ہے، تو 45 سیکنڈ میں کتنا فاصلہ طے کرے گی؟

6- اگر ایک بس 60 کلومیٹر فی گھنٹے کی رفتار سے سفر کرتے ہوئے 3 گھنٹے میں منزل پر پہنچتی ہے، تو 70 کلومیٹر فی گھنٹے کی رفتار سے سفر کرتے ہوئے کتنے وقت میں منزل پر پہنچے گی؟

7- ایک گاڑی 210 کلومیٹر کا فاصلہ 3 گھنٹے میں طے کرتی ہے۔

(i) اس کی رفتار کلومیٹر فی گھنٹہ کتنی ہے؟

(ii) اس کی رفتار کلومیٹر فی منٹ کتنی ہے؟

(iii) اس کی رفتار میٹر فی سیکنڈ کتنی ہے؟

(iv) اس ہی رفتار سے وہ $4\frac{1}{2}$ گھنٹے میں کتنا فاصلہ طے کرے گی؟

(v) 350 کلومیٹر کا فاصلہ کتنے وقت میں طے کرے گی؟

جائزہ مشق 6

1- $x : y : z$ معلوم کریں، اگر $x : y = 2 : 5$ اور $x : z = 4 : 7$

2- $P : Q : R : S$ معلوم کریں، اگر $P : Q = 3 : 4$، $Q : R = 5 : 6$ اور $R : S = 7 : 8$

3- دس پینوں کی قیمت 250 روپے ہے تو ایسے 17 پینوں کی قیمت معلوم کریں۔

4- دس مزدور ایک کام کو 7 دنوں میں مکمل کرتے ہیں، تو اس کام کو 5 دنوں میں کتنے مزدور مکمل کریں گے؟

5- x معلوم کریں، اگر $x:5 = 6:15$

6- y معلوم کریں، اگر $7:8 = y:24$

7- 60 کلومیٹر فی گھنٹہ کو، میٹر فی سیکنڈ میں تبدیل کریں۔

8- 105 میٹر فی سیکنڈ کو، کلومیٹر فی گھنٹے میں تبدیل کریں۔

9- ایک کار 30 کلومیٹر کا فاصلہ 25 منٹ میں طے کرتی ہے۔ تو 55 منٹ میں کتنا فاصلہ طے کرے گی اور اس کی رفتار بھی معلوم کریں۔

(i) کلومیٹر فی گھنٹہ (ii) کلومیٹر فی منٹ (iii) میٹر فی منٹ (iv) میٹر فی سیکنڈ

10- تین کاریں A، B اور C کے ٹینکوں میں پیٹرول کی مقدار 7:9:11 کی نسبت سے ہے۔ اگر یہ تینوں کاریں کل 162 لیٹر پیٹرول استعمال کرتی ہیں، تو ہر کار کا پیٹرول کا خرچ معلوم کریں۔

11- اشیاء کو 40 کلومیٹر لے جانے کا خرچ 100 روپے ہے تو:

(i) 150 کلومیٹر تک لے جانے کا خرچ معلوم کریں۔ (ii) اگر خرچ 500 روپے ہو، تو فاصلہ معلوم کریں۔

خلاصہ

- **نسبت:** ایک جیسی دو مقداروں کا موازنہ نسبت کہلاتی ہے۔
- **مسلسل نسبت:** یہ ایک مشترک اور ایک جیسی جسامت والی مقدار پر مشتمل دو مقداروں کا ملاپ ہے۔
- **مقدار کو دی گئی نسبت میں تقسیم کرنا:** ہم مقدار کو دی گئی نسبت میں تقسیم کرنے کے لئے فارمولا استعمال کرتے ہیں:

$$\text{حصہ} = \frac{\text{نسبت} \times \text{کل تعداد}}{\text{نسبتوں کا مجموعہ}}$$

- **تناسب:** دو نسبتوں کی برابری تناسب کہلاتی ہے۔ تناسب کا قانون یہ ہے:

وسطین کا حاصل ضرب = طرفین کا حاصل ضرب

- دو مقداروں کا آپس میں تعلق ایسا ہو کہ ایک مقدار میں اضافہ یا کمی ہو، تو دوسری میں اس ہی نسبت سے کمی یا اضافہ ہو تو یہ تغیر معکوس کہلاتا ہے۔
- **رفتار:** فاصلے اور وقت میں نسبت رفتار کہلاتی ہے۔ اس کو فارمولے سے معلوم کر سکتے ہیں:

$$\text{رفتار} = \frac{\text{فاصلہ}}{\text{وقت}}$$

اکائی وقت میں طے کردہ فاصلہ رفتار کہلاتا ہے۔

- **فاصلہ:** رفتار اور وقت کے تعلق کو سمجھنے کے لئے فارمولا ہے:

$$\text{فاصلہ} = \text{رفتار} \times \text{وقت}$$

- رفتار کی اکائیوں کی تحویل

کلومیٹر فی گھنٹہ کو میٹر فی سیکنڈ میں تبدیل کرنے کے لئے $\frac{1000}{3600}$ سے ضرب کرتے ہیں۔

میٹر فی سیکنڈ کو کلومیٹر فی گھنٹہ میں تبدیل کرنے کے لئے $\frac{1000}{3600}$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

عجیب اور مفید معلومات

تین ہندسوں پر مشتمل ایسا عدد لیں جس کے ہندسے ترتیب نزولی میں ہو۔ ہندسوں کی ترتیب تبدیل کرکے نئے عدد کو پہلے عدد میں سے تفریق کریں۔ حاصل تفریق کے ہندسوں کی ترتیب تبدیل کر کے اس کو حاصل تفریق میں جمع کریں تو آپ کو ہمیشہ 1089 حاصل ہوگا۔

مثلاً

(i)
$$\begin{array}{r} 321 \\ -\,123 \\ \hline 198 \\ +\,891 \\ \hline 1089 \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{r} 732 \\ -\,237 \\ \hline 495 \\ +\,594 \\ \hline 1089 \end{array}$$

اس طرح کی دلچسپ تلاش آپ بھی ضرور کریں۔

یونٹ 7

مالیاتی حساب

تعارف: اپنی روزمرہ زندگی میں ہم حکومت کی مہیا کردہ مختلف سہولتوں کا استعمال کرتے ہیں جیسے حفاظت کے لئے پولیس، تعلیم کے لئے سرکاری اسکول، علاج معالج کے لئے ہسپتال وغیرہ۔ حکومت یہ تمام سہولتیں ملک کی عوام سے حاصل کردہ رقم سے مہیا کرتی ہے جسے ٹیکس کہا جاتا ہے۔

7.1 ٹیکس

حکومت مصنوعات، آمدنی پر جو فیس عائد کرتی ہے، وہ ٹیکس کہلاتا ہے۔ اگر ٹیکس برائے راست ذاتی یا مشترکہ آمدنی پر ہو تو یہ ڈائریکٹ ٹیکس کہلاتی ہے۔ اگر ٹیکس اشیاء کی قیمتوں یا خدمت پر ہو تو یہ انڈائریکٹ ٹیکس کہلاتا ہے۔

ٹیکس عائد کرنے کا مقصد حکومت کے اخراجات کو پورا کرنا ہوتا ہے۔

7.1.1 پراپرٹی ٹیکس اور جنرل سیلز ٹیکس (GST)

حکومت کئی اقسام کے ٹیکس عائد کرتی ہے جیسے: ویلتھ ٹیکس، آمدنی ٹیکس، پراپرٹی ٹیکس اور جنرل سیلز ٹیکس وغیرہ۔

ہم یہاں صرف ذیل میں دیئے گئے دو ٹیکسوں کے بارے میں پڑھیں گے۔

(i) پراپرٹی ٹیکس (ii) جنرل سیلز ٹیکس (GST)

(i) پراپرٹی ٹیکس

پراپرٹی ٹیکس حکومت کیسی فرد کی ذاتی پراپرٹی پر عائد کرتی ہے۔ اس پراپرٹی کی قیمت کا اندازہ لگایا جاتا ہے اور پھر اس قیمت پر ٹیکس عائد کیا جاتا ہے۔

زیادہ تر صورتوں میں پراپرٹی ٹیکس سالانہ واجب ادا ہوتا ہے۔ عام طور پر یہ 2% ہوتا ہے لیکن مختلف صوبوں میں اس کی شرح مختلف ہوتی ہے۔

ہمارے صوبے میں ٹیکس، سندھ اربن پراپرٹی ٹیکس کا قانون 1958 کے تحت وصول کیا جاتا ہے۔

ذیل کی پراپرٹی ٹیکس سے مستثنیٰ ہیں:

1- حکومتی پراپرٹی

2- رہائشی پراپرٹی جو 120 مربع گز سے زیادہ نہ ہو۔

3- کسی عمارت میں 600 مربع فٹ یا اس سے کم رقبے کا رہائشی فلیٹ
4- کتب خانے، پارک، کھیل کے میدان، عبادت گاہوں، یتیم خانے، قبرستان وغیرہ
5- بیواؤں، یتیم بچوں اور معذور افراد کی پراپرٹی کچھ خاص حد تک
6- سندھ کلچرل ہریٹیج پریزرویشن قانون 1994 کے تحت تحفظ ورثہ کی فہرست میں شامل پراپرٹی

مثال 1: 3% کی شرح کے حساب سے 1,400,000 روپے مالیت کی پراپرٹی پر ٹیکس معلوم کریں۔

حل:

پراپرٹی کی مالیت = 1,400,000 روپے

ٹیکس کی شرح = 3%

پراپرٹی ٹیکس = ؟

پراپرٹی ٹیکس معلوم کرنے کا کلیہ = $\frac{\text{شرح} \times \text{پراپرٹی کی مالیت}}{100}$

= 1,400,000 روپے کا 3% = $\frac{3}{100} \times 1,400,000$

= $\frac{3 \times 1,400,000}{100}$

= $\frac{3 \times 1,400,0\cancel{00}}{1\cancel{00}} = 3 \times 14000 = 42,000$ روپے

لہٰذا مطلوبہ پراپرٹی ٹیکس 42,000 روپے ہے۔

مثال 2: ایک لیڈی ڈاکٹر نے 2% شرح کے حساب سے 9,500 روپے ٹیکس ادا کیا تو اس کی پراپرٹی کی مالیت معلوم کریں۔

حل: ادا کردہ پراپرٹی ٹیکس = 9,500 روپے

ٹیکس کی شرح = 2%

پراپرٹی کی مالیت = ؟

پراپرٹی کی 2% مالیت = 9,500 روپے

پراپرٹی کی 1% مالیت = $\frac{9,500}{2}$ روپے

پراپرٹی کی 100% مالیت = $100 \times \frac{9,500}{2}$ روپے = $\frac{\overset{50}{\cancel{100}} \times 9,500}{\cancel{2}}$ روپے

= $50 \times 9,500$ روپے = 475,000 روپے

لہٰذا لیڈی ڈاکٹر کی پراپرٹی کی مطلوبہ مالیت 475,000 روپے ہے۔

مشق 7.1

A- پراپرٹی پر پراپرٹی ٹیکس نیچے دی گئی شرح کے مطابق معلوم کریں۔

1. پراپرٹی کی مالیت = 286,400 روپے، شرح = 5%
2. پراپرٹی کی مالیت = 165,900 روپے، شرح = 2%
3. پراپرٹی کی مالیت = 814,500 روپے، شرح = 3%
4. پراپرٹی کی مالیت = 234,000 روپے، شرح = 1.4%
5. پراپرٹی کی مالیت = 2,050,000 روپے، شرح = 1.6%

B- ذمندرجہ یل پراپرٹی کی مالیت معلوم کریں جب کہ۔

1. 2% شرح کے حساب سے ادا کردہ ٹیکس 25,500 روپے ہے۔
2. 4% شرح کے حساب سے ادا کردہ ٹیکس 35,900 روپے ہے۔
3. 5% شرح کے حساب سے ادا کردہ ٹیکس 4,800 روپے ہے۔
4. 3.5% شرح کے حساب سے ادا کردہ ٹیکس 8,500 روپے ہے۔
5. 1.5% شرح کے حساب سے ادا کردہ ٹیکس 11,700 روپے ہے۔

C- ٹیکس کی شرح فیصد میں معلوم کریں جب کہ۔

1. ادا کردہ ٹیکس 30,000 روپے، اور پراپرٹی کی مالیت 1,800,000 روپے ہے۔
2. ادا کردہ ٹیکس 33,000 روپے، اور پراپرٹی کی مالیت 3,300,000 روپے ہے۔
3. ادا کردہ ٹیکس 12,000 روپے، اور پراپرٹی کی مالیت 600,000 روپے ہے۔
4. ادا کردہ ٹیکس 8,676 روپے، اور پراپرٹی کی مالیت 433,800 روپے ہے۔

D- ذیل کے جوابات دیں۔

i- ٹیکس کیا ہوتا ہے؟
ii- ٹیکس عائد کرنے کا مقصد کیا ہے؟
iii- پراپرٹی ٹیکس کی وضاحت کریں۔
iv- چار ایسی پراپرٹی بتائیں جو ٹیکس سے مستثنیٰ ہیں۔

(ii) جنرل سیلز ٹیکس (GST) یا سیلز ٹیکس

مخصوص اشیاء اور خدمات پر حکومت کو سیل ٹیکس ادا کیا جاتا ہے۔ عموماً دوکاندار اشیاء پر خریدار سے خریداری کے وقت ٹیکس وصول کرتے ہیں۔

بعض اوقات اشیاء فروخت کرنے والے چیزوں یا خدمات کی مقررہ قیمتوں پر علیحدہ علیحدہ ٹیکس کو نمایاں کرتے ہیں جب کہ بعض اوقات ٹیکس کو اشیاء کی قیمتوں میں شامل کر دیتے ہیں۔ بعض اوقات کچھ اشیاء یا خدمات کچھ شرائط کے ساتھ جنرل سیلز ٹیکس سے مستثنیٰ ہوتی ہیں۔

7.1.2 جنرل سیلز ٹیکس (GST) کا تخمینہ لگانا

2014 سے پاکستان میں جنرل سیلز ٹیکس کی شرح 17% ہے۔

GST کا تخمینہ یوں لگایا جاتا ہے۔

کل GST = شے کی قیمت × GST کی شرح

لہٰذا GST کی شرح = $\frac{\text{کل GST}}{\text{شے کی قیمت}}$

مثال: ایک جوڑی جوتے کی قیمت 2,500 روپے ہے۔ اگر جوتا فروش 17%، GST وصول کرتا ہے تو عائد کردہ GST معلوم کریں۔

حل: شے کی قیمت = 2,500 روپے

GST کی شرح = 17%

GST = شے کی قیمت × 0.17

= 2,500 × 0.17 = 425 روپے

لہٰذا 425 روپے وصول کئے گئے ہیں۔

(i) کل قیمت معلوم کرنا

کل قیمت بشمول ٹیکس معلوم کرنے کے لئے GST کو شے کی قیمت میں جمع کیا جاتا ہے۔

لہٰذا شے کی کل قیمت = GST + شے کی قیمت

اوپر دی گئی مثال میں شے کی قیمت = 2,500 روپے

GST = 425 روپے

اس لئے جوتے کے جوڑے کی کل قیمت = 2,500 + 425 روپے = 2,925 روپے

لہٰذا جوتے کے جوڑے کی کل قیمت 2,925 روپے ہے۔

GST = کل قیمت - شے کی قیمت

اور شے کی قیمت = کل قیمت - GST

7.1.3 شے کی قیمت معلوم کرنا جب کل قیمت اور GST کی شرح معلوم ہو

ہم جانتے ہیں کہ شے پر GST کی شرح 17% ہے اور یہ کل قیمت میں شامل ہوتی ہے۔

فرض کریں شے کی قیمت = y

چونکہ GST کی شرح = $0.17 = 17\%$

لہٰذا GST = $0.17y = 0.17 \times y$

جیساکہ ہم جانتے ہیں کہ:

شے کی قیمت = کل قیمت − GST

اس لئے y = کل قیمت $- 0.17 \times y$

یا $(1 + 0.17)y = y + 0.17y$ = کل قیمت

یا کل قیمت = $1.17y$

یا $\frac{\text{کل قیمت}}{1.17} = y$

لہٰذا **شے کی قیمت = $\frac{\text{کل قیمت}}{1.17}$** یہاں GST کی شرح 17% ہے۔

مثال 1: ایک واشنگ مشین بشمول GST، 15,912 روپے میں فروخت کی گئی ہے۔ اگر GST کی شرح 17% ہو تو علاوہ GST واشنگ مشین کی قیمت معلوم کریں۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ شے کی قیمت = $\frac{\text{کل قیمت}}{1.17}$

اس مسئلے میں: واشنگ مشین کی قیمت = شے کی قیمت = ؟

کل قیمت = 15,912 روپے

GST کی شرح = $0.17 = 17\%$

لہٰذا واشنگ مشین کی قیمت = $\frac{15,912}{1.17}$ روپے = 13,600 روپے

پس واشنگ مشین کی قیمت (علاوہ ٹیکس) 13,600 روپے ہے۔

مثال 2: ایک کمپنی نے 2,180 روپے خدمت پر 380 روپے بطور GST روپے ادا کئے ہیں تو GST کی شرح معلوم کریں۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ GST کی شرح = $\frac{\text{GST}}{\text{شے کی قیمت}}$

یہاں ہمیں GST کی شرح معلوم کرنی ہے۔

ادا کردہ GST = 380 روپے

شے کی قیمت = خدمت کا معاوضہ = 2,180 روپے

لہٰذا GST کی شرح = $\frac{380 \text{ روپے}}{2{,}180 \text{ روپے}} = 0.17 = \frac{17}{100} = 17\%$

پس کمپنی نے 17% GST ادا کیا۔

مثال 3: ایک گیس کمپنی صارف سے 3,212 روپے بطور گیس چارجز وصول کرتی ہے۔ صارف کی ادا کردہ 17% شرح کے حساب سے GST کی رقم معلوم کریں۔

حل: ہم جانتے ہیں GST = شے کی قیمت × 17%

GST = ؟

شے کی قیمت = گیس چارجز = 3,212 روپے

GST کی شرح = 17%

لہٰذا GST = 3,212 روپے × 17% = 3,212 روپے × 0.17

= 546.04 روپے = 546 روپے

لہٰذا صارف نے 546 روپے GST ادا کیئے۔

مثال 4: جناب عدنان نے ایک قمیض کی خریداری پر 17% شرح کے حساب سے 595 روپے GST ادا کیئے۔ قمیض کی قیمت علاوہ GST معلوم کریں۔

حل: ہم جانتے ہیں GST = شے کی قیمت × 17%

یہاں قمیض کی قیمت = شے کی قیمت = ؟

GST = 595 روپے

GST کی شرح = 17% = 0.17

595 = قمیض کی قیمت × 0.17

قمیض کی قیمت = $\frac{595}{0.17}$ روپے = 3,500 روپے

پس قمیض کی قیمت 3,500 روپے ہے۔

مثال 5: ایک شخص نے کچھ فرنیچر بشمول GST 77,950 روپے میں خریدا۔ فرنیچر کی اصل قیمت اور 17% کے حساب سے GST معلوم کریں۔

حل: یہاں شے کی قیمت = فرنیچر کی قیمت = ؟

فرنیچر کی کل قیمت = 77,950 روپے

GST کی شرح = 17% = 0.17

اب فرنیچر کی قیمت = $\frac{\text{کل قیمت}}{1.17} = \frac{77.950}{1.17}$

= 66,623.93 روپے = 66,624 روپے

GST کی رقم = 66624 × 0.17

= 11326.08 روپے = 11326 روپے

پس فرنیچر کی کل قیمت 66,624 روپے اور GST کی رقم 11,326 روپے ہے۔

مشق 7.2

1- پارکار پین کی قیمت 875 روپے ہے۔ 17% شرح کے حساب سے پین پر وصول کردہ GST معلوم کریں۔

2- موبائل فون کی قیمت 4,850 روپے ہے۔ 17% شرح کے حساب سے GST معلوم کریں۔

3- کاسمیٹک کی مصنوعات کی کل قیمت 14,976 روپے ہے۔ اگر کاسمیٹک مصنوعات کی اصل قیمت 12,800 روپے ہے تو GST کی رقم معلوم کریں۔

4- مائیکرو ویو اوون کی قیمت 15,200 روپے ہے۔ اس پر 17% شرح کے حساب سے GST وصول کی گئی ہو تو GST کی رقم اور مائیکرو ویو اوون کی کل قیمت معلوم کریں۔

5- عبداللہ نے کپڑے کے تین سوٹ پیس 7,800 روپے میں خریدے۔ کل قیمت اور 17% کی شرح کے حساب سے GST کی رقم معلوم کریں۔

6- ایک ریفریجٹر بشمول 17%، GST کے حساب سے 35,375 روپے میں فروخت کیا گیا۔ ریفریجٹر کی اصل قیمت معلوم کریں۔

7- ایک شخص نے ڈیش واشر بشمول 17%، GST کے حساب سے کل 61,000 روپے میں خریدا۔ ڈیش واشر کی قیمت علاوہ GST معلوم کریں اور GST کی قیمت بھی معلوم کریں۔

8- مسز عالیہ نے آرائشی اشیاء کی خریداری پر 17% شرح کے حساب سے 2,720 روپے GST ادا کیا۔ آرائشی اشیاء کی قیمت علاوہ GST معلوم کریں۔

9- بجلی ایک کی کمپنی 9,100 روپے کی بجلی کے استعمال پر 1,547 روپے GST وصول کرتی ہے تو GST کی شرح معلوم کریں۔

10- ایک شرٹ کی قیمت علاوہ ٹیکس 2,560 روپے ہے اور اس پر GST کی رقم 436 روپے ہے تو GST کی شرح معلوم کریں۔

7.2 نفع اور مارک اپ

7.2.1 نفع اور مارک اپ کی وضاحت کرنا

کسی کاروبار میں کل قیمت فروخت میں سے قیمت خرید اور دوسرے تمام اخراجات کو نفی کرنے کے بعد جو رقم حاصل ہوتی ہے، وہ نفع کہلاتی ہے۔

نفع کو خالص نفع یا خالص کمائی بھی کہتے ہیں۔ لہٰذا نفع قیمت فروخت اور قیمت خرید کا فرق ہوتا ہے۔

یعنی نفع = قیمت فروخت - قیمت خرید

مارک اپ: روزمرہ زندگی میں ہم اکثر اپنے دوستوں اور رشتے داروں سے اشیاء و ساز وسامان خریدنے کے لئے روپے پیسے ادھار لیتے ہیں اور کچھ وقت کے بعد واپس کردیتے ہیں۔ کچھ بنک اور ریٹیل آرگنیزش ایسی ہی خدمات اضافی چارجز پر مہیا کرتی ہیں جیسے مارک اپ کہا جاتا ہے۔

7.2.2 نفع اور مارک اپ کی شرح سالانہ معلوم کرنا

شرح نفع: شرح نفع، منافع کی نسبت ہوتی ہے جو مجموعی نفع اور اصل فروخت کے تعلق کو ظاہر کرتی ہے۔ یہ کاروبار کی عملی کارکردگی کے جائزے کا عام پیمانہ ہے۔

دوسرے الفاظ میں یہ فیصد آمدنی ہے جو نفع ہے۔

$$\text{شرح نفع} = \frac{\text{مجموعی نفع}}{\text{اصل فروخت}} \times 100$$

مجموعی نفع = شے کی قیمت - اصل فروخت

لہٰذا قیمت فروخت = قیمت خرید + قیمت خرید × شرح نفع

$$\text{قیمت فروخت} = \text{قیمت خرید}(1 + \text{شرح نفع})$$

اور

$$\text{قیمت خرید} = \frac{\text{قیمت فروخت}}{1 + \text{شرح نفع}}$$

مثال: نفع کی شرح معلوم کریں جب کہ مجموعی نفع 400 روپے ہے اور اصل فروخت 1,600 روپے ہے۔

حل:

$$\text{نفع کی شرح} = \frac{\text{مجموعی نفع}}{\text{اصل فروخت}} \times 100$$

$$= \frac{400}{1,600} \times 100$$

$$= \frac{\cancel{400} \times \cancel{100}^{25}}{\cancel{1600}_{\cancel{4}_1}} = 25$$

لہٰذا شرح نفع = 25%

مارک اپ سالانہ: دراصل ہم چیزوں پر ادا کردہ مارک اپ کا تخمینہ فیصد میں لگاتے ہیں۔ یہ شرح مارک اپ کہلاتی ہے اور جس رقم پر یہ ادا کی جاتی ہے اُسے اصل رقم کہا جاتا ہے۔

مثال: 2 سال کے لئے 12% شرح کے حساب سے اصل رقم 50,000 روپے پر مارک اپ معلوم کریں۔

حل:

$$\text{مارک اپ} = \frac{P \times R \times T}{100} = \frac{50,000 \times 12 \times 2}{100} = \frac{50,0\cancel{00} \times 12 \times 2}{\cancel{100}_1} = 112,000 \text{ روپے}$$

سرگرمی 1: کلیہ کی مدد سے چھوڑی ہوئی مقداریں معلوم کریں۔

سیریل نمبر	خالص نفع	قیمت فروخت (S.P)	قیمت خرید (C.P)	کلیہ
i		1,750 روپے	1,600 روپے	نفع = قیمت خرید − قیمت فروخت
ii	600 روپے		2,000 روپے	قیمت فروخت = نفع + قیمت خرید
iii	950 روپے	10,450 روپے		قیمت خرید = نفع − قیمت فروخت

سرگرمی 2: کلیہ کی مدد سے چھوڑی ہوئی مقداریں معلوم کریں۔

	قیمت فروخت (S.P)	قیمت خرید (C.P)	خالص نفع	شرح نفع	کلیہ
i	1,000 روپے	800 روپے	200 روپے		$\text{شرح نفع} = \frac{\text{نفع}}{\text{قیمت فروخت}} \times 100$
ii		1,000 روپے	100 روپے	10%	قیمت فروخت = قیمت خرید (1+شرح نفع)
iii	2,000 روپے	1,600 روپے	400 روپے		$\text{شرح نفع} = \frac{\text{نفع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100$
iv	1,200 روپے	1,000 روپے		20%	
v	2,750 روپے	2,500 روپے	250 روپے		

سرگرمی 3: کلیہ کی مدد سے چھوڑی ہوئی مقداریں معلوم کریں۔

سیریل نمبر	مارک اپ	اصل رقم	مدت	شرح مارک اپ	کلیہ
i		500 روپے	2 سال	12%	مارک اپ = $\frac{P \times R \times T}{100}$
ii	205 روپے		1 سال	8%	اصل رقم = $\frac{MP \times 100}{R \times T}$
iii	528 روپے	1650 روپے	10 سال		شرح مارک اپ = $\frac{MP \times 100}{P \times T}$
iv	350 روپے	3,500 روپے		2.5%	مدت = $\frac{MP \times 100}{P \times R}$
v		100,000 روپے	3 سال	1.25%	مارک = $\frac{P \times R \times T}{100}$
vi	1,050 روپے		5 سال	4.5%	اصل رقم = $\frac{MP \times 100}{R \times T}$

7.2.3 (i) نفع پر مشتمل روزمرہ زندگی کے مسائل ذیل کی مثالوں کی روشنی میں حل کرنا

مثال 1: ایک شخص نے ایک مخصوص اشیاء تھوک فروش سے 400 روپے میں خریدی اور پھر اُس نے اسے 700 روپے میں بیچ دی۔ اسے کتنا نفع ہوا اور شرح نفع معلوم کریں۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ نفع = قیمت خرید − قیمت فروخت

نفع = 400 روپے − 700 روپے = 300 روپے

شرح نفع = $\frac{\text{نفع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100$

شرح نفع = $\frac{300}{400} \times 100 = 75\%$

لہٰذا شرح نفع 75% اور اُس کا نفع 300 روپے ہے۔

مثال 2: اگر الیکٹرونک کمپیوٹر گیم کی قیمت خرید 1,250 روپے ہے۔ اگر دکان دار اس پر 45% نفع وصول کرتا ہے تو کمپیوٹر گیم کی قیمت فروخت معلوم کریں۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ

قیمت فروخت = قیمت خرید (1 + شرح نفع)

یہاں قیمت فروخت = ؟

قیمت خرید = 1,250 روپے

شرح نفع = 0.45 = 45%

قیمت فروخت = قیمت خرید (1 + شرح نفع)

قیمت فروخت = (0.45 + 1) 1,250 = (1.45 × 1,250) روپے = 1,812.50 روپے

لہٰذا کمپیوٹر گیم کی قیمت فروخت 1,812.50 روپے ہے۔

مثال 3: ایک جوتوں کی دکان پر قیمت خرید پر 40% نفع وصول کیا جاتا ہے تو ایک جوڑے جوتے کی قیمت خرید معلوم کریں جب کہ قیمت فروخت 2,630 ہو۔

حل: ہم جانتے ہیں:

قیمت فروخت = قیمت خرید (1 + شرح نفع)

یہاں قیمت خرید = CP = ؟

قیمت فروخت = 2,630 روپے

شرح نفع = 0.4 = 40%

قیمت فروخت = قیمت خرید (1 + شرح نفع)

2,630 = قیمت خرید (0.4 + 1)

قیمت خرید = $\frac{2,630}{1.4}$ روپے = 1,878.25 روپے

لہٰذا ایک جوڑے جوتے کی قیمت خرید 1,879 روپے ہے۔

یاد رکھیں: شرح نفع = $\frac{\text{نفع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100$

نفع کو اشیاء کی قیمت فروخت کا تعین کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ لہٰذا چھوٹے کاروبار میں اشیاء کی قیمت خرید اور نفع کا تجزیہ کرنے کے دو مختلف طریقے ہیں۔

مثال 4: ایک ٹائیل کمپنی کی پچھلے ماہ کی فروخت 1,500,000 روپے تھی۔ کچھ وجوہات کی بنا پر 45,000 روپے کی فروخت شدہ اشیاء واپس آئیں۔ اگر فروخت شدہ شے کی لاگت 650,000 روپے ہے اور انتظامی اخراجات 470,000 روپے ہیں تو کمپنی کا خالص نفع فیصد میں معلوم کریں۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ

شرح نفع = $\frac{\text{خالص نفع}}{\text{اصل فروخت}} \times 100$

یہاں اصل فروخت = (فروخت) 1,500,000 روپے − (فروخت واپس) 45,000 روپے
= 1,455,000 روپے

نفع = (اصل فروخت) 1,455,000 روپے − (اشیاء کی لاگت) 650,000 روپے − (انتظامی اخراجات) 470,000 روپے
= 335,000 روپے

کلیہ: $\text{شرح نفع} = \frac{\text{نفع}}{\text{فروخت}} \times 100$

لہٰذا $\text{شرح نفع} = \frac{335,000}{1,455,000} \times 100 = \frac{\cancel{335,000}^{67} \times 100}{\cancel{1,455,000}_{291}} = \frac{6,700}{291} = 23\%$

ٹائیل کمپنی کا نفع فیصد میں 23% ہے۔

مشق 7.3

1- ایک دکاندار نے ایک ہیلمٹ تھوک فروش سے 1,860 روپے میں خریدا اور اسے گاہک کو 2,650 روپے میں فروخت کیا۔ اس کا نفع اور شرح نفع معلوم کریں۔

2- ایک دکاندار نے ایک مائیکرو ویو آون 6,700 روپے میں فروخت کیا۔ اگر دکاندار نے مائیکرو ویو آون 6,250 روپے میں خریدا تو نفع اور شرح نفع معلوم کریں۔

3- ایک دکاندار کمپیوٹر کی متعلقہ اشیاء پر شرح مارک اپ 65% وصول کرتا ہے۔ اگر کمپیوٹر کی متعلقہ اشیاء کی قیمت خرید 1,520 روپے ہے تو قیمت فروخت معلوم کریں۔

4- ناول کی قیمت خرید 1100 روپے ہے تو 66% مارک اپ کے حساب سے قیمت فروخت معلوم کریں۔

5- ایک موبائل کمپنی 55% مارک اپ وصول کرتی ہے۔ اگر موبائل کی قیمت 2,260 روپے ہے تو موبائل کی قیمت فروخت معلوم کریں۔

6- ایک موبائل کمپنی 45% مارک اپ وصول کرتی ہے۔ اگر موبائل کی قیمت فروخت 4,785 روپے ہے تو موبائل کی قیمت خرید معلوم کریں۔

7- 50% شرح مارک اپ کے حساب سے ایک کلکولیٹر کی قیمت فروخت 1,230 روپے ہے تو کلکولیٹر کی قیمت خرید معلوم کریں۔

8- ایک کتاب فروش ہر شے پر 60% مارک اپ وصول کرتا ہے۔ اگر وہ ایک شے 144 کی فروخت کرتا ہے تو چیز کی قیمت خرید معلوم کریں۔

9- ایک گھریلو چھوٹا کاروبار ایک ماہ میں بچوں کے کپڑوں کی فروخت پر 25,000 روپے کماتا ہے۔ اوپر کے اخراجات ملا کر چیزوں پر لاگت 10,550 روپے ہے تو خالص فیصد نفع معلوم کریں۔

10-ایک کاروبار کی ایک ماہ کی فروخت 2500000 روپے ہے اور 15,000 روپے کی اشیاء واپس ہوئیں۔ فروخت شدہ اشیاء کی لاگت 505,000 روپے ہے اور اوپر کے اخراجات 580,000 روپے۔ تو فیصد شرح نفع معلوم کریں۔

11-دوائیوں کی کمپنی کی پچھلے ماہ کی فروخت 1,850,000 روپے تھی۔ 550,000 روپے کی فروخت شدہ دوائیاں واپس آئیں۔ جو دوائیاں فروخت ہوئیں ان پر لاگت 850,000 روپے اور انتظامی اخراجات 550,000 روپے ہیں۔ کمپنی کا خالص فیصد نفع معلوم کریں۔

7.2.3 (ii) مارک اپ پر مشتمل روزمرہ کے مسائل حل کرنا

فرض کریں 'P' اصل رقم، 'T' مدت اور 'R' مارک اپ کی شرح ہے تو مارک اپ کی رقم ہوگی:

$$\text{مارک اپ} = \frac{R \times P \times T}{100}$$

اس ہی طرح ہم معلوم کر سکتے ہیں:

$$\text{اصل رقم} = \frac{100 \times \text{مارک اپ}}{T \times R} \quad ، \quad \text{شرح مارک اپ} = \frac{100 \times \text{مارک اپ}}{P \times T}$$

اور

$$\text{مدت} = \frac{100 \times \text{مارک اپ}}{P \times R}$$

ذیل کی مثالوں پر غور کریں:

مثال 1: ایک شخص نے 12% شرح مارک اپ پر ایک سال کے لئے بنک سے 280,000 روپے قرض لیے۔ اگر قرض کی مدت 2 سال ہے تو مارک اپ کی رقم معلوم کریں۔

حل: اصل رقم = 280,000 روپے، شرح مارک اپ = 12% سالانہ

مدت (T) = 2 سال ، مارک اپ کی قیمت = ؟

کلیہ: $\text{مارک اپ کی رقم} = \frac{R \times P \times T}{100} = \frac{12 \times 280,000 \times 3}{1,000} = 67,200$ روپے

لہٰذا مارک اپ کی رقم 67,200 روپے ہے۔

مثال 2: اسلم نے 10% سالانہ پر 292 دنوں کے لئے کسی شخص سے 450,000 روپے بطور قرض لئے تو مارک اپ کی رقم معلوم کریں۔

حل: اصل رقم (P) = 450,000 روپے، شرح مارک اپ (R) = 10% سالانہ، مارک اپ = ؟

مدت = 292 دن = $\frac{292}{365}$ سال = $\frac{4}{5}$ سال

کلیہ کی مدد سے: مارک اپ = $\frac{R \times P \times T}{100}$

$$= \frac{10 \times 450{,}000 \times \frac{4}{5}}{100} = \frac{\overset{2}{\cancel{10}} \times 450{,}0\cancel{00} \times 4}{\underset{1}{\cancel{100}} \times \underset{1}{\cancel{5}}} = 36{,}000$$ روپے

مارک اپ کی رقم 36,000 روپے ہے۔

مثال 3: بنک کے قرض 87600 روپے پر 12.5% سالانہ کے حساب سے 20 ماہ کے لئے قرضے پر مارک اپ معلوم کریں۔

حل: اصل رقم (P) = 87,600 روپے، شرح مارک اپ (R) = 12.5%

مدت (T) = 20 ماہ = $\frac{20}{12}$ سال = $\frac{5}{3}$ سال ، مارک اپ = ؟

کلیہ کی مدد سے: مارک اپ = $\frac{R \times P \times T}{100}$

مارک اپ = $\frac{12.5 \times 87{,}600 \times \frac{5}{3}}{100} = \frac{12.5 \times \overset{292}{\cancel{87{,}600}} \times 5}{\underset{1}{\cancel{100}} \times \underset{1}{\cancel{3}}} = 18{,}250$ روپے

مارک اپ کی مطلوبہ رقم = 18,250 روپے

مشق 7.4

1- قاسم نے 12% سالانہ شرح مارک اپ پر قسطوں پر بنک سے 450,800 روپے قرضے پر ایک کار خریدی۔ اگر قرضے کی مدت 3 سال ہے تو کار کی قیمت فروخت معلوم کریں۔

2- نجمہ نے 175,500 روپے مالیت کے زیورات 10% سالانہ شرح مارک اپ پر قسطوں پر خریدے۔ اگر قرضے کی مدت 9 ماہ ہو تو ان زیورات کی قیمت فروخت معلوم کریں۔

3- شازیہ نے اپنا موبائل فون 15% مارک اپ کی شرح پر فروخت کیا اگر مدت 219 دن ہو تو مارک اپ 16900 روپے میں بیچا تو مارک اپ معلوم کریں۔

4- اگر ایک ٹی وی پر 15% کے حساب سے $1\frac{1}{2}$ سال کی قیمت فروخت 8,500 روپے ہے تو رنگین ٹی وی کی قیمت خرید معلوم کریں۔

5- کلیہ کی مدد سے چھوڑی ہوئی مقداریں معلوم کریں:

سیریل نمبر	مارک اپ	اصل رقم	مدت	شرح مارک اپ
I	____ روپے	800,000 روپے	1 سال	12%
II	10,000 روپے	500,000 روپے	____	10%
III	6,600 روپے	____	2 سال	11%
IV	____ روپے	200,000 روپے	$1\frac{1}{2}$ سال	8%
V	800 روپے	4,000 روپے	$2\frac{1}{2}$ سال	
VI	45,000 روپے	____	73 دن	10%

7.3 زکوٰۃ اور عشر

زکوٰۃ اور عشر آرڈیننس 1980

پاکستان میں زکوٰۃ کونسل، زکوٰۃ اور عشر جمع کرنے اور تقسیم کرنے کی ذمہ دار ہے۔ زکوٰۃ اور عشر جمع کرنے اور تقسیم کا یہ نظام 1980 میں نافذ کیا گیا تھا۔

7.3.1 زکوٰۃ اور عشر کی وضاحت کرنا

(i) زکوٰۃ:

زکوٰۃ اسلام کے پانچ ستونوں میں سے ایک ستون ہے۔ زکوٰۃ کا ذکر قرآن کریم میں نماز کے ساتھ ساتھ آیا ہے۔ زکوٰۃ ہر صاحبِ نصاب مسلمان پر واجب ہے۔ جس کے پاس 87.48 گرام یا 7.5 تولہ سونا یا 612.36 گرام یا 52.50 تولہ چاندی ہو، قمری سال کے مکمل ہونے کے بعد تمام اخراجات اور ضروریات نکال کر جو نصاب سے زیادہ ہو تو اُس پر 2.5% زکوٰۃ قمری سال کے مکمل ہونے کے بعد ادا کی جاتی ہے۔

زکوٰۃ = سالانہ بچت × 2.5%

(ii) عشر:

عشر لازمی بنیادوں پر 5% (یا 10%) زرعی پیداوار پر زمین دار، الاٹی، پٹے پر لینے والے یا مالک کو ادا کرنی ہوتی ہے۔

کسان انفرادی طور پر اس سے مستثنیٰ ہوتا ہے اگر وہ مستحق .یا اس کی پیداوار 948 کلو گرام گندم یا اس کے برابر قیمت سے کم ہو۔

اگر کسان یا باغبان قدرتی ذریعے مثلاً بارش یا دریاء یا ندی کا پانی استعمال کرتا ہے تو اس پر دسواں حصہ یا 10% لازم ہوتا ہے اور اگر کسان یا باغبان مصنوعی ذریعے جیسے کنواں، ٹیوب ویل، نہر وغیرہ کا پانی استعمال کرتا ہے تو ایک پانچواں یا 5% لازم ہوتا ہے۔

(iii) زکوٰۃ اور عشر کی تقسیم

زکوٰۃ دی جاتی ہے:

- غریب اور ضرورت مندوں کو
- غلاموں، مقروضوں اور مسافروں کو
- مالی وسائل کا نظم ونسق چلانے والے افراد

7.3.2 زکوٰۃ اور عشر پر مشتمل روزمرہ زندگی کے مسائل حل کرنا

مثال 1: ایک کاروباری شخص نے ایک سال میں 80,000 روپے کی بچت کی۔ بنک میں اُس کے پاس 600,000 روپے ہیں تو اس پر واجب ادا زکوٰۃ معلو کریں۔

حل:
(i) نقدی کی صورت میں بچت = 80,000 روپے
(ii) نقدی بنک میں = 600,000 روپے
کاروباری شخص کی کل بچت = 600,000 + 80,000
= 680,000 روپے
زکوٰۃ کی واجب ادا رقم = 2.5% × 680,000

$$= \frac{2.5}{100} \times 680,000 = 17,000$$ روپے

لہٰذا کاروباری شخص پر 17,000 روپے زکوٰۃ واجب ادا ہے۔

مثال 2: ایک گھریلو عورت کے پاس 500,000 روپے کے سونے کے زیورات ہیں۔ اس نے روزمرہ اخراجات میں سے 25,000 روپے بچت بھی کی تو اس پر واجب ادا زکوٰۃ معلو کریں۔

حل:
کل رقم = 500,000 روپے + 25,000 روپے = 525,000 روپے
زکوٰۃ = 2.5% × 525,000

$$= \frac{2.5}{100} \times 525,000 = 13,125$$

لہٰذا اُسے 13,125 روپے زکوٰۃ ادا کرنی ہے۔

مثال 3: فرح نے 9,000 روپے بطور زکوٰۃ ادا کیے تو اُس کی بچت معلوم کریں جس پر اُس نے زکوٰۃ ادا کی۔

حل: ہم جانتے ہیں: زکوٰۃ کی رقم = سالانہ بچت × 2.5%

900 = سالانہ بچت × 0.025

سالانہ بچت = $\frac{9,000}{0.025}$ = 360,000 روپے

لہٰذا اس کی سالانہ بچت 360,000 روپے ہے۔

مثال 4: ایک زمیندار 3,000 کلو گرام گندم اور 25,000 روپے مالیت کی سبزیاں پیدا کرتا ہے۔ 5% شرح کے حساب سے عشر کی رقم معلوم کریں اگر گندم کے نرخ 30 روپے فی کلو گرام ہیں۔

حل: عشر = پیداوار کی مالیت × 5%

3,000 کلو گرام گندم کی قیمت 30 روپے فی کلو گرام کے حساب سے

= 3,000 × 30 = 90,000 روپے

گندم اور سبزیوں کی کل قیمت = (25,000 + 90,000) روپے

= 115,000 روپے

عشر کی رقم = 5% × 115,000

= $\frac{5}{100}$ × 115,000 = 0.05 × 115,000

= 5,750 روپے

لہٰذا زمیندار کو 5,750 روپے بطور عشر ادا کرنے ہیں۔

مشق 7.4

1- ایک شخص کے پاس پورے سال 500,000 روپے جمع رہے۔ کیا وہ صاحبِ نصاب ہے؟ اگر ہاں تو زکوٰۃ کی رقم معلوم کریں جو اُسے ادا کرنی ہے۔

2- ایک تنخواہ دار شخص کے پاس 200,000 روپے اور 3 تولہ خالص سونا ہے تو اس شخص پر واجب ادا زکوٰۃ کی رقم معلوم کریں۔ سونے کی رقم 47,400 روپے فی تولہ ہے۔

3- ایک لیڈی ڈاکٹر کے پاس 500,000 روپے کے سونے کے زیورات ہیں اور اُس نے پورے سال میں 150,000 روپے بچت کی تو اس پر واجب ادا زکوٰۃ کی رقم معلوم کریں۔

4- ایک کاروباری شخص نے 20,500 روپے بطور زکوٰۃ ادا کئے تو اس کی پورے سال کی بچت معلوم کریں۔
5- ایک کسان نے 10,000 روپے بطور عشر ادا کئے تو فصل کی مالیت معلوم کریں اگر عشر کی شرح 5% ہے۔
6- ایک کسان نے 15,000 کلو گرام گنا پیدا کیا۔ 5% شرح کے حساب سے عشر کی رقم معلوم کریں۔ گنے کے نرخ 5.25 روپے فی کلو گرام ہیں۔
7- جمن اپنے باغ سے 5,000,000 روپے مالیت کے اورنج برآمد کرتا ہے۔ 5% شرح کے حساب سے عشر کی رقم معلوم کریں۔
8- کمال اپنی زمین کے ایک حصے سے 500 کلو گرام گندم اور دوسرے حصے سے 1,200 کلو گرام چاول پیدا کرتا ہے۔ 5% شرح کے حساب سے عشر کی رقم معلوم کریں۔ گندم کے نرخ 30 روپے فی کلو گرام اور چاول کے نرخ 65 روپے فی کلو گرام ہیں۔

جائزہ مشق 7

1- موبائل فون کی قیمت 8,500 روپے ہے۔ اگر بیچنے والا GST،17% وصول کرتا ہے تو اُس نے کتنا سیل ٹیکس وصول کیا؟
2- ایک درآمدی LCD-TV بشمول GST، 55,800 روپے میں فروخت کیا جاتا ہے۔ LCD-TV کی قیمت علاوہ ٹیکس معلوم کریں۔ GST کی شرح 17% ہے۔
3- ایک بجلی کی کمپنی صارف سے 16,750 روپے بطور الیکٹرک چارجز وصول کرتی ہے۔ 17% شرح کے حساب سے GST کی رقم معلوم کریں۔
4- ایک شخص نے روم سیٹ کی خریداری پر 17% شرح کے حساب سے 16,989 روپے بطور GST ادا کئے تو روم سیٹ کی قیمت علاوہ GST معلوم کریں۔
5- ایک کاروباری شخص 12.5% سالانہ مارک اپ کے حساب سے بنک سے 1,700,000 روپے قرضہ لیتا ہے تو $1\frac{1}{2}$ سال کی مارک اپ کی رقم معلوم کریں۔
6- ایک لیڈی ڈاکٹر نے بنک کو 6 ماہ کا 12% شرح کے حساب سے 2,850 روپے مارک اپ ادا کیا تو اصل رقم معلوم کریں۔
7- ایک معمر شہری 500,000 روپے بنک میں جمع کرواتا ہے تو 10% شرح کے حساب سے $2\frac{1}{2}$ سال کے مارک اپ کی رقم معلوم کریں۔

8- ایک کار فروش کار کی قیمت پر 35% مارک اپ وصول کرتا ہے تو کار کی قیمت معلوم کریں اگر وہ کار 1,051,000 روپے میں فروخت کرتا ہے۔

9- ایک کاروباری شخص پورے سال میں 95,000 روپے کی بچت کرتا ہے اور اس کے پاس 500,000 روپے کا ذخیرہ بھی ہے تو اس پر واجب ادا زکوٰۃ معلوم کریں؟

10- ایک لیڈی ٹیچر کے پاس 400,000 روپے مالیت کے سونے کے زیورات ہیں اور 45,000 روپے نقد ہیں تو اس پر کتنی زکوٰۃ واجب ادا ہے؟

11- ایک شخص نے 12,500 روپے بطور زکوٰۃ ادا کی تو وہ رقم معلوم کریں جس پر اس نے زکوٰۃ ادا کی۔

12- ایک کسان نے 5,000 کلوگرام گندم اور 48,000 روپے مالیت کی سبزیاں پیدا کیں۔ 5% شرح کے حساب سے اُس پر واجب ادا عشر کی رقم معلوم کریں۔ اگر گندم کے نرخ 35 روپے فی کلوگرام ہو۔

13- ایک کسان 2,000 روپے بطور عشر ادا کرتا ہے۔ فصل کی مالیت معلوم کریں۔ عشر کی شرح 5% ہے۔

خلاصہ

- ٹیکس وہ رقم ہے جو حکومت مصنوعات اور آمدنی پر وصول کرتی ہے۔
- ٹیکس لگانے کا مقصد حکومت کے اخراجات پورے کرنا ہے۔
- کسی شخص کی ذاتی پراپرٹی پر حکومت جو ٹیکس وصول کرتی ہے 'پراپرٹی ٹیکس' کہلاتا ہے۔
- جنرل پراپرٹی ٹیکس = ٹیکس کے قابل آمدنی کا 2%
- GST = شے کی قیمت × GST کی شرح
- پاکستان میں GST کی شرح 17% ہے۔
- شے کی اصل قیمت = GST + شے کی قیمت
- شے کی قیمت = $\frac{\text{اصل قیمت}}{1.17}$
- نفع = قیمت خرید − قیمت فروخت
- شرح نفع = $\frac{\text{نفع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100$

- شرح مارک اپ = $\frac{P \times R \times T}{100}$ ، یہاں P کا مطلب اصل رقم، T کا مطلب مدت اور R کا مطلب مارک اپ کی شرح سالانہ ہے۔
- قیمت فروخت = قیمت خرید (شرح مارک اپ + 1)
- شرح نفع = $\frac{\text{خالص نفع}}{\text{اصل فروخت}} \times 100$
- زکوٰۃ ہر صاحبِ نصاب مسلمان پر واجب ہے۔ یہ اُس مال پر واجب ہوتی ہے جو پورے سال کسی شخص کے پاس رہے۔
- نصاب = سونا 87.47 گرام یا 7.50 تولہ
  یا چاندی 612.36 گرام یا 52.50 تولہ
- شرح زکوٰۃ 2.5% فیصد ہے۔
- عشر کسان یا زمین دار ادا کرتا ہے۔
- نصاب عشر 948 کلو گرام گندم یا 5%
- عشر کی شرح زمینی پیداوار پر 5% یا 10% ہے۔

• • •

یونٹ

8

الجبری اظہاریے

تعارف: الجبرا کو حقیقی صورت حال کا ریاضیاتی ماڈل تخلیق کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے اور ان مسائل سے نبٹنے کے لئے جنہیں ہم صرف حسابی طریقے سے حل نہیں کر سکتے ہیں۔ الجبرا میں جملے بنانے کے لئے اعداد یا الفاظ کے بجائے علامات کا استعمال کیا جاتا ہے۔

8.1 الجبری اظہاریے

ہم پچھلی جماعت میں پڑھ چکے ہیں کہ الجبری اظہاریہ رقموں پر مشتمل ہوتا ہے جو جمع (+) اور تفریق (—) کے عوامل سے جوڑے ہوتے ہیں۔

مثال کے طور پر: $4x + 5y + 3,\ 6a + 5b - 4\ ,\ 5m \div 6 \times 2\ p \times q$

8.1.1 مستقل کی غیر متغیر قیمت رکھنے والی علامت کے طور پر وضاحت کرنا

غیر متغیر قیمت رکھنے والی علامت مستقل کہلاتی ہے۔

مثال کے طور پر: 3، 8، 12،... وغیرہ مستقل ہیں۔

8.1.2 متغیر کو دہرانا بطور ایسی مقدار جس کی کئی عددی قیمت ہوسکتیں ہیں

(a) **متغیر:** انہیں علامات یا حروف سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر کسی طالب علم کے جیب میں روپوں کی تعداد x ہے۔ اس کی قیمت کو 5، 10، 35، 50 روپوں میں لی جاسکتی ہے۔

(b) **عددی سر:** عدد جو کسی متغیر سے ضرب دیا گیا ہو عددی سر کہلاتا ہے۔

$3x$ میں 3 عددی سر ہے۔ 5yz میں 5 عددی سر ہے۔

8.1.3 نامعلوم عدد کو حروف تہجی سے ظاہر کرنا

الفاظ یا حروف تہجی جو ہم کسی نامعلوم کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کرتے ہیں وہ عددی حروف (Literal Numbers) کہلاتے ہیں، مثال کے طور پر مربع کا رقبہ اس کے ضلع کو ضلع سے ضرب دے کر معلوم کیا جاسکتا ہے۔ یعنی: مربع کا رقبہ = ضلع × ضلع یا $A = s \times s$ ۔

اس ہی طرح مستطیل کا رقبہ لمبائی کو چوڑائی سے ضرب دے کر معلوم کیا جاسکتا ہے۔ یعنی:

رقبہ = لمبائی × چوڑائی یا $A = l \times b$۔

ان دونوں مثالوں میں s کو ضلع کے لئے، l کو لمبائی کے لئے اور b کو چوڑائی کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔

پس s، l اور b وغیرہ غیر معلوم مقداروں کو ظاہر کرتے ہیں۔

8.1.4 الجبری اظہاریوں کو دہرانا بطور مستقلات اور متغیرات کا مجموعہ جو بنیادی عوامل کی علامات کے ساتھ جوڑے گئے ہوں

ہم جانتے ہیں کہ الجبری اظہاریے مستقلات اور متغیرات کا ایسا مجموعہ ہوتا ہے جو بنیادی عوامل جیسے +، −، ÷، سے جوڑے ہوئے ہوتے ہیں۔

مثال کے طور پر: (a) $2x + 3y$ (b) $2x^2 + 5y^2 + 3y$ (c) $5a \div b + 3c$ اور (d) $4m \times n - 2q$ وغیرہ الجبری اظہاریوں کی چند مثالیں ہیں۔

8.1.5 کثیر رقمی اظہاریہ کو بطور الجبری اظہاریے وضاحت کرنا جس میں متغیر کی قوت مکمل اعداد ہوتی ہے۔

الجبراء میں کثیر رقمی اظہاریہ ایک رقم، دو رقم یا دو سے زیادہ رقموں پر مشتمل الجبری اظہاریوں کو ظاہر کرتا ہے۔ کثیر رقمی اظہاریہ کے لئے، متغیر کی قوت لازماً مکمل عدد ہونی چاہئے.

مثال کے طور پر: 6، 7، $2x$، $4x$، $x^2 + 5$، $y^2 + 3$ ، $3x^3 + 3x^2 + x + 2$ کثیر رقمی اظہاریہ ہیں لیکن $y + \frac{1}{y}$ ، $x^2+\frac{1}{x}$ اور $x^3 + y^{\frac{3}{2}} + 3$ وغیرہ کثیر رقمی اظہاریہ نہیں ہیں کیونکہ ان کے متغیر کی قوت مکمل عدد نہیں ہے۔ پس ایسے الجبری اظہاریے جس میں قوت مکمل عدد ہو کثیر رقمی اظہاریہ کہلاتے ہیں۔ اس لئے ہم کثیر رقمی اظہاریہ کی یوں وضاحت کرتے ہیں:

ایسے الجبری اظہاریے جو ایک یا ایک سے زیادہ رقموں پر مشتمل ہو۔ ہر متغیر کی قوت مکمل عدد ہو۔ وہ کثیر رقمی اظہاریہ کہلاتے ہیں۔

8.1.6 ایک رقمی، دو رقمی اور سہ رقمی کو بطور کثیر رقمی، اظہاریہ بالترتیب ایک رقم، دو رقوم اور تین رقوم شناخت کرنا

(1) **یک رقمی:** ایک رقم پر مشتمل اظہاریے کو یک رقمی یا سادہ اظہاریے کہتے ہیں۔ جیسے: 2، $3x$، $4ab$ وغیرہ۔

(2) **دو رقمی:** دو رقموں پر مشتمل اظہاریے کو دو رقمی کہتے ہیں جیسے: $x+y$، $3a-b$ x^2 اور x^2+x وغیرہ۔

(3) **سہ رقمی:** تین رقموں پر مشتمل اظہاریے کو سہ رقمی کہتے ہیں۔ جیسے: $a^3 + 2a - b$، $2x + 3g + 4z$ اور $x^3 + x^2 + x$ وغیرہ۔

کثیر رقمی اظہاریہ کی مثالیں:

کثیر رقمی اظہاریہ	رقموں کی تعداد	چند مثالیں
یک رقمی	1	$2, x, 5x^3$
دو رقمی	2	$2x + 5, x^2 - x, x - 5$
سہ رقمی	3	$x^2 + 5x + 6, x^5 - 3x + 8$

سرگرمی: دیئے گئے کثیر رقمی اظہاریہ کو یک رقمی، دو رقمی اور سہ رقمی شناخت کریں اور (✓) کا نشان لگائیں۔

سیریل نمبر	کثیر رقمی اظہاریہ	یک رقمی	دو رقمی	سہ رقمی
1	$3.4 + 3.4x$			
2	$z^2 + 5z + 6$			
3	-8			
4	$2c + 5b + 6$			
5	$14 + x$			
6	$5x - 2$			
7	$4b - 2a$			
8	$f^2 + 5f + 6$			

8.2 کثیر رقمی اظہاریوں پر عوامل

8.2.1 دو یا دو سے زیادہ کثیر رقمی اظہاریوں کو جمع کرنا

کثیر رقمی اظہاریوں کی جمع

آئیں جمع کو سمجھنے کے لئے چند مثالیں حل کریں۔

مثال 1: $7a$ اور $3a$ کو جمع کریں۔

حل: $7a + 3a = (7 + 3)a$ (ضرب کی خاصیت تقسیمی)

$= 10a$

مثال 2: $6ab$، $5ab$ اور $-7ab$ کو جمع کریں۔

حل: اُفقی طریقہ:

$$6ab + 5ab - 7ab = (6 + 5 - 7)\,ab = (11 - 7)\,ab = 4ab$$

عمودی طریقہ:

$$\begin{array}{r} 6\,ab \\ 5\,ab \\ -7\,ab \\ \hline 4\,ab \end{array}$$

عمودی طریقے میں ایک جیسی رقموں کو ایک دوسرے کے نیچے لکھتے ہیں۔ ان کے عددی سر کو جمع کرتے ہیں اور پھر مختصر کرتے ہیں۔

مثال 3:

$3a + 2b$ اور $2a + 5b$ کو جمع کریں ۔

حل: اُفقی طریقہ

$(3a + 2b) + (2a + 5b)$

$= 3a + 2b + 2a + 5b$

$= 3a + 2a + 2b + 5b$

$= (3 + 2)\,a + (2 + 5)\,b$

$= 5a + 7b$

عمودی طریقہ

$$\begin{array}{r} 3a + 2b \\ 2a + 5b \\ \hline 5a + 7b \\ \hline \end{array}$$

مثال 4:

$6a^2b - 3ab^2$ اور $4a^2b + 3ab^2$ کو جمع کریں۔

حل: اُفقی طریقہ

$(6a^2b - 3ab^2) + (4a^2b + 3ab^2)$

$= (6a^2b + 4a^2b) + (-3ab^2 + 3ab^2)$

$= 10a^2b + 0$

$= 10a^2b$

عمودی طریقہ

$$\begin{array}{r} 6a^2b - 3ab^2 \\ 4a^2b + 3ab^2 \\ \hline 10a^2b + 0 \\ \hline \end{array}$$

یا $10a^2b$

اُفقی طریقے میں دیئے گئے اظہاریوں کو ایک دوسرے کے نیچے اس طرح لکھتے ہیں کہ ایک جیسی رقمیں ایک کالم میں آتی ہیں اور پھر ان ایک جیسی رقموں کو جمع کرتے ہیں۔ اس سے دیئے گئے اظہاریوں کا مجموعہ حاصل ہوتا ہے۔

> اگر عددی سروں کا مجموعہ صفر ہو تو پوری رقم صفر ہو جاتی ہے۔

مشق 8.1

1- ذیل کو جمع کریں:

(1) $5a,\ 8a$ (2) $a,\ a$ (3) $-12x,\ -2x$

(4) $9ab,\ -7ab$ (5) $8y,\ 3y,\ -4y$ (6) $6x^2+2x+4,\ 3x^2+5x$

2- مجموعہ معلوم کریں:

(1) $2a+3b,\ 6a+5b$ (2) $3x-4y,\ 4x+6y$

(3) $2a-3b,\ 4a+5b,\ 5a-8b$ (4) $ab+4cd+6ad,\ 8ab+5cd+6ad$

(5) $4.5a+5.7b+3.2c,\ 3.5a+1.3b+2.8c$

(6) $1.7a+3.2b+4.9c,\ 4.3a+3.2b+3.1c,\ 6.0a+9.6b+3.0c$

(7) $6a+11b+10c,\ 13a+9b+5c,\ 8a+7b+12c$

(8) $4a+6b+5c,\ 7a+5b+5c,\ 3a+7b+7c$

(9) $2a+3b+4c,\ 6a+8b+4c,\ 3a+2b+3c$

(10) $14e-15f+10g,\ 13e+14f-g,\ -5e+3g$

8.2.2 ایک کثیر رقمی اظہاریہ کو دوسرے کثیر رقمی اظہاریہ میں سے تفریق کرنا

ہم جانتے ہیں کہ تفریق کا عمل، جمع کے عمل کا الٹ ہوتا ہے۔ سمتی اعداد کے اصولوں کے مطابق

$$5-2=5+(-2)$$

اور
$$a-b=a+(-b)$$

a میں سے b کو تفریق کرنے کا مطلب یہ ہے کہ b کے جمعی معکوس کو جمع کرنا۔ یعنی a میں $-b$ کو۔
لہٰذا ایک اظہاریے میں سے دوسرے اظہاریے کو تفریق کرنے کے لئے ہم تفریق کرنے والے اظہاریے کی رقموں کی علامت تبدیل کرتے ہیں اور پھر انہیں جمع کرتے ہیں۔

مثال 1: تفریق کریں: $3a+8b$ میں سے $2a+5b$ کو

اُفقی طریقہ

حل:

$$\begin{array}{rrr} 3a & + & 8b \\ \pm 2a & \pm & 5b \\ \hline 1a & + & 3b \end{array}$$

یا $a+3b$

عمودی طریقہ

$$(3a+8b)-(2a+5b)$$
$$=3a+8b-2a-5b$$
$$=3a-2a+8b-5b$$
$$=(3-2)a+(8-5)b$$
$$=1a+3b$$
$$=a+3b$$

مثال 2: $2x + 3y - 4z$ کو $3x - 2y + 5z$ میں سے تفریق کریں۔

حل:

$$\begin{array}{rrrrr} 3x & - & 2y & + & 5z \\ \pm 2x & \pm & 3y & \mp & 4z \\ \hline x & - & 5y & + & 9z \\ \hline \end{array}$$

مثال 3: $4x - y + 2$ کو $3x + 8y + 1$ اور $2x + 3y - 6$ کے مجموعہ میں سے تفریق کریں۔

حل:

$$\begin{array}{rrrrrl} 3x & + & 8y & + & 1 & \\ 2x & + & 3y & - & 6 & \\ \hline 5x & + & 11y & - & 5 & \text{مجموعہ} \\ \pm 4x & & \mp y & \pm & 2 & \\ \hline x & + & 12y & - & 7 & \text{تفریق} \\ \hline \end{array}$$

مشق 8.2

دوسرے اظہاریے کو پہلے اظہاریے میں سے تفریق کریں۔

(1) $8a, 5a$ (2) $-7ab, 12ab$ (3) $4a, -8a$

(4) $6a + 7b, 2a + 3b$ (5) $9a + 11b + 15c, 5a + 3b - 6c$

(6) $9c + 8d + 6e, 3e - 5c + 4d$

(7) $18x + 16y + 12z, 10x + 9y + 8z$

(8) $14a + 15b + 16c, 8a + 10b - 2c$

(9) $3x^2 + 25ab + 21bc, 4x^2 + 18ab - 6bc$

(10) $5a + 4ab + 2b, 4a + 3ab + b$

11- $10a+10b+17c$ کو $13a+56+12c$ اور $9a+3b+5c$ کے مجموعہ میں سے تفریق کریں۔

12- $2x+5y$ میں کیا جمع کیا جائے کہ وہ $6x+8y$ بن جائے؟

8.2.3 حاصل ضرب معلوم کرنا

- یک درجی کا یک درجی کے ساتھ
- یک درجی کا دو درجی اور سہ درجی کے ساتھ
- دو درجی کا دو درجی اور سہ درجی کے ساتھ

i- یک درجی کی یک درجی کے ساتھ ضرب

جب یک درجی کو یک درجی کے ساتھ ضرب کیا جاتا ہے تو ہر ایک کے عددی سر اور متغیر کو آپس میں علیحدہ علیحدہ ضرب کرتے ہیں۔

مثال 1: $2a$ اور $3a^2$ کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

حل:
$$2a \times 3a^2 = 2 \times 3 \times a \times a^2 = 6a^{1+2} = 6a^3$$

مثال 2: $3ay^2$ اور $7a^2y^3$ کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

حل:
$$3ay^2 \times 7a^2y^3 = 3 \times 7 \times a \times a^2 \times y^2 \times y^3 = 21 \times a^{1+2} \times y^{2+3} = 21a^3y^5$$

ii- یک درجی کی دو درجی کے ساتھ ضرب

مثال 3: $(a+b)$ کو 3 سے ضرب کریں۔

حل: عمودی طریقہ

$$\begin{array}{r} a+b \\ \times 3 \\ \hline 3a+3b \\ \hline \end{array}$$

اُفقی طریقہ

$$3 \times (a+b) = 3 \times a + 3 \times b = 3a + 3b$$

مثال 4: $2a + 3b$ کو a سے ضرب کریں۔

حل: عمودی طریقہ

$$\begin{array}{r} 2a + 3b \\ \times \quad a \\ \hline 2a^2 + 3ab \\ \hline \end{array}$$

اُفقی طریقہ

$$a \times (2a + 3b) = 2a^2 + 3ab$$

iii- یک درجی کی سہ درجی کے ساتھ ضرب

مثال 5: $(x + y + z)$ کو $4x$ سے ضرب کریں۔

حل: اُفقی طریقہ

$$\begin{array}{r} x + y + z \\ \times 4x \\ \hline 4x^2 + 4xy + 4xz \\ \hline \end{array}$$

عمودی طریقہ

$$4x(x + y + z) = 4x^2 + 4xy + 4xz$$

iv- دو درجی کی دو درجی کے ساتھ ضرب

مثال 6: $3e + 5f$ کو $4e + 2f$ سے ضرب کریں۔

حل: اُفقی طریقہ

$$(3e + 5f) \times (4e + 2f)$$
$$= 3e(4e + 2f) + 5f(4e + 2f)$$
$$= 12e^2 + 6ef + 20ef + 10f^2$$

عمودی طریقہ

$$\begin{array}{rrr} 3e & + \; 5f & \\ \times\, 4e & + \; 2f & \\ \hline 12e^2 & + \; 20ef & \\ & + \; 6ef & + \; 10f^2 \\ \hline 12e^2 & + \; 26ef & + \; 10f^2 \\ \hline \end{array}$$

$12e^2 + 20ef$ ← (دونوں رقموں کو پہلے اظہاریے $4e$ سے ضرب کریں۔)

$+ 6ef + 10f^2$ ← (دونوں رقموں کو دوسرے اظہاریے $2f$ سے ضرب کریں)

v- دو درجی کی سہ درجی سے ضرب

مثال 7: $2x^2 - 3xy + 4$ کو $x + y$ سے ضرب کریں۔

حل: عمودی طریقہ

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 2x^2 - & 3xy + 4 & & \\
\times & & x + y & & \\
\hline
 & 2x^3 - & 3x^2y + 4x & & \\
 & & + 2x^2y & - 3xy^2 & + 4y \\
\hline
 & 2x^3 - & x^2y + 4x & - 3xy^2 & + 4y \\
\hline
\end{array}
$$

اُفقی طریقہ

$$
\begin{aligned}
(x + y)(2x^2 - 3xy + 4) &= x(2x^2 - 3xy + 4) + y(2x^2 - 3xy + 4) \\
&= 2x^3 - 3x^2y + 4x + 2x^2y - 3xy^2 + 4y \\
&= 2x^3 - 3x^2y + 2x^2y + 4x - 3x^2y + 4y \\
&= 2x^3 - x^2y + 4x - 3xy^2 + 4y
\end{aligned}
$$

مشق 8.3

1- ذیل کے اظہاریوں کا حاصل ضرب معلوم کریں۔ (یک درجی کو یک درجی کے ساتھ)

(1) $15a, 8a$ (2) $9a, 6b$ (3) $10a^2, 2a^5$ (4) $4c^5, 8cd^2$

(5) $6a^2b, -5b^2$ (6) $-3a, 2b, -3$ (7) $4m^2, -5m^3, 3m^4$ (8) $-6xy, 3x^3y^2, 2xy$

2- ذیل کے اظہاریوں کا حاصل ضرب معلوم کریں۔ (یک درجی کو دو درجی کے ساتھ)

(1) $a + b, 9$ (2) $x - y, -4y$ (3) $2m^2 - 3n^3, -5mn$

(4) $3xy + 2xy^2, -6xy^2$ (5) $6lm - 4mn, 3l^2m^2n$ (6) $-5bc + 3cd, -2bc^2d$

3- ذیل کے اظہاریوں کا حاصل ضرب معلوم کریں۔ (دو درجی کو دو درجی کے ساتھ)

(1) $8c + 12d, -3c + 2d$ (2) $a + b, a - b$ (3) $a^2 + b^2, a^2 - b^2$

(4) $3x - 2y, 2x + 5y$ (5) $2lm + 3mn, -2m + 3n$ (6) $8pq^2 - 3p^2q, 2pq$

4- ذیل کے اظہاریوں کا حاصل ضرب معلوم کریں۔(یک درجی کو سہ درجی کے ساتھ)

(1) $2a - 3b + 4c, 2abc$ (2) $a^2 + b^2 - c^2$, ab (3) $m^2n + mn^2 - m^2n^2, - mn$

(4) $x^2 - 6xy + 9y^2, - 3xy$ (5) $2p^2 - 3pq + q^2, 4pqr$ (6) $xyz + x^2y^2 - y^2z^2, xyz$

5- ذیل کے اظہاریوں کا حاصل ضرب معلوم کریں۔(دو درجی کو سہ درجی کے ساتھ)

(1) $1 + 2x - 3x^2, 1 - x$ (2) $8c + 12d - 6e, c^2 - d^2$ (3) $a^2 - ab - b^2, a - b$

(4) $x^2 - 5x + 4, 3x - 4$ (5) $a^2 - 2a^2b + b^2, a^2 - b^2$ (6) $3p^2q + 2pq^2 - q^2r, p^2 - q^2$

8.2.4 جمع، تفریق اور ضرب پر مشتمل الجبری اظہاریوں کو مختصر کریں۔

ہم الجبری اظہاریوں کی جمع، تفریق اور ضرب پہلے ہی سیکھ چکے ہیں۔ اب ہم ان عوامل پر مشتمل اظہاریوں کو ذیل کی مثالوں کے ذریعے مختصر کرنا سیکھیں گے۔

مثال: مختصر کریں:

(i) $3x(x + 2y) + 4x^2 - 7xy$

(ii) $2x + \{(3x + y)(2x) - y) - (6x^2 + 2x)\}$

حل:

(i) $3x(x + 2y) + 4x^2 - 7xy$

$= 3x^2 + 6xy + 4x^2 - 7xy$

$= 3x^2 + 4x^2 + 6xy - 7xy$

$= 7x^2 - xy$

حل:

(ii) $2x + \{(3x + y)(2x - y) - (6x^2 + 2x)\}$

$2x + \{(3x + y)(2x - y) - (6x^2 + 2x)\}$

$= 2x + \{(3x(2x - y) + y(2x - y) - 6x^2 - 2x\}$

$= 2x + \{\cancel{6x^2} - 3xy + 2xy - y^2 - \cancel{6x^2} - 2x\}$

$= 2x + \{-xy - y^2 - 2x\}$

$= \cancel{2x} - xy - y^2 - \cancel{2x}$

$= -xy - y^2$

8.3 الجبری کلیات

الجبری کلیات کو پہچاننا اور ثابت کرنا

الجبری کلیہ الجبری رقموں پر مشتمل ایسی مختصر ترین شکل ہوتی ہے جو ہمیں کسی بھی الجبری اظہاریے کو حل کرنے کے اصول مہیا کرتی ہے۔ کلیات کچھ ایسے نتائج ہیں جو الجبرا میں بار بار استعمال کئے جاتے ہیں۔ ہم ان کلیات کی مدد سے اظہاریوں کی حاصل ضرب آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں۔

8.3.1 ثابت کریں: $(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)\ x + ab$

پڑتال $= x^2 + (a+b)\,x + ab$

$$\text{LHS} = (x+a)(x+b) = x \times (x+a) + b \times (x+a)$$
$$= (x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab$$
$$= x^2 + (a+b)\,x + ab = \text{RHS}$$

لہٰذا $\text{LHS} = \text{RHS}$

پس ثابت ہوا

اس کلیہ کے ذریعے ہم دو، یک درجی اظہاریوں کو جلدی سے ضرب کر سکتے ہیں۔

پس $\boxed{(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)\ x + ab}$

ہم اسے جیومیٹریکل اشکال کے ذریعے بھی ثابت کر سکتے ہیں۔

	10	2
10	100	20
4	40	8

اظہاریے کو بغیر گراف بنائے بھی حل کیا جا سکتا ہے۔

$$(10 + 4)\ (10 + 2) = 10^2 + (4 + 2) \times 10 + 4 \times 2$$
$$= 100 + 6 \times 10 + 8$$
$$= 100 + 60 + 8$$
$$= 168$$

	x	2
x	x^2	$2x$
4	$4x$	8

اظہاریے $(x + 4)\ (x + 2)$ کو یوں بھی کھولا جا سکتا ہے۔

$$(x + 4)\ (x + 2) = x^2 + 4x + 2x + 8$$
$$= x^2 + 6x + 8$$

اس ہی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں:

(i) $(x+a)(x-b) = x^2 + (a-b)x - ab$

(ii) $(x-a)(x+b) = x^2 - (a-b)x - ab$

(iii) $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$

مثال 1: ثابت کریں: $(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$

پڑتال $\text{LHS} = (x+2)(x+3) = x^2 + (2+3)x + (2)\times(3)$

$= x^2 + 5x + 6 = \text{RHS}$

پس $\text{LHS} = \text{RHS}$ تو ثابت ہوا

مثال 2: ثابت کریں: $(x-2)(x+3) = x^2 + x - 6$

پڑتال $\text{LHS} = (x-2)(x+3) = x^2 + (-2+3)x + (-2)\times(3)$

$= x^2 + x - 6 = \text{RHS}$

پس $\text{LHS} = \text{RHS}$

تو ثابت ہوا

مثال 3: ثابت کریں: $(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$

حل: بذریعہ کلیہ

$\text{LHS} = (x-2)(x-3) = x^2 + (-2-3)x + (-2)\times(-3)$

$= x^2 - 5x + 6 = \text{RHS}$

پس $\text{LHS} = \text{RHS}$

تو ثابت ہوا

مشق 8.4

-1 مختصر کریں۔

(1) $5a - 2a(3+4b)$

(2) $7m - 4m(5-6n)$

(3) $6x\{2x(3x^2-4) - (6x^2+8y)\}$

(4) $3x - \{(2x+y)(2x-y) - (4x^2+2y^2)\}$

(5) $4lm\{3lm(d^2-m^2) - 2mn(m^2-n^2)^2\}$

(6) $3pq\{2pq(p^2+q^2) + 4qr(p-r)\}$

-2 ذیل کو ثابت کریں۔

(1) $(x+3)(x+4) = x^2 + 7x + 12$

(2) $(x+5)(x+6) = x^2 + 11x + 30$

(3) $(x+2)(x-4) = x^2 - 2x - 8$

(4) $(x-3)(x+4) = x^2 + x - 12$

(5) $(x-5)(x-4) = x^2 - 9x + 20$

(6) $(x-7)(x+8) = x^2 + x - 56$

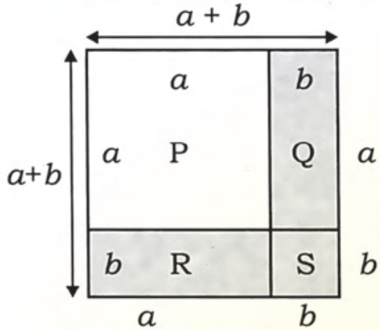
(7) $(x-9)(x+2) = x^2 - 7x - 18$

(8) $(x-1)(x+9) = x^2 + 8x - 9$

(9) $(x-2)(x+5) = x^2 + 3x - 10$

8.3.2 ثابت کریں: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

جیومیٹریکل پڑتال:



(a) مربعے کے رقبہ پر غور کریں جس کا ضلع $(a+b)$ ہے۔

مربع کا رقبہ جس کی اضلاع $(a+b)$ ہیں وہ P، Q، R اور S کے رقبوں کے مجموعہ کے برابر ہے۔

لہٰذا
$$LHS = (a+b)^2$$
$$= (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 = RHS$$

پس LHS = RHS

تو ثابت ہوا

الجبری پڑتال $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

اس کلیے کو یوں بھی ثابت کیا جاسکتا ہے:

اُفقی طریقہ

$$LHS = (a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$\begin{array}{r} a + b \\ \times\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

($a^2 + ab$: ((a + b) کو a سے ضرب کرنے سے)

($ab + b^2$: ((a + b) کو b سے ضرب کرنے سے)

$a^2 + 2ab + b^2 = RHS$

عمودی طریقہ

$$LHS = (a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$= a(a+b) + b(a+b)$$
$$= a^2 + ab + ba + b^2 \quad (\text{کیونکہ } ab = ba)$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 = RHS$$

پس LHS = RHS

پس ثابت ہوا

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

اس کلیے کو لفظوں میں یوں بیان کر سکتے ہیں:

> دو رقموں کے مجموعے کا مربع ہمیشہ ان رقموں کے مربعے اور ان رقموں کے حاصل ضرب کے دگنے کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

مثال 1: ثابت کریں: $(a+5)^2 = a^2 + 10a + 25$

پڑتال

لہٰذا
$$LHS = (a+5)^2 = (a+5)(a+5)$$
$$= a^2 + 2 \times a \times 5 + 5^2$$
$$= a^2 + 10a + 25 = RHS$$

پس LHS = RHS تو ثابت ہوا

مثال 2: ثابت کریں: $(3a + 2b)^2 = 9a^2 + 12ab + 4b^2$

حل:

$= (3a + 2b)^2 = (3a + 2b)(3a + 2b)$

$= (3a)^2 + 2(3a)(2b) + (2b)^2$

لہٰذا $= 9a^2 + 12ab + 4b^2 = \text{RHS}$

پس $\text{LHS} = \text{RHS}$

تو ثابت ہوا

مشق 8.5

1- ذیل کو ثابت کریں:

(1) $(a + 7)^2 = a^2 + 14a + 49$

(2) $(a + 11)^2 = a^2 + 22a + 121$

(3) $(2x + 6)^2 = 4x^2 + 24x + 36$

(4) $(3a + 5)^2 = 9a^2 + 30a + 25$

(5) $(7x + 3)^2 = 49x^2 + 42x + 9$

(6) $(6x + 9)^2 = 36x^2 + 108x + 81$

(7) $(5a + 4)^2 = 25a^2 + 40a + 16$

(8) $(9x + 10)^2 = 81x^2 + 180x + 100$

(9) $(5x + 11)^2 = 25x^2 + 110x + 121$

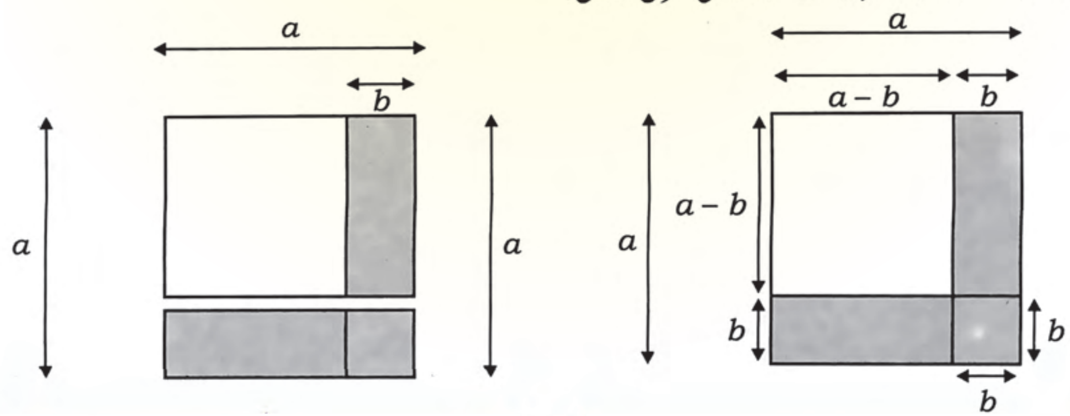
(10) $(6x + 7)^2 = 36x^2 + 84x + 49$

8.3.3 ثابت کریں: $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

جیومیٹریکل پڑتال:

مربع کے رقبے پر غور کریں جس کا ضلع a اور دو مستطیلوں کے رقبے جس کی لمبائیاں اور چوڑائیاں بالترتیب a اور b ہے۔

دونوں مستطیلوں کو مربع کے ساتھ اس طرح رکھیں:



غیر سایہ دار مربعے کا رقبہ $(a-b)(a-b)$ کے برابر ہے

$$LHS = (a-b)(a-b) = (a-b)^2$$

a اور b اضلاع والی دونوں مستطیلوں کا رقبہ $-$ a ضلع والے اصل مربع کا رقبہ $=$

(کیونکہ مربعے کے رقبے کو دو مرتبہ تفریق کیا جاتا ہے) b ضلع والے چھوٹے مربع کا رقبہ $+$

$$= a^2 - ab - ab + b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2 = RHS$$

لہٰذا پس ثابت ہوا: $\mathbf{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

الجبری تصدیق: ہم ان تمام کو یوں ثابت کر سکتے ہیں:

اُفقی طریقہ

$$LHS = (a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$
$$= a(a-b) - b(a-b)$$
$$= a^2 - ab - ba + b^2 \quad (\text{کیونکہ } ab = ba)$$
$$= a^2 - 2ab + b^2 = RHS$$

عمودی طریقہ

$$: (a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$

$$\begin{array}{r} a - b \\ \times\ a - b \\ \hline a^2 - ab \\ - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array} = RHS$$

($(a-b)$ کو a سے ضرب کرنے سے)

($(a-b)$ کو b سے ضرب کرنے سے)

لہٰذا پس ثابت ہوا:

اس کلیے کو الفاظ میں یوں بیان کر سکتے ہیں:

> دو رقموں کے فرق کا مربع ہمیشہ ان رقموں کے مربعے کے مجموعے اور ان رقموں کے حاصل ضرب کے دگنے کے فرق کے برابر ہوتا ہے۔

مثال 1: ثابت کریں: $(a-4)^2 = a^2 - 8a + 16$

پڑتال

$$= (a-4)^2 = (a-4)(a-4)$$
$$= a^2 - 2 \times a \times 4 + (4)^2$$
$$= a^2 - 8a + 16 = RHS$$

پس ثابت ہوا $LHS = RHS$

مثال 2: ثابت کریں: $\left(\frac{4}{5}x - \frac{1}{3}y\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{8}{15}xy + \frac{1}{9}y^2$

پڑتال

$$= \left(\frac{4}{5}x - \frac{1}{3}y\right)^2 = \left(\frac{4}{5}x - \frac{1}{3}y\right)\left(\frac{4}{5}x - \frac{1}{3}y\right)$$
$$= \left(\frac{4}{5}x\right)^2 - 2 \times \left(\frac{4}{5}x\right) \times \left(\frac{1}{3}y\right) + \left(\frac{1}{3}y\right)^2$$
$$= \frac{16}{25}x^2 - \frac{8}{15}xy + \frac{1}{9}y^2 = RHS$$

پس ثابت ہوا $LHS = RHS$

مشق 8.6

ذیل کو ثابت کریں:

(1) $(a-3)^2 = a^2 - 6a + 9$

(2) $(a-7)^2 = a^2 - 14a + 49$

(3) $(2a-5)^2 = 4a^2 - 20a + 25$

(4) $(6x-8)^2 = 36x^2 - 96x + 64$

(5) $(4a-7)^2 = 16a^2 - 56a + 49$

(6) $(3a-8)^2 = 9a^2 - 48a + 64$

(7) $(7a-5)^2 = 49a^2 - 70a + 25$

(8) $(9y-10)^2 = 81y^2 - 180y + 100$

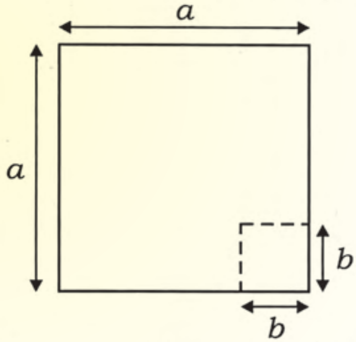
(9) $(8a-9)^2 = 64a^2 - 144a + 81$

(10) $(9a-11)^2 = 81a^2 - 198a + 121$

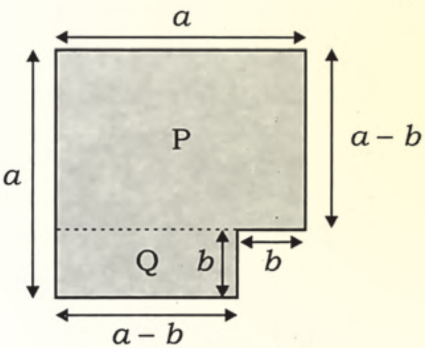
8.3.4 ثابت کریں: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

جیومیٹریکل پڑتال:

a ضلع والے مربعے پر غور کریں
b ضلع والے چھوٹے مربعے کو a ضلع والے مربعے میں سے کاٹیں۔

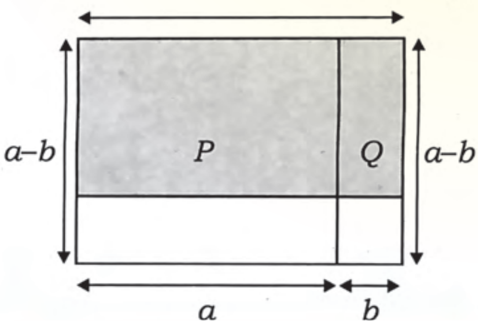


b ضلع والے مربعے کو کاٹنے کے بعد ہمیں مستطیل P اور مستطیل Q پر مشتمل شکل ملے گی جیسے:



مستطیل Q کو کاٹیں اور اسے مستطیل P کے آگے رکھیں۔ سایہ دار مستطیل کا رقبہ $(a+b)\times(a-b)$ ہے۔

مستطیل Q کا رقبہ + مستطیل P کا رقبہ $\text{RHS} = (a+b)(a-b)$



$= a(a-b) + b(a-b)$

$= a^2 - ab + ab - b^2$

$= a^2 - b^2 = \text{LHS}$

لہٰذا PHS = LHS

پس ثابت ہوا

اس لئے $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

دیا گیا کلیہ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

الجبری پڑتال: $(a+b)$ اور $(a-b)$ کو ضرب کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:

اُفقی طریقہ

$$LHS = (a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b)$$
$$= a^2 - ab + ba - b^2 \quad (\text{کیونکہ } ab = ba)$$
$$= a^2 - b^2 = RHS \quad (ab - ab = 0)$$

لہٰذا LHS = RHS پس ثابت ہوا

عمودی طریقہ

$$= (a+b)(a-b)$$
$$\begin{array}{r} a + b \\ \times\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \\ \hline \end{array}$$

اوپر دیا گیا کلیہ کو لفظوں میں یوں بیان کر سکتے ہیں: دو رقموں کے مجموعے اور فرق کی حاصل ضرب ان رقموں کے مربعوں کے فرق کے برابر ہوتی ہے۔

مثال 1: ثابت کریں: $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$

حل: $= (x + 2)(x - 2) = x^2 - (2)^2$
$= x^2 - 4 = RHS$

لہٰذا LHS = RHS پس ثابت ہوا

مثال 2: ثابت کریں۔ $(2x + y)(2x - y) = 4x^2 - y^2$

پڑتال: $= (2x + y)(2x - y) = (2x)^2 - (y)^2$
$= 4x^2 - y^2 = RHS$

لہٰذا LHS = RHS پس ثابت ہوا

مشق 8.7

I. ثابت کریں:

(1) $(3x+2)(3x-2) = 9x^2 - 4$
(2) $(4x+3)(4x-3) = 16x^2 - 9$
(3) $(5x+4)(5x-4) = 25x^2-16$
(4) $(3x+7)(3x-7) = 9x^2-49$
(5) $(6x+5)(6x-5) = 36x^2-25$
(6) $(7x+6)(7x-6) = 49x^2-36$

II. ذیل کو ثابت کریں:

(1) $4a^2 - 9b^2 = (2a + 3b)(2a - 3b)$
(2) $64m^2 - 81 = (8m + 9)(8m - 9)$
(3) $9p^2 - 100q^2 = (3p + 10q)(3p - 10q)$
(4) $100y^2 - 169 = (10y+13)(10y - 13)$

8.4 الجبری اظہاریوں کی تجزی

8.4.1 الجبری اظہاریوں کے اجزائے ضربی (بذریعہ الجبری کلیات)

کسی عدد یا اظہاریے کے اجزائے ضربی کو اعداد یا اظہاریوں کے حاصل ضربی سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ ایسے اعداد یا اظہاریے دیئے گئے عدد یا اظہاریے کے اجزائے ضربی کہلاتے ہیں۔

مثال کے طور پر: $12 = 2 \times 2 \times 3$, $4a^2 = 2 \times 2 \times a \times a$, $a^2 + 5a + 6 = (a + 3)(a + 2)$

ہم اعداد کے اجزائے ضربی معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں لیکن اب ہم الجبری اظہاریوں کے اجزائے ضربی معلوم کرنا سیکھیں گے۔

(I) $ka + kb + kc$ طرز کے اظہاریوں کے اجزائے ضربی

دی گئی اظہاریے $ka + kb + kc$ میں تین رقمیں ہیں اور ہر رقم کو k سے تقسیم کیا جاسکتا ہے (یعنی ہر رقم کا مشترک اجزائے ضربی)

جیسے: $\frac{ka}{k} = a, \quad \frac{kb}{k} = b, \quad \frac{kc}{k} = c$

لہٰذا ہر رقم کو k سے ضرب اور تقسیم کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$ka + kb + kc = k(a + b + c)$ یعنی دیئے گئے اظہاریے کے دو اجزائے ضربی k اور $(a + b + c)$ ہیں۔

مثال 1: $2a + 4b + 6c$ کے اجزائے ضربی معلوم کریں۔

حل: تینوں رقوم میں 2 مشترک اجزائے ضربی ہے۔

یعنی: $\frac{2a}{2} = a, \quad \frac{4b}{2} = 2b, \quad \frac{6c}{2} = 3c$

پس $2a + 4b + 6c = 2(a + 2b + 3c)$

مثال 2: $12a^2 - 8ab + 4a$ کے اجزائے ضربی معلوم کریں۔

حل: a، $2a$ اور $4a$ اس اظہاریے کے مشترک اجزائے ضربی ہیں لیکن $4a$ بڑے سے بڑا مشترک اجزائے ضربی ہے۔

جیساکہ: $\frac{12a^2}{4a} = 3a, \quad \frac{-8ab}{4a} = -2b, \quad \frac{4a}{4a} = 1$

پس $12a^2 - 8ab + 4a = 4a(3a - 2b + 1)$

مثال 3: $a(x + y) + b(x + y) + c(x + y)$ کے اجزائے ضربی معلوم کریں۔

حل: دیئے گئے اظہاریے کی تینوں رقوم میں $(x + y)$ مشترک اجزائے ضربی ہے۔

لہٰذا $a(x + y) + b(x + y) + c(x + y) = (x + y)(a + b + c)$

مشق 8.8

1- ذیل کی تجزی کریں:

(1) $5a^2x - 15a$ (2) $m^4 - m^3 + m^2$ (3) $7a^3 + 14a^2 - 7$

(4) $mx^2 - m^2x - mx$ (5) $13n - 2n^3 + 39n^5$ (6) $a^2bc + ab^2c + abc^2$

(7) $3a(b+c) + 6d(b+c)$ (8) $xy(a + b) + y(a + b)^2 + x(a + b)$

(9) $4lm(x-y) + 8mn(x-y)^2 + 12nl(x-y)$ (10) $pq(p^2-q)^2 + pr(p^2-q)^2 + qr(p^2-q)^2$

(ii) $(a^2 + 2ab + b^2)$ یا $(a^2 - 2ab + b^2)$ طرز کے اظہاریے کے اجزائے ضربی

ہم جانتے ہیں کہ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

اور $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

اظہاریے $(a^2 + 2ab + b^2)$ یا $(a^2 - 2ab + b^2)$ میں تین رقوم ہیں۔

- پہلی اور آخری رقم مکمل مربع ہیں۔
- درمیانی رقم، پہلی اور دوسری رقم کے حاصل ضرب کا دگنا ہے۔

مثال 1: $a^2 + 6ab + 9b^2$ کے اجزائے ضربی معلوم کریں۔

حل: دیئے گئے اظہاریے میں

(i) تین رقوم ہیں۔

(ii) پہلی رقم a کا مربع اور آخری رقم $3b$ کا مربع ہے

(iii) اور درمیانی رقم $2(a)(3b) = 6ab$

اس لئے دیئے گئے اظہاریے کے اجزائے ضربی اس شکل میں لکھے جاسکتے ہیں:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

اس لئے

$$a^2 + 6ab + 9b^2 = a^2 + 2(a)(3b) + (3b)^2$$
$$= (a + 3b)^2$$
$$= (a + 3b)(a + 3b)$$

مثال 2: $2x^2 + 12x + 18$ کی تجزی کریں۔

حل: دیئے گئے اظہاریے میں سے پہلے 2 مشترک لیں اور پھر تجزی کریں۔

جیسے: $2x^2 + 12x + 18 = 2(x^2 + 6x + 9)$ (2 بطور مشترک اجزائے ضربی)

$= 2\{(x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2\}$ (مکمل مربع)

$= 2(x + 3)^2$

$= 2(x + 3)(x + 3)$

مثال 3: $20a^3 - 60a^2b + 45ab^2$ کی تجزی کریں۔

حل:

$20a^3 - 60a^2b + 45ab^2$

$= 5a(4a^2 - 12ab + 9b^2)$ ($5a$ مشترک اجزائے ضربی ہے)

$= 5a\{(2a)^2 - 2(2a)(3b) + (3b)^2\}$ (مکمل مربع)

$= 5a(2a - 3b)^2$ [کیونکہ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$]

$= 5a(2a - 3b)(2a - 3b)$

مثال 5: $98c^2 - 140cd + 50d^2$ کی تجزی کریں۔

حل: پہلی اور آخری رقوم مکمل مربع نہیں ہیں۔ اگر ہم اس اظہاریے میں سے 2 بطور مشترک جزو ضربی لیتے ہیں تو رقوم مکمل مربع بن جائیں گی۔ جیسے:

$$98c^2 - 140cd + 50d^2 = 2\,(49c^2 - 70cd + 25d^2)$$ (2 بطور مشترک جزو ضربی لینے سے)

$$= 2\,\{(7c)^2 - 2\,(7c)\,(5d) + (5d)^2\}$$
$$= 2\,(7c - 5d)^2$$
$$= 2\,(7c - 5d)\,(7c - 5d)$$

مشق 8.9

ذیل کی اجزائے ضربی معلوم کریں:

(1) $x^2 + 12x + 36$	(2) $a^2 + 4a + 4$	(3) $4a^2 + 12a + 9$
(4) $9x^2 + 42xy + 49y^2$	(5) $25a^2 + 80ab + 64b^2$	(6) $16b^2 + 40b + 25$
(7) $4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$	(8) $144x^2 - 4x + \frac{1}{36}$	(9) $18c^2 + 60cd + 50cd^2$
(10) $4a^2 + 48a + 144$	(11) $5y^2 + 40y + 80$	(12) $3s^2 - 48st + 192t^2$
(13) $9a^2t^2 - 42ats + 49s^2$	(14) $4a^4 - 12a^2 + 9$	(15) $50p^2q^2 - 70pqr + 98r^2$

(iii) $a^2 - b^2$ طرز کی الجبری اظہاریے کے اجزائے ضربی

ہم پہلے سے جانتے ہیں کہ $(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$

یا الٹ $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$

خصوصیات ہیں۔

1- دونوں رقوم مربع ہیں۔ 2- دونوں رقوم کے درمیان تفریق کی علامت ہے۔

اجزائے ضربی معلوم کرنے کا طریقہ

(i) دونوں رقوم کے جذر المربع معلوم کریں۔

(ii) دونوں رقوم کی جمع اور تفریق کو قوسین میں حاصل ضرب کی شکل میں لکھیں۔

مثال 1: $4x^2 - 9y^2$ کی جزی کریں۔

حل: یہ رقوم مکمل مربعوں کا فرق ہے۔

لہٰذا $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2$
$$= (2x + 3y)\,(2x - 3y)$$

مثال 2: $9y^2 - 81$ کی تجزی کریں۔

حل: سب سے پہلے 9 کو بطور مشترک اجزائے ضربی لیں۔

$$9y^2 - 81 = 9(y^2 - 9)$$
$$= 9(y + 3)(y - 3)$$

مثال 3: $15(a + b)^2 - 60(c + d)^2$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$15(a + b)^2 - 60(c + d)^2 = 15\{(a + b)^2 - 4(c + d)^2\}$$
$$= 15\{(a + b) + 2(c + d)\}\{(a + b) - 2(c + d)\}$$
$$= 15(a + b + 2c + 2d)(a + b - 2c - 2d)$$

مشق 8.10

ذیل کی تجزی کریں:

(1) $b^2 - c^2$ (2) $a^2 - 36$ (3) $a^2 - 49$ (4) $25 - y^2$

(5) $4x^2 - 9$ (6) $9x^2 - 16y^2$ (7) $6x^2 - 24$ (8) $200 - 18z^2$

(9) $81a^2 - 121b^2$ (10) $a^2c^2 - 16c^2d^2$ (11) $36 - (3a - 2b)^2$

(12) $(2x + 3y)^2 - 100z^2$ (13) $64b^2 - (6b + d)^2$ (14) $(3a - 4b)^2 - (3a - b)^2$

(15) $49(2a - 3b)^2 - 16(a + 2b)^2$ (16) $225(p - q)^2 - 49(p + q)^2$

(17) $72(c + d)^2 - 162(c - d)^2$ (18) $48l(m - n)^2 - 75l(p - q)^2$

8.4.2 الجبری اظہاریے کو جوڑے/ گروہ بنا کر تجزی کرنا

الجبری اظہاریے کو جوڑے/ گروہ بنا کر تجزی کرنے کے طریقے کی ذیل کی مثال سے واضح کیا گیا ہے:

مثال 1: تجزی کریں:

(i) $x^2 + 5x + 4x + 20$

حل:

$x^2 + 5x + 4x + 20$

$= (x^2 + 5x) + (4x + 20)$ (جوڑے/گروہ بنانے سے)

$= x(x + 5) + 4(x + 5)$

$= (x + 5)(x + 4)$ [$(x+5)$ بطور مشترک اجزائے ضربی لینے سے]

(ii) $x^2 + 4y^2 + xy^2 + 4x$

حل:

$x^2 + 4y^2 + xy^2 + 4x$

$(x^2 + 4x) + (xy^2 + 4y^2)$ (جوڑے/گروہ بنانے سے)

$x(x + 4) + y^2(x + 4)$

$= (x + 4)(x + y^2)$ [$(x+4)$ بطور مشترک اجزائے ضربی لینے سے]

ایسی تین رقمی اظہاریے کی صورت میں جو مکمل مربع نہ ہو تو اس کی آخری رقم کے اس طرح اجزائے ضربی بناتے ہیں کہ ان اجزائے ضربی کی جمع یا تفریق درمیانی رقم کا عددی سر ہوتا ہے۔
ہم اس طرح کے اظہاریے کے یوں اجزائے ضربی بناتے ہیں:

مثال 2: $x^2 + 5x + 6$ کی تجزی کریں۔

حل: رقم 6 کو اس طرح دو جز میں تجزی کریں کہ جب ان کو جمع کیا جائے تو درمیانی رقم کا عددی سر ملے۔

لہٰذا $x^2 + 5x + 6 = x^2 + 3x + 2x + 6$

دونوں اجزائے ضربی 2 اور 3 کے متغیر مشترک ہیں۔

$= (x^2 + 3x) + (2x + 6)$

$= x(x + 3) + 2(x + 3)$ (ان کے جوڑے یا گروہ بنانے سے)

$= (x + 3)(x + 2)$ [$(x + 3)$ بطور مشترک جز لینے سے]

مثال 3: $x^2 + 5x - 6$ کی تجزی کریں۔

حل:

$x^2 + 5x - 6$

$= x + 6x - x - 6$ (آخری رقم کی تجزی کرنے سے)

$= (x + 6x) + (-x - 6)$ (درمیانی رقم کو توڑنے سے)

$= x(x + 6) - 1(x + 6)$ (ان کے جوڑے یا گروہ بنانے سے)

$= (x + 6)(x - 1)$ [$(x + 6)$ بطور مشترک جز لینے سے]

مشق 8.11

I- تجزی کریں:

(1) $5x^2 + 5x + 4x + 4$ (2) $ax + ay + bx + by$
(3) $b^2 + 4c^2 + bc^2 + 4b$ (4) $p^2 - 6pq - pq + 6q^2$
(5) $a^2 + 5b^2 + ab^2 + 5a$ (6) $7x^2 + py + 7x + pyx$
(7) $2c^2d + 4cd^2 - 2cd - 4d^2$ (8) $2y^2 - 10y + 4y - 20$
(9) $x^2y^2 + 5xy - xy - 5$ (10) $p^2 - pq + q - p$

II- تجزی کریں:

(1) $x^2 + 6x + 8$ (2) $y^2 + 8y + 12$ (3) $a^2 + 7a + 10$
(4) $c^2 + 5c + 6$ (5) $d^2 + 6d + 5$ (6) $p^2 - 4p + 3$
(7) $r^2 + 7r + 12$ (8) $a^2 + 3a - 10$ (9) $m^2 - 5m + 14$
(10) $x^2 - 2x - 15$ (11) $y^2 + 7y - 18$ (12) $x^2 + 10x + 21$

جائزہ مشق 8

1- ذیل کے سوالات کے جوابات دیں:

(i) عددی حروف (Literal numbers) کا مطلب کیا ہے؟ (ii) مستقل کی تعریف بیان کریں۔

(iii) دو رقمی اظہار کیا ہوتے ہیں؟ (iv) الجبری کلیہ کیا ہوتا ہے؟

(v) اصطلاح الجبری اظہاریے کی تجزی کی وضاحت کریں۔

2- خالی جگہیں پُر کریں:

(i) $(a+b)^2 =$ ________ (ii) $(a-b)^2 =$ ________

(iii) $(x+a)(x+b) =$ ________ (iv) $a^2 - b^2 =$ ________

(v) علامات میں کہیں عددی رقمیں ہو سکتی ہیں وہ ________ کہلاتی ہیں۔

(vi) ایسا کثیر رقمی اظہاریہ جو ایک رقم پر مشتمل ہو وہ ________ کہلاتا ہے۔

3- درست جواب پر (✓) کا نشان لگائیں:

i- $x^2 - x = ?$

(a) x (b) $x(x-1)$ (c) x^2 (d) $x - x^2$

ii- ایسا کثیر رقمی اظہاریہ جو دو رقوم پر مشتمل ہو وہ کہلاتا ہے:

(a) اجزائے ضربی (b) یک رقمی (c) دو رقمی (d) سہ رقمی

iii- ایسی علامت جو غیر متغیر قیمت کو ظاہر کرتی ہے وہ کہلاتی ہے:

(a) رقم (b) متغیر (c) مستقل (d) عددی سر

iv- $a^2 - 9$ کے اجزائے ضربی ہیں:

(a) $(a+3)(a-3)$ (b) $(a+9)(a-9)$

(c) $(a-3)(a-3)$ (d) $(a-9)(a-9)$

v- $(x-y)(x-y) = ?$

(a) $x^2 - y^2$ (b) $x^2 + 2xy + y^2$ (c) $x^2 - 2xy + y^2$ (d) $x^2 + y^2$

4- اگر $A = 2(x^2 + y^2 + z^2)$، $B = -x^2 + 3y^2 + 2z^2$ اور $C = x^2 - y^2 - 3z^2$ تو معلوم کریں:

(i) A + B + C (ii) B + C − A (iii) A − B + C

(iv) A + B − C (v) A − B − C (vi) B − C − A

5- ذیل کی کثیر رقمی اظہاریوں کو مختصر کریں:

(i) $(x-2y)(x+2y)$ (ii) $(4x^2)(3x+1)$
(iii) $2x(x+y)-2y(x-y)$ (iv) $(a^2b^3)(2a-3b)$
(v) $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ (vi) $(a^2+1)(a^2-a-1)$
(vii) $x(y+1)-y(x+1)-(x-y)$
(viii) $a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)$

6- ذیل کو ثابت کریں:

(i) $(3x-5)(3x+5)=9x^2-25$ (ii) $(2a-5b)^2=4a^2-20ab+25b^2$
(iii) $(3x^2+4y^2)^2=9x^4+24x^2y^2+y^4$ (iv) $9x^2-25y^2=(3x-5y)(3x+5y)$

7- اجزائے ضربی معلوم کریں:

(i) $10a^2-200a^4b$ (ii) $36x^3y^3z^3-27x^4y^2z+63xyz^4$
(iii) $15x^4y+21x^3y^2-27x^2y^2-33xy$ (iv) $x(a^2+11)-16(a^2+11)$
(v) $x^2(ab+c)+xy(ab+c)+z^2(ab+c)$

8- ذیل کی تجزی کریں:

(i) $a^2-26a+169$ (ii) $1-6x^2y^2z+9x^4y^4z^2$ (iii) $7ab^2-343a$
(iv) $75-3(x-y)^2$ (v) $49(x+y)^2-16(x-y)^2$ (vi) $\frac{9}{16}a^2+ab+\frac{4}{9}b^2$
(vii) $\frac{a^2}{b^2}l^2-\frac{2ac}{bd}lm+\frac{c^2}{d^2}m^2$ (viii) $(a-\frac{9}{5})^2-\frac{36}{25}m^2$

خلاصہ

- الجبرا کو حقیقی صورتحال کا ریاضیاتی ماڈل تخلیق کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔
- انگریزی حروف تہجی کے حروف جو نامعلوم اعداد کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کرتے ہیں انھیں حروف (Literals) کہتے ہیں۔
- کئی مختلف عددی قیمت رکھنے والی علامت متغیر کہلاتی ہیں۔
- غیر متغیر قیمت رکھنے والی علامت مستقل کہلاتی ہے۔
- مستقلات اور متغیرات کا ایسا مجموعہ جسے بنیادی عوامل سے جوڑا گیا ہو وہ الجبری اظہاریے کہلاتے ہیں۔

- الجبری اظہاریے کے حصے جن کو علامات '+' اور '−' سے علیحدہ کیا گیا ہو، رقوم کہلاتیں ہیں۔
- عدد جو کسی متغیر سے ضرب دیا گیا ہو عددی سر کہلاتا ہے۔
- اگر عددی سروں کا مجموعہ صفر ہو تو پوری رقم صفر ہو جائے گی۔
- الجبری اظہاریے جن کے متغیر کی قوت مکمل عدد ہو وہ کثیر رقمی اظہاریہ کہلاتا ہے۔
- ایسا اظہاریہ جس کی ایک رقم ہو وہ یک رقمی کہلاتا ہے۔
- ایسا اظہاریہ جس کی دو رقمیں ہوں وہ دو رقمی کہلاتا ہے۔
- ایسا اظہاریہ جس کی تین رقمیں ہوں وہ سہ رقمی کہلاتا ہے۔
- کسی الجبری اظہاریے کے جوڑے بنا کر بھی تجزی کی جاسکتی ہے۔
- کثیر رقمی کو کسی بھی ترتیب میں رکھا جاسکتا ہے لیکن عام طور پر اسے ترتیب نزولی میں ترتیب دیتے ہیں۔
- الجبرائی مساوات جو اس میں پائے جانے والے متغیر کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہو وہ الجبرائی کلیہ کہلاتا ہے۔
- کسی الجبری اظہاریے کو دو یا دو سے زیادہ اظہاریوں میں لکھنے کا عمل جو اسے پورا پورا تقسیم کرے، اجزائے ضربی کہلاتا ہے۔

(i) $(a+b)^2 = (a+b)\,(a-b) = a^2 + 2ab + b^2$

(ii) $(a-b)^2 = (a-b)\,(a-b) = a^2 + 2ab + b^2$

(iii) $a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b)$

• • •

غور و فکر

فیثاغورث مکمل اعداد کی یوں وضاحت کرتا ہے کہ اُس کے تمام واجب تقسیم کنندہ کا مجموعہ خود وہ ہی عدد ہوتا ہے جیسے:

6 ایک مکمل عدد ہے کیونکہ $6 = 1 \times 2 \times 3 = 1 + 2 + 3 = 6$

28 ایک مکمل عدد ہے کیونکہ 1، 2، 4، 7، 14 ؛ $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$۔

مزید تین مکمل عدد معلوم کریں۔

یونٹ 9

یک درجی مساوات

9.1 یک درجی مساوات

9.1.1 ایک متغیر میں یک درجی مساوات کی وضاحت کرنا

الجبرا میں مساوات روزمرہ زندگی کے مسائل حل کرنے میں اہم کردار ادا کرتی ہے۔ مساوات اخذ کرنا ہم پچھلی جماعت میں سیکھ چکے ہیں۔ مثال کے طور پر $2x + 3 = 11$ ایک مساوات ہے جس میں x بطور متغیر استعمال ہوا ہے۔ اس لئے یہ ایک متغیر والی مساوات ہے۔ چونکہ اس مساوات میں x کی قوت 1 ہے لہٰذا یہ ایک درجی یا یک درجی مساوات ہے۔ وہ مساوات جو ایک متغیر اور درجہ 1 پر مشتمل ہو وہ ایک متغیر میں یک درجی مساوات کہلاتی ہے۔

سرگرمی: ایک متغیر میں یک درجی مساوات پر (✓) کا نشان لگائیں۔

$y^2 + 3$	$4x + 5 = 2$	$x^2 + 3x + 4 = 0$
$3x^2 + 7 = 0$	$x + 5 = 20$	$x + x = 20$
$x^2 + y^2 = 9$	$m = n + 5$	$x + 7 = 11y$
$7v - 3 = 4$	$a^2 + 2ab + b^2 = 0$	$x = 13 - 4$

9.2 یک درجی مساوات کا حل

9.2.1 یک درجی مساوات کو حل کرنے کے مختلف طریقوں کی وضاحت کرنا

I- متغیر کو علیحدہ کرکے سادہ یک درجی مساوات حل کرنا

کسی بھی مساوات کے بارے میں اہم بات یاد رکھنی کی مساوی کی علامت ہے جو توازن کو ظاہر کرتی ہے۔ لہٰذا ہم جو عمل مساوات کے ایک طرف کرتے ہیں، وہ ہی عمل ہمیں مساوات کے دوسری طرف کرنا ہوتا ہے۔
لہٰذا دونوں اطراف بالکل ایک جیسا عمل کرنے سے مساوات کا توازن برقرار رہتا ہے۔

کسی مساوات کو حل کرنے کے لئے ہمارا پہلا قدم متغیر اور مستقل پر مشتمل رقوم کو یکجا کرنا ہے۔ یہ سب ہم مساوات کی خاصیتوں کی مدد سے کرتے ہیں۔

مثال 1: حل کریں: $3x + 15 = x + 25$

حل: $3x + 15 = x + 25$

$3x - x + 15 = x - x + 25$ (ہر طرف سے x تفریق کرنے سے)

یا $2x + 15 = 25$

یا $2x + \cancel{15} - \cancel{15} = 25 - 15$ (ہر طرف سے 15 تفریق کرنے سے)

پس $2x = 10$

یا $\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$

یا $\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{10}^5}{\cancel{2}_1}$ (ہر طرف کو 2 سے تقسیم کرنے سے)

یا $x = 5$ لہٰذا مساوات کا حل $x = 5$ ہے۔

پڑتال کرنے کے لئے کہ دونوں اطراف ایک جیسی ہیں، ہمیں چاہیئے کہ x کی قیمت کو اصل مساوات میں رکھیں۔ اگر ہم ایسا کرتے ہیں تو بائیں طرف $3(5) + 15 = 30$ ہے اور دائیں طرف $5 + 25 = 30$ ہے۔ لہٰذا بائیں طرف برابر ہے دائیں طرف کے۔ تو ہم نے پڑتال کی کہ حل درست ہے۔

مثال 2: حل کریں۔ $2x + 3 = 6 - (2x - 3)$

حل: $2x + 3 = 6 - (2x - 3)$

(قوس ہٹانے سے)

یا $2x + 3 = 6 - 2x + 3$

یا $2x + 3 = 9 - 2x$

$2x + 2x + 3 = 9 - 2x + 2x$

($2x$ کو دونوں اطراف میں جمع کرنے سے)

لہٰذا $4x + 3 = 9$

(دونوں اطراف میں سے 3 تفریق کرنے سے)

یا $4x + \cancel{3} - \cancel{3} = 9 - 3$

اس لئے $4x = 6$

(دونوں اطراف کو 4 سے تقسیم کرنے سے)

$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{6}{4}$

یا $x = \frac{6}{4}$

یا $x = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

پڑتال

اصل مساوات میں $x = 1\frac{1}{2}$ رکھیں

$2x + 3 = 6 - (2x - 3)$

یا $2 \times \left(1\frac{1}{2}\right) + 3 = 6 - \left\{2\left(1\frac{1}{2}\right) - 3\right\}$

یا $\cancel{2}\left(\frac{3}{\cancel{2}}\right) + 3 = 6 - \left\{2\left(\frac{3}{2}\right) - 3\right\}$

$3 + 3 = 6 - \left\{\cancel{2}\left(\frac{3}{\cancel{2}}\right) - 3\right\}$

$6 = 6 - (\cancel{3} - \cancel{3})$

یا $6 = 6$

پس ثابت ہوا $x = 1\frac{1}{2}$

لہٰذا دائیں طرف اور بائیں طرف دونوں برابر ہیں۔ پس ہم نے پڑتال کیا کہ مساوات کا حل درست ہے۔

ii- خطوط وحدانی پر مشتمل یک درجی مساوات کو حل کرنا

مثال 1: حل کریں $8(x-3)-(6-2x)=2(x+2)-5(5-x)$ اور پڑتال کریں۔

حل: ہم قوسین کے باہر موجود اعداد سے ضرب کرنا شروع کرتے ہیں۔ خاص طور پر رقوم کی علامت کے بارے میں احتیاط سے کام لیں۔

$$8x-24-6+2x=2x+4-25+5x$$

ہر اطراف میں x پر مشتمل رقوم اور اعداد کو یکجا کریں۔

لہٰذا $8x+2x-24-6=2x+5x+4-25$

یا $10x-30=7x-21$

اب دونوں اطراف میں سے $7x$ تفریق کریں۔

یا $10x-7x-30=\cancel{7x}-\cancel{7x}-21$

$$3x-30=-21$$

دونوں اطراف میں 30 جمع کریں

$$3x-\cancel{30}+\cancel{30}=30-21$$

یا $3x=9$

یا $\frac{3x}{3}=\frac{9}{3}=3$ (دونوں اطراف کو 3 سے تقسیم کرنے سے)

اس لئے $x=3$

پڑتال: اصل مساوات میں $x=3$ رکھیں۔

ہمارے پاس $8(x-3)-(6-2x)=2(x+2)-5(5-x)$

$$8(3-3)-(6-2\times3)=2(3+2)-5(5-3)$$

$$8(0)-(6-6)=2(5)-5(2)$$

$$0-0=10-10$$

$$0=0$$

پس ثابت ہوا کہ $x=3$

مثال 2: حل کریں $(x+1)(2x+1)=(x+3)(2x+3)-14$ اور پڑتال بھی کریں۔

حل: سب سے پہلے ہم قوسین حل کرتے ہیں۔

$$x(2x+1)+1(2x+1)=x(2x+3)+3(2x+3)-14$$

یا $2x^2+x+2x+1=2x^2+3x+6x+9-14$

لہٰذا $2x^2+3x+1=2x^2+9x-5$

دونوں اطراف میں سے $2x^2$ تفریق کرنے سے

$$\cancel{2x^2} - \cancel{2x^2} + 3x + 1 = \cancel{2x^2} - \cancel{2x^2} + 9x - 5$$

لہٰذا $3x + 1 = 9x - 5$

یا $9x - 5 = 3x + 1$

دونوں اطراف کو $3x$ سے تقسیم کرنے سے

$$9x - 3x - 5 = \cancel{3x} + 1 - \cancel{3x}$$

یا $6x - 5 = 1$

دونوں اطراف 5 جمع کرنے سے

$$6x - \cancel{5} + \cancel{5} = 1 + 5$$

یا $6x = 6$

یا $\frac{6x}{6} = \frac{6}{6}$

پس $x = 1$

پڑتال: اصل مساوات میں $x = 1$ رکھیں۔

$$(x + 1)(2x + 1) = (x + 3)(2x + 3) - 14$$

$$(1 + 1)(2 \times 1 + 1) = (1 + 3)(2 \times 1 + 3) - 14$$

یا $2 \times (2 + 1) = 4 \times (2 + 3) - 14$

یا $2(3) = 4(5) - 14$

یا $6 = 20 - 14$

یا $6 = 6$

پس ثابت ہوا $x = 1$

III- کسری عددی سر پر مشتمل یک درجی مساوات حل کرنا

مثال 1: حل کریں۔ $\frac{4(x+2)}{5} = 7 + \frac{5x}{13}$

حل:

$$\frac{4(x+2)}{5} = 7 + \frac{5x}{13}$$

دونوں اطراف کو مخرجوں کے ذواضعاف اقل سے ضرب دیں جو $5 \times 13 = 65$ ہے۔

$$65 \times \frac{4(x+2)}{5} = 65\left(7 + \frac{5x}{13}\right)$$

یا $^{13}\cancel{65} \times \frac{4(x+2)}{\cancel{5}_1} = 65 \times 7 + {}^{5}\cancel{65} \times \frac{5x}{\cancel{13}_1}$

یا $52(x + 2) = 455 + 25x$

یا $52x + 104 = 455 + 25x$

دونوں اطراف میں سے $25x$ تفریق کرنے سے

یا $52x - 25x + 104 = 455 + \cancel{25x} - \cancel{25x}$

یا $27x + 104 = 455$

دونوں اطراف میں سے 104 تفریق کرنے سے

$$27x + 104 - 104 = 455 - 104$$

یا $27x = 351$

دونوں اطراف کو 27 سے تقسیم کرنے سے

تو $\frac{\cancel{27}x}{\cancel{27}} = \frac{\cancel{351}^{13}}{\cancel{27}_1}$

لہٰذا $x = 13$

مثال 2: حل کریں اور پڑتال کریں $\frac{x+5}{6} - \frac{x+1}{9} = \frac{x+3}{4}$

حل: $\frac{x+5}{6} - \frac{x+1}{9} = \frac{x+3}{4}$ (4، 6 اور 9 کا ذواضعاف اقل (LCM) 36 ہے)

$\frac{{}^{6}\cancel{36}(x+5)}{\cancel{6}_1} - \frac{{}^{4}\cancel{36}(x+1)}{\cancel{9}_1} = \frac{{}^{9}\cancel{36}(x+3)}{4_1}$ (دونوں اطراف کو ذواضعاف اقل (LCM) 36 سے ضرب کرنے سے)

اس لئے $\frac{6(x+5)}{1} - \frac{4(x+1)}{1} = \frac{9(x+3)}{1}$

یا $6(x+5) - 4(x+1) = 9(x+3)$

یا $6x + 30 - 4x - 4 = 9x + 27$

یا $6x - 4x + 30 - 4 = 9x + 27$

یا $2x + 26 = 9x + 27$

یا $26 = 9x + 27 - 2x$

یا $26 = 7x + 27$

یا $26 - 27 = 7x$

یا $-1 = 7x$

یا $7x = -1$

یا $\frac{7x}{7} = -\frac{1}{7}$

لہٰذا $x = -\frac{1}{7}$

پڑتال: $x = -\frac{1}{7}$ رکھیں

$\frac{x+5}{6} - \frac{x+1}{9} = \frac{x+3}{4}$

یا $\frac{-\frac{1}{7}+5}{6} - \frac{-\frac{1}{7}+1}{9} = \frac{\frac{-1}{7}+3}{4}$

$\left(\frac{-1+35}{7}\right)\times\frac{1}{6} - \left(\frac{-1+7}{7}\right)\times\frac{1}{9} = \left(\frac{-1+21}{7}\right)\times\frac{1}{4}$

$\frac{34}{42} - \frac{6}{63} = \frac{20}{28}$

$\frac{17}{21} - \frac{2}{21} = \frac{\cancel{20}^{5}}{\cancel{28}_7}$

یا $\frac{17-2}{21} = \frac{5}{7}$

یا $\frac{{}^{5}\cancel{15}}{\cancel{21}_7} = \frac{5}{7}$

یا $\frac{5}{7} = \frac{5}{7}$

پس ثابت ہوا $x = -\frac{1}{7}$

IV- ایک متغیر میں یک درجی مساوات کی ایک اور شکل

اس آخری حصے میں ہم کچھ ایسی مساوات پر نظر ڈالیں گے کہ جو پہلی نظر میں یک درجی مساوات نظر نہیں آتی ہیں۔ تاہم کچھ الجبرائی عوامل کے بعد ان کو جانی پہچانی شکل میں ڈھالا جاسکتا ہے۔

مثال 1: حل کریں اور پڑتال کریں۔ $\frac{3}{5} = \frac{6}{x}$

حل: ہمیں مشترک مخرج کی ضرورت ہے۔ ہمیں ایسی مقدار کی ضرورت ہے جسے 5 اور x تقسیم کر سکیں۔
ہمارا یقینی انتخاب $5x$ ہوگا تو آئیں دونوں اطراف کو $5x$ سے ضرب دیں اور مختصر کریں۔

$$5x \times \frac{3}{5} = 5x \times \frac{6}{x}$$

یا $$^{1}5x \times \frac{3}{5_1} = 5x^1 \times \frac{6}{x_1}$$

یا $$3x = 5 \times 6$$

یا $$3x = 30$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{30}{3} \quad \text{یا} \quad x = 10$$

پڑتال:
اصل مساوات میں $x = 10$ رکھیں۔

ہمارے پاس $$\frac{3}{5} = \frac{6}{x}$$

لہٰذا $$\frac{3}{5} = \frac{6^3}{10_5}$$

یا $$\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

پس ثابت ہوا $x = 10$

مثال 2: حل کریں $\frac{25}{27} = \frac{5}{3x}$ اور پڑتال بھی کریں۔

حل: پہلے ہم تمام کسور کو الٹیں گے۔ $\frac{3x}{5} = \frac{27}{25}$

اب ان کا مشترک مخرج 25 ہے۔ لہٰذا دونوں اطراف کو 25 سے ضرب دیں اور مختصر کریں۔

$$\frac{3x}{5} \times 25 = \frac{27}{25} \times 25$$

یا $$\frac{3x \times 25^5}{5_1} = \frac{27 \times 25^1}{25_1}$$

یا $$15x = 27 \quad \text{or} \quad \frac{15^1 x}{15_1} = \frac{27}{15}$$

یا $$x = \frac{27}{15} = \frac{3^1 \times 9}{3_1 \times 5}$$

لہٰذا $$x = \frac{9}{5} \quad \text{یا} \quad x = 1\frac{4}{5}$$

پڑتال:
اصل مساوات میں $\frac{9}{5}$ رکھیں۔

ہمارے پاس $$\frac{5}{3x} = \frac{25}{27}$$

$$\frac{5}{3 \times \frac{9}{5}} = \frac{25}{27}$$

$$\frac{5 \times 5}{3 \times 9} = \frac{25}{27}$$

$$\frac{25}{27} = \frac{25}{27}$$

پس ثابت ہوا کہ $x = 1\frac{4}{5}$

مثال 3: حل کریں: $\frac{19x}{7} = \frac{57}{49}$

حل: 7 اور 49 کا مشترک مخرج 49 ہے۔ دونوں اطراف کو 49 سے ضرب کریں اور مختصر کریں۔

$$49 \times \frac{19x}{7} = 49 \times \frac{57}{49}$$

یا $$\frac{{}^{7}\cancel{49} \times 19x}{\cancel{7}_1} = \frac{\overset{1}{\cancel{49}} \times 57}{\underset{1}{\cancel{49}}}$$

لہٰذا $$7 \times 19x = 57$$

دونوں اطراف کو 19 سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{7 \times \overset{1}{\cancel{19}}x}{\cancel{19}_1} = \frac{\overset{3}{\cancel{57}}}{\underset{1}{\cancel{19}}}$$

یا $$7x = 3$$

یا $$\frac{\cancel{7}x}{\underset{1}{\cancel{7}}} = \frac{3}{7}$$

یا $$x = \frac{3}{7}$$

پڑتال:

اصل مساوات میں $\frac{3}{7}$ رکھیں۔

ہمارے پاس $$\frac{19x}{7} = \frac{57}{49}$$

یا $$\frac{19 \times \frac{3}{7}}{7} = \frac{57}{49}$$

یا $$\frac{19 \times 3}{7 \times 7} = \frac{57}{49}$$

یا $$\frac{57}{49} = \frac{57}{49}$$

پس $$x = \frac{3}{7}$$

تو ثابت ہوا $$x = \frac{3}{7}$$

مشق 9.1

A. مندرجہ ذیل مساوات حل کریں۔

1. $x + 5 = 9$
2. $12 - x = 7$
3. $5x = 3$
4. $4x + 10 = 2$
5. $5 - 3x = -4$
6. $2 + 14x = 30$
7. $9 + 5x = 3x + 13$
8. $4 - 3x = 8 + x$
9. $4x + \frac{5}{2} = x + 4\frac{1}{2}$

B. مندرجہ ذیل مساوات حل کریں۔

1. $5 + 3(x - 1) = 5x - 6$
2. $6 - 4(x + 3) = 2(x - 1)$
3. $5(3 - x) - 2(4 - 3x) = 11 - 2(x - 1)$
4. $5(1 - 2x) + 2(3 - x) = 3(x + 4) + 14$
5. $(x + 2)(x + 3) = (x - 3)(x - 2) + 20$

C. ذیل کی مساوات حل کریں۔

1. $6x + 2 = 29 - 3x$ 2. $\frac{1}{3}x + 4 = \frac{4x - 1}{5}$ 3. $\frac{3x}{4} = \frac{2}{5}$

4. $\frac{8}{x} = 2$ 5. $\frac{7}{3x} = 2$ 6. $\frac{3}{x+1} = \frac{6}{5x-1}$

D. مساوات حل کریں۔

1. $5 + \frac{x}{3} = 7$ 2. $\frac{x}{2} - 1 = 5$ 3. $\frac{3x}{4} - 2 = \frac{x}{3} + 3$

4. $4 - \frac{2x}{3} = \frac{x+2}{5}$ 5. $\frac{x+2}{3} = \frac{1-2x}{5}$ 6. $\frac{4x+3}{3} = \frac{x+7}{2}$

7. $\frac{5x+1}{2} - \frac{x+2}{6} = \frac{2x+4}{3}$ 8. $\frac{x-3}{3} - \frac{7}{2} = \frac{4x-3}{3} - \frac{2}{3}$

(ii) ان جیسی اقسام کی یک درجی مساوات حل کرنا

- $ax + b = c$
- $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{m}{n}$

ہم اوپر دی گئی اقسام کی یک درجی مساوات کو بذریعہ مثالیں حل کرتے ہیں۔

مثال 1: حل کریں $5x + 10 = 25$

حل:

$5x + 10 = 25$

دونوں اطراف میں سے 10 تفریق کریں۔

$5x + 10 - 10 = 25 - 10$

یا $5x = 15$

دونوں اطراف کو 5 سے تقسیم کریں۔

$\frac{\cancel{5}^{1}x}{\cancel{5}_{1}} = \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{5}_{1}}$

یا $x = 3$

پڑتال:

اصل مساوات میں $x = 3$ رکھیں۔

$5x + 10 = 25$

$5 \times (3) + 10 = 25$

$15 + 10 = 25$

$25 = 25$

پس $x = 3$

تو ثابت ہوا $x = 3$

مثال 2: حل کریں: $\frac{2x+4}{5x+6} = \frac{1}{2}$

حل: ہمارے پاس $\frac{2x+4}{5x+6} = \frac{1}{2}$

ضرب چلیپائی کی مدد سے

$2(2x+4) = 1(5x+6)$

یا $4x + 8 = 5x + 6$

دونوں اطراف کو $4x$ سے تقسیم کریں۔

$\cancel{4x} + 8 - \cancel{4x} = 5x + 6 - 4x$

یا $8 = x + 6$

یا $8 - 6 = x$

یا $2 = x$

یا $x = 2$

پڑتال:

اصل مساوات میں $x = 2$ رکھیں۔

ہمارے پاس $\frac{2x+4}{5x+6} = \frac{1}{2}$

$\frac{2(2)+4}{5(2)+6} = \frac{1}{2}$

یا $\frac{4+4}{10+6} = \frac{1}{2}$

یا $\frac{\cancel{8}^{1}}{\cancel{16}_{2}} = \frac{1}{2}$

یا $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

پس $x = 2$

تو ثابت ہوا $x = 2$

مشق 9.2

مندرجہ ذیل مساوات کو حل کریں اور پڑتال کریں۔

(1) $3x + 9 = 18$ (2) $2x - 5 = 9$ (3) $4x - 5 = 11$

(4) $5x - 20 = 30$ (5) $3x + - 17 = 2$ (6) $13 - 3x = -2$

(7) $4x + 8 = 2$ (8) $\frac{x+3}{x-1} = \frac{6}{7}$ (9) $5x + 1 = \frac{6}{5}$

(10) $\frac{x-1}{x+2} = \frac{4}{3}$ (11) $\frac{2x+3}{7x+1} = \frac{7}{15}$ (12) $\frac{3x-8}{5x+2} = 1$

9.2.3 یک درجی مساوات پر مشتمل روزمرہ زندگی کے مسائل حل کرنا

یک درجی مساوات کو حل کرنے کی تیکنیک

مرحلہ 1: مسئلے کو غور سے پڑھیں۔ آپ جس نامعلوم کو معلوم کرنے کی کوشش کر رہے ہیں اُس کی شناخت کریں اور جو معلومات مسئلے کو حل کرنے کے لئے موجود ہے اس کا تعین کریں۔

مرحلہ 2: مسئلے میں نامعلوم مقدار کے لئے کسی مناسب متغیر کا انتخاب کریں۔

مرحلہ 3: معلوم اور نامعلوم مقداروں کے درمیان مساوات بنانے کے لئے تعلق کا استعمال کریں۔

مرحلہ 4: مساوات حل کریں، متغیر کی قیمت کا تعین کریں اور نتیجے کو مسئلے میں موجود کسی دوسرے نامعلوم مقدار کو معلوم کرنے کے لئے استعمال کریں۔

مرحلہ 5: جواب کی پڑتال کریں۔

مرحلہ 6: سوال کے جواب کو واضح عبارت کی صورت میں لکھیں۔

مثال 1: ثانیہ کو ٹیچر نے 25 میٹر تار کو دو ٹکڑوں میں اس طرح تقسیم کرنے کو کہا کہ ایک ٹکڑا دوسرے ٹکڑے سے 1 میٹر لمبا ہو۔ تو ہر ٹکڑے کی لمبائی معلوم کریں۔

حل: فرض کریں دونوں ٹکڑوں کی لمبائیاں بالترتیب x اور $x + 1$ میٹر ہیں۔

لہٰذا ثانیہ یک درجی مساوات کو یوں لکھ سکتی ہے۔

معلوم:

$$x + (x + 1) = 25$$

$$x + x + 1 = 25$$

یا $2x + 1 = 25$

یا $2x + 1 - 1 = 25 - 1$

یا $2x = 25 - 1 = 24$

یا $x = \frac{\cancel{24}^{12}}{\cancel{2}_1} = 12$

پڑتال:

ایک ٹکڑے کی لمبائی 13 میٹر ہے۔

دوسرے ٹکڑے کی لمبائی 12 میٹر ہے۔

تار کی کل لمبائی 13 میٹر + 12 میٹر = 25 میٹر ہے۔

پس ثابت ہوا۔

لہٰذا تار کا ایک ٹکڑا 12 میٹر لمبا ہے اور دوسرے کی لمبائی $(x + 1)$ میٹر ہے۔

اس لئے $(x + 1) = (12 + 1) = 13$

اس لئے تار کے دونوں ٹکڑوں کی لمبائیاں بالترتیب 12 میٹر اور 13 میٹر ہیں۔

مثال 2: اب سے 20 سال کے بعد نازیہ کی عمر، موجودہ عمر کا تین گنا ہو جائے گی۔ اس کی موجودہ عمر معلوم کریں۔

حل: فرض کریں نازیہ کی موجودہ عمر x سال ہے۔

اب سے 20 سال کے بعد عمر $x + 20$ سال ہو جائے گی۔

لیکن 20 سال کے بعد نازیہ کی عمر موجودہ عمر کا تین گنا ہو جائے گی یعنی $3x$ سال۔

لہٰذا $x + 20 = 3x$

یا $3x = x + 20$

$3x - x = 20$

یا $2x = 20$

یا $x = \frac{\cancel{20}^{10}}{\cancel{2}_1} = 10$

اس لئے نازیہ کی موجودہ عمر 10 سال ہے۔

پڑتال:

نازیہ کی موجودہ عمر 10 سال ہے۔

10 سال کے بعد اس کی عمر $20 + 10 = 30$ سال

جو کہ اس کی موجودہ عمر کا تین گنا ہے۔

یعنی $30 = 3 \times 10$

پس ثابت ہوا

مثال 3: دو متواتر طاق اعداد کا مجموعہ 36 ہے۔ اعداد معلوم کریں۔

حل: فرض کریں ایک طاق عدد x ہے۔

تو دوسرا متواتر عدد $x + 2$ ہوگا

ان کا مجموعہ 36 ہے۔

لہٰذا مطلوبہ یک درجی مساوات ہے:

$x + (x + 2) = 36$

یا $x + x + 2 = 36$

یا $2x + 2 = 36$

یا $2x + 2 - 2 = 36 - 2$

$2x = 34$

یا $\frac{2x}{2} = \frac{\cancel{34}^{17}}{\cancel{2}_1} = 17$

یا $x = 17$

پڑتال:

پہلا طاق عدد 17 ہے۔

دوسرا متواتر طاق عدد 19

ان کا مجموعہ $19 + 17 = 36$ ہے۔

پس ثابت ہوا

اس لئے پہلا طاق عدد 17 اور دوسرا متواتر طاق عدد $x + 2 = 2 + 12 = 19$ ہے۔

لہٰذا 17 اور 19 مطلوبہ طاق اعداد ہیں۔

مشق 9.3

-1 اسلم کے پاس 35 روپے تھے۔ اس نے تین پنسلیں خریدیں تو اس کے پاس 5 روپے بچے۔ پنسلوں کی قیمت معلوم کریں۔

-2 علی کے پاس کچھ رقم ہے۔ اگر اس رقم کے تین گنا میں 7 جمع کئے جائیں تو یہ 22 روپے بناتے ہیں۔ لہٰذا علی کے پاس کتنی رقم ہے؟

-3 کمرے کی لمبائی اُس کی چوڑائی سے 1.5 میٹر زیادہ ہے۔ اگر کمرے کا احاطہ 63 میٹر ہے تو کمرے کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کریں۔

-4 مثلث ABC کا احاطہ 11 سینٹی میٹر ہے۔ اضلاع $\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$ کی لمبائیوں کا فرق 1 سینٹی میٹر اور $\overline{AC}$ اور $\overline{BC}$ کی لمبائیوں کا فرق 3 سینٹی میٹر ہو تو ہر ضلع کی لمبائی معلوم کریں۔

-5 ایک 32 سینٹی میٹر لمبی تار کو مربعی شکل میں موڑا گیا ہے۔ مربع کے ہر ضلع کی لمبائی معلوم کریں۔

-6 احسن اور اصغر کے پاس کل 800 روپے تھے اور احسن کے پاس اصغر کے مقابلے میں چار گنا رقم تھی تو احسن اور اصغر کے پاس الگ الگ کتنے روپے تھے؟

-7 اپنے دوست کو ایک عدد سوچنے کے لئے کہیں۔ اس میں 3 جمع کریں اور پھر 2 سے ضرب دیں۔ اب اس میں سے 6 تفریق کریں اور پھر جواب کو 2 سے تقسیم کریں۔ تو عدد کیا ہے؟ کیا اُسے وہی عدد ملا جو اُس نے شروع میں سوچا تھا؟

-8 وہ دو متواتر اعداد کون سے ہیں جن کا مجموعہ 43 ہوتا ہے۔

-9 وہ تین متواتر مکمل اعداد کون سے ہیں جن کا مجموعہ 48 ہوگا۔

-10 اگر کسی رقم کے تیسرے اور چوتھے حصے کا مجموعہ 14 روپے ہے تو رقم معلوم کریں۔

-11 دو اعداد کا مجموعہ 9 ہے اور پہلے عدد کے پانچ گنا اور دوسرے عدد کے چار گنا کا فرق 9 ہے۔ اعداد معلوم کریں۔

-12 چار متواتر طاق اعداد کا مجموعہ 120 ہے تو اعداد معلوم کریں۔

جائزہ مشق 9

1- ذیل کی یک درجی مساوات لکھیں:

i- دو متواتر جفت اعداد کا مجموعہ 42 ہے۔

ii- تین متواتر طاق اعداد کا مجموعہ 21 ہے۔

iii- چار متواتر قدرتی اعداد کا مجموعہ 46 ہے۔

2- مختلف اقسام کی مختلف متغیرات پر مشتمل تین مختلف یک درجی مساوات لکھیں۔

3- مساوات کے حل کا مطلب کیا ہوتا ہے؟ دو مثالیں دیں۔

4- خالی جگہیں پُر کریں:

i- ایک متغیر میں 1 درجے والی یک درجی مساوات __________ میں کہلاتی ہے۔

ii- حل کو مساوات کا __________ بھی کہتے ہیں۔

iii- مساوات کو درست بنانے کے لئے متغیر کی قیمت معلوم کرنے کا عمل اُس کا ________ کہلاتا ہے۔

iv- یک درجی مساوات کے دونوں اطراف ______ کو جمع کرنا اس کی برابری پر کوئی اثر نہیں پڑتا ہے۔

5- درست جواب پر (✓) کا نشان لگائیں۔

i- ایک یک درجی مساوات درجے پر مشتمل ہوتا ہے۔

(الف) ایک (ب) دو (ج) تین (د) چار

ii- $1\frac{1}{2}$ تو $x = ؟$

(الف) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (ج) 1 (د) $\frac{2}{3}$

iii- یک درجی مساوات $2x + 1 = 6$ کا درجہ ہے:

(الف) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

iv- $1 + 6x = 7$ کا حل ہے۔

(الف) $x = 0$ (ب) $x = 1$ (ج) $x = 2$ (د) $x = 3$

-6 ذیل کی مساوات کو حل کریں:

(i) $\frac{x}{2} - 4 = 2$ (ii) $\frac{x-7}{4} = 3$ (iii) $\frac{x-5}{2}$

(iv) $\frac{x+1}{x-3} = \frac{5}{3}$ (v) $\frac{x-2}{x-1} = \frac{3}{4}$ (vi) $\frac{x+3}{3} = \frac{x+6}{2}$

-7 ایک 120 سینٹی میٹر لمبی تار کو یوں مستطیلی شکل دی گئی ہے کہ لمبائی، چوڑائی سے 10 سینٹی میٹر زیادہ ہے۔ مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کریں۔

خلاصہ

- ایسی مساوات جو ایک متغیر اور قوت 1 رکھتی ہو، ایک متغیر میں یک درجی مساوات کہلاتی ہے۔ مثال کے طور پر: $a x + b = c$ یا $2x + 3 = 4$ وغیرہ۔
- متغیر کی قیمت جو مساوات کو درست بنائے وہ مساوات کا حل کہلاتی ہے۔

مثال کے طور پر: $2x + 3 = 5$

تو $2x = 5 - 3 = 2$

یا $2x = 2$ تو $x = 1$ اس کا حل ہے۔

- مساوات کی دونوں اطراف میں کسی بھی عدد کو جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ اس سے مساوات کی برابری پر کوئی اثر نہیں پڑتا ہے لیکن تقسیم کرنے کی صورت میں یہ عدد غیر صفر ہونا چاہئے۔
- یک درجی مساوات پر مشتمل روزمرہ مسائل کو حل کرنے کے چار مراحل ہوتے ہیں:

(i) مطلوبہ چیز کیا ہے؟

(ii) مطلوبہ چیز کو متغیر سے ظاہر کرنا

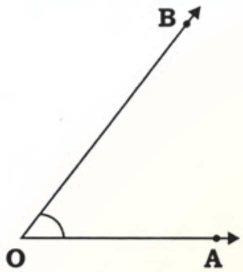
(iii) عبارت کے مطابق مساوات لکھنا

(iv) مساوات کو حل کرنا اور حل کی پڑتال کرنا

یونٹ 10

جیومیٹری کے بنیادی تصورات

10.1 زاویوں کی خاصیتیں



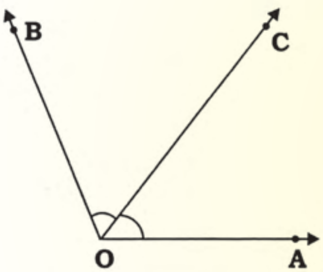
زاویہ AOB کو غور سے دیکھیں۔

یہ دو غیر ہم خط شعاعوں $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ سے مل کر بنا ہے جس کا ایک سرا O مشترک ہے۔ نقطہ O راس کہلاتا ہے۔

$\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ زاویے ∠AOB کے بازو ہیں۔

10.1.1 متصلہ، کمپلیمنٹری اور سپلیمنٹری زاویوں کی وضاحت کرنا

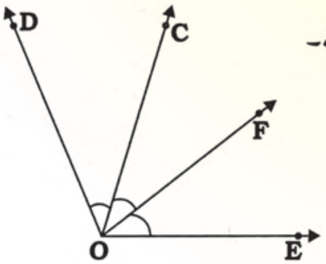
(i) متصلہ زاویوں کے جوڑے



سامنے دی ہوئی شکل پر غور کریں۔

∠AOC اور ∠BOC بالترتیب $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OC}$ اور $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{OC}$ سے مل کر بنے ہیں۔

ہم دیکھ سکتے ہیں، نقطہ O دونوں زاویوں ∠AOC اور ∠BOC کا مشترک راس ہے۔ $\overrightarrow{OC}$ ان زاویوں کا مشترک بازو ہے۔



∠AOC اور ∠BOC کے اندرونے میں کوئی دوسرا سرا مشترک نہیں ہے۔

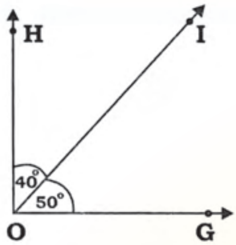
لہٰذا ∠AOC اور ∠BOC متصلہ زاویوں کا جوڑا ہے۔

اب دی ہوئی شکل کو غور سے دیکھیں۔

اس کے متصلہ زاویوں کے چار جوڑے ہیں۔

ہم متصلہ زاویوں کے چاروں جوڑوں کے نام یوں لکھ سکتے ہیں، جیسا کہ نیچے دیے گئے ہیں:

(∠EOF, ∠COF)، (∠COF, COD)، (∠EOF, ∠FOD) اور (∠EOC, ∠COD)



(ii) کمپلیمنٹری زاویے:

اگر دو زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ 90° ہو تو، وہ کمپلیمنٹری زاویے کہلاتے ہیں۔ ہر زاویہ دوسرے زاویے کا کمپلیمنٹ ہوتا ہے۔

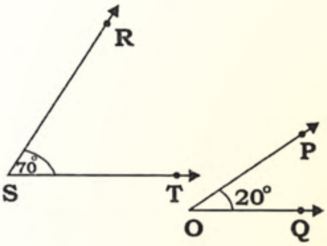
اس شکل میں ہم دیکھتے ہیں کہ:

$$m\angle GOI + m\angle HOI = 50^\circ + 40^\circ = 90^\circ$$

اس لئے $\angle GOI$ اور $\angle HOI$ کمپلیمنٹری زاویے ہیں۔

اور $\angle GOI$ زاویہ $\angle HOI$ کا کمپلیمنٹ ہے یا $\angle HOI$ زاویہ $\angle GOI$ کا کمپلیمنٹ ہے۔

آئیں اس تصویر کو غور سے دیکھیں۔



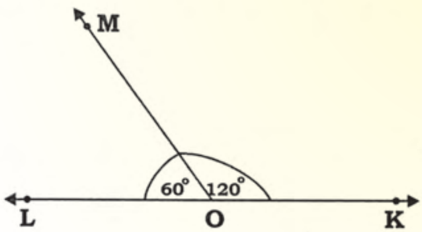
یہاں دونوں زاویے $m\angle POQ = 20^\circ$ اور $m\angle RST = 70^\circ$

اور $m\angle POQ$ اور $m\angle RST$ کا مجموعہ $= 20^\circ + 70^\circ = 90^\circ$

اس لئے $\angle POQ$ اور $\angle RST$ کمپلیمنٹری زاویے ہیں۔

(iii) سپلیمنٹری زاویے

اگر دو زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ 180° ہو تو وہ سپلیمنٹری زاویے کہلاتے ہیں۔ ہر زاویہ دوسرے کا سپلیمنٹ ہوتا ہے۔



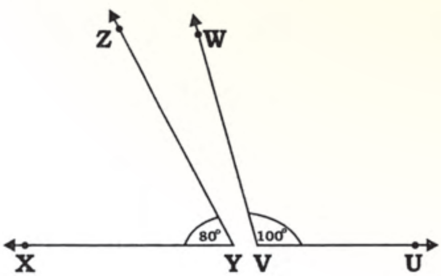
اس شکل میں ہم دیکھتے ہیں کہ:

$$m\angle MOK + m\angle MOL = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$$

لہٰذا $\angle MOK$ اور $\angle MOL$ سپلیمنٹری زاویے ہیں۔

یعنی $\angle MOK$ زاویہ $\angle MOL$ کا سپلیمنٹ ہے۔

یا $\angle MOL$ زاویہ $\angle MOK$ کا سپلیمنٹ ہے۔



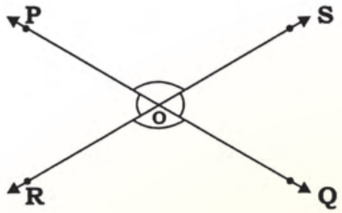
اب اس تصویر کو غور سے دیکھیں۔ یہاں دو زاویے

$m\angle UVW = 100^\circ$ اور $m\angle XYZ = 80^\circ$ ہیں

ان دونوں زاویوں کا مجموعہ $= 80^\circ + 100^\circ = 180^\circ$

اس لئے یہ دونوں سپلیمنٹری زاویے ہیں اور ہر زاویہ دوسرے کا سپلیمنٹ ہے۔

10.1.2 راسی متقابلہ زاویے



دی گئی شکل کو غور سے دیکھیں۔

$\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{RS}$ ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں

جس سے چار زاویے بنے ہیں۔

$\angle POS$، $\angle QOR$، $\angle POR$ اور $\angle QOS$۔

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ:

(i) نقطہ O چاروں زاویوں کا مشترک راس ہے۔

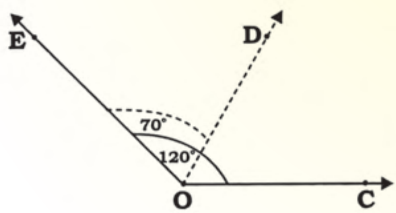
(ii) $\angle POS$ اور $\angle QOR$ کے بازو مخالف شعاعیں ہیں۔

(iii) $\angle POR$ اور $\angle QOS$ کے بازو مخالف شعاعیں ہیں۔

(iv) $\angle POS$ اور $\angle QOR$ راسی متقابلہ زاویوں کا جوڑا ہے اور یہ پیمائش میں برابر ہیں۔

(v) اس ہی طرح $\angle POR$ اور $\angle QOS$ راسی متقابلہ زاویوں کا جوڑا ہے اور یہ پیمائش میں برابر ہیں۔

10.1.3 متصلہ، کمپلیمنٹری، سپلیمنٹری اور راسی متقابلہ زاویوں پر مشتمل نامعلوم زاویے معلوم کرنا



مثال 1: سامنے دی گئی شکل کو غور سے دیکھیں۔ متصلہ زاویوں کے جوڑوں کے نام لکھیں اور نامعلوم زاویوں کی مقدار معلوم کریں۔

حل: شکل کو دیکھنے سے یہ معلوم ہوا کہ $\angle COD$ اور $\angle EOD$

دو متصلہ زاویوں کا جوڑا ہے اور $m\angle EOD = 70°$

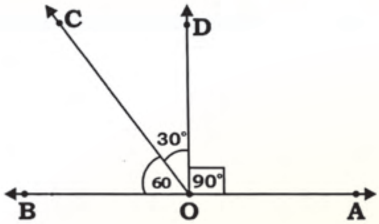
اور $m\angle COE = 120°$ اور $m\angle COE = m\angle COD + m\angle EOD$

یا $120° = m\angle COD + 70°$

یا $m\angle COD = 120° - 70°$

یا $m\angle COD = 50°$

لہٰذا نامعلوم زاویہ $(m\angle COD)$ $50°$ کا ہے۔



مثال2: سامنے دی گئی شکل کو غور سے دیکھیں۔

نام لکھیں

(i) متصلہ زاویوں کے جوڑے کا

(ii) کمپلیمنٹری زاویوں کے جوڑے کا

(iii) سپلیمنٹری زاویوں کے جوڑے کا

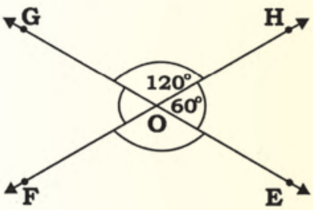
حل: شکل کو دیکھنے سے یہ معلوم ہوا کہ:

(i) متصلہ زاویوں کے چار جوڑے ہیں:

$(\angle AOC, \angle BOC)$، $(\angle COD, \angle BOC)$، $(\angle AOD, \angle BOD)$ اور $(\angle AOD, \angle COD)$

(ii) کمپلیمنٹری زاویوں کا ایک جوڑا $(\angle COD, \angle BOC)$ ہے۔

(iii) سپلیمنٹری زاویوں کے دو جوڑے $(\angle AOD, \angle BOD)$ اور $(\angle AOC, \angle BOC)$ ہیں۔



سرگرمی: باقی زاویے معلوم کریں جب کہ:

$m\angle EOH = 60°$ اور $m\angle HOG = 120°$

اس لئے $m\angle FOG =$ ________ کیونکہ

$m\angle EOH =$ ________ (راسی متقابلہ زاویے)

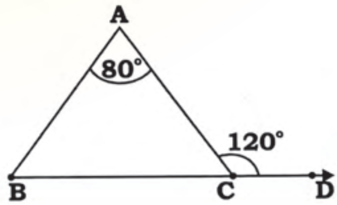
اسی طرح $m\angle EOF =$ ________ کیونکہ

$m\angle EOF =$ ________ (راسی متقابلہ زاویے)

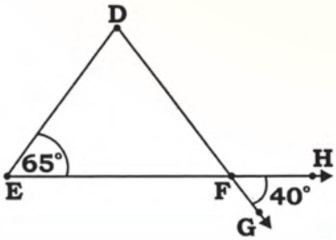
10.1.14 مثلث کے نامعلوم زاویے معلوم کرنا

ہم جانتے ہیں کہ مثلث کے تینوں زاویوں کی پیمائش کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے۔ مثلث کے مجموعہ کی اس خاصیت کو استعمال کرتے ہوئے ہم مثلث کے نامعلوم زاویوں کی پیمائش معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال: دی گئی شکل میں نامعلوم زاویے معلوم کریں۔



سرگرمی: نامعلوم زاویے معلوم کریں۔



حل: دی گئی شکل میں

$m\angle BAC = 80°$ ، $\angle mACD = 120°$

ہمیں مندرجہ ذیل زاویوں کی پیمائش معلوم کرنی ہے۔

(a) $m\angle ABC = ?$ (b) $m\angle ACB = ?$

شکل کے مشاہدہ سے معلوم ہوتا ہے کہ

$m\angle ACB + m\angle ACD = 180°$

(سپلیمنٹری زاویے)

لیکن (معلوم) $m\angle ACD = 120°$

لہٰذا $m\angle ACB = 180° - m\angle ACD$

$= 180° - 120° = 60° \ldots(i)$

اور

$m\angle ABC + m\angle BAC + m\angle ACB = 180°$

(مثلث کے زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے)

پس

$m\angle ABC + m\angle BAC + m\angle ACB = 180°$

لہٰذا $m\angle ABC + 80° + 60° = 180°$

یا $m\angle ABC + 140° = 180°$

یا $m\angle ABC = 180° - 140° = 40° \ldots(ii)$

پس $m\angle ABC = 40°$

اور $m\angle ACB = 60°$

آئیں سرگرمی کو حل کریں۔

دی گئی شکل سے ______ = $m\angle DEF$۔

دی گئی شکل سے یہ بھی واضح ہے کہ $\overrightarrow{DG}$ اور $\overrightarrow{EF}$ ایک دوسرے کو نقطہ ______ پر قطع کرتے ہیں اور دو راسی متقابلہ زاویے بناتے ہیں۔

______ اور ______

لہٰذا $m\angle DEF =$ ______

جیسا کہ $m\angle HFG =$ ______

اس لئے (i) $m\angle DFE =$ ______

مثلث کے زاویوں کا مجموعہ = ______

یعنی

$m\angle DEF + m\angle DFE + m\angle EDF =$ ____

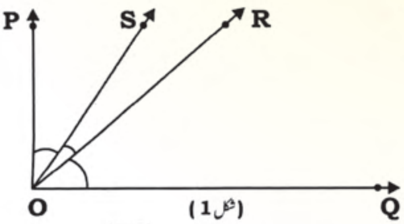
یا $65° + 40° + m\angle EDF =$ ____

یا (ii) $m\angle EDF = 180° - (65° + 40°) =$ ____

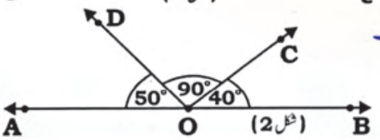
$m\angle EDF = 75°$

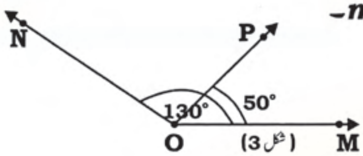
مشق 10.1

1- شکل (1) میں دکھائے گئے تمام متصلہ زاویوں کے نام لکھیں۔



2- شکل (2) میں دکھائے گئے تمام سپلیمنٹری زاویوں کے نام لکھیں۔





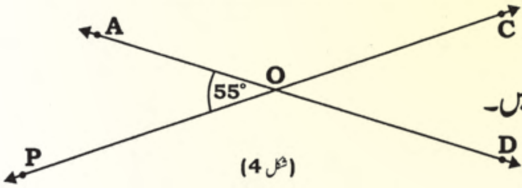
3- شکل (3) میں $m\angle MON = 130°$ اور $m\angle MOP = 50°$۔
متصلہ زاویہ $\angle PON$ کی پیمائش معلوم کریں۔

4- ذیل میں دیئے گئے زاویوں کے کمپلیمنٹ کی پیمائش لکھیں۔

دیئے گئے زاویے کی پیمائش	49°	62°	54°	36°	67°	81°	15°
اس کے کمپلیمنٹ کی پیمائش							

5- ذیل میں دیئے گئے زاویوں کے سپلیمنٹ کی پیمائش لکھیں۔

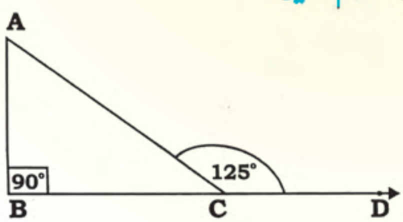
دیئے گئے زاویے کی پیمائش	80°	132°	49°	76°	125°	103°	68°
اس کے سپلیمنٹ کی پیمائش							



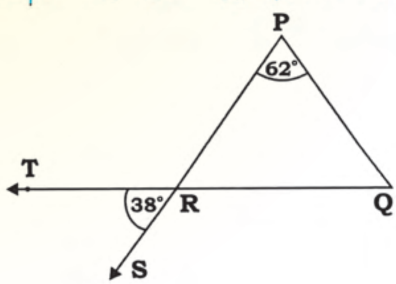
6- شکل (4) کو غور سے دیکھیں۔
تمام راسی متقابلہ زاویوں کے جوڑوں کی پیمائش لکھیں۔

7- مندرجہ ذیل مثلثوں میں نامعلوم زاویوں کی پیمائش معلوم کریں۔

(i)



(ii)



8- درست جواب کا انتخاب کریں اور خالی جگہیں پُر کریں:

(i) اگر کوئی زاویہ اپنے کمپلیمنٹ کے برابر ہے تو اس کی پیمائش ______ ہو گی۔ (90°, 45°, 180°)

(ii) اگر کوئی زاویہ اپنے سپلیمنٹ کے برابر ہے تو اس کی پیائش ______ ہو گی ۔ (45°, 90°, 180°)

(iii) حادہ زاویہ کا سپلیمنٹ ______ زاویہ ہوتا ہے۔ (حادہ، قائمہ، منفرجہ)

(iv) اگر سپلیمنٹری زاویوں کے جوڑے کا ایک زاویہ قائمہ زاویہ ہے تو دوسرا زاویہ ______ زاویہ ہوگا۔ (حادہ، قائمہ، منفرجہ)

(v) کمپلیمنٹری زاویوں کے جوڑے کا ہر زاویہ ______ زاویہ ہوتا ہے۔ (حادہ، منفرجہ، قائمہ)

(vi) ایک دوسرے کو قطع کرنے والے دو خطوط سے بننے والے چار زاویوں میں سے ایک زاویہ قائمہ ہے اس لئے دوسرے زاویے ______ زاویے ہوں گے۔ (حادہ، قائمہ، منفرجہ)

10.2 متماثل اور ایک جیسی اشکال

10.2.1 متماثل اور ایک جیسی اشکال کی شناخت کرنا

ہر جوڑے کی اشکال کا مشاہدہ کریں۔

متماثل اشکال: بلکل ایک جیسی جسامت اور بناوٹ والی اشکال متماثل اشکال کہلاتی ہیں۔ یہ مختلف رنگ اور نمونے کی ہو سکتی ہیں۔

مثال: تمام مربعے، مستطیل، دائرے اور مساوی الاضلاع مثلث بلکل ایک جیسی جسامت اور شکل رکھتے ہیں۔ یہ متماثل اشکال کہلاتیں ہیں۔ نیچے دیئے گئے اشکال کے جوڑوں کو غور سے دیکھیں۔

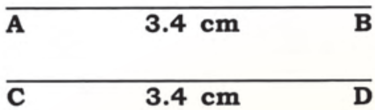
ایک جیسی اشکال: یہ بلکل ایک جیسی بناوٹ رکھتیں ہیں لیکن جسامت کا ایک جیسا ہونا ضروری نہیں ہے۔ ایسی اشکال ایک جیسی اشکال کہلاتی ہیں۔

مثال: تمام مربعے، دائرے اور مساوی الاضلاع مثلث ایک جیسی اشکال کی مثالیں ہیں۔

10.2.2 متماثل کی علامت کی پہچان کرنا

(i) متماثل اشکال: دو یا دو سے زیادہ جیومیٹریکل اشکال متماثل کہلاتی ہیں اگر وہ بالکل ایک جیسی جسامت اور بناوٹ رکھتی ہوں۔ متماثل کی علامت '$\cong$' ہے۔

مثال کے طور پر: (i) دو قطعہ خط متماثل ہوں گے اگر ان کی لمبائیاں یکساں ہوں۔

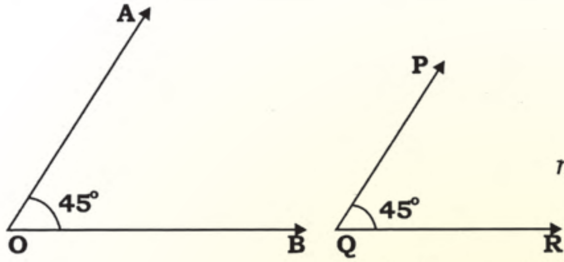


یہاں $m\overline{AB} = 3.4\text{ cm} = m\overline{CD}$

دونوں کی بناوٹ اور جسامت ایک جیسی ہے۔

تو $m\overline{AB} = m\overline{CD}$ اور $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

(ii) اب سامنے دئے گئے زاویوں پر غور کریں۔

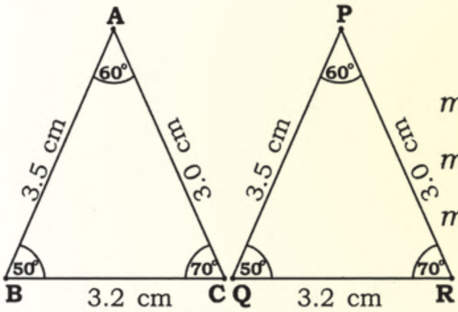


$\angle AOB$ اور $\angle PQR$

یہاں $m\angle AOB = 45^\circ$ اور $m\angle PQR = 45^\circ$

دونوں بالکل ایک جیسی شکل اور بناوٹ رکھتیں ہیں ۔

لہٰذا اوپر دیئے گئے دونوں زاویے متماثل ہیں جیسے: $\angle AOB \cong \angle PQR$



(iii) آئیں پھر ΔABC اور ΔPQR پر غور کریں۔ یہاں

$m\overline{AB} = m\overline{PQ} = 3.5\text{ cm}, m\angle BAC = m\angle QPR = 60^\circ$

$m\overline{BC} = m\overline{QR} = 3.2\text{ cm}, m\angle ABC = m\angle PQR = 50^\circ$

$m\overline{CA} = m\overline{RP} = 3.0\text{ cm}, m\angle BCA = m\angle QRP = 70^\circ$

دونوں مثلث بلکل ایک جیسی بناوٹ اور جسامت رکھتے ہیں۔

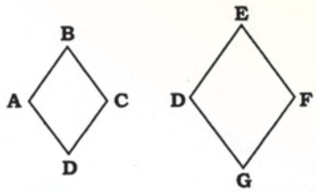
لہٰذا $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

(iii) ایک جیسی اشکال

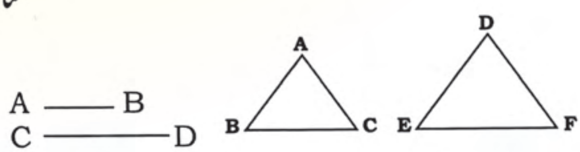
دو یا دو سے زیادہ جیومیٹریکل اشکال ایک جیسی اشکال کہلاتی ہیں اگر ان کی بناوٹ ایک جیسی ہو تو۔

ایک جیسی جیومیٹریکل اشکال کو علامت '~' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر:



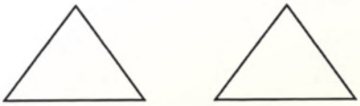
(چوکور ABCD ~ چوکور DEFG)



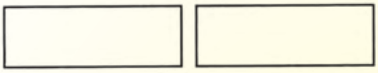
یا $\overline{AB} \sim \overline{CD}$

مشق 10.2

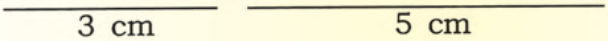
1- ذیل میں متماثل یا ایک جیسی اشکال لکھیں۔

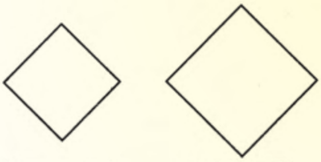
i. 

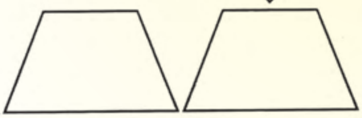
ii.

iii. 

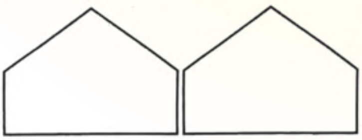
iv.

v. 

vi. 

vii. 

viii.

ix. 

x.

2- ذیل کی جیومیٹریکل اشکال بنائیں۔

(i) دو مختلف جسامت کے مستطیل بنائیں۔ کیا وہ ایک جیسے ہیں؟

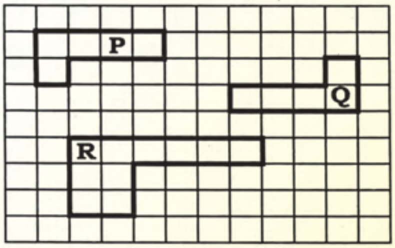
(ii) دو مختلف رداس کے دائرے بنائیں۔ کیا وہ متماثل ہیں؟

(iii) دو مساوی الاضلاع مثلث ایک جیسی پیمائش کے بنائیں۔ کیا وہ ایک جیسے ہیں؟

(iv) دو مختلف جسامت کے مربعے بنائیں۔ کیا وہ متماثل ہیں؟

(v) دو مستطیل ایک جیسی جسامت کے بنائیں۔ کیا وہ متماثل ہیں؟

3- گراف کو غور سے دیکھیں اور تصاویر P، Q اور R پر غور کریں اور مندرجہ ذیل سوالات کے جوابات دیں۔



(i) کیا شکل P بناوٹ میں شکل R جیسی ہے؟

(ii) کیا شکل P جسامت میں شکل R جیسی ہے؟

(iii) کیا وہ متماثل ہیں؟

(iv) کیا وہ ایک جیسی ہیں؟

(v) شکل P اور شکل Q میں کیا تعلق ہے؟

4- صحیح کے لئے 'ص' اور غلط کے لئے 'غ' لکھیں۔

(i) 10 روپے کے نوٹ کی شکل 100 روپے جیسی ہے لٰہذا وہ ایک جیسی اشکال ہیں۔

(ii) 20 روپے کے نوٹ کی شکل 50 روپے جیسی نہیں ہے لٰہذا وہ ایک جیسی اشکال ہیں۔

(iii) 500 روپے کے نوٹ کی شکل 100 روپے کے نوٹ کی شکل کے متماثل ہے۔

(iv) 100 روپے کے نوٹ کی شکل 50 روپے کے نوٹ کی شکل کے متماثل نہیں ہے۔

(v) 20 روپے کے نوٹ کی شکل اور 500 روپے کے نوٹ کی شکل ایک جیسی ہیں۔

10.2.3 دو اشکال کے متماثل یا ایک جیسی ہونے کی خاصیتوں کا اطلاق کرنا

ہم پہلے ہی اشکال کے متماثل اور ایک جیسی ہونے کے بارے میں بحث کر چکے ہیں۔ ہم جانتے ہیں:

(i) متماثل اشکال ایک جیسی بناوٹ رکھتیں ہیں اور ضروری ہے کہ ان کی جسامت بھی ایک جیسی ہو۔

(ii) ایک جیسی اشکال یکساں بناوٹ رکھتیں ہوں یعنی زاویے اور اضلاع کی نسبتیں یکساں ہونا ضروری ہیں لیکن یکساں جسامت ہونا ضروری نہیں۔

آئیں اب ہم دو اشکال کا متماثل اور ایک جیسی ہونے کی دونوں خاصیتوں کا استعمال کرتے ہیں۔

مثال 1: ذیل میں دیئے گئے اشکال کے جوڑوں کو غور سے دیکھیں۔ بطور متماثل یا ایک جیسی شناخت کریں۔

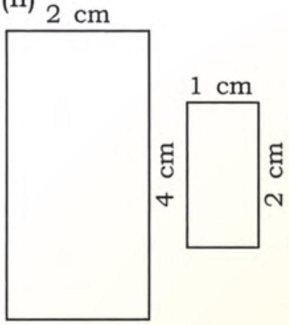
(i) P 2.7 cm Q

R 2.7 cm S

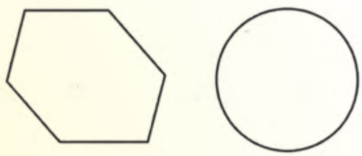
دونوں قطعہ خط ایک جیسی بناوٹ اور جسامت رکھتے ہیں

اس لئے $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$

(ii) یہ دو مستطیل ہیں۔ ان کی بناوٹ ایک جیسی مگر جسامت مختلف ہے۔ ان کے اضلاع کے لمبائیوں کی نسبت بھی ایک جیسی ہے۔ اس لئے یہ ایک جیسی اشکال ہیں۔



(iii)



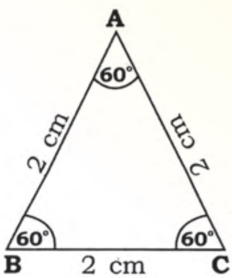
دونوں اشکال کی شکل مختلف ہے لہٰذا یہ اشکال نا تو ایک جیسی اور نہ ہی متماثل ہیں۔

(iv)

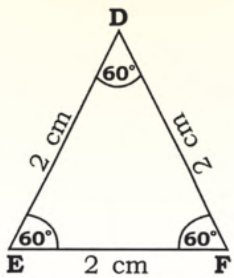
دونوں اشکال ایک ہی قسم کی شے کو ظاہر کرتی ہیں۔ دونوں کی بناوٹ تقریباً ایک جیسی ہیں لیکن جسامت مختلف ہے اس لئے یہ ایک جیسی اشکال ہیں۔

مثال 2: شناخت کریں اور ایک جیسی اور متماثل مثلثیں لکھیں۔

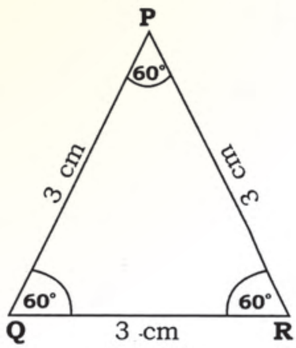
آئیں ذیل کی مثلثوں پر غور کریں۔



شکل (i)



شکل (ii)



شکل (iii)

جسمات میں بڑا کیا گیا مثلث

ΔABC اور ΔDEF میں
تمام متناظرہ اضلاع اور زاویے برابر ہیں۔

$m\overline{AB} = m\overline{DE}$, $m\overline{BC} = m\overline{EF}$

$m\overline{CA} = m\overline{FD}$

$m\angle ACB = m\angle DFE,$

$m\angle ABC = m\angle DEF,$

$m\angle BAC = m\angle EDF$

اس لئے $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ یوں پڑھتے ہیں کہ ΔABC اور ΔDEF متماثل ہیں۔

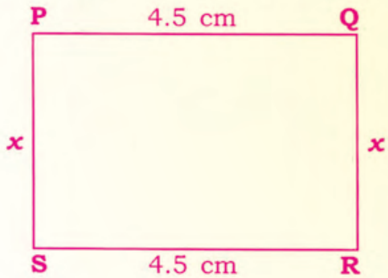
شکل (ii) اور (iii) پر غور کریں۔ ΔDEF اصل مثلث ہے اور ΔPQR بڑا کیا گیا مثلث ہے۔ اس لئے ΔDEF اور ΔPQR ایک جیسے ہیں۔ یہاں متناظرہ زاویے ایک جیسے ہیں اور اضلاع کی لمبائیوں کو ایک ہی نسبت سے بڑھایا گیا ہے۔ یعنی متناظرہ اضلاع ایک جیسے تناسب میں ہیں

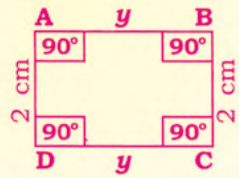
$$\frac{\overline{DE}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{RP}} = \frac{2}{3}$$

لہٰذا $\Delta DEF \sim \Delta PQR$

اور یوں پڑھتے ہیں کہ ΔDEF ایک جیسا ہے ΔPQR سے۔

مثال 4: اگر دونوں مستطیل ایک جیسے ہیں۔ تو نامعلوم اجزاء کی پیمائش کریں جبکہ اضلاع کی پیمائشوں میں $\frac{3}{2}$ کی نسبت ہے۔





حل: چونکہ مستطیل ABCD ~ مستطیل PQRS

تو (i) متناظرہ اضلاع متناسب ہیں۔

(ii) متناظرہ زاویے برابر ہیں۔

$m\angle P = m\angle A = 90°, m\angle Q = m\angle B = 90°, m\angle R = m\angle C = 90°, m\angle S = m\angle D = 90°$

اور $\frac{m\overline{PQ}}{m\overline{AB}} = \frac{4.5}{y} = \frac{3}{2}$

لہٰذا $y = \frac{(4.5) \times 2}{3} = \frac{9}{3} = 3$، لہٰذا $m\overline{AB} = 3$

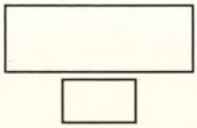
اس لئے $\frac{m\overline{QR}}{m\overline{BC}} = \frac{x}{2} = \frac{3}{2}$

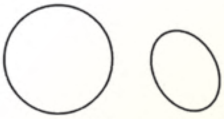
لہٰذا $x = \frac{2 \times 3}{2}$، تو $x = 3$ یا $m\overline{QR} = 3 \text{ cm}$

مشق 10.3

1- فیصلہ کریں کہ آیا ذیل میں اشکال کے جوڑے متماثل یا ایک جیسے یا نہ تو ایک جیسے ہیں نہ ہی متماثل ہیں۔
(پہلے تین حصے حل کر دیئے گئے ہیں)

(i)

(ii)


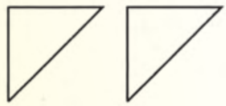
(iii)


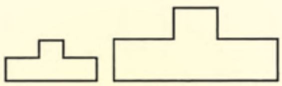
حل:

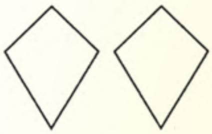
(i) ایک جیسی بناوٹ ایک جیسی جسامت (متماثل)

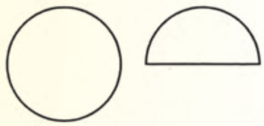
(ii) ایک جیسی بناوٹ لیکن مختلف جسامت ایک جیسے

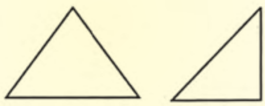
(iii) نہ ایک جیسی بناوٹ نہ ہی ایک جیسی جسامت۔(نہ ہی ایک جیسی اور نہ ہی متماثل)

(vi)


(v)


(iv)


(ix)


(viii)


(vii)

2- ذیل میں دیئے گئے متماثل قطعہ خط کو بذریعہ علامت لکھیں۔

$m\overline{AB} = 3.2$ cm	$m\overline{CD} = 4.5$ cm
$m\overline{DE} = 5.1$ cm	$m\overline{GH} = 4.8$ cm
$m\overline{MN} = 4.5$ cm	$m\overline{XZ} = 5.1$ cm
$m\overline{YZ} = 4.8$ cm	$m\overline{PQ} = 5.4$ cm
$m\overline{RS} = 5.4$ cm	$m\overline{EF} = 3.9$ cm
$m\overline{YZ} = 3.9$ cm	$m\overline{XY} = 3.2$ cm

3- ذیل کے متماثل زاویوں کو بذریعہ علامت لکھیں۔

$m\angle ABC = 60^\circ$	$m\angle DEF = 70^\circ$
$m\angle XYZ = 110^\circ$	$m\angle PQR = 45^\circ$
$m\angle COD = 45^\circ$	$m\angle PRQ = 60^\circ$
$m\angle AOB = 70^\circ$	$m\angle MNS = 110^\circ$

4- خالی جگہیں پُر کریں۔

(i) $m\angle ABC = 100°$، $\angle ABC \cong \angle DEF$ اس لئے $m\angle DEF =$ ________

(ii) $m\angle PQR = m\angle XYZ$، اس لئے $\angle PQR$ ______ $\angle XYZ$

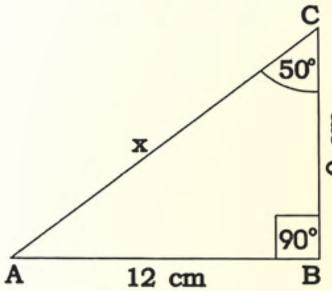
(iii) ایک جیسی لمبائیاں رکھنے والے قطعہ خط ________ کہلاتے ہیں۔

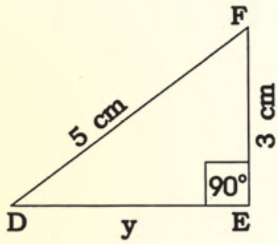
(iv) ________ پیائش رکھنے والے زاویے متماثل زاویے کہلاتے ہیں۔

(v) دو دائرے متماثل ہوتے ہیں اگر ان ________ برابر ہو۔

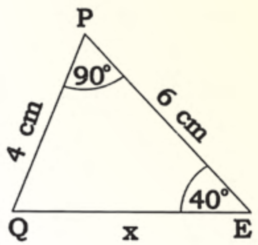
5- ذیل میں دی گئی ایک جیسی اشکال پر غور کریں۔ نامعلوم اجزاء x اور y معلوم کریں۔

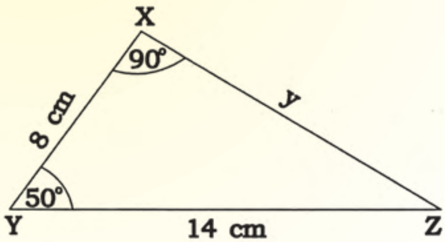
(i)



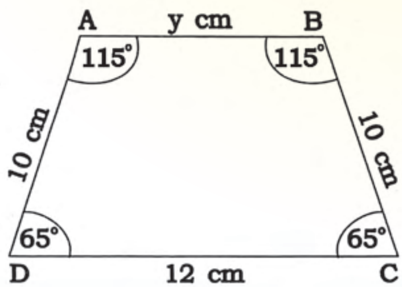


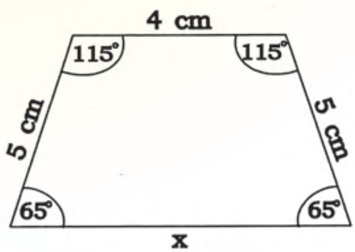
(ii)





(iii)





10.3 متماثل مثلث

دو مثلثوں کے درمیان تماثل کی ذیل کی خاصیتوں کا اطلاق کرنا

(i) SSS ≅ SSS (ii) SAS ≅ SAS

(iii) ASA ≅ ASA (iv) HS ≅ HS

یہ دو مثلثوں کے درمیان تماثل کی چار خاصتیں ہوتی ہیں۔

10.3.1 مثلثوں کے تماثل کی پہلی خاصتیں (SSS ≅ SSS)

خاصیت بتاتی ہے کہ دو مثلثیں متماثل ہوتیں ہیں اگر ان کے متناظرہ اضلاع متماثل ہوں۔

دونوں مثلثوں PQR اور XYZ پر غور کریں۔

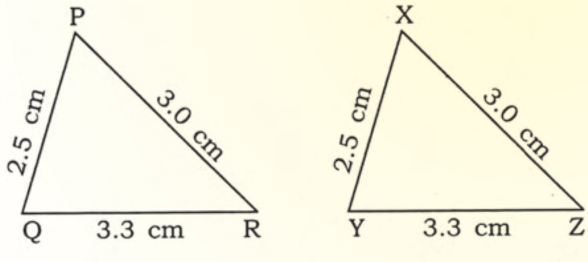
$\Delta PQR \longleftrightarrow \Delta XYZ$

یعنی: ΔPQR مطابقت رکھتا ہے ΔXYZ سے جیساکہ نیچے دیا گیا ہے:

(i) $m\overline{PQ} = 2.5cm$ ، $m\overline{XY} = 2.5cm$ اس لئے $\overline{PQ} \cong \overline{XY}$

(ii) $m\overline{PR} = 3.0cm$ ، $m\overline{XZ} = 3.0cm$ اس لئے $\overline{PR} \cong \overline{XZ}$

(iii) $m\overline{QR} = 3.3cm$ ، $m\overline{YZ} = 3.3cm$ اس لئے $\overline{QR} \cong \overline{YZ}$



لہٰذا $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

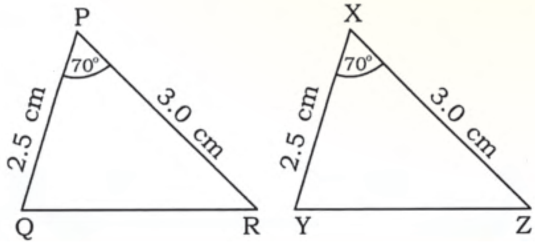
(SSS ≅ SSS)

10.3.2 مثلثوں کے تماثل کی دوسری خاصیت (SAS ≅ SAS)

دو مثلثیں متماثل ہوتیں ہیں اگر دو متناظرہ اضلاع اور ان کا درمیانی زاویے متماثل ہوں۔

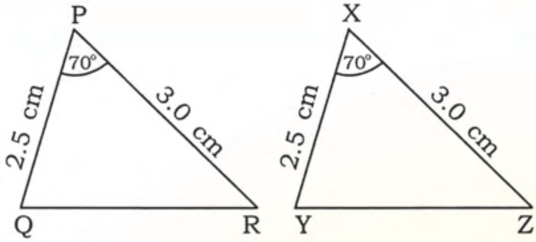
مثلث PQR اور XYZ پر غور کریں۔

$\Delta PQR \longleftrightarrow \Delta XYZ$



ΔPQR ، ΔXYZ سے مطابقت رکھتا ہے

جیساکہ نیچے دیا گیا ہے۔



(i) $m\overline{PQ} = 2.5\text{ cm}$ ، $m\overline{XY} = 2.5\text{ cm}$

اس لئے $\overline{PQ} \cong \overline{XY}$

(ii) $m\overline{PR} = 3.0$ ، $m\overline{XZ} = 3.0\text{cm}$

اس لئے $\overline{PR} \cong \overline{XZ}$

(iii) $m\angle QPR = 70°$ اور $m\angle YXZ = 70°$

اس لئے $\angle QPR \cong \angle YXZ$

تو $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ (SAS ≅ SAS)

10.3.3 مثلثوں کے تماثل کی تیسری خاصیت (ASA ≅ ASA)

یہ خاصیت بتاتی ہے کہ دو مثلثیں متماثل ہوتی ہیں اگر ان کے متناظرہ دو زاویے اور ان کا درمیانی ضلع متماثل ہوں۔

دونوں مثلثوں PQR اور XYZ پر غور کریں۔

یعنی ΔPQR مطابقت رکھتا ہے ΔXYZ سے۔ $\Delta PQR \longleftrightarrow \Delta XYZ$

(i) $m\angle XYZ = 65°$ اور $m\angle PQR = 65°$

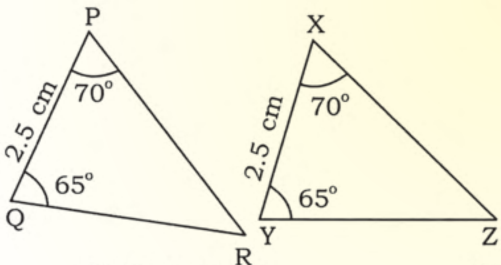
اس لئے $\angle PQR \cong \angle XYZ$

(ii) $m\overline{XY} = 2.5\text{cm}$ ، $m\overline{PQ} = 2.5\text{cm}$

اس لئے $\overline{PQ} \cong \overline{XY}$

(iii) $m\angle YXZ = 70°$ اور $m\angle QPR = 70°$

اس لئے $\angle QPR \cong \angle YXZ$



(ASA ≅ ASA)

پس $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ (ASA ≅ ASA)

10.3.4 مثلثوں کے تماثل کی چوتھی خاصیت

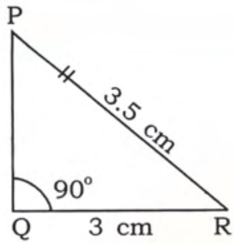
یہ خاصیت بتاتی ہے کہ دو مثلثیں متماثل ہوتی ہیں اگر قائمہ الزاویہ مثلث کا وتر اور ایک متناظرہ ضلع متماثل ہو۔

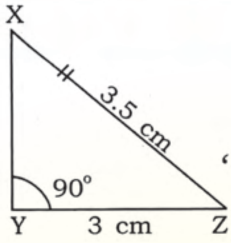
دو قائمہ الزاویہ مثلثوں PQR اور XYZ پر غور کریں۔

$\Delta PQR \longleftrightarrow \Delta XYZ$

یعنی ΔPQR ، ΔXYZ سے مطابقت رکھتی ہے جیساکہ نیچے دیا گیا ہے۔

(i) $m\angle XYZ = 90°$ ، $m\angle PQR = 90°$ یعنی $\angle PQR \cong \angle XYZ$ (دونوں زاویہ قائمہ ہیں)





(ii) $m\overline{QR} = 3\text{cm}$، $m\overline{YZ} = 3\text{cm}$،

اس لئے $\overline{QR} \cong \overline{YZ}$

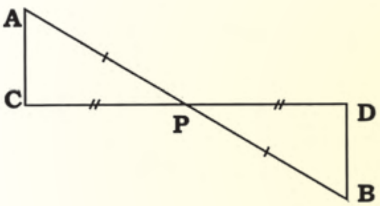
(iii) $m\overline{PR} = 3.5\text{cm}$، $m\overline{XZ} = 3.5\text{cm}$،

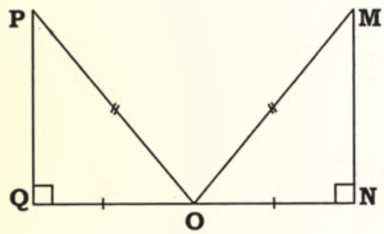
اس لئے $\overline{PR} \cong \overline{XZ}$

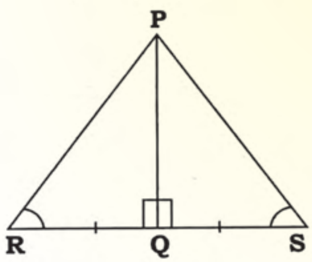
لہذا $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ (HS ≅ HS)

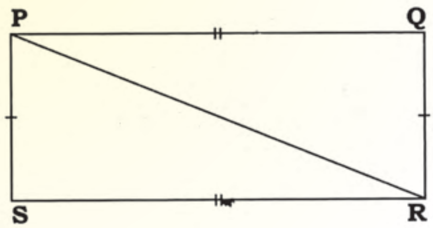
مشق 10.4

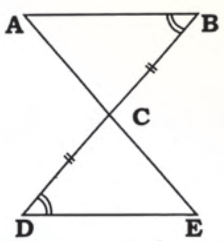
نیچے دی گئی اشکال میں نشانات کے ذریعے مثلث کے متماثل اجزاء کی نشاندہی کی گئی ہے۔ متماثل حصوں کے نام لکھیں اور وہ خاصیت بیان کریں جس سے مثلث متماثل ہے۔

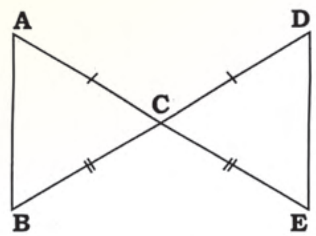
1.


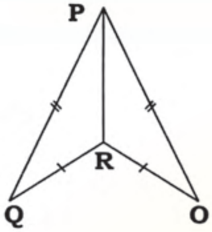
2.


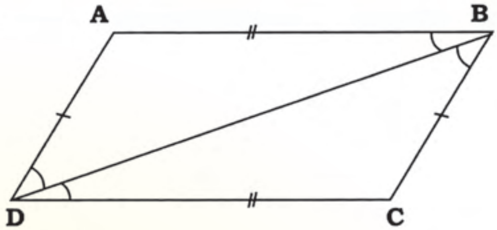
3.


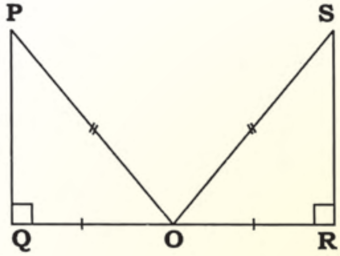
4.


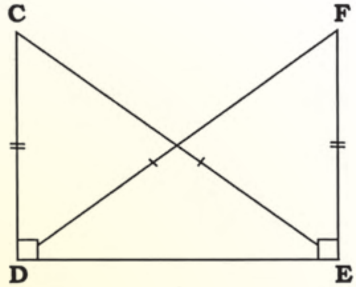
5.


6.


7.


8.


9.


10.


10.4 دائرہ

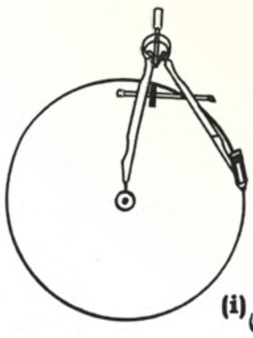
10.4.1 دائرہ اور اس کا مرکز، رداس، قطر، وتر، قوس، قوس صغیرہ اور قوس کبیرہ، نصف دائرہ اور قطاع دائرہ کی وضاحت کرنا

ہم پچھلی جماعتوں میں دائرے کے بارے میں سیکھ چکے ہیں۔

یہ جیومیٹری میں سب سے زیادہ عام اور جانی پہچانی شکل ہے۔ مثلاً چوڑی، ایک، دو اور پانچ روپے کے سکے دائرے کو ظاہر کرتے ہیں۔

(i) دائرہ اور اس کا مرکز

کاغذ پر ایک نقطہ O لیں۔ کمپاس کھولیں۔ کمپاس کے دھاتی سرے کو کاغذ پر نقطہ O پر رکھیں اور پنسل والے بازو کو گول گھمائیں۔ جو شکل ہمیں ملی ہے وہ دائرہ ہے۔

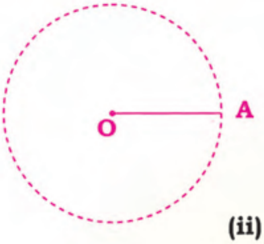


شکل (i)

نقطہ O مرکز کہلاتا ہے۔

لہٰذا دائرہ ان نقاط پر مشتمل ہوتا ہے جو مرکز سے برابر فاصلے پر ہوتے ہیں۔

(ii) دائرے کا رداس

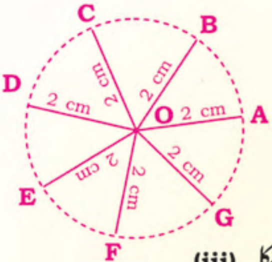


شکل (ii)

شکل (i) میں کمپاس کے دونوں سروں کا درمیانی فاصلہ دائرے کا رداس کہلاتا ہے۔

شکل (ii) دائرہ مرکز O سے بنایا گیا ہے۔ مرکز اور دائرے پر کسی بھی نقطے کو ملنے والے قطعہ خط کی لمبائی کو دائرے کا رداس کہتے ہیں۔

اصطلاح 'دائرے کا رداس' کو فاصلے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر $\overline{OA}$ دائرے کا رداسی قطعہ ہے یا رداس 2 سینٹی میٹر ہے۔



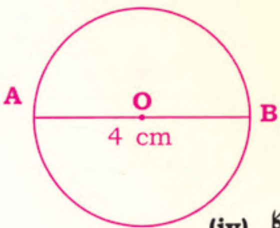
شکل (iii)

یاد رکھیں: ایک دائرہ میں لا تعداد رداسی قطعات ہوتے ہیں۔

شکل (iii) میں تمام رداس لمبائی میں برابر ہیں:

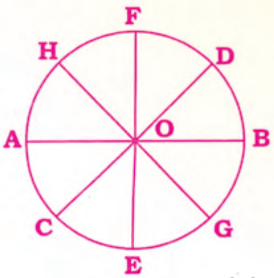
$$m\overline{OA} = m\overline{OB} = m\overline{OC} = m\overline{OD} = m\overline{OE} = m\overline{OF} = m\overline{OG} = 2\text{ cm.}$$

(iii) قطر



شکل (iv)

مرکز سے گزرتے ہوئے دائرے کے کسی بھی دو نقاط کو ملنے والا قطعہ خط دائرے کا قطر کہلاتا ہے۔ قطر کو بھی قطعہ خط سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ بھی فاصلہ ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر شکل (iv) میں $\overline{AB}$ دائرے کا قطر ہے اور اس کی لمبائی 4 سینٹی میٹر ہے۔



شکل (v)

یاد رکھیں: قطر دائرے کے مرکز سے گزرتا ہے اور اس کی لمبائی رداس سے دگنی ہوتی ہے۔

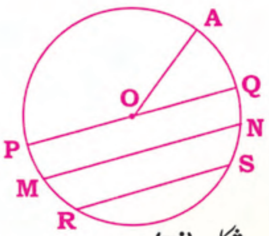
دائرہ میں لا محدود تعداد میں قطر ہوتے ہیں۔

تمام قطر لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔ شکل (v) میں

$$m\overline{AB} = m\overline{CD} = m\overline{EF} = m\overline{GH}$$

(iv) وتر

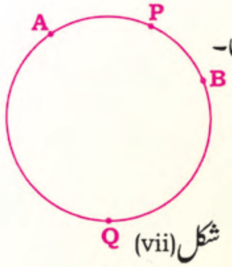
دائرے کے کسی بھی دو نقاط کو ملنے والا قطعہ خط دائرے کا وتر کہلاتا ہے۔
شکل (vi) میں $\overline{RS}$ اور $\overline{MN}$ دائرے کے وتر ہیں۔ دائرہ کا قطر $\overline{PQ}$ بھی وتر ہوتا ہے۔



شکل (vi)

یاد رکھیں: دائرہ میں لا تعداد میں وتر ہوتے ہیں۔ قطر دائرے کا سب سے بڑا وتر ہوتا ہے۔

(v) قوس

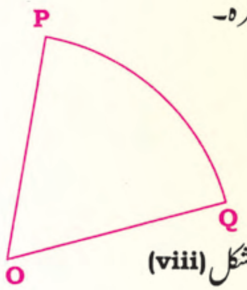


شکل (vii)

سامنے دیئے گئے دائرے پرغور کریں۔شکل (vii) میں دائرے پر کوئی سے دو نقاط A اور B لیں۔ یہ دونوں نقاط دائرے کو دو حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ان میں سے ہر حصہ دائرے کا قوس کہلاتا ہے۔ نقاط A اور B قوسین کے سرے ہیں جب کہ قوس کو نام دینے کے لئے ہم تین حروف استعمال کرتے ہیں۔

شکل (vii) میں دو قوس ہیں۔ پہلی قوس $\widehat{APB}$ اور دوسری قوس $\widehat{AQB}$ ہے۔ لہٰذا ہمارے پاس دو اقسام کی قوسین ہیں (a) قوس صغیرہ (b) قوص کبیرہ۔

قوس صغیرہ: ایسی قوس جو نصف دائرے سے کم ہو، قوس صغیرہ کہلاتی ہے۔ اوپر شکل میں $\widehat{APB}$ قوس صغیرہ ہے یا $\widehat{AB}$ قوس صغیرہ ہے۔ قوس صغیرہ کو دو '2' سروں کا نام دیتے ہیں۔

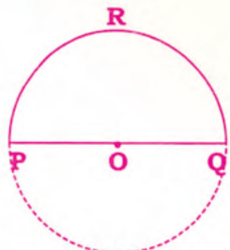


شکل (viii)

قوس کبیرہ: ایسی قوس جو نصف دائرے سے زیادہ ہو، قوس کبیرہ کہلاتی ہے۔اوپر شکل میں $\widehat{AQB}$ قوس کبیرہ ہے۔

قطاع دائرہ: آئیں دائروی علاقے کا ایک ٹکڑا کاٹیں۔اس سے ہمیں ایک منحنی شکل ملے گی جیسا کہ شکل (viii) میں دکھایا گیا ہے۔ یہ ٹکڑا قطاع دائرہ کہلاتا ہے۔ یہ ایک قوس اور دو رداسوں پر مشتمل ہوتا ہے جیسے $\widehat{PQ}$ ایک قوس ہے، $\overline{OP}$ اور $\overline{OQ}$ دو رداس ہیں۔

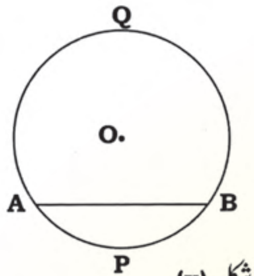
(vi) نصف دائرہ



شکل (ix)

نصف دائرے کا مطلب ہے آدھا دائرہ۔
متصلہ شکل میں $\widehat{PRQ}$ نصف دائرہ ہے۔

(vii) دائرہ کا قطعہ



شکل (x)

دائرہ کا قطعہ ایک ایسی شکل ہے جس کی حدود دائرے کی قوس اور دائرہ کا وتر ہوتی ہیں۔

مثال: ایک وتر عام طور پر کسی دائرے کو دو مختلف جسامت کے قطعات میں تقسیم کرتا ہے۔ چھوٹا قطعہ صغیرہ اور بڑا قطعہ کبیرہ کہلاتا ہے۔

شکل (10) کو غور سے دیکھیں۔ $\overline{AB}$ دائرے کا وتر ہے۔ وتر $\overline{AB}$ دائرے کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ ہر حصہ دائرے کا قطعہ ہے۔

دائرے کا قطعہ صغیرہ، قوس صغیرہ $\widehat{APB}$ اور وتر $\overline{AB}$ سے گھیرا ہوا ہے۔ دائرے کا قطعہ کبیرہ قوس کبیرہ $\widehat{AQB}$ اور وتر $\overline{AB}$ سے گھیرا ہوا ہے۔

مشق 10.5

مناسب الفاظ سے خالی جگہیں پُر کریں:

1- دائرے کے دو نقاط کو ملانے والا قطعہ دائرے کا __________ کہلاتا ہے۔

2- دائرے کا مرکز اور دائرے کے کسی بھی نقطے کا درمیانی فاصلہ __________ کہلاتا ہے۔

3- دائرے کا مرکز اور دائرے کا کسی بھی نقطے کو ملانے والا قطعہ __________ کہلاتا ہے۔

4- دائرے کے تمام نقاط __________ سے برابر فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

5- دائرے کے مرکز سے گزرنے والا وتر دائرے کا __________ کہلاتا ہے۔

6- دائرے کا قطر __________ سے گزرتا ہے اور اس کی لمبائی __________ سے دگنی ہوتی ہے۔

7- دائرے کا بڑے سے بڑا وتر دائرے کا __________ ہوتا ہے۔

8- کسی بھی دائرے میں __________ رداسی قطعات ہوتے ہیں اور وہ لمبائی میں __________ ہوتے ہیں۔

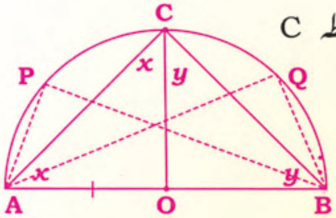
9- دائرے کا رداس دائرے کے قطر کا ______________ ہوتا ہے۔

10- کسی بھی دائرے میں ______________ قطر ہوتے ہیں اور وہ لمبائی میں ______________ ہوتے ہیں۔

10.4.2 نصف دائرہ بنانا اور خاصیت 'نصف دائرے میں زاویہ، زاویہ قائمہ ہوتا ہے' کا مظاہرہ کرنا

آئیں مظاہرہ کریں کہ 'نصف دائرے میں زاویہ، زاویہ قائمہ ہوتا ہے'۔

i- کسی مناسب رداس کا نصف دائرہ بنائیں۔ مرکز کو O کا نام دیں۔ مرکز سے گزرتا ہوا قطر $\overline{AB}$ کھینچیں۔



ii- قطر کو مثلث کا ایک ضلع مانیں۔ دونوں نقاط A اور B کو محیط پر نقطہ C سے ملا کر دو ضلعے بنائیں۔ تو یوں ہمیں ΔABC ملے گی۔

اب $\angle ACB$ کی پروٹیکٹر کی مدد سے پیمائش کریں۔ ہم دیکھیں گے کہ $m\angle ACB = 90°$ ہے لٰہذا $\angle ACB$ زاویہ قائمہ ہے۔

iii- پھر نصف دائرے پر دو نقاط P اور Q لیں۔ مثلث APB اور مثلث AQB بنائیں۔

iv- $\angle APB$ اور $\angle AQB$ کی پروٹیکٹر کی مدد سے پیمائش کریں۔ ہم دیکھیں گے کہ یہ بھی $m\angle APB = m\angle AQB = 90°$ لٰہذا نصف دائرے میں زاویہ، زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

پس ثابت ہوا کہ نصف دائرے میں زاویہ، زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

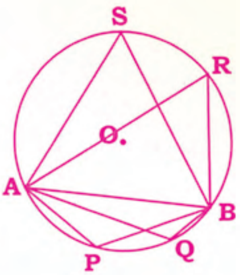
10.4.3 دائرے کا قطعہ کھینچنا اور خاصیت 'دائرے کا ایک ہی قطعہ میں زاویے برابر ہوتے ہیں' کا مظاہرہ کرنا

آئیں خصوصیت کا مظاہرہ کریں 'دائرے کا ایک ہی قطعہ میں زاویے برابر ہوتے ہیں'۔

مراحل:

i- مناسب رداس کا دائرہ کھینچیں۔

ii- قطر کے علاوہ دائرے کا وتر $\overline{AB}$ کھینچیں۔



iii- ہمارے پاس دو قطعات (i) صغیرہ (ii) کبیرہ ہیں

iv- دائرے کے قطعہ صغیرہ میں چھوٹی قطعہ کے دو محصور زاویے $\angle APB$ اور $\angle AQB$ مسطر کی مدد سے بنائیں۔

v- اب پروٹیکٹر کی مدد سے ان کی پیمائش کریں۔ ہم دیکھیں گے کہ $m\angle APB = m\angle AQB$

vi- پھر دائرے کے قطعہ کبیرہ میں بڑی قطعہ کے دو محور زاویے $\angle ASB$ اور $\angle ARB$ مسطر کی مدد سے بنائیں۔

vii- پروٹیکٹر کی مدد سے ان کی پیمائش کریں۔ ہم دیکھیں گے کہ $m\angle ASB = m\angle ARB$

اس سے یہ نتیجہ اخذ کیا جاتا ہے کہ دائرے کے ایک ہی قطعہ میں زاویے برابر ہوتے ہیں۔

مشق 10.6

1- دو مختلف پیمائش کے رداسی قطعات 2.5 سینٹی میٹر اور 3 سینٹی میٹر کے دو نصف دائرے بنائیں۔ ہر نصف دائرے میں زاویہ بنائیں اور ثابت کریں کہ یہ زاویہ قائمہ ہے۔

2- 3.3 سینٹی میٹر رداس کا نصف دائرہ بنائیں۔ نصف دائرے کی خاصیت کا مظاہرہ کریں 'نصف دائرے میں زاویہ کی پیمائش $90°$ ہوتی ہے'۔

3- 2.7 سینٹی میٹر رداس کا نصف دائرہ بنائیں خاصیت کا مظاہرہ کریں کہ 'دائرے کے ایک ہی قطعہ میں زاویے برابر ہوتے ہیں'۔

4- 2.8 سینٹی میٹر رداس کا دائرہ بنائیں۔ دائرے کے ایک ہی قطعہ میں محصور زاویے بنائیں۔ ثابت کریں کہ یہ زاویے پیمائش میں برابر ہوتے ہیں۔

5- 3.4 سینٹی میٹر رداس کا دائرہ بنائیں۔ دائرے کے ایک ہی قطعہ میں محصور زاویے بنائیں۔ ثابت کریں کہ یہ زاویے پیمائش میں برابر ہوتے ہیں۔

جائزہ مشق 10

1- متصلہ زاویوں کی وضاحت کریں اور متصلہ زاویوں کے جوڑے کو شکل میں ظاہر کریں۔

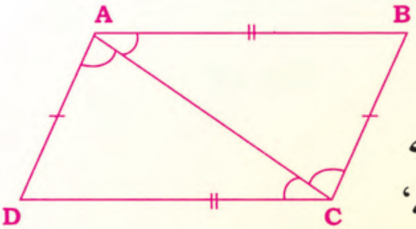
2- کمپلیمنٹری اور سپلیمنٹری زاویوں کی وضاحت کریں۔ کمپلیمنٹری اور سپلیمنٹری زاویوں کے جوڑوں کو شکل میں ظاہر کریں۔

-3 راسی متقابلہ زاویہ کیا ہوتا ہے؟ راسی متقابلہ زاویوں کے جوڑوں کو شکل میں ظاہر کریں۔

-4 ایک جیسی اشکال کیا ہوتی ہیں؟ شکل بنا کر دکھائیں اور علامت میں بھی ظاہر کریں۔

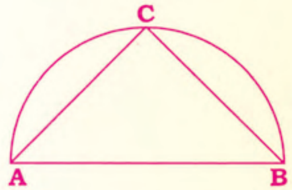
-5 متماثل اشکال کیا ہوتی ہیں؟ شکل بنا کر دکھائیں اور علامت میں بھی دکھائیں۔

-6 دائرہ بنائیں جس میں مرکز، رداس، قطر، وتر، قوس صغیرہ اور قوس کبیرہ بنائیں اور نصف دائرہ اور دائرے کے قطعات بھی بنائیں۔



-7 ABCD متوازی الاضلاع ہے جس میں $\overline{AC}$ وتر ہے۔ بنائے گئے دو مثلثوں کے متماثل کی مختلف خاصیتیں لکھیں۔

-8 3.3 سینٹی میٹر رداس کا نصف دائرہ بنائیں۔ نصف دائرے کی خاصیت 'نصف دائرے میں زاویہ، زاویہ قائمہ ہوتا ہے' کا مظاہرہ کریں۔



-9 4.4 سینٹی میٹر رداس کا نصف دائرہ بنائیں۔ مثلث ABC بنائیں جیساکہ سامنے دکھایا گیا ہے۔ مثلث کے تینوں زاویوں کی پیمائش کریں۔کیا $\angle ACB$ زاویہ قائمہ ہے؟

-10 3.6 سینٹی میٹر رداس کا دائرہ بنائیں۔ دائرہ کا قطعہ بنائیں اور خاصیت 'دائرے کے ایک ہی قوس صغیرہ میں بنائے گئے زاویے پیمائش میں برابر ہوتے ہیں' کا مظاہرہ کریں۔

-11 4 سینٹی میٹر رداس کا دائرہ بنائیں۔ دائرے کو قطر کے علاوہ وتر سے بھی تقسیم کریں۔ خاصیت 'دائرے کے قطعہ کبیرہ میں زاویے پیمائش میں برابر ہوتے ہیں' کا مظاہرہ کریں۔

-12 خالی جگہیں پُر کریں:

(i) مشترک راس اور مشترک بازو والے ________ زاویے کہلاتے ہیں۔

(ii) اگر دو زاویوں کا مجموعہ $90°$ ہے تو یہ ________ زاویہ کہلاتے ہیں۔

(iii) دو اشکال ایک جیسی ہیں اگر وہ ________ میں ________ ہیں۔

(iv) اگر دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کریں تو ________ زاویے پیمائش میں ہمیشہ ________ ہوتے۔

خلاصہ

- دو زاویے متصلہ کہلاتے ہیں اگر ان کا ایک راس اور ایک بازو مشترک ہو۔
- اگر دو زاویوں کا مجموعہ $90°$ ہو تو وہ کمپلیمنٹری زاویے کہلاتے ہیں۔ ہر زاویہ دوسرے کا کمپلیمنٹ ہوتا ہے۔
- اگر دو زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہو تو وہ سپلیمنٹری زاویے کہلاتے ہیں۔ ہر زاویہ دوسرے کا سپلیمنٹ ہوتا ہے۔
- مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے۔ اس خاصیت کی مدد سے ہم مثلث کے نامعلوم زاویوں کی پیمائش معلوم کر سکتے ہیں۔
- بالکل ایک جیسی جسامت اور بناوٹ والی جیومیٹریکل اشکال متماثل اشکال کہلاتی ہیں۔ متماثل اشکال کے لئے علامت $\cong$ استعمال کی جاتی ہے۔
- بالکل یکساں بناوٹ کی جیومیٹری اشکال ایک جیسی اشکال کہلاتی ہیں۔ ایک جیسی اشکال کے لئے علامت ~ استعمال کی جاتی ہے۔
- دو مثلث متماثل ہوں گے اگر ذیل میں سے کوئی ایک خصوصیت موجود ہو:

  (a) $SSS \cong SSS$

  (b) $SAS \cong SAS$

  (c) $ASA \cong ASA$

  (d) $HS \cong HS$.

- جیومیٹری میں دائرہ بہت جانی پہچانی شکل ہے۔ یہ کاغذ پر کسی نقطے کو گھما کر اس طرح بنایا جاسکتا ہے کہ تمام نقاط مرکز سے ہمیشہ برابر فاصلے پر ہوں۔

یونٹ 11

عملی جیومیٹری

11.1 قطعہ خط

شکل (i)

ہم پڑھ چکے ہیں کہ ایک خط کو دونوں اطراف کسی بھی حد تک بڑھایا جاسکتا ہے۔
شکل (i) میں $\overleftrightarrow{AB}$ ایک خط ہے۔

شکل (ii)

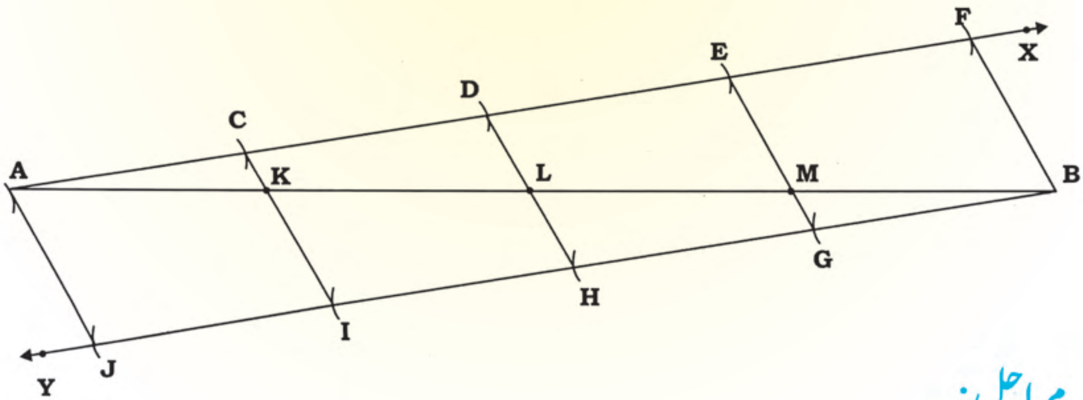
خط کا کوئی سرا نہیں ہوتا ہے۔

خط کا حصہ قطعہ خط ہوتا ہے۔ شکل (ii) میں $\overline{CD}$ ایک قطعہ خط ہے۔ قطعہ خط کے دو سرے ہوتے ہیں۔ اس لئے قطعہ خط کی لمبائی ہوتی ہے۔

جیومیٹری میں لفظ 'بنانا'، کا مطلب ہے کہ دیئے گئے مواد سے بلکل ٹھیک اور درست شکل بنانا۔ ہمیں زندگی کے ہر معاملے میں اس صلاحیت کی ضرورت ہے۔ اس صلاحیت کو حاصل کرنے کے لئے ہم مسطر، سیٹ اسکوائر، پروٹیکٹر، کمپاس کی مدد سے اشکال بنانا سیکھیں گے۔

11.1.1 قطعہ خط کو دیئے گئے متماثل حصوں میں تقسیم کرنا

مثال 1: 7 سینٹی میٹر کے قطعہ خط $\overline{AB}$ کو چار متماثل حصوں میں تقسیم کریں۔



مراحل:

1- 7 سینٹی میٹر لمبائی کا $\overline{AB}$ کھینچیں۔

2- پروٹیکٹر کی مدد سے $\overline{AB}$ پر $40°$ کا حادہ زاویہ بناتے ہوئے $\overrightarrow{AX}$ کھینچیں۔

3- نقطہ B پر $\overrightarrow{BY}$ اس طرح کھینچیں کہ وہ ویسا ہی حادہ زاویہ بنائے جیسا کہ $m\angle BAX = m\angle ABY = 40°$

4- پرکار کی مدد سے مناسب پیمائش کے چار قوس $\overrightarrow{AX}$ پر برابر برابر فاصلے پر نقطہ C، D، E اور F پر لگائیں۔

5- اس ہی طرح پرکار کی مدد سے یکساں پیمائش کے چار قوس $\overrightarrow{BY}$ پر نقطہ G، H، I اور J پر برابر برابر فاصلے پر لگائیں۔

6- نقاط A کو J، C کو I، D کو H، E کو G اور F کو B سے ملائیں اور $\overline{AJ}$، $\overline{CI}$، $\overline{DH}$، $\overline{EG}$ اور $\overline{FB}$ کھینچیں۔ یہ قطعہ خط $\overline{AB}$ کو نقاط A، K، L، M اور B پر قطعہ کرتے ہیں۔

7- اس طرح سے $\overline{AB}$ چار مطلوبہ حصوں $m\overline{MB} = m\overline{LM} = m\overline{KL} = m\overline{AK}$ میں تقسیم کی ہو گی۔

11.1.2 قطعہ خط کو دی گئی نسبت میں تقسیم کرنا

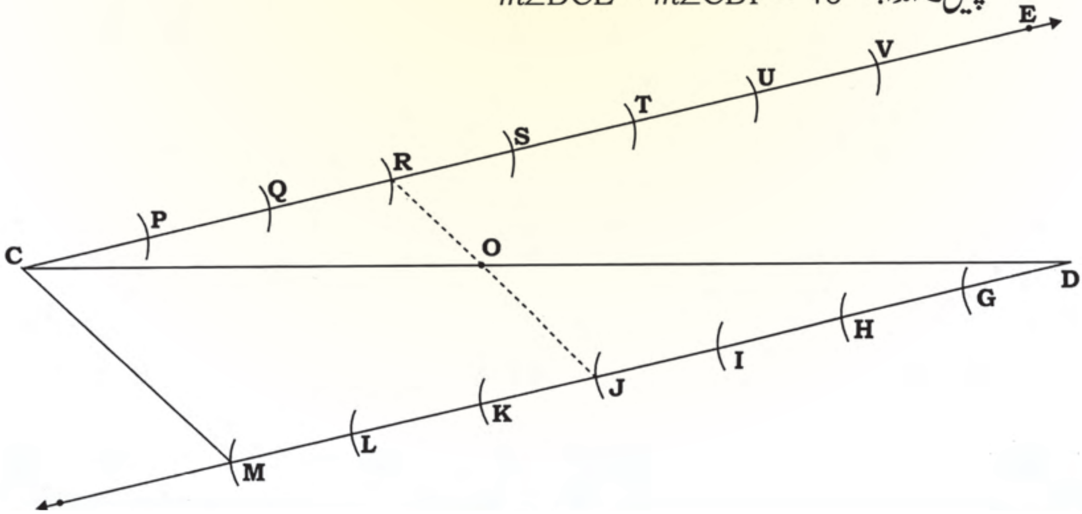
مثال 1: 7 سینٹی میٹر پیمائش کے قطعہ خط کو 3:4 کی نسبت میں تقسیم کریں۔

مراحل:

1- 7 سینٹی میٹر پیمائش کا $\overline{CD}$ کھینچیں۔

2- نقطہ C پر پروٹیکٹر کی مدد سے حادہ زاویہ 40° کا بناتے ہوئے $\overrightarrow{CE}$ کھینچیں۔

3- نقطہ D پر $\overline{CD}$ کی مخالف سمت میں پروٹیکٹر کی مدد سے ویسا ہی حادہ زاویہ 40° کا بناتے ہوئے $\overrightarrow{DF}$ کھینچیں۔ لہٰذا: $m\angle DCE = m\angle CDF = 40°$



-4 کمپاس کی مدد سے مناسب پیمائش کے سات قوس (3+4 = نسبتوں کا مجموعہ) برابر برابر فاصلے پر $\overrightarrow{CE}$ پر نقاط P، Q، R، S، T، U اور V پر لگائیں۔

-5 اس ہی طرح کمپاس کی مدد سے یکساں پیمائش کے سات قوس (3+4 = نسبتوں کا مجموعہ) $\overrightarrow{DF}$ پر نقاط G، H، I، J، K، L اور M لگائیں۔

-6 نقطہ C سے تیسرا نقطہ R ہے۔

-7 نقطہ D سے چوتھا نقطہ J ہے۔

-8 اب R اور J کو ملائیں اور $\overline{CD}$ کو نقطہ O پر قطع کرتا ہوا $\overline{RJ}$ کھینچیں۔

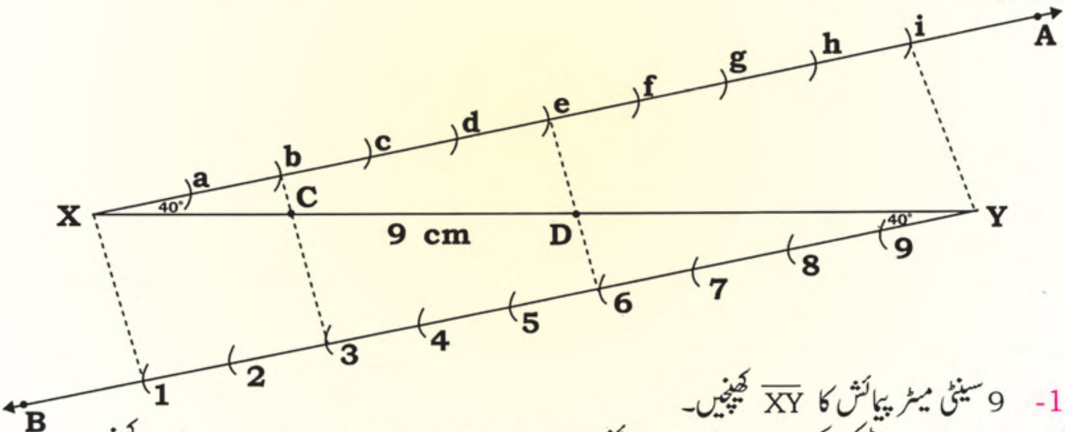
-9 اسی طرح $\overline{CO} : \overline{OD} = 3:4$

اس کا مطلب ہے کہ 7 سینٹی میٹر پیمائش کا $\overline{CD}$ مطلوبہ نسبت 3:4 میں تقسیم ہوگیا۔

یا $m\overline{CO} : m\overline{OD} = 3:4$

مثال 2: 9 سینٹی میٹر پیمائش کی قطعہ $\overline{XY}$ کو خط 2:3:4 کی نسبت سے تقسیم کریں۔

مراحل:



-1 9 سینٹی میٹر پیمائش کا $\overline{XY}$ کھینچیں۔

-2 نقطہ X پر پروٹیکٹر کی مدد سے مناسب پیمائش کا حادہ زاویہ AXY (40°) کا بناتے ہوئے $\overrightarrow{XA}$ کھینچیں۔

-3 نقطہ Y پر اتنی مقدار کا زاویہ XYB جیسے $m\angle AXY = m\angle XYB = 40°$ بناتے ہوئے $\overrightarrow{YB}$ کھینچیں۔

-4 کمپاس کی مدد سے $\overrightarrow{XA}$ پر مناسب پیمائش کے نو قوس (نسبتوں کا مجموعہ =2+3+4) نقاط a، b، c، d، e، f، g، h اور i پر لگائیں۔

-5 اس ہی طرح کمپاس کی مدد سے $\overrightarrow{YB}$ پر اتنی پیمائش کے نو قوس نقاط 9، 8، 7، 6، 5، 4، 3، 2 اور 1 پر لگائیں۔

-6 b کو 3 سے، e کو 6 سے ملاتے ہوئے $\overline{XY}$ کو نقاط C اور D پر قطع کریں۔

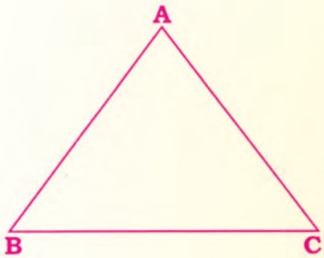
-7 اس طرح سے $\overline{XY}$، 2:3:4 کی نسبت سے تین حصوں میں تقسیم ہو جائے گا۔

لہٰذا: $m\overline{XC} : m\overline{CD} : m\overline{DY} = 2:3:4$

مشق 11.1

-1 6 سینٹی میٹر قطعہ خط کو چار برابر حصوں میں تقسیم کریں۔
-2 $m\overline{AB} = 7.5$ سینٹی میٹر کو پانچ برابر حصوں میں تقسیم کریں۔
-3 $m\overline{CD} = 9$ سینٹی میٹر کو چھ برابر حصوں میں تقسیم کریں۔
-4 قطعہ خط 5 سینٹی میٹر کو 2:3 کی نسبت سے تقسیم کریں۔
-5 قطعہ خط 8.4 سینٹی میٹر کو 1:5 کی نسبت سے تقسیم کریں۔
-6 $m\overline{MN} = 7$ سینٹی میٹر کو 3:5 کی نسبت سے تقسیم کریں۔
-7 قطعہ خط 6.6 سینٹی میٹر کو 1:2:3 کی نسبت سے تقسیم کریں۔
-8 $m\overline{XY} = 7$ سینٹی میٹر کو 2:2:3 کی نسبت سے تقسیم کریں۔
-9 قطعہ خط 8.4 سینٹی میٹر کو 4:2:1 کی نسبت سے تقسیم کریں۔

11.2 مثلث



ہم جانتے ہیں کہ مثلث کے تین اضلاع اور تین زاویے ہوتے ہیں۔
سامنے دی گئی مثلث ABC ہے جس میں $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ اور $\overline{CA}$ تین اضلاع اور $\angle A$، $\angle B$ اور $\angle C$ تین زاویے ہیں۔
مثلث کو بنانے کے لئے ہمیں اوپر دیئے گئے کوئی سے تین اجزاء کا معلوم ہونا ضروری ہے۔
آئیں اب مثلث بنانے کے کچھ مزید طریقے سیکھتے ہیں۔

11.2.1 مثلث بنانا جب کہ احاطہ اور تینوں اضلاع کے درمیان نسبت دی گئی ہو

مثال 1: مثلث ABC بنائیں جس کا احاطہ 9 سینٹی میٹر اور اضلاع کے درمیان نسبت 1:2:3 ہے۔

معلوم: ΔABC جس کا احاطہ 9 سینٹی میٹر ہے۔ اضلاع کی نسبت $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 1:2:3$

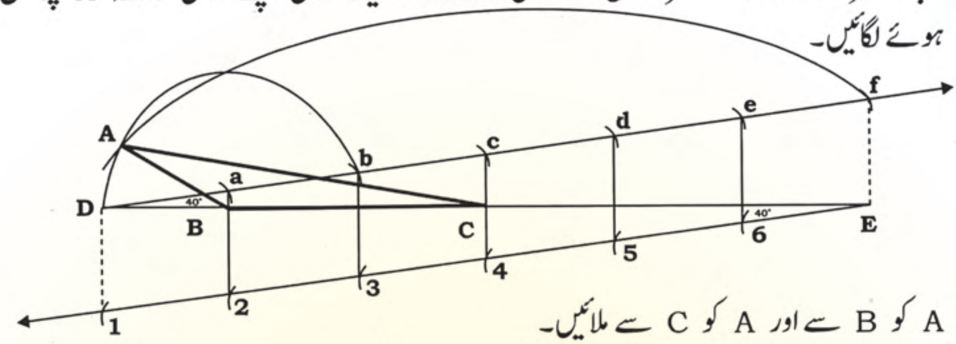
مطلوب: دیئے گئے مواد سے $\triangle ABC$ بنانا۔

مراحل:

-1 مسطر کی مدد سے 9 سینٹی میٹر کا $\overline{DE}$ کھینچیں جو کہ مثلث کے احاطے کے برابر ہے۔
-2 $\overline{DE}$ کو دی گئی نسبت 1:2:3 میں تقسیم کریں۔ تو یوں ہمیں تینوں اضلاع $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ اور $\overline{CA}$ کی لمبائیاں حاصل ہوں گی جیسے $m\overline{AB} = m\overline{DB}$ (سب سے چھوٹا ضلع) ، $m\overline{BC} = m\overline{BC}$ اور $m\overline{CA} = m\overline{CE}$ (سب سے بڑا ضلع)

3- نقطہ B کو مرکز مان کر رداس $m\overline{DB}$ کا ایک قوس لگائیں۔

4- اب دوسرے نقطہ C کو مرکز مان کر رداس $m\overline{CE}$ کا ایک قوس پچھلے قوس کو نقطہ A پر قطع کرتے ہوئے لگائیں۔



5- A کو B سے اور A کو C سے ملائیں۔

پس ہمیں مطلوبہ مثلث ABC حاصل ہوئی۔ جس کا احاطہ 9 سینٹی میٹر اور اس کے اضلاع کی نسبت 1:2:3 ہے۔

مثال 2: ایک متساوی الساقین مثلث بنائیں جب کہ اُس کا احاطہ 10.5 سینٹی میٹر اور اضلاع کی نسبت **2:2:3** ہو۔

معلوم: ΔPQR متساوی الساقین مثلث ہے۔ اس کا احاطہ 10.5 سینٹی میٹر اور اضلاع کی نسبت **2:2:3** ہے۔

مطلوب: مواد کی مدد سے متساوی الساقین مثلث PQR بنانا۔

مراحل: 1- مسطر کی مدد سے 10.5 سینٹی میٹر کا ایک قطعہ خط $\overline{XY}$ کھینچیں۔

2- $\overline{XY}$ کو نسبت 2:2:3 سے تقسیم کریں۔ یوں ہمیں مثلث کے تینوں اضلاع $\overline{XP}$، $\overline{PQ}$ اور $\overline{QY}$ کی پیمائش ملے گی۔

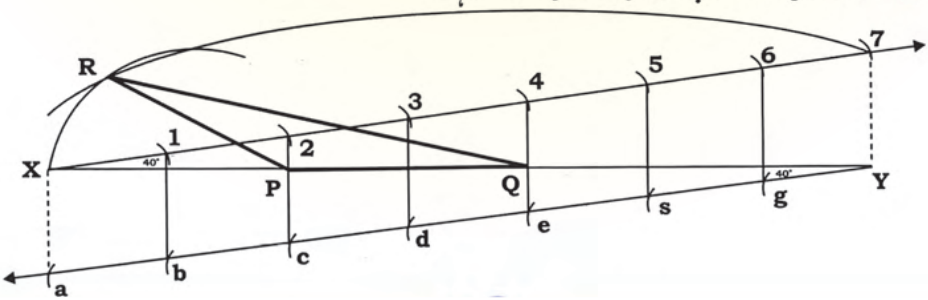
3- نقطہ P کو مرکز مان کر رداس $m\overline{XP}$ (مثلث کا ایک ضلع) کا ایک قوس لگائیں۔

4- پھر دوسرا نقطہ Q کو مرکز مان کر رداس = $m\overline{QY}$ (مثلث کا تیسرا ضلع) کا ایک قوس پچھلے قوس کو نقطہ R پر قطع کرتے ہوئے لگائیں۔

5- P کو R سے ملائیں اور $\overline{PR}$ کھینچیں۔

6- پھر R کو Q سے ملائیں اور $\overline{QR}$ کھینچیں۔

7- لہٰذا PQR مطلوبہ متساوی الساقین مثلث ہے۔



مشق 11.2

مثلث بنائیں:

1- مثلث ABC بنائیں جس کے اضلاع کے درمیان نسبت 1:2:3 اور احاطہ 9.6 سینٹی میٹر ہے۔

2- ΔDEF کا احاطہ 8.4 سینٹی میٹر اور اضلاع کے درمیان نسبت 2:3:3 ہے۔

3- مثلث LMN بنائیں جس کا احاطہ 90 ملی میٹر اور اضلاع کے درمیان نسبت 2:3:4 ہے۔

4- ایک مثلث PQR بنائیں جس کے اضلاع کے درمیان نسبت 5:3:2 ہے اور احاطہ 10 سینٹی میٹر ہے۔

5- ایک مثلث XYZ بنائیں جس کے اضلاع کے درمیان نسبت 3:3:2 اور احاطہ 88 ملی میٹر ہے۔

11.2.2 مساوی الاضلاع مثلث بنانا

(a) مساوی الاضلاع مثلث بنانا جبکہ قاعدہ دیا گیا ہو

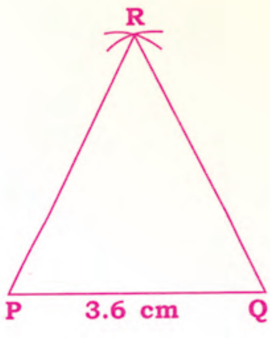
ہم جانتے ہیں کہ اگر کسی مثلث کے تینوں اضلاع برابر ہوں تو وہ مساوی الاضلاع مثلث کہلاتی ہے۔
مساوی الاضلاع مثلث ہمیشہ حادۃ الزاویہ مثلث ہوتی ہے جس کے تمام زاویہ برابر اور پیمائش میں 60° کے ہوتے ہیں۔

مثال: مساوی الاضلاع مثلث PQR بنائیں جس کا قاعدہ پیمائش میں 3.6 سینٹی میٹر کا ہے۔

معلوم: ΔPQR ایک مساوی الاضلاع مثلث ہے جس کے قاعدے کی پیمائش 3.6 سینٹی میٹر ہے۔

مطلوب: ΔPQR مساوی الاضلاع مثلث ہے جس کے تمام اضلاع متماثل ہیں۔

مراحل:



1- 3.6 سینٹی میٹر پیمائش کا ایک قطعہ خط $\overline{PQ}$ کھینچیں۔

2- P کو مرکز مان کر 3.6 سینٹی میٹر رداس کا ایک قوس لگائیں۔

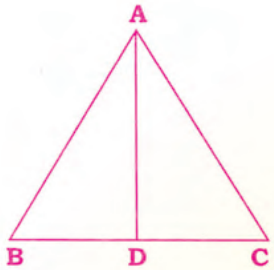
3- پھر Q کو مرکز مان کر اتنی ہی رداس کا ایک اور قوس پچھلی قوس کو نقطہ R پر قطع کرتے ہوئے لگائیں۔

4- نقاط P اور R کو ملائیں اور $\overline{PR}$ کھینچیں۔

5- نقاط Q اور R کو ملائیں اور $\overline{QR}$ کھینچیں۔

6- اس طرح ہمیں مساوی الاضلاع مثلث PQR حاصل گی جس کا ہر ضلع 3.6 سینٹی میٹر ہے۔

(b) مساوی الاضلاع مثلث بنائیں جب کہ اس کا ارتفاع دیا گیا ہو



مثلث کا ارتفاع مثلث کے راس سے اُس کے قاعدہ پر عمود ہوتا ہے۔ یہاں ABC ایک مساوی الاضلاع مثلث ہے جس میں $\overline{AD}$، قاعدہ $\overline{BC}$ پر عمود ہے۔

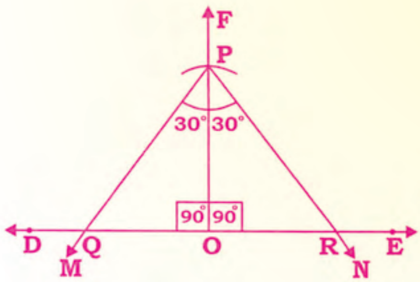
علامتی طور پر $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ یا $\overline{AD}$ مساوی الاضلاع مثلث ABC کا ارتفاع ہے۔

یاد رکھیں: مساوی الاضلاع مثلث کا ارتفاع راس کے زاویہ کی تنصیف کرتا ہے۔ مساوی الاضلاع مثلث کا ہر زاویہ $60°$ کا ہوتا ہے۔ ہم مساوی الاضلاع مثلث بنا سکتے ہیں جب ارتفاع دیا گیا ہو۔

مثال: مساوی الاضلاع مثلث PQR بنائیں جب کہ ارتفاع $(\overline{PO} \perp \overline{QR})$ جہاں $m\overline{PO} = 4.3$ سینٹی میٹر ہے۔

معلوم: PQR ایک مساوی الاضلاع مثلث ہے جس میں $\overline{PO}$ ارتفاع ہے، $\overline{PO} \perp \overline{QR}$ اور $m\overline{PO} = 4.3$ سینٹی میٹر۔

مطلوب: مساوی الاضلاع مثلث PQR بنانا۔



مراحل:

1- مسطر کی مدد سے کسی مناسب مقدار کا $\overleftrightarrow{DE}$ کھینچیں۔

2- اس پر کوئی نقطہ O لیں۔

3- پروٹیکٹر کی مدد سے $\overrightarrow{OF} \perp \overleftrightarrow{DE}$ کھینچیں۔

4- O کو مرکز مان کر 4.3 سینٹی میٹر رداس کا ایک قوس $\overrightarrow{OF}$ پر نقطہ P پر لگائیں جس سے ارتفاع $\overline{OP}$ ملے گا۔

5- ہم جانتے ہیں کہ مساوی الاضلاع مثلث کا ہر زاویہ $60°$ کا ہوتا ہے اور مساوی الاضلاع کا ارتفاع راس کے زاویہ کی تنصیف کرتا ہے۔ پروٹیکٹر کی مدد سے نقطہ P پر $30°$ کا زاویہ بنائیں جبکہ:

$$m\angle OPM = mOPN = 30°$$

6- $\overrightarrow{PM}$، نقطہ Q پر $\overleftrightarrow{DE}$ کو قطع کرتا ہے اور $\overrightarrow{PN}$ نقطہ R پر $\overleftrightarrow{DE}$ کو قطع کرتا ہے۔

لہٰذا PQR مطلوبہ مساوی الاضلاع مثلث ہے۔

مشق 11.3

1- ذیل میں دیئے گئے مساوی الاضلاع مثلث بنائیں جب کہ قاعدے کی پیائش نیچے دی گئی ہے:

(i) 2.9 cm (ii) 3.2 cm (iii) 4.1 cm
(iv) 3.8 cm (v) 2.8 cm (vi) 4.3 cm

2- ذیل میں دیئے گئے مساوی الاضلاع مثلث بنائیں جب کہ ارتفاع کی پیائش نیچے دی گئی ہے۔

(i) 3.6 cm (ii) 3.9 cm (iii) 4.3 cm
(iv) 4.5 cm (v) 4.7 cm (vi) 4.8 cm

3- مساوی الاضلاع مثلث **PQR** بنائیں جس میں قاعدہ **50** ملی میٹر لمبا ہے۔

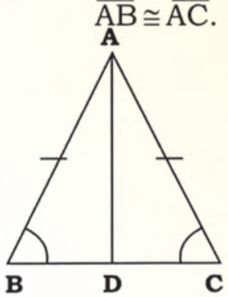
4- مساوی الاضلاع مثلث **MNO** بنائیں جس میں ارتفاع **36** ملی میٹر لمبا ہے۔

11.2.3 متساوی الساقین مثلث بنانا

(a) متساوی الساقین مثلث بنانا جب کہ قاعدہ اور قاعدہ کا زاویہ دیا گیا ہو

ہم پہلے سیکھ چکے ہیں کہ اگر کسی مثلث کی کوئی دو اضلاع متماثل ہوں تو وہ متساوی الساقین مثلث کہلاتی ہے۔

شکل ABC متساوی الساقین مثلث ہے جس میں $m\angle ABC \cong m\angle ACB$ اور $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.



لہٰذا متساوی الساقین مثلث میں متماثل اضلاع مثلث کے بازو کہلاتے ہیں اور تیسرا ضلع قاعدہ کہلاتا ہے۔

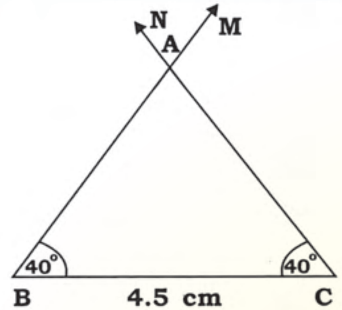
ہم متساوی الساقین مثلث بنا سکتے ہیں جب اس کا قاعدہ اور قاعدہ کا زاویہ دیئے گئے ہوں۔

ہم جانتے ہیں کہ متساوی الساقین مثلث میں دو ضلع متماثل ہوتے ہیں اس لئے ان کے مطلقہ زاویے بھی متماثل ہوتے ہیں۔

مثال: متساوی الساقین مثلث بنائیں جس میں قاعدے کی پیائش 4.9 سینٹی میٹر اور قاعدے کے زاویے کی پیائش 40° ہو۔

معلوم: متساوی الساقین مثلث ABC بنائیں جس میں $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ اور $m\angle ABC = 40°$

مطلوب: متساوی الساقین مثلث ABC بنانا۔



مراحل:

1- 4.5 سینٹی میٹر کا $\overline{BC}$ کھینچیں۔

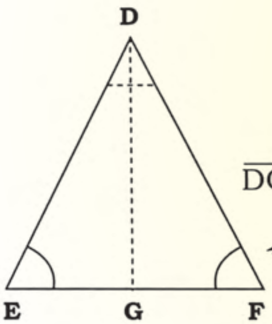
2- نقطہ B پر 40° درجے کا زاویہ CBM بنائیں۔

3- نقطہ C پر 40° درجے کا زاویہ BCN بنائیں۔

4- فرض کریں زاویوں کے دونوں بازو نقطہ A پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

5- لہٰذا ΔABC مطلوبہ متساوی الساقین مثلث ہے۔

(b) متساوی الساقین مثلث بنانا جبکہ راسی زاویہ اور ارتفاع دیا گیا ہو



تصویر کو غور سے دیکھیں۔ یہ متساوی الساقین مثلث DEF ہے

جس میں $m\overline{DE} = m\overline{DF}$ اور $m\angle DEF = m\angle DFE$

$\angle EDF$ راسی زاویہ کہلاتا ہے۔

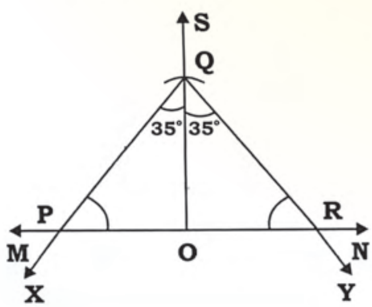
$\overline{DG}$ ایک ارتفاع ہے جسے نقطہ D سے $\overline{EF}$ پر کھینچا گیا ہے۔ اس لئے $\overline{DG} \perp \overline{EF}$

ہم پہلے ہی سیکھ چکے ہیں کہ ارتفاع جو متساوی الساقین مثلث کے راس سے قاعدے پر کھینچا جاتا ہے وہ راسی زاویے کی تنصیف کرتا ہے۔ لہٰذا $m\angle EDG = m\angle FDG$

مثال: متساوی الساقین مثلث PQR بنائیں جس میں متماثل اضلاع $\overline{QP} \cong \overline{QR}$ (متساوی الساقین مثلث کے بازو) اور $\overline{QO}$ ارتفاع ہے جس کی پیمائش 3.9 سینٹی میٹر اور راسی زاویہ کی پیمائش 70° ہے۔

معلوم: PQR متساوی الساقین مثلث ہے۔

$m\overline{QP} = m\overline{QR}$، $m\angle PQR = 70°$ اور $\overline{QO} \perp \overline{PR}$



مراحل:

1- مسطر کی مدد سے $\overleftrightarrow{MN}$ کھینچیں۔

2- اس پر کوئی نقطہ O لیں۔

3- $\overleftrightarrow{OS} \perp \overleftrightarrow{MN}$ کھینچیں۔

4- O کو مرکز مان کر 3.9 سینٹی میٹر رداس کا ایک قوس $\overrightarrow{OS}$ کو نقطہ Q پر قطع کرتے ہوئے لگائیں۔

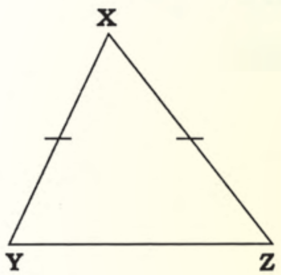
5- اب ارتفاع راسی زاویہ $70°$ کی تنصیف کرتے ہوئے کھینچیں۔ اس لئے عمود $\overline{QO}$ دونوں اطراف $\frac{70}{2} = 35°$ کے زاویے کو ظاہر کرتا ہے۔

6- $\angle OQY$ اور $\angle OQX$ ہر ایک $35°$ کا کھینچیں۔

7- $\overrightarrow{QX}$ نقطہ P پر $\overrightarrow{OM}$ پر قطع کرتا ہے اور $\overrightarrow{QY}$ نقطہ R پر $\overrightarrow{ON}$ کو قطع کرتا ہے۔

8- لہٰذا ΔPQR مطلوبہ متساوی الساقین مثلث ہے۔

(c) متساوی الساقین مثلث بنائیں جبکہ ارتفاع اور قاعدے کا زاویہ دیا گیا ہو



یہ متساوی الساقین مثلث کی شکل ہے۔

متساوی الساقین مثلث کے بازو :

$\overline{XY} \cong \overline{XZ}$ یا $m\overline{XZ} = mXY$ متماثل ہیں۔

اس طرح $m\angle XZY = m\angle XYZ$ یعنی

قاعدے کے زاویے متماثل ہوتے ہیں $(\angle XYZ \cong \angle XZY)$

ہم جانتے ہیں کہ مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ $180°$ درجے ہوتا ہے۔ اس خاصیت کی بنا پر ہم راسی زاویے کی پیمائش آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے۔

راسی زاویہ = (دونوں قاعدے کے زاویوں کا مجموعہ) − $180°$

مثال: متساوی الساقین مثلث XYZ بنائیں جب کہ ارتفاع $\overline{XR}$ کی پیمائش 3.8 سینٹی میٹر اور قاعدے کا زاویہ XYZ کی پیمائش $55°$ ہے۔

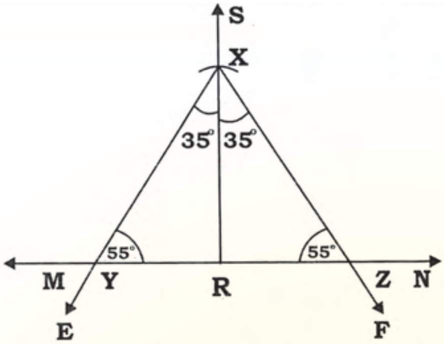
معلوم: ΔXYZ متساوی الساقین مثلث ہے $\overline{XR} \perp \overline{YZ}$، $m\overline{XR} = 3.8$ سینٹی میٹر۔

$\angle XYZ \cong \angle XZY$ یا $m\angle XZY = m\angle XYZ = 55°$

مطلوب: متساوی الساقین مثلث XYZ بنانا۔

مراحل:

سب سے پہلے ہم راسی زاویہ معلوم کرتے ہیں۔ راسی زاویہ = (دونوں قاعدے کے زاویوں کا مجموعہ) − $180°$



راسی زاویہ = $180° - (55 + 55)$

راسی زاویہ = $180° - 110°$

راسی زاویہ = $70°$

1- $\overleftrightarrow{MN}$ کھینچیں۔

2- اس پر کوئی نقطہ R لیں۔

3- $\overrightarrow{RS} \perp \overleftrightarrow{MN}$ کھینچیں۔

4- نقطہ R کو مرکز مان کر 3.8 سینٹی میٹر رداس کا ایک قوس $\overrightarrow{RS}$ پر نقطہ X پر لگائیں۔

5- نقطہ X پر، $\angle RXE$ کھینچیں = $\frac{\text{راسی زاویہ}}{2} = \frac{70}{2} = 35°$

6- نقطہ X پر، $\angle RXF$ کھینچیں = $\frac{\text{راسی زاویہ}}{2} = \frac{70}{2} = 35°$

7- $\overrightarrow{XE}$ نقطہ Y پر $\overrightarrow{RM}$ کو قطع کرتا ہے۔

8- اور $\overrightarrow{XF}$ نقطہ Z پر $\overrightarrow{RN}$ کو قطع کرتا ہے۔

9- لہٰذا ΔXYZ مطلوبہ متساوی الساقین مثلث ہے۔

مشق 11.4

1- ذیل کے مواد کی مدد سے متساوی الساقین مثلث بنائیں:

(i) قاعدہ = 4.2 سینٹی میٹر، قاعدے کا زاویہ = $42°$ (ii) قاعدہ = 4.8 سینٹی میٹر، قاعدے کا زاویہ = $48°$

(iii) قاعدہ = 38 ملی میٹر، قاعدے کا زاویہ = $38°$ (iv) قاعدہ = 45 ملی میٹر، قاعدے کا زاویہ = $45°$

2- متساوی الساقین مثلث بنائیں جب کہ راسی زاویے اور ارتفاع کی پیمائش دی گئی ہو۔

(i) راسی زاویہ = $76°$ ، ارتفاع = 4 سینٹی میٹر

(ii) راسی زاویہ = $80°$ ، ارتفاع = 5 سینٹی میٹر

(iii) راسی زاویہ = $90°$ ، ارتفاع = 5.3 سینٹی میٹر

(iv) راسی زاویہ = $100°$ ، ارتفاع = 60 ملی میٹر

3- متساوی الساقین مثلث بنائیں جب کہ ارتفاع اور قاعدے کا زاویہ دیا گیا ہے۔

(i) ارتفاع = 4.5 سینٹی میٹر، قاعدے کا زاویہ = 54°

(ii) ارتفاع = 3.9 ملی میٹر ، قاعدے کا زاویہ = 65°

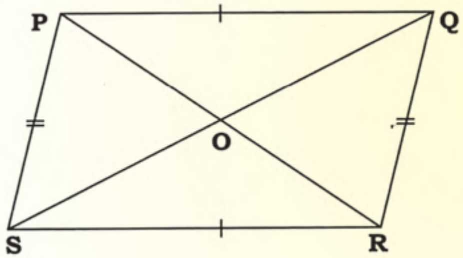
(iii) ارتفاع = 4.7 سینٹی میٹر، قاعدے کا زاویہ = 70°

(iv) ارتفاع = 5.9 ملی میٹر ، قاعدے کا زاویہ = 75°

11.3 متوازی الاضلاع

متوازی الاضلاع ایسا چوکور ہوتا ہے جس کے مخالف اضلاع متماثل اور متوازی ہوتے ہیں۔

دی گئی تصویر پر غور کریں۔



PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے جس میں

$\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$ اور $\overline{QR} \parallel \overline{PS}$۔

$\overline{PQ} \cong \overline{SR}$ اور $\overline{QR} \cong \overline{PS}$۔ $\overline{PR}$ اور $\overline{QS}$ وتر ہیں۔

خصوصیات:

(i) متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔ $\overline{PR}$ اور $\overline{QS}$ ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں یعنی: $\overline{PO} \cong \overline{RO}$، $\overline{SO} \cong \overline{QO}$۔

(ii) $\overline{PQ}$ اور $\overline{QR}$ دو متصلہ اضلاع ہیں اور $\angle PQR$ ان متصلہ اضلاع کا درمیانی زاویہ ہے۔ اس ہی طرح $\overline{QR}$ اور $\overline{SR}$ دو متصلہ اضلاع ہیں۔ $\angle SRQ$ ان متصلہ اضلاع کا درمیانی زاویہ ہے۔

(iii) متوازی الاضلاع کے مخالف زاویے بھی متماثل ہیں۔

یعنی: $\angle PQR \cong \angle PSR$، $\angle SRQ \cong \angle SPQ$

11.3.1 متوازی الاضلاع

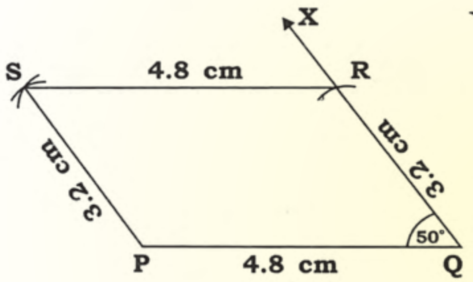
(i) متوازی الاضلاع بنائیں جب کہ دو متصلہ اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ دیا گیا ہو

ہمیں ایک متوازی الاضلاع بنانا ہے جب کہ اس کے متصلہ اضلاع کے دو جوڑے اور ان کے درمیانی زاویے دیئے گئے ہوں۔

مثال: متوازی الاضلاع PQRS بنائیں جس میں $m\overline{PQ} = 4.8$ سینٹی میٹر، $m\overline{QR} = 3.2$ سینٹی میٹر اور $m\angle PQR = 50°$

معلوم: PQRS متوازی الاضلاع ہے، $m\overline{PQ} = 4.8$ سینٹی میٹر، $m\overline{QR} = 3.2$ سینٹی میٹر اور $m\angle PQR = 50°$

مطلوب: دیئے گئے مواد سے متوازی الاضلاع PQRS بنانا۔



مراحل:

1- 4.8 سینٹی میٹر کا قطعہ خط $\overline{PQ}$ کھینچیں۔

2- نقطہ Q پر پروٹیکٹر کی مدد سے °50 کا زاویہ بنائیں۔

3- Q کو مرکز مان کر 3.2 سینٹی میٹر رداس کا ایک قوس $\overrightarrow{QX}$ پر لگائیں اور اسے نقطہ R کا نام دیں۔

4- R کو مرکز مان کر 4.8 سینٹی میٹر رداس کا ایک قوس لگائیں۔

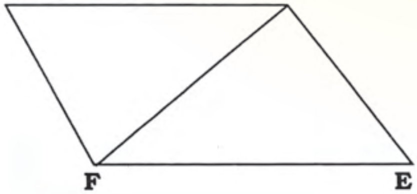
5- پھر P کو مرکز مان کر 3.2 سینٹی میٹر رداس کا ایک قوس پچھلی قوس پر نقطہ S پر لگائیں۔

6- P اور S کو ملائیں اور $\overline{PS}$ کھینچیں۔

7- R اور S کو ملائیں اور $\overline{RS}$ کھینچیں۔

اس طرح سے ہمیں مطلوبہ متوازی الاضلاع PQRS حاصل ہوگا۔

(ii) متوازی الاضلاع بنانا جب کہ دو متصلہ اضلاع اور ایک وتر دیا گیا ہو



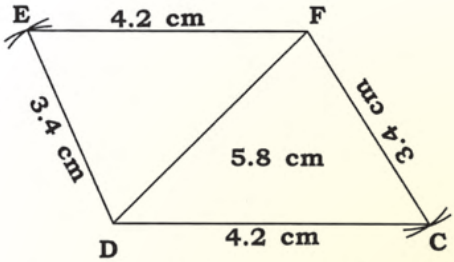
فرض کریں CDEF متوازی الاضلاع ہے جس میں $\overline{DF}$ وتر اور $\overline{CD}$، $\overline{CF}$ متصلہ اضلاع ہیں۔

ہم متوازی الاضلاع بنا سکتے ہیں جب کہ اس کا وتر $\overline{FD}$ اور دو متصلہ اضلاع $\overline{CD}$ اور $\overline{CF}$ کی پیمائش دی گئی ہیں۔

مثال: متوازی الاضلاع CDEF بنائیں جب کہ وتر $\overline{DF}$ کی لمبائی 5.8 سینٹی میٹر اور دو متصلہ اضلاع کی لمبائیاں $\overline{DE} = 3.4$ سینٹی میٹر اور $\overline{EF} = 4.2$ سینٹی میٹر ہیں۔

معلوم: CDEF متوازی الاضلاع ہے۔ اس کے متصلہ اضلاع کی لمبائیاں $\overline{DE} = 3.4$ سینٹی میٹر، $\overline{EF} = 4.2$ سینٹی میٹر اور وتر $m\overline{DF} = 5.8$ سینٹی میٹر ہیں۔

مطلوب: دیئے گئے مواد کی مدد سے متوازی الاضلاع بنانا۔



مراحل:

1- 5.8 سینٹی میٹر کا وتر $\overline{DF}$ ترچھا کھینچیں ۔

2- D کو مرکز مان کر 3.4 سینٹی میٹر رداس کا ایک قوس وتر $\overline{DF}$ کے اوپر کی جانب لگائیں۔

3- F کو مرکز مان کر 4.2 سینٹی میٹر رداس کا ایک اور قوس وتر DF کے اوپر کی جانب لگائیں۔ جو پچھلی قوس کو نقطہ E پر قطع کرے

4- D اور E کو ملا کر $\overline{DE}$ کھینچیں۔

5- E اور F کو ملا کر $\overline{EF}$ کھینچیں۔

6- اب D کو مرکز مان کر 4.2 سینٹی میٹر رداس کا ایک قوس وتر $\overline{DF}$ کے نیچے کی جانب لگائیں۔

7- پھر F کو مرکز مان کر 3.4 سینٹی میٹر رداس کا ایک قوس وتر $\overline{DF}$ کے نیچے کی جانب لگائیں جو پچھلی قوس کو نقطہ C پر قطع کرے۔

8- C اور D کو ملا کر $\overline{CD}$ کھینچیں۔

9- C اور F کو ملا کر $\overline{CF}$ کھینچیں۔

10- اس طرح ہمیں مطلوبہ متوازی الاضلاع CDEF حاصل ہو گی۔

مشق 11.5

1- متوازی الاضلاع بنائیں جب دو متصلہ اضلاع کی لمبائیاں اور ان کے درمیانی زاویے کی پیمائش دی گئی ہے:

(i) متوازی الاضلاع PQRS، $m\overline{PQ} = 5.9$ سینٹی میٹر، $m\overline{QR} = 4.1$ سینٹی میٹر اور $m\angle PQR = 65°$

(ii) متوازی الاضلاع CDEF، $m\overline{CD} = 63$ ملی میٹر، $m\overline{DE} = 39$ ملی میٹر اور $m\angle CDE = 70°$

(iii) متوازی الاضلاع ABCD، $m\overline{AB} = 6.6$ سینٹی میٹر، $m\overline{AD} = 4$ سینٹی میٹر اور $m\angle BAD = 50°$

(iv) متوازی الاضلاع RSTU، $m\overline{RS} = 70$ ملی میٹر، $m\overline{ST} = 45$ ملی میٹر $m\angle RST = 80°$

(v) متوازی الاضلاع ACEG، $m\overline{AC} = 7.5$ سینٹی میٹر، $m\overline{CE} = 3.4$ سینٹی میٹر $m\angle ACE = 75°$

(vi) متوازی الاضلاع LMNO، $m\overline{ON} = 6$ سینٹی میٹر، $m\overline{MN} = 3.5$ سینٹی میٹر $m\angle MNO = 55°$

-2 متوازی الاضلاع بنائیں جس میں دو متصلہ اضلاع کی پیمائش اور ایک وتر کی لمبائی نیچے دی گئی ہے:

(i) متوازی الاضلاع ABCD، $m\overline{BC} = 6$ سینٹی میٹر، $m\overline{CD} = 4$ سینٹی میٹر، $m\overline{BD} = 7.3$ سینٹی میٹر

(ii) متوازی الاضلاع BDFH، $m\overline{BD} = 50$ ملی میٹر، $m\overline{BH} = 30$ ملی میٹر، $m\overline{HD} = 64$ ملی میٹر

(iii) متوازی الاضلاع ACEG، $m\overline{AC} = 6.6$ سینٹی میٹر، $m\overline{AG} = 3.3$ سینٹی میٹر، $m\overline{CG} = 7.9$ سینٹی میٹر

(iv) متوازی الاضلاع PQRS، $m\overline{RS} = 4.8$ سینٹی میٹر، $m\overline{RQ} = 2.9$ سینٹی میٹر، $m\overline{SQ} = 7$ سینٹی میٹر

(v) متوازی الاضلاع RSTU، $m\overline{RS} = 59$ ملی میٹر، $m\overline{ST} = 36$ ملی میٹر، $m\overline{TR} = 7.5$ سینٹی میٹر

(vi) متوازی الاضلاع UVWX، $m\overline{UX} = 7$ سینٹی میٹر، $m\overline{UV} = 5$ سینٹی میٹر، $m\overline{UV} = 9$ سینٹی میٹر

11.3.2 (a) عملی طور پر ثابت کریں کہ مثلث کے زاویوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے

معلوم: DEF ایک مثلث ہے۔

مثلث کے تین زاویے ہیں:

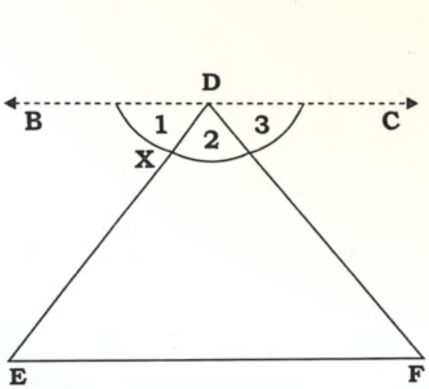
(i) $\angle DEF$ (ii) $\angle DFE$ اور (iii) $\angle EDF$

ہمیں ثابت کرنا ہے:

$m\angle DEF + m\angle DFE + m\angle EDF = 180°.$

مطلوب:

دیئے گئے مثلث ΔDEF کے زاویوں کا مجموعہ 180° ہے۔



مراحل:

-1 نقطہ D سے گزرتا ہوا $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ کھینچیں۔

-2 متوازی خطوط کی خاصیت کے مطابق:

$m\angle BDE = m\angle DEF$ (a) یا $\angle 1 \cong \angle E$

$m\angle CDF = m\angle DFE$ (b) یا $\angle 3 \cong \angle F$

-3 شکل کے مطابق:

$$m\angle DEF + m\angle EDF + m\angle DFE = m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3$$

یا $m\angle E + m\angle D + m\angle F = m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3$

-4 ہم جانتے ہیں کہ خط مستقیم پر زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

یعنی: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$

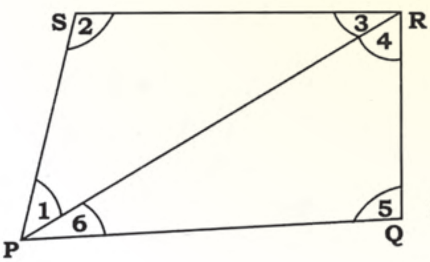
لہٰذا: $m\angle D + m\angle E + m\angle F = m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$

اس طرح یہ ثابت ہوا کہ مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

لہٰذا ہم اس کا مشاہدہ عملی طور پر کوئی سے تین یا اس سے زیادہ مثلث بنا کر بھی کر سکتے ہیں کہ مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔ پھر ہر مثلث کے تینوں زاویوں کی پیمائش پروٹیکٹر کی مدد سے کریں اور ان زاویوں کی پیمائش کا مجموعہ معلوم کریں۔ پس ثابت ہو جائے گا کہ مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ 180° ہے۔

11.3.2 (b) عملی طور پر ثابت کرنا کہ چوکور کے تمام زاویوں کا مجموعہ 360° ہوتا ہے۔

معلوم: PQRS ایک چوکور ہے۔ چوکور کے چار زاویے ہیں:



(i) $\angle SPQ$ (ii) $\angle PQR$ (iii) $\angle QRS$ اور

(iv) $\angle RSP$ یا $\angle P$، $\angle Q$، $\angle R$ اور $\angle S$

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ:

$$m\angle SPQ + m\angle PQR + m\angle QRS + \angle RSP = 360^\circ$$

یا $m\angle P + m\angle Q + m\angle R + m\angle S = 360^\circ$

مطلوب: چوکور PQRS کے زاویوں کا مجموعہ 360° ہے۔

مراحل: -1 اوپر دی گئی چوکور PQRS میں R اور P کو ملا کر وتر بنائیں۔

-2 وتر $\overline{PR}$ دیئے گئے چوکور کو دو مثلثوں ΔPSR اور ΔPQR میں تقسیم کرتا ہے۔

3- ہم جانتے ہیں کہ مثلث کے زاویوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے لہٰذا

چوکور کے زاویوں کا مجموعہ = (ΔPSR کے زاویوں کا مجموعہ) + (ΔPQR کے زاویوں کا مجموعہ)

4- ΔPSR میں:

$m\angle SPR + m\angle PSR + m\angle SRP = 180^\circ$

یا $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$ -------------------- (A)

مثلث PQR کے تینوں زاویوں کا مجموعہ میں

$m\angle QPR + m\angle PRQ + m\angle PQR = 180^\circ$

یا $m\angle 6 + m\angle 4 + m\angle 5 = 180^\circ$ -------------------- (B)

5- اب ہمیں چوکور PQRS کے تمام زاویوں کا مجموعہ معلوم کرنا ہے۔

یعنی (A) اور (B) نتائج کو جمع کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا:

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 6 + m\angle 4 + m\angle 5 = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$

یا $m\angle 1 + m\angle 6 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 = 360^\circ$

یا $m\angle P + m\angle S + m\angle R + m\angle Q = 360^\circ$

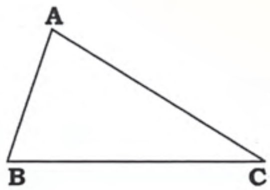
یا $m\angle P + m\angle Q + m\angle R + m\angle S = 360^\circ$

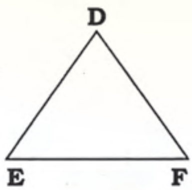
لہٰذا ثابت ہوا کہ دیئے گئے چوکور PQRS کے چاروں زاویوں کا مجموعہ 360° ہے۔

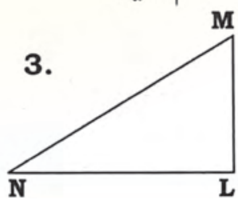
دو یا دو سے زیادہ چوکور بنا کر اس کو عملی طور پر ثابت کیا جاسکتا ہے۔ ہر چوکور میں زاویوں کی پیمائش کریں اور ہر چوکور کے زاویوں کی پیمائش کا مجموعہ معلوم کریں۔ پس چوکور کے زاویوں کا مجموعہ 360° ہے۔

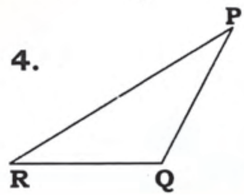
مشق 11.6

1- ثابت کریں کہ مثلث کے زاویوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔ تینوں زاویوں کی پیمائش پروٹیکٹر کی مدد سے کریں اور ان کا مجموعہ معلوم کریں۔

1. 

2. 

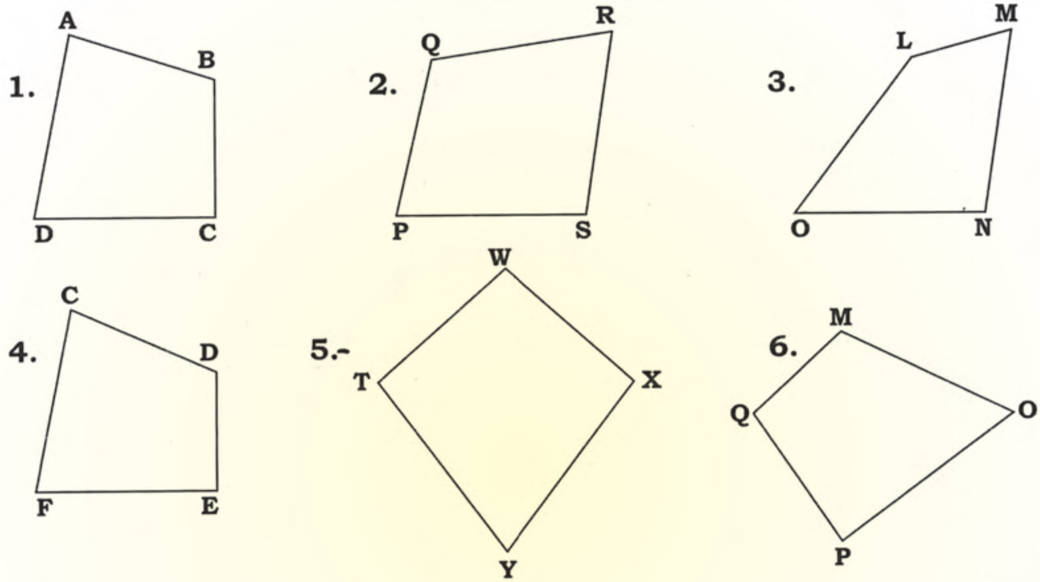
3. 

4. 

-2 تین مختلف مثلث بنائیں اور ہر مثلث کے زاویوں کی پیمائش کریں اور ثابت کریں کہ مثلث کے زاویوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

-3 ثابت کریں کہ چوکور کے چاروں زاویوں کا مجموعہ 360° ہوتا ہے۔

سب سے پہلے ہم زاویوں کی پیمائش پروٹیکٹر کی مدد سے کرتے ہیں اور پھر ان کا مجموعہ معلوم کرتے ہیں۔



-4 کوئی سے دو چوکور بنائیں۔ ہر چوکور کے تمام زاویوں کی پیمائش کریں۔ ثابت کریں کہ چوکور کے زاویوں کا مجموعہ 360° ہوتا ہے۔

جائزہ مشق 11

A. ذیل کے مختصر سوالات کے جوابات دیں۔

-1 قطعہ خط کیا ہوتا ہے؟ خصوصیات بیان کریں؟

-2 مثلث کیا ہوتا ہے؟ خصوصیات بیان کریں؟

-3 مختلف اقسام کے مثلثوں کے نام لکھیں۔

-4 دو قطعہ خط کب متماثل ہوتے ہیں؟

-5 مثلث کے زاویوں کا مجموعہ کتنا ہوتا ہے؟ پروٹیکٹر کی مدد سے ثابت کریں۔

-6 چوکور کیا ہوتا ہے؟ مختلف اقسام کے نام بتائیں۔

-7 مساوی الاضلاع مثلث کی خصوصیات بیان کریں۔

-8 کیا مربع مستطیل ہوتا ہے یا متوازی الاضلاع یا معین ہے؟

-9 چوکور کے زاویوں کا مجموعہ کتنا ہوتا ہے؟ ثابت کریں۔

-10 مثلث کے ارتفاع اور راسی زاویے کی وضاحت کریں۔

B. ذیل کی صاف وستھری شکل بنائیں۔

-1 قطعہ خط 10.5 سینٹی میٹر کو 3:4 میں تقسیم کریں۔

-2 قطعہ خط 11.9 سینٹی میٹر کو 2:4:2 میں تقسیم کریں۔

-3 متساوی الساقین مثلث بنائیں جس کا قاعدہ 52 ملی میٹر اور قاعدے کا زاویہ $70°$ ہے۔

-4 متوازی الاضلاع PQRS بنائیں جس میں $m\overline{SR} = 4.1$ سینٹی میٹر، $m\overline{QR} = 3.1$ سینٹی میٹر اور $m\angle QRS = 70°$۔

-5 مساوی الاضلاع مثلث بنائیں جس کے ارتفاع کی لمبائی 6 سینٹی میٹر ہے۔

-6 مثلث بنائیں جس کا احاطہ 129 ملی میٹر ہے اور اضلاع کی لمبائیوں میں نسبت 3:4:5 ہے۔

-7 متساوی الساقین مثلث بنائیں جس کا ارتفاع 6.2 سینٹی میٹر اور راسی زاویہ $40°$ ہے۔

-8 متوازی الاضلاع بنائیں جس کے متصلہ اضلاع کی لمبائیں 43 ملی میٹر اور 32 ملی میٹر ہیں اور اُس کے ایک وتر کی لمبائی 6.4 سینٹی میٹر ہے۔

C. درست جواب پر (✓) کا نشان لگائیں۔

-1 تین اضلاع، تین زاویوں والا کثیر الاضلاع جس کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے وہ ________ کہلاتا ہے۔

(الف) چوکور (ب) قطعہ خط (ج) مثلث (د) دائرہ

-2 متساوی الساقین مثلث کا قاعدہ کا زاویہ ________ ہے جبکہ راسی زاویہ $56°$ ہو.

(الف) $67°$ (ب) $70°$ (ج) $60°$ (د) $90°$

-3 ایک متوازی الاضلاع جس کا ہر زاویہ $90°$ ________ کہلاتا ہے۔

(الف) دائرہ (ب) مستطیل (ج) ذوزنقہ (د) مثلث

-4 دو قطعہ خط OP اور QR متماثل ہوتے ہیں اگر:

(الف) $m\overline{OP} = m\overline{QR}$ (ب) $m\overline{OP} > m\overline{QR}$

(ج) $m\overline{OP} < m\overline{QR}$ (د) $m\overline{OP} \neq m\overline{QR}$

-5 چوکور کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ ________ ہوتا ہے۔

(الف) $90°$ (ب) $180°$ (ج) $270°$ (د) $360°$

6- ایسا چوکور جس کی مخالف اضلاع متماثل اور متوازی ہوتے ہیں وہ ________ کہلاتی ہے۔

(الف) ذوزنقہ (ب) متوازی الاضلاع (ج) مربع (د) مستطیل

7- اگر مثلث میں قاعدے کے دو زاویوں کا مجموعہ 90° ہو تو راسی زاویے کی پیمائش ______ ہو گی۔

(الف) 45° (ب) 90° (ج) 135° (د) 180°

8- کسی چوکور میں تین زاویوں کا مجموعہ 270° ہو تو چوتھے زاویے کی پیمائش ________ ہو گی۔

(الف) 90° (ب) 180° (ج) 270° (د) 360°

خلاصہ

- دو قطعہ خط متماثل ہوتے اگر ان کی لمبائیاں برابر ہوں جیسے $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ جبکہ $m\overline{AB} = m\overline{CD}$
- ایک قطعہ خط کسی بھی دیئے گئے برابر حصوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے مثلاً: $m\overline{CD} = 120$ ملی میٹر

(i) جب 6 برابر حصوں میں تقسیم کرنا ہو تو ہر حصے کی پیمائش ہو گی $\frac{12}{6} = 2$ سینٹی میٹر

(ii) جب کہ اوپر دیئے گئے قطعہ خط CD کو نسبت 1:2:3 میں تقسیم کرنا ہو۔

ہمیں تین چھوٹے حصے l_1، l_2 اور l_3 ملیں گے۔

C 2 cm E 4 cm F 6 cm D

$\dfrac{l_1 \text{ کی نسبت} \times m\overline{CD}}{\text{نسبتوں کا مجموعہ}}$ ، $\dfrac{l_2 \text{ کی نسبت} \times m\overline{CD}}{\text{نسبتوں کا مجموعہ}}$ ، $\dfrac{l_3 \text{ کی نسبت} \times m\overline{CD}}{\text{نسبتوں کا مجموعہ}}$

- مثلث ایسا کثیر الاضلاع ہوتا ہے جس کے تین اضلاع اور تین زاویے ہوتے ہیں۔

(i) ہم مثلث بنا سکتے ہیں جب کہ اس کے کم از کم تین اجزاء دیئے گئے ہوں۔

(ii) ہم مثلث بنا سکتے ہیں جب کہ اُس کا احاطہ اور اضلاع کی نسبتیں دی گئی ہوں۔

- ایک مساوی الاضلاع مثلث کے تینوں اضلاع متماثل ہوتے ہیں۔

(i) ہم مساوی الاضلاع مثلث بنا سکتے ہیں جب کہ اس کے ایک ضلع جس کو قاعدہ کہا جاتا معلوم ہو۔

(ii) ہم مساوی الاضلاع مثلث بنا سکتے ہیں جب کہ اُس کا ارتفاع معلوم ہو۔ مثلث کا ارتفاع اُس کے راس سے قاعدے پر عمود ہوتا ہے۔

- متساوی الساقین مثلث کے دو اضلاع متماثل ہوتے ہیں۔

(i) ہم ایک متساوی الساقین مثلث بنا سکتے ہیں جب کہ اُس کا قاعدہ اور دوقاعدہ کے مساوی زاویے معلوم ہوں
(ii) ہم ایک متساوی الساقین مثلث بنا سکتے ہیں جب کہ اُس کا راسی زاویہ اور ارتفاع معلوم ہو۔

ارتفاع راس سے قاعدہ پر کھینچا جاتا ہے اور وہ راسی زاویے کی تنصیف کرتا ہے۔

متساوی الساقین مثلث میں ہم نامعلوم راسی زاویے کی پیمائش آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں جیسے:

راسی زاویہ = (قاعدے کے دو زاویوں کا مجموعہ − 180) اس ہی طرح متساوی الساقین مثلث میں ہم نامعلوم قاعدے کے زاویے کی پیمائش آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\text{قاعدے کا زاویہ} = \frac{180^\circ - \text{راسی زاویہ}}{2}$$

- متوازی الاضلاع ایک چوکور ہوتا ہے جس کے مخالف اضلاع متماثل اور متوازی ہوتے ہیں۔ متوازی الاضلاع کی خصوصیات نیچے دی گئی ہیں:

(i) متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

(ii) متوازی الاضلاع کے مخالف زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

(iii) مربع، مستطیل اور معین متوازی الاضلاع ہیں لیکن ہر متوازی الاضلاع مربع، مستطیل اور معین نہیں ہوتا ہے۔

• • •

دماغی ذخیرہ: دلچسپ اور کارآمد معلومات

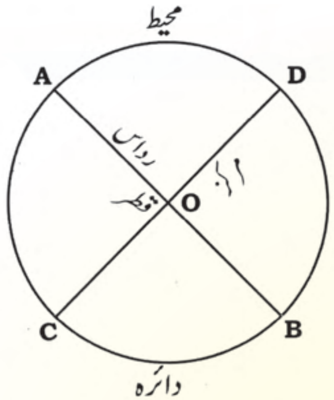
آیئے عدد 1 2 3 4 5 6 7 9 کا جادو دیکھیں

عدد 1 2 3 4 5 6 7 9 کو 9 اور 9 کے اضعاف 9 سے 81 تک (9,18,27,36,45,54,63,72,81) سے ضرب کر کے دیکھتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 12345679 \\ \times\ 9 \\ \hline 111111111 \\ \hline \end{array}$$

اسی طرح $12345679 \times 18 = 222222222$

یونٹ 12 محیط، رقبہ اور حجم



12.1 دائرہ کا محیط اور رقبہ

12.1 دائرہ کا محیط

تعارف: دائرہ ایک جانی پہچانی شکل ہے۔ O دائرے کا مرکز ہے۔ $\overline{OA}$ رداس ہے۔ $\overline{AB}$ قطر ہے۔ دائرہ ایک بند شکل ہے اور اس کا ہر نقطہ مرکز O سے یکساں فاصلے پر ہوتا ہے۔

دائرے کی حدود کی پیمائش اس کا محیط کہلاتی ہے۔

یہاں AOD، BOD، AOC اور BOC دائرہ کے قطعات (سیکٹر) ہیں۔ $\overline{OA}$، $\overline{OB}$، $\overline{OC}$ اور $\overline{OD}$ ہر ایک دائرے کے رداس کو ظاہر کرتا ہے۔

$\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ قطر ہیں۔ چونکہ قطر ایک قطعہ خط ہوتا ہے۔ لہٰذا اس کی آسانی سے پیمائش کی جاسکتی ہے۔

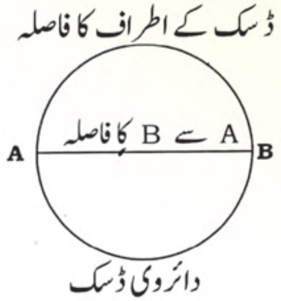
12.1.1 π کی بطور دائرے کے محیط اور قطر کے درمیان نسبت وضاحت کرنا

سرگرمی: آئیں دائرے کے محیط کے درمیان نسبت معلوم کرنے کے لئے کسی ساتھی یا گروہ کی صورت میں کام کریں۔ ہمیں کہیں دائروی اشیاء، ایک کلکولیٹر، مسطر اور ایک پیمائشی پٹی اور تار کی ضرورت ہوگی۔

مرحلہ 1:

کسی دائروی ڈسک کا انتخاب کریں اور ذیل کے سوالات کے جوابات دیں۔

دائروی ڈسک پر غور کریں۔



(a) آپ کے خیال میں کون سا بڑا ہے؟

دائروی ڈسک کے اطراف کا فاصلہ یا A سے B تک کا فاصلہ

یہ دیکھا گیا ہے کہ ڈسک کے اطراف کا فاصلہ بڑا ہے۔

(b) آپ کے خیال میں یہ کتنا گنا بڑا ہے؟

آئیں دوسرے سوال کا جواب تلاش کرنے کی کوشش کریں۔

مرحلہ 2:

ڈسک کے اطراف کا فاصلہ (اس کا محیط) پٹی کے ذریعے سینٹی میٹر میں ناپیں اور درجہ کریں۔

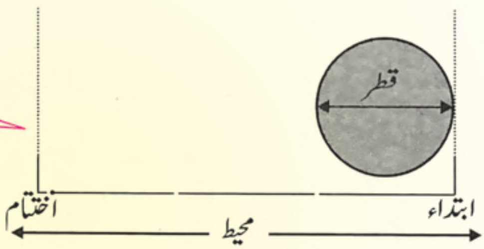
مرحلہ 3:

ڈسک کی چوڑائی (اس کا قطر) مسطر یا پٹی کے ذریعے ناپیں اور درجہ کریں۔

1. مرحلہ 2 اور 3 کو دوسری دائروی اشیاء پر بھی دہرائیں۔ نتیجے کو نیچے دی گئی جدول میں درج کریں۔ اپنے ساتھی یا دوسرے گروہ کے نتائج بھی درج کریں۔

2. محیط کے کالم میں دی گئی پیمائش کو قطر کے کالم میں دی گئی پیمائش سے موازنہ کریں۔ اوپر دی گئی تمام صورتوں میں ہم محیط اور قطر کے درمیان نسبت معلوم کرتے ہیں۔

محیط، قطر کے تین گنا سے تھوڑا زیادہ ہوتا ہے۔



نیچے جدول میں چار دائروں کے قطر اور محیط کی پیمائش دکھائی گئی ہیں۔ ہر دائرہ کی نسبت $\left(\frac{\text{محیط}}{\text{قطر}}\right)$ کی قیمت معلوم کریں۔ آپ نے کیا دیکھا؟

دائرہ	قطر	محیط (قریب ترین قیمت)	$\frac{\text{محیط}}{\text{قطر}}$ (قریب ترین قیمت)
(i)	3.5 سینٹی میٹر	11 سینٹی میٹر	
(ii)	28 ملی میٹر	88 ملی میٹر	
(iii)	4.2 میٹر	13.2 میٹر	
(iv)	21 ملی میٹر	66 ملی میٹر	

اگر ہم مختلف رداس کے دائرے لیں اور ان کے محیط معلوم کریں تو ہم دیکھیں گے کہ ہر محیط کی اُس کے قطر سے نسبت تقریباً ایک جیسی ہی ہے۔ اس نسبت کو π سے ظاہر کرتے ہیں۔

$\frac{\text{محیط}}{\text{مسطر}}$ یا π کی قیمت تمام دائروں میں یکساں ہوتی ہے۔ یہ ہمیشہ تقریباً 3.14 یا $\frac{22}{7}$ ہوتی ہے۔

اس لئے محیط = π × قطر

جیساکہ محیط، قطر سے π گنا بڑا ہے۔

(ii) بذریعہ کلیہ دائرے کا محیط معلوم کرنا

دائرہ کا محیط معلوم کرنے کے مختلف طریقے ہیں۔

(a) دائرہ کے محیط کی پیمائش بذریعہ سر گرمی کرنا۔

سر گرمی 1:

مرحلہ
(i) سلنڈر کی اُفقی کاٹ دائرہ ہے۔
(ii) ہم اس دائرہ کا محیط معلوم کرنا چاہتے ہیں۔
(iii) کاغذ کی پٹی یا تار کو سلنڈر کے گرد لپیٹیں۔
(iv) جب کاغذ کی پٹی یا تار پہلے سرے پر پہنچ جائے تو اس جگہ نشان لگائیں۔
(v) کاغذ کی پٹی یا تار کے سرے سے اس نشان تک پیمائش کریں۔
(vi) یہ محیط کی لمبائی کی پیمائش ہے۔

دائرے کا احاطہ دائرے کا محیط بھی کہلاتا ہے۔

دائرے کے محیط کی پیمائش بذریعہ کلیہ کرنا

ہم دائرے کا محیط معلوم کرنے کے لئے ذیل کا کلیہ استعمال کر سکتے ہیں۔

دائرہ کا محیط = π × قطر کی لمبائی

ہم جانتے ہیں کہ قطر = 2r = رداس کا دو گنا

تو محیط $C = 2\pi r$ اور $C = \pi d$ یہاں d قطر کی لمبائی ہے۔

مثال 1: اگر دائرے کا رداس 35 ملی میٹر ہے تو معلوم کریں:

(a) اُس کا قطر اور (b) اُس کا محیط (جبکہ $\pi = \frac{22}{7}$)

حل: (a) قطر = 2 × رداس

= 2 × 35 ملی میٹر

= 70 ملی میٹر

اس کا قطر 70 ملی میٹر ہے۔

(b) محیط = π × قطر

$= \frac{22}{7} \times \frac{70}{1}$ ملی میٹر

$= \frac{22 \times \cancel{70}^{10}}{\cancel{7}_1} = 220$ ملی میٹر

لہٰذا اس کا محیط 220 ملی میٹر ہے۔

مثال 2: اگر دائرے کے قطر کی لمبائی 14 سینٹی میٹر ہے تو دائرہ کا محیط معلوم کریں۔

حل: قطر کی لمبائی d = 14 سینٹی میٹر اور $\pi = \frac{22}{7}$

پس دائرہ کا محیط = π × d

$= \frac{22}{7} \times 14 = \frac{22 \times \cancel{14}^{2}}{\cancel{7}_1} = 44$ سینٹی میٹر

مثال 3: دائرہ کا قطر اور رداس معلوم کریں جب کہ اس کا محیط 99 سینٹی میٹر ہے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ

محیط = π × d

یا $C = \pi d$

یا $\frac{C}{\pi} = d$

قطر $d = \frac{C}{\pi} = \frac{99}{\frac{22}{7}} = \frac{99 \times 7}{22}$

یا $d = \frac{\cancel{99}^{9} \times 7}{\cancel{22}_{2}} = \frac{63}{2} = 31.5$ سینٹی میٹر

اور رداس $= r = \frac{d}{2} = \frac{63/2}{2} = \frac{63}{4} = 15.75$ سینٹی میٹر

مشق 12.1

A. دائرہ کا محیط معلوم کریں جب کہ اس کا قطر ہے۔

(1) d = 28 cm (2) d = 35 cm (3) d = 42 mm (4) d = 56 mm

B. دائرہ کا محیط معلوم کریں جب کہ اس کا رداس ہے۔

(1) 10.5 cm (2) 28 cm (3) 38.5 cm (4) 49 cm
(5) 59.5 cm (6) 63 cm (7) 80.5 cm (8) 77 cm

C. دائرہ کا رداس معلوم کریں جب کہ اس کا محیط ہے۔

(1) 22 cm (2) 66 cm (3) 88 cm (4) 110 cm
(5) 132 cm (6) 176 cm (7) 220 cm (8) 198 cm

D. دائرہ کا قطر معلوم کریں جب کہ اس کا محیط ہے۔

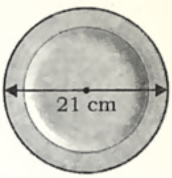
(1) 44 cm (2) 154 cm (3) 242 mm (4) 264 mm
(5) 48.4 mm (6) 30.8 cm (7) 52.8 cm (8) 39.6 mm

E. جدول مکمل کریں۔ منٹ کا بازو ایک مکمل چکر ایک گھنٹے میں مکمل کرتا ہے۔

شمار نمبر	گھڑی کے منٹ کے بازو کی لمبائی r ہے۔	منٹ کے بازو کا طے کردہ فاصلہ معلوم کریں
.1	$r = 1.4$ cm	(i) فاصلہ $= 2\pi r$ $= \frac{2\times22\times1.4}{7} = 8.8$ سینٹی میٹر
.2	$r = 21$ mm	
.3	$r = 35$ mm	
.4	$r = 2.8$ cm	
.5	$r = 42$ mm (نوٹ: منٹ کا بازو ایک مکمل چکر ایک گھنٹے میں مکمل کرتا ہے)	

F. ذیل میں ہر ایک دائروی حدود کی پیائش معلوم کرنے کے لئے کم از کم کتنی لمبائی کی تار درکار ہے؟

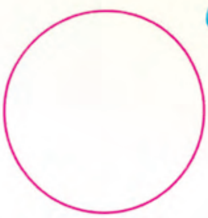
(1)



(2)

(3)

12.1.3 دائروی علاقے کا رقبہ بذریعہ کلیہ معلوم کریں

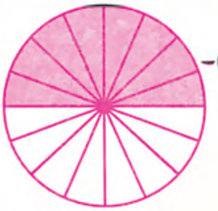


آئیں دائروی علاقے کا رقبہ بذریعہ سرگرمی معلوم کریں۔

سرگرمی:

(i) مناسب رداس کا ایک دائرہ کاغذ پر کھینچیں۔
(ii) قینچی کی مدد سے دائرہ کاٹیں۔

(iii) دائرے کو دو برابر حصوں میں تہہ کریں۔

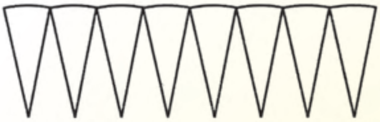


(iv) دائرے کو تہہ در تہہ کرتے جائیں یہاں تک کہ آپ کو اس کے 16 برابر حصے مل جائیں۔

(v) دائرے کو کھولیں۔

(vi) آدھے دائرے کو سایہ دار کریں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

(vii) اب دائرے کو قینچی سے نشانات کے ساتھ ساتھ 16 حصوں میں کاٹ لیں۔



(viii) دائرے کے ہر قطعے کی لمبائی رداس کے برابر ہے۔

(ix) 16 حصوں کو دو برابر حصوں میں تقسیم کریں۔

(x) سفید کٹے ہوئے حصوں کو اوپر آدھے حصے میں اور باقی سایہ دار حصوں کو نیچے آدھے حصے میں رکھیں۔

(xi) شکل تقریباً ایک مستطیلی علاقہ ہے۔

(xii) مستطیلی علاقے کی لمبائی نصف محیط کے برابر ہے۔

(xiii) مستطیلی علاقے کی چوڑائی دائرے کے رداس کے برابر ہے۔

(xiv) مستطیلی علاقے کا رقبہ دائرے کے رقبے کے برابر ہے۔

لہٰذا دائروی علاقے کا رقبہ = مستطیلی علاقے کا رقبہ

= مستطیل کی لمبائی × مستطیل کی چوڑائی

= لمبائی × چوڑائی

= محیط کا نصف × دائرے کا رداس

$$= \left[\frac{1}{2}(2\pi r)\right] \times r$$

$$= \frac{1 \times \cancel{2} \times \pi r \times r}{\cancel{2}} = \pi r^2$$

پس دائروی علاقے کا رقبہ معلوم کرنے کا کلیہ ہے

دائروی علاقے کا رقبہ = πr^2

یہاں r، دائرے کا رداس ہے۔

مثال 1: دائرے کا رداس 35 سینٹی میٹر ہے۔ اس کا رقبہ معلوم کریں۔

حل: دائروی علاقے کا رقبہ = πr^2

یہاں رداس = r = 35 سینٹی میٹر اور $\pi = \frac{22}{7}$

رقبہ = $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times (35)^2 = \frac{22 \times 35 \times 35}{7}$

$= \frac{22 \times 35 \times \overset{5}{\cancel{35}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} = 3,850$ مربع سینٹی میٹر

مثال 2: دائروی علاقے کا رقبہ 1,386 مربع سینٹی میٹر ہے۔ اس کا رداس معلوم کریں۔

حل: دائروی علاقے کا رقبہ (A) 1,386 مربع سینٹی میٹر

ہم جانتے ہیں کہ دائروی علاقے کا رقبہ معلوم کرنے کا کلیہ ہے: $A = \pi r^2$

اس لئے $1,386 = \pi r^2$

یا $\frac{22}{7} r^2 = 1386$

یا $r^2 = 1386 \div \frac{22}{7}$

یا $r^2 = \frac{1386 \times 7}{22} = \frac{11 \times 63 \times 2 \times 7}{22}$

یا $r^2 = 63 \times 7 = 3 \times 3 \times 7 \times 7$

لہٰذا رداس = r = 3 × 7 = 21 سینٹی میٹر

مشق 12.2

A. دائروی علاقے کا رقبہ معلوم کریں جب کہ رداس ہے۔

(1) 14 cm (2) 10.5 cm (3) 21 cm (4) 17.5 mm
(5) 35 mm (6) 24.5 cm (7) 71.4 cm (8) 38.5 cm

B. دائروی علاقے کا رداس معلوم کریں جب کہ رقبہ ہے۔

(1) 154 sq. mm (2) 2,464 sq. cm (3) 7546 sq. mm
(4) 5,544 sq. mm (5) 6.16 sq. mm (6) 962.5 sq. cm
(7) 38.5 sq. m (8) 75.46 sq. mm (9) 13.86 sq. m

C. دائروی علاقے کا رقبہ معلوم کریں جب کہ اس کا قطر ہے۔

(1) 21 cm	(2) 28 cm	(3) 42 cm	(4) 56 cm
(5) 8.4 cm	(6) 9.8 cm	(7) 11.2 cm	(8) 12.6 cm

D. دائروی علاقے کا قطر معلوم کریں جب کہ اس کا رقبہ نیچے دیا گیا ہے۔

(1) $154\ cm^2$	(2) $1,386\ (mm^2)$	(3) $3,850\ (mm^2)$	(4) $9,856\ mm^2$
(5) $124.74\ cm^2$	(6) $186.34\ cm^2$	(7) $221.76\ cm^2$	(8) $260.26\ cm^2$

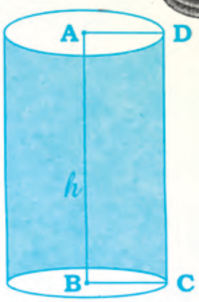
12.2 سلنڈر کا حجم اور سطحی رقبہ

سلنڈر: سلنڈر کے متعلق ہم پچھلی جماعت میں سیکھ چکے ہیں۔ گھی کا ڈبہ، تیل کا ڈبہ، ٹھنڈے مشروب کا ڈبا تارکول کا ڈرم سلنڈر کی مثالیں ہیں۔

سرگرمی:

آئیں ایک روپے، دو روپے اور پانچ روپے کے سکوں کو اوپر نیچے ایک دوسرے کے اوپر رکھتے جائیں تو ہمیں کیسی شکل ملے گی۔

12.2.1 سلنڈر کی سطح کا رقبہ بذریعہ کلیہ معلوم کریں



سلنڈر کی سطح کے تین حصے ہوتے ہیں۔

دو مساوی دائروی سطحیں اور تیسری منحنی سطح۔

آئیں ان تینوں کا رقبہ معلوم کریں۔

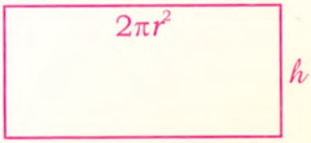
فرض کریں ہر دائروی سطح کا رداس r ہے اور سلنڈر کی سطح کی اونچائی h ہے۔

i- سلنڈر کی دو دائروی علاقوں کا رقبہ = سلنڈر کے بالائی قاعدے کا رقبہ + سلنڈر کے زیریں قاعدے کا رقبہ

$$= \pi r^2 + \pi r^2 = 2\pi r^2$$

ii- سلنڈر کی مخنی سطح کا رقبہ معلوم کرنا

ہم کاغذ کی ایک شیٹ لیتے ہیں جس کی چوڑائی سلنڈر کی اونچائی کے برابر ہو۔ اسے سلنڈر کے گرد لپیٹتے ہیں اور فالتو حصہ کاٹتے ہیں۔ اس سے مستطیل کی شکل ملے گی۔ کاغذ کی چوڑائی h اور اونچائی سلنڈر کے دائروی علاقے کے قاعدے کے محیط کے برابر ہوگی۔



سلنڈر کی مخنی سطح کا رقبہ = مستطیل کا رقبہ

= لمبائی × چوڑائی

$= 2\pi r \times h$

$= 2\pi rh$

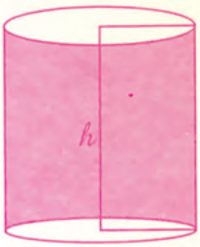
لہٰذا سلنڈر کی سطح کا کل رقبہ = دو دائروی سطحوں کا رقبہ + سلنڈر کی مخنی سطح کا رقبہ

$= 2\pi r^2 + 2\pi rh$

$= 2\pi r(r + h)$

لہٰذا سلنڈر کی سطح کا رقبہ $= 2\pi r(r + h)$

مثال 1: سلنڈر کے قاعدے کا رداس 14 سینٹی میٹر ہے اور سلنڈر کی اونچائی 21 سینٹی میٹر ہے تو سلنڈر کی سطح کا کل رقبہ معلوم کریں۔



حل: قاعدے کا رداس = $r = 14$ سینٹی میٹر

سلنڈر کی اونچائی = $h = 20$ سینٹی میٹر $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

سلنڈر کی سطح کا کل رقبہ معلوم کرنے کا کلیہ ہے = $2\pi r(r + h)$

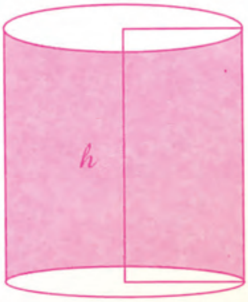
یعنی رقبہ = $2\pi r(r + h) = 2 \times \frac{22}{7} \times 14\,(14 + 21)$

$= \frac{2 \times 22 \times \overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} \times (35)$

رقبہ = $88 \times 35 = 3,080$ مربع سینٹی میٹر

پس سلنڈر کی سطح کا کل رقبہ 3,080 مربع سینٹی میٹر ہے۔

مثال 2: سلنڈر کی اونچائی معلوم کریں جب کہ اس کا رداس 10.5 سینٹی میٹر ہو اور کل سطحی رقبہ 1,650 مربع سینٹی میٹر ہے۔



حل: سلنڈر کی اونچائی = h = ؟

دائروی قاعدے کا رداس = r = 12.5 سینٹی میٹر

کل سطحی رقبہ = A = 1,650 مربع سینٹی میٹر

کلیہ: $A = 2\pi r (r + h)$

یا $1650 = 2 \times \frac{22}{7} \times 10.5\,(10.5 + h)$

یا $1650 = \frac{2 \times 22 \times \overset{1.5}{\cancel{10.5}}}{\cancel{7}_1} \times (10.5 + h)$

یا $1650 = 693 + 66h$

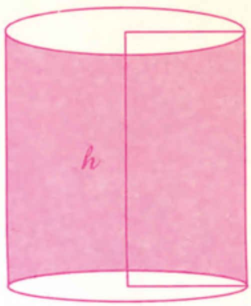
یا $1650 - 693 = 66h$

یا $957 = 66h$

یا $h = \frac{957}{66} = \frac{\overset{\overset{29}{\cancel{319}}}{\cancel{957}}}{\underset{\underset{2}{\cancel{22}}}{\cancel{66}}} = \frac{29}{2} = 14.5$

یا h = 14.5 سینٹی میٹر

لٰہذا سلنڈر کی مطلوبہ اونچائی 14.5 سینٹی میٹر ہے۔



مثال 3: سلنڈر کی اونچائی اور رداس معلوم کریں جس کا کل سطحی رقبہ 2,200 مربع سینٹی میٹر اور رداس اور اونچائی کا مجموعہ 35 سینٹی میٹر ہے۔

حل: کل سطحی رقبہ = A = 2,200 مربع سینٹی میٹر

$r + h$ = 35 سینٹی میٹر

ہمیں سلنڈر کی رداس اور اونچائی معلوم کرنی ہے۔

کلیہ: $A = 2\pi r (r + h)$

$2200 = 2 \times \frac{22}{7} \times r\,(35)$

یا $2200 = \left(\frac{2 \times 22 \times 35}{7}\right) r$

یا $2200 = \frac{44 \times \cancel{35}^{5}}{\cancel{7}_{1}} r$

یا $2200 = 220r$

یا $\frac{2200}{220} = r$

یا $10 = r$ یا $r = 10$ سینٹی میٹر

اس لئے رداس = r = 10 سینٹی میٹر

پھر $r + h = 35$

$10 + h = 35$

$h = 35 - 10$

$h =$ 25 سینٹی میٹر

لٰہذا سلنڈر کی مطلوبہ رداس 10 سینٹی میٹر اور اونچائی 25 سینٹی میٹر ہے۔

مشق 12.3

A. سلنڈری علاقے کا کل سطحی رقبہ معلوم کریں جب کہ سلنڈر کے قاعدے کا رداس اور اونچائی دی گئی ہے۔

-1 رداس = 14 سینٹی میٹر ، اونچائی = 26 سینٹی میٹر

-2 رداس = 10 سینٹی میٹر ، اونچائی = 18 سینٹی میٹر

-3 رداس = 21 ملی میٹر ، اونچائی = 29 ملی میٹر

-4 رداس = 17.5 سینٹی میٹر ، اونچائی = 22.5 سینٹی میٹر

-5 رداس = 30 سینٹی میٹر ، اونچائی = 40 سینٹی میٹر

-6 رداس = 25 ملی میٹر ، اونچائی = 41.5 ملی میٹر

B. سلنڈری علاقے کی اونچائی معلوم کریں جب کہ اس کا رداس اور کل سطحی رقبہ دیا گیا ہے۔

-1 رداس = 10.5 سینٹی میٹر ، کل سطحی رقبہ = 980 مربع سینٹی میٹر

-2 رداس = 17.5 سینٹی میٹر ، کل سطحی رقبہ = 4,400 مربع سینٹی میٹر

-3 رداس = 12 ملی میٹر ، کل سطحی رقبہ = 2,112 مربع ملی میٹر

-4 رداس = 15 سینٹی میٹر ، کل سطحی رقبہ = 3,960 مربع سینٹی میٹر

-5 رداس = 25 سینٹی میٹر ، کل سطحی رقبہ = 10,560 مربع سینٹی میٹر

c. ذیل کو حل کریں:

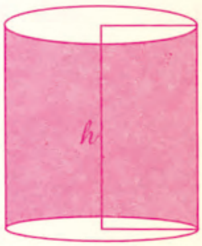
1- سلنڈر کی اونچائی اور رداس معلوم کریں جب کہ اونچائی اور رداس کا مجموعہ 28 سینٹی میٹر ہے اور سلنڈر کا کل سطحی رقبہ 1,408 مربع سینٹی میٹر ہے۔

2- سلنڈر کی اونچائی اور رداس کا مجموعہ 35 سینٹی میٹر ہے۔ سلنڈر کا کل سطحی رقبہ 3,300 مربع سینٹی میٹر ہے۔ اس کا رداس اور اونچائی معلوم کریں۔

3- سلنڈر کی اونچائی اور رداس معلوم کریں جب کہ اس کی اونچائی اور رداس کا مجموعہ 49 سینٹی میٹر ہے اور کل سطحی رقبہ 5,852 مربع سینٹی میٹر ہے۔

4- سلنڈر کی اونچائی اور رداس کا مجموعہ 56 ملی میٹر ہے۔ کل سطحی رقبہ 6,840 مربع ملی میٹر ہے۔ سلنڈر کی اونچائی اور رداس معلوم کریں۔

II- سلنڈری علاقے کا حجم بذریعہ کلیہ معلوم کریں۔



ہم جانتے ہیں سلنڈر کا قاعدہ دائروی سطح ہوتی ہے اور ہم اس کے رداس کو r سے ظاہر کرتے ہیں۔ ہم دائروی علاقے کا رقبہ معلوم کرنا پہلے ہی سیکھ چکے ہیں۔

دائروی علاقے کا رقبہ = سلنڈر کے قاعدے کا رقبہ

$$A = \pi r^2$$

اگر سلنڈر کی اونچائی h سے ظاہر کی جائے تو:

سلنڈر کا حجم = دائروی علاقہ کا رقبہ × سلنڈر کی اونچائی

$$V = \pi r^2 \times h = \pi r^2 h$$

لہٰذا سلنڈر کا حجم = $\pi r^2 h$، یہاں سلنڈر کے دائروی قاعدے کے رداس کو r اور اونچائی کو h ظاہر کرتا ہے۔

مثال 1: اگر سلنڈر کے قطر کی لمبائی 84 سینٹی میٹر اور اونچائی 55 سینٹی میٹر ہے تو حجم معلوم کریں۔

حل: سلنڈر کا قطر = d = 84 سینٹی میٹر

اس لئے سلنڈر کا رداس $r = \frac{d}{2} = \frac{84}{2}$ سینٹی میٹر

پس $r = 42$ سینٹی میٹر

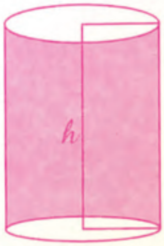
سلنڈر کے حجم معلوم کرنے کا کلیہ ہے: $V = \pi r^2 h$

تو $V = \frac{22}{7} \times (42)^2 \times 55$

یا $= \frac{22}{\cancel{7}_1} \times \overset{6}{\cancel{42}} \times 42 \times 55$

$= 22 \times 6 \times 42 \times 55 = 304,920$ معکب سینٹی میٹر

مثال 2: سلنڈر کا حجم 184,800 معکب سینٹی میٹر ہے اور سلنڈر کی دائروی قاعدے کا رداس 35 سینٹی میٹر ہے تو سلنڈر کی اونچائی معلوم کریں۔



حل: سلنڈر کے حجم کا کلیہ ہے: $V = \pi r^2 h$

V = 184,800 معکب سینٹی میٹر

r = 35 سینٹی میٹر

h = ؟

$V = \pi \times r^2 \times h$

$184800 = \frac{22}{7} \times (35)^2 \times h$

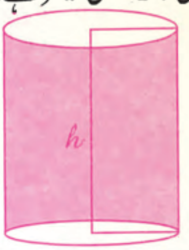
یا $\frac{7 \times 184800}{22 \times 35 \times 35} = h$

یا $h = \frac{\cancel{7} \times \cancel{184800}}{\cancel{22} \times \cancel{35} \times \cancel{35}} = 48 \text{ cm}$

(184800 → 7392 → 1056 → 528 → 48؛ 22 → 11 → 1، 35 → 7 → 1، 35 → 7 → 1)

لٰہذا سلنڈر کی مطلوبہ اونچائی 48 سینٹی میٹر ہے۔

مثال 3: سلنڈر کا رداس معلوم کریں جب کہ اس کا حجم 4,400 معکب سینٹی میٹر اور اونچائی 14 سینٹی میٹر ہے۔



حل: V = سلنڈر کا حجم = 4,400 معکب سینٹی میٹر

h = سلنڈر کی اونچائی = 14 سینٹی میٹر

r = سلنڈر کی دائروی قاعدے کا رداس = r = ؟

سلنڈر کا حجم معلوم کرنے کا کلیہ: $V = \pi r^2 h$

$4,400 = \frac{22}{7} \times r^2 \times 14$

$4,400 = \frac{22 \times \overset{2}{\cancel{14}}}{\cancel{7}_1} r^2$

$4400 = 44r^2$

یا $r^2 = \frac{4400}{44} = 100$

اس لئے $r = \sqrt{100} = 10$

لٰہذا سلنڈر کے دائروی قاعدے کا رداس 10 سینٹی میٹر ہے۔

مشق 12.4

A. ذیل میں سلنڈر کے قاعدے کا رداس اور اونچائی دی گئی ہے۔ ہر ایک کا حجم معلوم کریں۔

1- رداس = 14 سینٹی میٹر اور اونچائی = 20 سینٹی میٹر
2- رداس = 25 سینٹی میٹر اور اونچائی = 35 سینٹی میٹر
3- رداس = 28 سینٹی میٹر اور اونچائی = 40 سینٹی میٹر
4- رداس = 20 سینٹی میٹر اور اونچائی = 28 سینٹی میٹر
5- رداس = 1.05 میٹر اور اونچائی = 2.5 میٹر
6- رداس = 63.5 سینٹی میٹر اور اونچائی = 75 سینٹی میٹر
7- قطر = 70 ملی میٹر اور اونچائی = 50 ملی میٹر
8- قطر = 60 ملی میٹر اور اونچائی = 63 ملی میٹر

B. ذیل میں سلنڈر کے قاعدے کا رداس اور حجم دیئے گئے ہیں۔ ہر ایک میں سلنڈر کی اونچائی معلوم کریں۔

1- رداس = 14 سینٹی میٹر ، حجم = 15,400 مکعب سینٹی میٹر
2- رداس = 20 سینٹی میٹر ، حجم = 35,200 مکعب سینٹی میٹر
3- رداس = 25 ملی میٹر ، حجم = 82,500 مکعب ملی میٹر
4- رداس = 21.5 ملی میٹر ، حجم = 305,085 مکعب ملی میٹر
5- رداس = 30 ملی میٹر ، حجم = 99,000 مکعب ملی میٹر
6- رداس = 28 سینٹی میٹر ، حجم = 98,560 مکعب سینٹی میٹر

C. ذیل میں سلنڈر کی اونچائی اور حجم دیئے گئے ہیں۔ سلنڈر کے قاعدے کا رداس معلوم کریں۔

1- اونچائی = 25 سینٹی میٹر ، حجم = 24,650 مکعب سینٹی میٹر
2- اونچائی = 20 ملی میٹر ، حجم = 12,320 مکعب ملی میٹر
3- اونچائی = 28 سینٹی میٹر ، حجم = 35,200 مکعب سینٹی میٹر
4- اونچائی = 42 سینٹی میٹر ، حجم = 118,800 مکعب سینٹی میٹر
5- اونچائی = 56 ملی میٹر ، حجم = 281,600 مکعب ملی میٹر
6- اونچائی = 30 سینٹی میٹر ، حجم = 41,580 مکعب سینٹی میٹر

12.2.3 (a) دائرہ کا محیط اور رقبہ پر مشتمل روزمرہ زندگی کے مسائل حل کرنا

مثال 1: مشین کے پہیے کا رداس 84 سینٹی میٹر ہے تو پہیے پر دس مرتبہ لپیٹنے کے لئے کتنی تار درکار ہو گی؟

حل: r = پہیے کا رداس 84 سینٹی میٹر = 0.48 میٹر

محیط معلوم کرنے کا کلیہ ہے: $C = 2\pi r$

$C = \left(2 \times \frac{22}{7} \times 0.84\right)$ میٹر

یا $C = \frac{2 \times 22 \times 0.84}{7}$ میٹر

یا $C = \frac{2 \times 22 \times \overset{0.12}{\cancel{0.84}}}{\cancel{7}_1}$ میٹر

یا $C = 5.28$ میٹر

لٰہذا محیط 5.28 میٹر ہے۔

ایک مرتبہ لپیٹنے کے لئے 5.28 میٹر تار درکار ہے۔

دس مرتبہ لپیٹنے کے لئے (5.28×10) میٹر = 528 میٹر تار درکار ہے۔

لٰہذا تار کی مطلوبہ لمبائی 528 میٹر ہے۔

مثال 2: اگر ایک گول میز کا قطر 4.2 میٹر ہے تو اس کے گرد لپیٹنے کے لئے کتنے میٹر جھالر درکار ہو گی اور 40 روپے فی میٹر کے حساب سے اس کی لاگت بھی معلوم کریں۔

حل: سب سے پہلے ہمیں گول میز کا محیط معلوم کرنا ہے۔

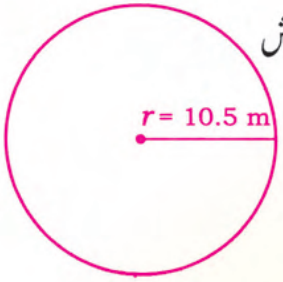
محیط $= \pi d = \frac{22}{7} \times 4.2$ میٹر $= \frac{22}{\cancel{7}} \times \overset{0.6}{\cancel{4.2}} = 22 \times .06 = 13.2$ میٹر

لٰہذا گول میز کے کپڑے کے گرد لپیٹنے کے لئے 13.2 میٹر جھالر درکار ہے۔

جھالر کی قیمت = لمبائی × شرح قیمت

= 13.2 × 40 روپے

= 528 روپے



مثال 3: دائروی فرش کا رقبہ اور 150 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے فرش بنانے کی لاگت معلوم کریں جب کہ دائروی فرش کا رداس 10.5 میٹر ہے۔

حل: دائروی فرش کا رداس 10.5 میٹر ہے۔

دائروی فرش کا رقبہ معلوم کرنے کا کلیہ πr^2 ہے۔

یعنی رقبہ $A = \pi r^2 = 10.5 \times 10.5 \times \frac{22}{7}$

رقبہ $(A) = \frac{22 \times \overset{1.5}{\cancel{10.5}} \times 10.5}{\underset{1}{\cancel{7}}} = 346.5$ مربع میٹر

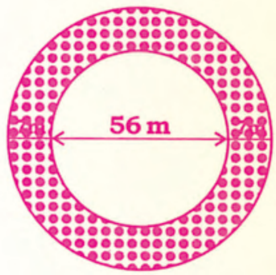
لہٰذا دائروی فرش کا رقبہ 346.5 مربع میٹر ہے۔

فرش بنانے کی لاگت ہے = رقبہ × شرح لاگت

$= (150 \times 346.5)$ روپے

$= 51975.00$ روپے

پس دائروی فرش کو بنانے کے لئے 51,975 روپے لاگت آئے گی۔



مثال 4: دو دائروی میدانوں کا قطر اور دائروی سڑک کی چوڑائی شکل میں دی گئی ہے۔ سڑک کا رقبہ اور 50 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے سڑک پر سیمنٹ لگانے کی لاگت معلوم کریں۔

حل: دو دائرے ہیں۔

(i) باہر والے دائرے کا قطر $= (56 + 14)$ میٹر $= 70$ میٹر

اس لئے باہر والے دائرے کا رداس $= R = \frac{70}{2}$ میٹر $= 35$ میٹر

(ii) اندر والے دائرے کا قطر $= 56$ میٹر

اس لئے اندر والے دائرے کا رداس $= r = 28$ میٹر

اب دونوں دائروں کا رقبہ معلوم کرتے ہیں۔

باہر والے دائرے کا رقبہ $= \pi R^2 = 35 \times 35 \times \frac{22}{7} = \frac{22 \times \overset{5}{\cancel{35}} \times 35}{\underset{1}{\cancel{7}}} = 3,850$ مربع میٹر

اندر والے دائرے کا رقبہ $= \pi r^2 = 28 \times 28 \times \frac{22}{7} = \frac{22 \times \overset{4}{\cancel{28}} \times 28}{\underset{1}{\cancel{7}}} = 2,464$ مربع میٹر

لہٰذا سڑک کا رقبہ = اندر والے دائرے کا رقبہ − باہر والے دائرے کا رقبہ

1,386 مربع میٹر = (2,464 مربع میٹر − 3,850 مربع میٹر)

سڑک پر سیمنٹ لگانے کی لاگت = سڑک کا رقبہ × شرح لاگت

= 1,386 × 50 روپے = 69,300 روپے

لہٰذا دائروی سڑک پر سیمنٹ لگانے کی لاگت 69,300 روپے آئے گی۔

مشق 12.5

1- ایک دائروی باغ کا قطر 70 میٹر ہے۔ باغ میں تار کی باڑ کے 5 چکر لگے ہوئے ہیں۔ اگر تار کی لاگت 10 روپے فی میٹر ہے تو تار کی کل لاگت معلوم کریں۔

2- ایک ایسے دائرے کا رداس معلوم کریں جسے ایسے چوکور سے بنایا گیا ہے جس کے ضلع کی لمبائی 22 سینٹی میٹر ہے۔

3- سائیکل کے پہیے کا رداس 42 سینٹی میٹر ہے۔ جب احمد سائیکل پر گھر سے اسکول جاتا ہے تو ہر پہیہ 1000 مرتبہ گھومتا ہے۔ طے کردہ فاصلے کو میٹر اور کلومیٹر میں معلوم کریں۔

4- تار کی دائروی باڑ کے چار چکر لگانے کے لئے 3,960 روپے درکار ہیں۔ اگر تار کی لاگت 5 روپے فی میٹر ہے تو دائروی میدان کا رداس معلوم کریں۔

5- ایک تار کو متماثل اضلاع مثلث میں موڑا گیا ہے جس کے ہر ضلع کی لمبائی 13.2 سینٹی میٹر ہے۔ اگر اسے دوبارہ دائروی شکل میں موڑا جائے تو دائرے کا قطر کیا ہوگا؟

6- باغ کا رقبہ اور 20 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے باغ لگانے کا خرچ معلوم کریں جب کہ باغ کا رداس 14 میٹر ہے۔

7- دو دائروی میدان ہیں۔ باہر والے دائروی میدان کا قطر 49 میٹر اور اندر والے دائروی میدان کا قطر 35 میٹر ہے۔ سڑک کا رقبہ اور 100 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے سڑک پر سیمنٹ لگانے کا خرچ معلوم کریں۔

8- 2.8 میٹر قطر کی ایک گول میز ہے۔ میز کی سطح کا رقبہ اور اس پر 100 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے رنگ کرنے کا خرچ معلوم کریں۔

9- چوراہے کے مرکز میں ایک دائروی فوارہ ہے جس کا رداس 3.5 میٹر ہے۔ دائروی فوارے کا رقبہ معلوم کریں اور 7.5 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے فوارے پر رنگ کرنے کا خرچ بھی معلوم کریں۔

10- ایک گول کھانے کی میز پر بچھانے کے لئے کپڑے کا میز پوش تیار کیا گیا۔ اگر میز پوش کا قطر 3.5 میٹر ہے تو میز پوش کا رقبہ معلوم کریں اور 80 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے کپڑے کا خرچ بھی معلوم کریں۔

iii- سلنڈر کے سطحی رقبہ اور حجم پر مشتمل روزمرہ زندگی کے مسائل حل کرنا

مثال 1: ایک کھولا ہوا سلنڈر نما ٹینک جس کے قاعدے کا قطر 2.1 میٹر اور اونچائی 4 میٹر ہو تو اسے بنانے کے لئے اسٹیل کی کتنی مربع میٹر چادر درکار ہے اور 400 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے ٹینک بنانے کی لاگت بھی معلوم کریں۔

حل: دائروی قاعدے کا قطر = 2.1 میٹر

دائروی قاعدے کا رداس = $r = \frac{2.1}{2}$ میٹر

یا $r = 1.05$ میٹر

دائروی قاعدے کا رقبہ = دائرے کا رقبہ = πr^2

$A = \pi r^2$

مربع میٹر $\left(\frac{22 \times \overset{0.15}{\cancel{1.05}} \times 1.05}{\cancel{7}_1}\right)$ = مربع میٹر $\left(\frac{22}{7} \times 1.05 \times 1.05\right)$ =

مربع میٹر 3.465 = مربع میٹر (3.30×1.05) = مربع میٹر $(22 \times 0.15 \times 1.05)$ =

سلنڈر کی منحنی سطح کا رقبہ = $2\pi rh$ = مربع میٹر $\left(2 \times \frac{22}{7} \times 1.05 \times 4\right)$

مربع میٹر 26.40 = مربع میٹر (44×0.60) = مربع میٹر $\left(\frac{2 \times 22 \times \overset{0.15}{\cancel{1.05}} \times 4}{\cancel{7}_1}\right)$ =

ٹینک بنانے کے لئے اسٹیل کی چادر کا کل رقبہ ہے:

= 26.40 مربع میٹر + 3.465 مربع میٹر

= 29.865 مربع میٹر

ٹینک کی لاگت = رقبہ × شرح لاگت = 400×29.865 = 11,946.00 روپے = 11,946 روپے

مثال 2: ایک دائروی کنواں کا رداس 1.4 میٹر اور گہرائی 20 میٹر ہے۔ کنواں کو 300 روپے فی معکب میٹر کے حساب سے بنانے کی لاگت معلوم کریں۔

حل: دائروی کنواں کے قاعدے کا رداس = $r = 1.4$ میٹر

= $h = 20$ میٹر

کنواں کا حجم = $V = \pi r^2 h$

حجم = $V = 1.4 \times 1.4 \times 20 \times \frac{22}{7} = \frac{22 \times \overset{0.2}{\cancel{1.4}} \times 1.4 \times 20}{\underset{1}{\cancel{7}}} = 4.4 \times 28.0$

= 123.2 معکب میٹر

بنانے کی لاگت = حجم × شرح لاگت

= $123.2 \times 300 = 36{,}960$ روپے

لہٰذا کنواں کا حجم = 123.2 معکب میٹر اور لاگت 36,960 روپے ہے۔

مشق 12.6

1- سلنڈریکل شکل کے کھولے ہوئے تالاب کا رداس 10.5 میٹر اور گہرائی 8 میٹر ہے۔ 50 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے اس کے فرش اور مخنی سطح پر سیمنٹ لگانے کا خرچ معلوم کریں۔

2- ایک سلنڈر نما اسٹیل کے ٹینک کی سطح کا رقبہ معلوم کریں جس کی لمبائی 8.4 میٹر اور دائروی قاعدے کا رداس 7 میٹر ہے۔ 500 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے اُسے بنانے کی لاگت بھی معلوم کریں۔

3- ایک کھولے ہوئے سلنڈر نما ٹینک کے قاعدے کا قطر 2.8 میٹر اور اونچائی 5 میٹر ہے تو معلوم کریں کہ اسے بنانے کے لئے کتنے مربع میٹر اسٹیل کی چادر درکار ہے اور 300 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے اسے بنانے کی کل لاگت بھی معلوم کریں۔

4- ایک اسٹیل پائپ کی لمبائی 2.8 میٹر اور رداس 7 میٹر ہے۔ اگر پائپ دونوں طرف کھلا ہوا ہو تو اس کی سطح کا رقبہ معلوم کریں۔

5- تیل کے ڈرم کی سطح کا کل رقبہ معلوم کریں جس کی لمبائی 1.5 میٹر اور قطر 70 سینٹی میٹر ہے۔

6- ایک دائروی پانی کے ٹینک کی گنجائش لٹروں میں معلوم کریں جب کہ ٹینک کی اونچائی 5 میٹر اور قطر 4.2 میٹر ہے۔ (اشارہ: میٹر کو سینٹی میٹر میں تبدیل کریں اور 1 لٹر = 1000 مکعب سینٹی میٹر)

7- ایک سلنڈر نما ٹِن کی اونچائی 63 سینٹی میٹر اور رداس 25 سینٹی میٹر ہے تو معلوم کریں کہ اس ٹن میں کتنے لٹر تیل آسکتا ہے؟

8- ایک کنواں 16 میٹر گہرا اور اس کا قطر 7 میٹر ہے تو اس کو بھرنے کے لئے کتنی مقدار میں مٹی درکار ہے؟

9- ٹھنڈے مشروب کے ایک ٹِن کی لمبائی 10.5 میٹر اور رداس 3.5 میٹر ہے تو ٹِن کی گنجائش لٹروں میں معلوم کریں۔

10- ایک دائروی کنواں کا قطر 3.5 میٹر اور گہرائی 24 میٹر ہے۔ 250 روپے فی مکعب میٹر کے حساب سے اس کی کھدائی کا خرچ معلوم کریں۔

11- اگر تیل کے ایک ڈرم کا حجم 11 مکعب میٹر ہے تو اس کا رداس معلوم کریں۔

12- اگر تیل کے ایک ڈرم کی گنجائش 3,850 لٹر ہے تو اس کا حجم مکعب سینٹی میٹر میں معلوم کریں۔ اس کی اونچائی میٹروں میں معلوم کریں جب کہ اس کا رداس 70 سینٹی میٹر ہے۔

13- اگر کسی دائروی مسجد کے اندر کا قطر 28 میٹر اور دیواروں کی اونچائی 8.75 میٹر ہے تو 200 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے اس کی دیواروں پر ٹائیل لگانے کا خرچ معلوم کریں۔

14- سوئمنگ پول کے اندر کا قطر 42 میٹر اور گہرائی 5 میٹر ہے تو 300 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے اُس کی دیواروں پر ٹائیل لگانے کا خرچ معلوم کریں۔

جائزہ مشق 12

A- ذیل کے جوابات دیں:

1- دائرہ کا محیط کیا ہوتا ہے؟ محیط معلوم کرنے کا کلیہ بتائیں۔

2- قطر اور محیط کے درمیان کیا تعلق ہے؟

3- دائرے کا قطر کیا ہوتا ہے؟ قطر اور رداس کے درمیان کیا تعلق ہے؟

4- دائرے کا رداس کیا ہوتا ہے؟ دائرے کا رقبہ معلوم کرنے کا کلیہ بتائیں۔

5- سلنڈر کی کل سطح کا رقبہ معلوم کرنے کا کلیہ لکھیں۔

6- سلنڈر کا حجم کیا ہوتا ہے؟ کلیہ کی وضاحت کریں۔

7- دائرے کے محیط سے قطر معلوم کرنے کا کلیہ کیا ہوتا ہے؟

8- ایک سلنڈر جس کا رداس = اونچائی ہے تو سلنڈر کا حجم معلوم کرنے کا کلیہ کیا ہوگا؟

B- خالی جگہیں پُر کریں:

1- سلنڈر کی مخنی سطح کا رقبہ معلوم کرنے کا کلیہ ___________ ہے۔

2- ٹھنڈے مشروب کے ٹِن ___________ کی مثال ہے۔

3- 5 روپے اور 2 روپے کے سکے لیں اور دونوں کو الگ الگ ایک دوسرے کے اوپر رکھیں تو یہ ___________ کی شکلیں حاصل ہوں گی۔

4- جب سلنڈر کا رداس میٹروں میں ہو تو سلنڈر کے حجم کی اکائی ___________ ہو گی۔

5- تین درجہ اعشاریہ تک π کی قیمت ___________ ہے۔

C- ذیل کو ذہنی طور پر حل کریں اور درست جواب پر (✓) کا نشان لگائیں۔

1- دائرے کا محیط ___________ سینٹی میٹر ہے جب کہ اس کا قطر 7 سینٹی میٹر۔

(i) $\frac{22}{7}$ (ii) $\frac{7}{22}$ (iii) 7 (iv) 22

2- دائرے کا رقبہ ___________ مربع سینٹی میٹر ہے جب کہ اس کا رداس 1 سینٹی میٹر ہے۔

(i) $\frac{22}{7}$ (ii) $\frac{7}{22}$ (iii) $\frac{1}{7}$ (iv) $\frac{1}{22}$

3- سلنڈر کے دائروی قاعدے کا رقبہ ___________ مربع سینٹی میٹر ہے جب کہ $r = \frac{1}{22}$ مربع سینٹی میٹر

(i) 7 (ii) $\frac{1}{7}$ (iii) 22 (iv) $\frac{1}{22}$

4- سلنڈر کی مخنی سطح کا رقبہ ___________ مربع میٹر ہے جب کہ $r = 7$ سینٹی میٹر اور $h = \frac{1}{22}$ سینٹی میٹر

(i) 1 (ii) 2 (iii) 3 (iv) 4

5- سلنڈر کی سطح کا کل رقبہ ___________ مربع سینٹی میٹر ہے جب کہ $r = 1$ سینٹی میٹر اور $h = 1$ سینٹی میٹر

(i) 2π (ii) 3π (iii) 4π (iv) π

6- سلنڈر کا حجم ___________ معکب سینٹی میٹر ہے جب کہ $r = 1$ سینٹی میٹر اور $h = 1$ سینٹی میٹر۔

(i) $\frac{22}{7}$ (ii) $\frac{7}{22}$ (iii) 22 (iv) 7

-7 سلنڈر کے بالائی دائروی قاعدے اور زیریں دائروی قاعدے کا رقبہ ________ مربع سینٹی میٹر ہے جب کہ $r = 1$ سینٹی میٹر۔

(i) $\frac{22}{7}$ (ii) $\frac{44}{7}$ (iii) $\frac{7}{22}$ (iv) $\frac{7}{44}$

-8 تیل کے ڈرم کی اونچائی 1 میٹر اور رداس بھی 1 میٹر ہے تو اس کا حجم ________ معکب میٹر ہو گا۔

(i) 7 (ii) 22 (iii) $\frac{22}{7}$ (iv) $\frac{7}{22}$

-9 گھڑی کے منٹ کے بازو کی لمبائی 3.5 سینٹی میٹر ہے تو 1 گھنٹے میں طے کردہ فاصلہ ________ سینٹی میٹر ہو گا۔

(i) 3.5 سینٹی میٹر (ii) 7 سینٹی میٹر (iii) 22 سینٹی میٹر (iv) 2.2 سینٹی میٹر

-10 اگر کسی دائرے میں رداس کو دگنا کر دیا جائے تو دائرے کا رقبہ ________ بڑھ جائے گا۔

(i) دگنا (ii) تین گنا (iii) چار گنا (iv) ان میں کوئی نہیں

خلاصہ

- محیط دائرے کی حدود کی لمبائی ہوتی ہے۔

  محیط $C = \pi d$ یا $C = 2\pi r$

- دائرے کے محیط اور قطر کے درمیان نسبت کو π سے ظاہر کرتے ہیں۔

  یعنی: $\dfrac{\text{دائرے کا محیط}}{\text{دائرے کا قطر}} = \dfrac{22}{7} = 3.14 = \pi$

- دائرے کا رقبہ، دائروی علاقے کا رقبہ ہوتا ہے جو کہ دائرے کے اندر مربع اکائیوں کی تعداد ہوتا ہے۔

  $A = \pi r^2$ مربع اکائی

- سلنڈر کی سطح کا رقبہ تین حصوں پر مشتمل ہوتا ہے۔ دو برابر سطحیں اور تیسری مخنی سطح۔

  سلنڈر کی سطح کا کل رقبہ: $\pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$

- سلنڈر کا حجم = دائروی علاقے کا رقبہ × سلنڈر کی اونچائی

  $V = \pi r^2 \times h$

  $V = \pi r^2 h$ معکب اکائی

یونٹ 13

معلومات داری

تعارف:

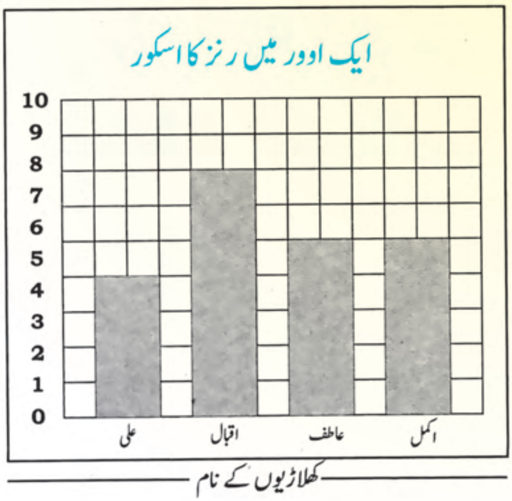
مضمون شماریات میں معلومات داری ایک اہم کردار ادا کرتی ہے۔ پچھلی کئی صدیوں سے یہ مضمون مسلسل وسیع ہورہا ہے اور اس کی تعریف بھی تبدیل ہورہی ہے۔ اس مضمون کی بنیاد پرانے زمانے کے حکمرانوں کی خواہش پر قائم ہوئی کہ آیا ان کی سلطنت میں افرادی قوت کتنی ہے۔ اس کے لئے وہ مربوط طریقے سے مردم شماری کیا کرتے تھے۔ جس سے وہ اپنی طاقت اور جنگی صلاحیتوں سے اچھی طرح واقف رہتے تھے۔ اس ہی وجہ سے شماریات کو حکمرانوں کی سائنس اور سیاسی حساب کہا جاتا ہے۔

13.1 تعددی تقسیم

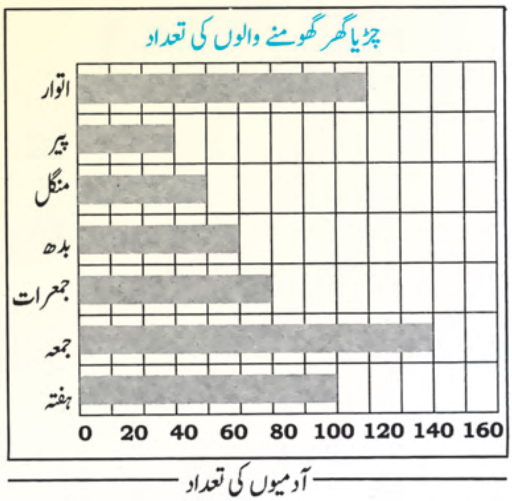
13.1.1 مواد کی پیشکش کا مظاہرہ کرنا

اپنی روزمرہ زندگی میں ہم معلومات جمع کرتے ہیں اور اُسے مختلف طریقوں سے پیش کرتے ہیں جیسے بار گراف، چارٹ وغیرہ تاکہ اسے آسانی سے سمجھا جاسکے اور مفید نتیجہ نکالا جاسکے۔

I



II



پچھلی جماعت میں ہم سیکھ چکے ہیں کہ مواد کا مطلب معلومات کے بارے میں حقائق ہیں جو کہ مشاہدات اور تجربات کا نتیجہ ہوتے ہیں۔

یہ نتائج ہمیں اپنی ماضی کی کارکردگی اور مستقبل کی منصوبہ بندی پر نظر ثانی کرنے میں مدد کرتے ہیں۔ مواد حاصل کرنے کے بعد سب سے اہم مرحلہ اس کی پیشکش ہے۔ معلومات کو بار گراف اور چارٹ میں پیش کیا جاتا ہے جیسا کہ نیچے دکھایا گیا ہے۔

ٹیلی چارٹ گروہی مواد کی تعداد کی وضاحت کرنے اور گننے کے لئے استعمال کرتے ہیں۔ نیچے جدول میں طلبہ کے مواد کو ٹیلی چارٹ میں پیش کیا گیا ہے کہ وہ کیسے اسکول جاتے ہیں۔

اسکول کیسے جاتے ہیں		طلبہ کی تعداد
پیدل	~~IIII~~ IIII	9
بذریعہ کار	~~IIII~~ I	6
بذریعہ بس	~~IIII~~ ~~IIII~~ III	13

13.1.2 تعددی تقسیم کی تعریف کرنا (جیسے تعدد، زیریں جماعتی تعدد، بالائی جماعتی تعدد اور جماعتی وقفہ)

1. تعدد

مواد کے کسی خاص گروہ میں مواد کی تعداد کو تعدد کہتے ہیں۔

مثال 1: ساتویں جماعت کے بیس طلبہ کے ایک گروپ نے سائنس کے امتحان میں درج ذیل مارکس حاصل کئے ہیں:

16، 11، 40، 27، 38، 55، 45، 70، 50، 65، 60، 41، 100، 71، 80، 75، 82، 85، 92، 89۔

مراحلہ:

(i) مواد کو ترتیب صعودی میں ترتیب دیں۔

11، 16، 27، 38، 40، 41، 45، 50، 55، 60، 65، 70، 71، 75، 80، 82، 85، 89، 92 اور 100۔

(ii) مناسب تعداد کے تین وقفے بنائیں۔

پہلا: وہ طلبہ جنہوں نے 11 سے 40 مارکس حاصل کئے، دوسرا جنہوں نے 41 سے 70 مارکس حاصل کئے اور تیسرا جنہوں نے 71 سے 100 مارکس حاصل کئے۔

(iii) تعددی چارٹ بنائیں جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے:

گروہ کا نام	پیریڈ یا جماعتی وقفہ	حاصل کردہ مارکس	طلبہ کی تعداد	ٹیلی نشانات
پہلا	11-40	11، 16، 27، 38 اور 40	5	𝍸
دوسرا	41-70	41، 45، 54، 55، 60، 65 اور 70	7	𝍸 II
تیسرا	71-100	71،75،80،82،85،89،92اور 100	8	𝍸 III

تعددی چارٹ نیچے دیا گیا ہے:

(11-40) کی تعدد 5 ہے۔ 5 طلبہ نے 11 سے 40 کے درمیان مارکس حاصل کئے ہیں۔

(41-70) کی تعدد 7 ہے۔ 7 طلبہ نے 41 سے 70 کے درمیان مارکس حاصل کئے ہیں۔

(71-100) کی تعدد 8 ہے۔ 8 طلبہ نے 71 سے 100 کے درمیان مارکس حاصل کئے ہیں۔

جماعتی وقفہ: مواد کے ہر گروہ کو بطور جماعتی وقفہ بھی جانا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر (11-40)، (41-70) اور (71-100) جماعتی وقفے ہیں۔

بالائی جماعتی حد: جماعتی وقفہ کی بڑی قیمت کو بالائی جماعتی حد کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر جماعتی وقفہ (41-70) میں 70 بالائی جماعتی حد ہے۔

زیریں جماعتی حد: جماعتی وقفہ کی چھوٹی قیمت کو زیریں جماعتی حد کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر جماعتی وقفہ (71-100) میں 71 زیریں جماعتی حد ہے۔

جماعتی وقفہ کی جسامت: جماعتی وقفہ میں قیمتوں کی تعداد جسامت یا لمبائی کہلاتی ہے۔ مثال کے طور جماعتی وقفہ (11-40) کی جسامت یا لمبائی 30 ہے۔

مثال: ساتویں جماعت کے 40 طلبہ نے انگریزی کے امتحان میں ذیل کے مارکس حاصل کئے ہیں۔ ایک ہی جسامت کے 5 جماعتوں پر مشتمل تعددی تقسیم یا تعددی چارٹ بنائیں۔

26, 09, 17, 15, 18, 60, 46, 33, 26, 15, 52, 39, 28, 89, 74, 68, 56, 38, 92, 49, 28, 82, 19, 21, 34, 23, 43, 77, 65, 64, 21, 59, 15, 33, 66, 29, 33, 65, 35, 39.

حل: مارکس کو ترتیب صعودی میں لکھیں جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے۔

9, 15, 15, 15, 17, 18, 19, 21, 21, 23, 26, 26, 28, 28, 29, 33, 33, 33, 34, 35, 38, 39, 39, 43, 46, 49, 52, 56, 59, 60, 64, 65, 65, 66, 68, 74, 77, 82, 89, 92.

ہم جانتے ہیں کہ:

$$\text{جماعتی وقفہ کی جسامت} = \frac{(\text{بالائی جماعتی حد} - \text{زیریں جماعتی حد})}{\text{جماعتی وقفوں کی تعداد}}$$

ہم اوپر دیئے گئے غیر گروہی مواد میں دیکھ سکتے ہیں (ترتیب صعودی میں ترتیب دیا گیا ہے) کہ:

بڑی قیمت = 92

چھوٹی قیمت = 9

جماعتی وقفوں کی تعداد = 5

اس لئے جماعتی وقفہ کی جسامت $= 16.6 \approx 17 = \frac{83}{5} = \frac{92-9}{5}$

جماعتی وقفہ	ٹیلی نشانات	تعدد
9-25	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
26-42	~~IIII~~ ~~IIII~~ III	13
43-59	~~IIII~~ I	6
60-76	~~IIII~~ II	7
77-93	IIII	4

مشق 13.1

1- ایک کتاب فروش نے پچھلے ہفتہ مندرجہ ذیل تعداد میں کہانیوں کی کتابیں فروخت کیں۔ تعددی تقسیم کا چارٹ بنائیں۔

دن کا نام	پیر	منگل	بدھ	جمعرات	جمعہ	ہفتہ	اتوار
کتابوں کی فروخت	24	25	27	28	22	30	21

2- 12 صارفین کے ادا کردہ بجلی کے بل نیچے دیئے گئے ہیں۔ ایک جیسی جسامت کے 5 جماعتی وقفوں پر مشتمل تعددی چارٹ بنائیں۔

5100 روپے، 7000 روپے، 3560 روپے، 6030 روپے، 4220 روپے، 6740 روپے،
4810 روپے، 5450 روپے، 7180 روپے، 5920 روپے، 6850 روپے اور 5690 روپے۔

3- سالانہ امتحان میں 20 طلبہ نے 850 میں سے مندرجہ ذیل مارکس حاصل کئے ہیں۔ جماعتی وقفہ 100 کے مطابق تعددی تقسیم کا چارٹ بنائیں۔

551, 786, 678, 725, 788, 580, 720, 690, 750, 651, 599, 609, 719,
760, 625, 775, 646, 667, 753, 675.

4- مندرجہ ذیل مواد پچھلے ماہ چڑیا گھر ہر دن آنے والے بچوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے:

134, 167, 145, 130, 155, 142, 130, 180, 162, 130, 120, 165, 170,
110, 200, 185, 132, 140, 110, 170, 100, 160, 133, 150, 125, 110,
145, 155, 160, 200.

جماعتی وقفہ 10 کے مطابق تعددی تقسیم کا چارٹ بنائیں۔

5- ساتویں جماعت کے 30 طلبہ نے ریاضی کے امتحان میں مندرجہ ذیل مارکس حاصل کئے:

45, 19, 49, 17, 37, 10, 25, 28, 50, 46, 43, 34, 25, 50, 48 46, 42,
34, 33, 11, 28, 19, 30, 17, 13, 11, 39, 41, 35, 34.

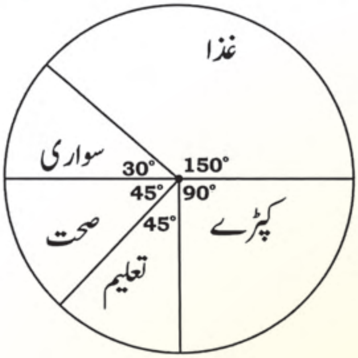
جماعتی وقفہ 5 کے مطابق تعددی تقسیم کا چارٹ بنائیں۔

13.2 پائی گراف

پائی گراف بنانا اور وضاحت کرنا

پائی گراف عام طور پر مختلف جماعتوں میں درجہ بندی کئے ہوئے عددی حقائق کا موازنہ کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ اس گراف میں مرکزی زاویے کی پیمائش 360° ہوتی ہے جس کو اس گراف میں ظاہر کرنے والے گروہ کی جسامت کی نسبت کے لحاظ سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ ذیل کی مثال پائی گراف کے تصور کو سمجھنے میں مدد کرے گی۔

مثال 1: ایک ہفتے کے دوران ایک طلبہ کے اخراجات 3600 روپے ہیں۔ اسے ذیل کے پائی گراف سے ظاہر کیا گیا ہے۔



پائی گراف کو پڑھیں اور جوابات دیں۔

(i) ہر اشیاء کے خرچ کو ظاہر کرنے والا چارٹ بنائیں۔

(ii) کس اشیاء پر اُس نے سب سے زیادہ رقم خرچ کی اور کتنی؟

(iii) کس اشیاء پر اُس نے سب سے کم رقم خرچ کی اور کتنی؟

(iv) کن اشیاء پر اُس نے برابر رقم خرچ کی اور کتنی؟

حل: مکمل دائرہ 360° میں تقسیم کیا گیا ہے۔ پانچ قطعات ہیں۔ بڑے سے بڑا قطعہ 150° کا ہے۔ یہ غذا پر خرچ کو ظاہر کرتا ہے۔ تعلیم اور صحت دونوں برابر قطعات ہیں

(i) لہٰذا غذا پر خرچ شدہ رقم = $\frac{3600 \times 150^\circ}{360^\circ}$ روپے = $\frac{\overset{10}{\cancel{3600}} \times 150}{\cancel{360}_1}$ روپے = 1500 روپے

(ii) کپڑوں پر خرچ شدہ رقم = $\frac{3600 \times 90^\circ}{360^\circ}$ روپے = $\frac{\overset{10}{\cancel{3600}} \times 90}{\cancel{360}_1}$ روپے = 900 روپے

(iii) تعلیم پر خرچ شدہ رقم = $\frac{3600 \times 45^\circ}{360^\circ}$ روپے = $\frac{\overset{10}{\cancel{3600}} \times 45}{\cancel{360}_1}$ روپے = 450 روپے

(iv) سواری پر خرچ شدہ رقم = $\frac{3600 \times 30^\circ}{360^\circ}$ روپے = $\frac{\overset{10}{\cancel{3600}} \times 30}{\cancel{360}_1}$ روپے = 300 روپے

چیز کا نام	غذا	کپڑے	تعلیم	صحت	سواری
خرچ شدہ رقم	1500 روپے	900 روپے	450 روپے	450 روپے	300 روپے

پائی گراف ظاہر کرتا ہے کہ غذا پر سب سے زیادہ رقم 1500روپے خرچ ہوئی ہے۔

پائی گراف ظاہر کرتا ہے کہ سواری پر سب سے کم رقم 300 روپے خرچ ہوئی ہے۔

پائی گراف ظاہر کرتا ہے کہ تعلیم اور صحت پر برابر رقم 450 روپے خرچ ہوئی ہے۔

مثال 2: ضلعی سطح پر کھیلوں کے مقابلے میں 1800 طلبہ نے حصہ لیا جن میں 750 نے کرکٹ میں، 200 نے بیڈ منٹن میں، 400 نے ہاکی میں اور 450 نے فٹ بال میں حصہ لیا۔ کھیلوں میں حصہ لینے والے طلبہ کا پائی گراف بنائیں۔

حل: کل طلبہ کی تعداد = 1800

(i) ذیل کے کلیے کی مدد سے ہر ایک قطعہ کا زاویہ معلوم کریں:

$$\text{مطلوبہ زاویہ} = \frac{\text{ایک کھیل میں حصہ لینے والے طلبہ کی تعداد}}{\text{طلبہ کی کل تعداد}} \times 360^\circ$$

بیڈ منٹن کو ظاہر کرنے والے زاویے کی پیمائش $= 360^\circ \times \frac{200}{1800} = 40^\circ$

کرکٹ کو ظاہر کرنے والے زاویے کی پیمائش $= 360^\circ \times \frac{750}{1800} = 150^\circ$

ہاکی کو ظاہر کرنے والے زاویے کی پیمائش $= 360^\circ \times \frac{400}{1800} = 80^\circ$

فٹ بال کو ظاہر کرنے والے زاویے کی پیمائش $= 360^\circ \times \frac{450}{1800} = 90^\circ$

(ii) پائی گراف بنائیں۔

مرحلہ 1: مناسب رداس کا دائرہ بنائیں۔

مرحلہ 2: بیڈ منٹن کو ظاہر کرنے والا زاویہ 40° بنائیں۔ (40°)

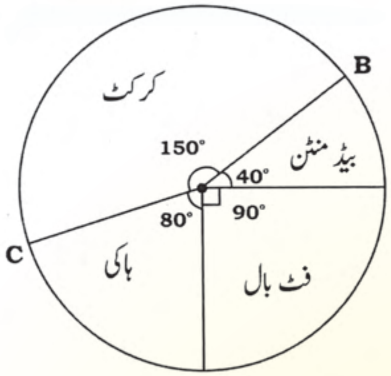
مرحلہ 3: کرکٹ کو ظاہر کرنے والا زاویہ 150° بنائیں۔ (150°)

مرحلہ 4: ہاکی کو ظاہر کرنے والا زاویہ 80° بنائیں۔ (80°)

مرحلہ 5: باقی زاویہ 90° فٹ بال کو ظاہر کرتا ہے۔ (90°)

زاویوں کا مجموعہ (360°)

(iii) ذیل کی تصویر کے مطابق ہر قطعہ کو نام دیں۔



(iv) ذیل کے جوابات دیں:

1- سب سے زیادہ پسندیدہ کھیل کون سا ہے؟
کرکٹ

2- سب سے کم پسند کیا جانے والا کھیل کون سا ہے؟
بیڈ منٹن

3- ہاکی کے مقابلے میں فٹ بال کتنے طلبہ زیادہ کھیلتے ہیں؟
50 طلبہ

4- ہاکی کے مقابلے میں بیڈ منٹن کتنے طلبہ کم کھیلتے ہیں؟
200 طلبہ

مشق 13.2

1- ریاضی کے سوال وجواب کے مقابلے میں 80 طلبہ نے حصہ لیا جس میں 60 طلبہ پاس ہوئے اور 20 طلبہ فیل ہوئے۔ اسے پائی چارٹ سے ظاہر کریں۔

2- ساتویں جماعت میں 36 طلبہ ہیں جس میں سے 16 طلبہ کا پسندیدہ رنگ لال، 9 کا نیلا اور 7 طلبہ کا گلابی ہے۔ اس کا پائی چارٹ بنائیں۔

3- سارا اور اُس کی دوست نے ایک ہفتے میں جو پھل کھائے، انہیں جدول میں ظاہر کیا گیا ہے۔

پھل کا نام	سیب	کیلا	آم	آڑو
پھلوں کی تعداد	12	24	16	8

جدول کو استعمال کرتے ہوئے پائی چارٹ بنائیں۔

4- ایک تقریب میں جناب جمال نے مہمانوں کی تواضع مندرجہ ذیل کھانے کی اشیاء سے کی:

کھانے کی اشیاء	ٹھنڈے مشروبات	سینڈ وچ	برگر	سموسے
مقدار	180	124	330	86

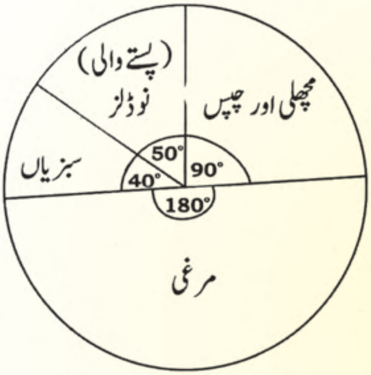
جدول کی مدد سے پائی گراف بنائیں۔

5- ذیل کا مواد فوزیہ کا پچھلے ماہ میں سفر کردہ فاصلے کو کلومیٹر میں ظاہر کرتا ہے۔

90, 44, 55, 49, 28, 9, 92, 27, 18, 84, 50, 60, 79, 69, 24, 89, 63, 74, 35, 48, 39, 80.

برابر جسامت کے 6 جماعتی وقفوں پر مشتمل تعددی تقسیم کے جدول بنائیں اور پائی چارٹ بھی بنائیں۔

6- حنا نے 180 طلبہ سے ان کے پسندیدہ غذا کے بارے میں پوچھا اور پھر اس نے پائی گراف بنایا۔



پائی گراف کو پڑھیں اور ذیل کے سوالات کے جوابات دیں:

(i) سب سے زیادہ پسندیدہ غذا کون سی ہے اور اسے کتنے طلبہ پسند کرتے ہیں؟

(ii) کون سی غذا سب سے کم طلبہ پسند کرتے ہیں اور کتنے طلبہ اُسے پسند کرتے ہیں؟

(iii) کتنے طلبہ (پستے والی) نوڈلز پسند کرتے ہیں؟

(iv) پائی گراف کو استعمال کرتے ہوئے جدول مکمل کریں:

پسندیدہ کھانا	تعدد	زاویہ
مرغی	90	180°
(پستے والی)نوڈلز		50°
سبزیاں		
مچھلی اور چپس	40	
کل	180	

جائزہ مشق 13

-1 خالی جگہیں پُر کریں:

(i) ایسی معلومات __________ کہلاتی ہے جو کہ عام طور پر مشاہدات اور تجربات کا نتیجہ ہوتی ہے۔

(ii) گروہی مواد میں پائی جانے والی قیمت کی تعداد کو __________ کہتے ہیں۔

(iii) مواد کو __________ شکل میں جمع کیا جاتا ہے۔ یہ ہمیں انفرادی چیزوں کے بارے میں معلومات مہیا کرتا ہے۔

(iv) جماعتی وقفہ کی چھوٹی قیمت __________ کہلاتی ہے۔

(v) جدول جو جماعتی وقفہ کی تعدد کو ظاہر کرتا ہے __________ کہلاتا ہے۔

(vi) مواد جمع کرنے کے بعد سب سے اہم مرحلہ __________ ہے۔

(vii) نتیجے کو ریکارڈ کرنے کا طریقہ __________ کہلاتا ہے۔

(viii) جماعتی وقفہ کی بڑی قیمت __________ کہلاتی ہے۔

(ix) دائرہ میں قطعات کی شکل میں عددی مواد کی پیش کش __________ کہلاتی ہے۔

-2 درست جواب پر (✓) کا نشان لگائیں۔

(i) پائی گراف میں مرکزی زاویے کی پیمائش ہے:

(الف) 90°　(ب) 180°　(ج) 24°　(د) 360°

(ii) جماعتی وقفہ (10-50) میں بالائی جماعتی حد ہے:

(الف) 11　(ب) 10　(ج) 50　(د) 51

(iii) جماعتی وقفہ (9-12) میں زیریں جماعتی حد ہے:

(الف) 9　(ب) 7　(ج) 13　(د) 14

(iv) گروہی مواد میں بڑی سے بڑی قیمت =21 ، چھوٹی سے چھوٹی قیمت =3 اور جماعتی وقفوں کی تعداد =3 تو جماعتی وقفہ کی جسامت ہے:

(الف) 3　(ب) 6　(ج) 18　(د) 21

3- ایک ہفتے کے دوران پارک میں تفریح کرنے والوں کی عمریں نیچے دی گئی ہیں۔ جماعتی وقفہ کی جسامت 10 کے مطابق مواد کو گروہی شکل میں لکھیں۔

25, 50, 49, 47, 26, 10, 2, 1, 15, 17, 18, 19, 27, 28, 30, 35, 17, 32, 31, 3, 4, 9, 10, 15, 12, 13, 17, 24, 20, 22, 24, 26, 30, 17, 35, 40, 36, 32, 31, 37.

خلاصہ

- مواد کا مطلب معلومات کا مجموعہ ہے جو عام طور پر مشاہدات اور تجربات کا نتیجہ ہوتی ہے۔
- مواد خام شکل میں جمع کیا جاتا ہے۔ یہ ہمیں انفرادی چیزوں کے بارے میں معلومات فراہم کرتا ہے۔ مواد کی اس شکل کو غیر گروہی مواد کہتے ہیں۔
- ایک جماعتی وقفہ میں پائے جانے والی قیمتوں کی تعداد کو تعدد کہتے ہیں۔
- گروہی مواد میں ہر گروہ جماعتی وقفہ کہلاتا ہے۔
- جماعتی وقفہ کی بڑی قیمت بالائی جماعتی حد کہلاتی ہے۔
- جماعتی وقفہ کی چھوٹی قیمت زیریں جماعتی حد کہلاتی ہے۔
- جدول جو جماعتی وقفہ کی تعداد کو ظاہر کرتی ہے وہ تعددی جدول کہلاتی ہے۔
- عددی مواد کی دائرہ میں غیر متصلہ قطعات کی شکل میں پیش کش پائی گراف کہلاتی ہے۔
- پائی گراف میں مرکزی زاویہ کی پیمائش 360° ہوتی ہے جسے گروہ کی جسامت کی نسبت سے تقسیم کیا جاتا ہے۔

دماغی ذخیرہ دلچسپ معلومات

ایک اُستاد نے کلاس میں بورڈ پر $\frac{16}{64}$ لکھ کر کہا کہ اس کو مختصر کریں۔ عابد نے ہاتھ اُٹھایا اور بورڈ پر اس طرح مختصر کرتا ہے $\frac{1\not{6}}{\not{6}4} = \frac{1}{4}$ (جواب تو بلکل درست ہے)

لیکن استاد زیرو مارکس دیتا ہے!

اس طرح کا ایک اور مثال $\frac{19}{95}$ ہے۔ اس میں بھی $\frac{1\not{9}}{\not{9}5} = \frac{1}{5}$ جواب تو درست ہے لیکن طریقہ غلط ہے۔

اس قسم کے کوئی پانچ سوال بنائیے۔

فرہنگ اصطلاحات

جمعی معکوس: دو ناطق اعداد جن کا مجموعہ صفر ہو، ایک دوسرے کے جمعی معکوس کہلاتے ہیں۔ ($\frac{2}{3}$، $-\frac{2}{3}$ کا جمعی معکوس ہے)

متصلہ زاویے: دو زاویے جن کا ایک مشترک راس، ایک مشترک بازو ہوتا ہے اور کوئی اندرونہ نقطہ مشترک نہیں ہوتا۔

سیٹوں کے اتصال (یونین) کی خاصیت تلازم: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

سیٹوں کے تقاطع کی خاصیت تلازم: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

الجبری اظہاریے: یہ متصل اور متغیرات کو بنیادی عوامل کی علامات (+، –، ×، ÷) کا میلاپ ہوتا ہے۔

قوس: دائرے کا حصہ ہوتا ہے۔

دائرے کا رقبہ: دائرے کا رقبہ: $A = \pi r^2$

اساس: جب عدد کو قوت نما کی شکل میں لکھا جاتا ہے جو عدد اپنی قوت کے مطابق خود سے ضرب ہوتا ہے، اساس کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر: $8 = 2^3$ میں، 2 اساس ہے۔

دو رقمی: ایسا کثیر رقمی جس کی دو رقوم ہوتی ہیں۔ مثال کے طور پر: $x + y$، $3a - bc^2$ اور $y^2 + z$

سیٹ A کا کمپلیمنٹ: یہ ان تمام ممبران کا سیٹ ہوتا ہے جو U میں ہوتے ہیں لیکن A سے تعلق نہیں رکھتے اور A′ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ $(A' = U - A)$

دو سیٹوں کے اتصال (یونین) کی خاصیت مبادلہ: $A \cup B = B \cup A$

دو سیٹوں کے تقاطع کی خاصیت مبادلہ: $A \cap B = B \cap A$

محیط: دائرے کی حدود کی لمبائی ہے: $C = 2\pi r$

کمپلیمنٹری زاویے: دو زاویے کمپلیمنٹری ہوتے ہیں جب ان کا مجموعہ 90° ہو۔

مقداروں کی مسلسل نسبت: یہ دو نسبتوں کا ایسا جوڑا ہوتا ہے جس میں یکساں جسامت کی کم از کم ایک مقدار مشترک ہوتی ہے۔

جماعتی وقفہ: گروہی مواد میں، ہر گروہ جماعتی وقفہ ہوتا ہے۔

بیانیہ شکل: جس میں سیٹ کے ممبران کی خصوصیات کسی عام زبان میں بیان کی جاتی ہے۔ مثال کے طور پر: A = ہفتے کے دنوں کے ناموں کا سیٹ

دو سیٹوں کا فرق: دو سیٹوں کے فرق کو $A - B$ سے ظاہر کرتے ہیں جو A کے ایسے تمام ممبران پر مشتمل ہوتا ہے، جو B میں نہیں ہوتے ہیں۔ $A - B \neq B - A$ اور $A - B$ کو $A \backslash B$ سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔

غیر مشترک سیٹ: ایسے سیٹ جن میں کوئی ممبر مشترک نہیں ہوتا ہے۔

راست تناسب: ایسا تعلق جس میں اگر ایک مقدار میں اضافہ یا کمی ہوتی ہے تو اس ہی تناسب سے دوسری مقدار میں بھی اضافہ یا کمی ہوتی ہے۔

فرہنگ اصطلاحات

اعشاریہ: یہ نقطہ اعشاریہ پر مشتمل عدد ہوتا ہے۔

قوت نما: قوت نما وہ عدد ہوتا ہے، جو ظاہر کرتا ہے کہ اساس خود سے کتنی بار ضرب کی جائے گی۔

تعدد: یہ کسی خاص گروہی مواد میں قیمتوں کی تعداد ہوتی ہے۔ مثلاً (40 - 11) کا تعدد 5 ہے۔ اس کا مطلب 11 سے 40 کے درمیان 5 قیمتیں ہیں۔

جنرل سیلز ٹیکس: یہ مخصوص اشیاء یا خدمات پر حکومت کو ادا کیا جانے والا ٹیکس ہے۔ 2014 سے اس کی شرح 17% ہے۔

وتر: قائمۃ الزاویہ مثلث میں یہ زاویہ قائمہ کے مخالف بڑے سے بڑا ضلع ہوتا ہے۔

مثلث کی اونچائی: مثلث میں یہ راس سے قاعدے پر عمودی لمبائی (ارتفاع) ہوتی ہے۔

سیٹوں کا تقاطع: یہ دو سیٹوں کے مشترک ممبران کا سیٹ ہوتا ہے جسے علامت $\cap$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ $A \cap B = \{ x \,/\, x \in A \wedge x \in B \}$.

تقاطع کی ذاتی خصوصیت: $A \cap U = A$

اتصال (یونین) کی ذاتی خصوصیت: $A \cup \varnothing = A$

تناسب معکوس: ایسا تعلق جس میں اگر کسی مقدار میں اضافہ یا کمی ہوتی ہے تو دوسری مقدار میں اُس ہی تناسب سے کمی یا اضافہ ہوتا ہے۔

ایک متغیر میں یک درجی مساوات: ایسی مساوات جو ایک متغیر میں ایک درجے پر مشتمل ہوتی ہے۔

زیریں جماعتی حد: یہ جماعتی وقفے کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت ہوتی ہے۔

عددی حروف: الفاظ یا حروف تہجی جو کسی نامعلوم کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کرتے ہیں۔

ناطق اعداد کا ضربی معکوس: اگر دو غیر صفر ناطق اعداد کا حاصل ضرب 1 ہو تو ایسے اعداد ایک دوسرے کے ضربی معکوس کہلاتے ہیں۔ ($\frac{4}{3}$ اور $\frac{3}{4}$ ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں)

مارک اپ: یہ وہ رقم ہوتی ہے جو قیمت فروخت معلوم کرنے کے لئے قیمت خرید میں جمع کی جاتی ہے۔

یک درجی: ایسا کثیر رقمی جو ایک رقم پر مشتمل ہو، یعنی سادہ اظہاریہ۔

قوس صغیرہ: ایسی قوس جو نصف دائرے سے چھوٹی ہو۔

قوس کبیرہ: ایسی قوس جو نصف دائرے سے بڑی ہو۔

غیر مختتم اعشاریہ: ایسی اعشاریہ جس میں ایک ہندسہ یا کئی ہندسے نقطہ اعشاریہ کے بعد بار بار آرہے ہوں۔

منفی قوت: ایسی قوت جو صفر سے کم ہو۔ مثلاً: $5^{-7}, 3^{-2}$

متراکب سیٹ: دو سیٹ متراکب ہوتے ہیں جن میں کم از کم ایک غیر مشترک ہوتا ہے۔ مثلاً: $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{3, 4, 5\}$ متراکب سیٹ ہیں۔

مکمل مربع: ایسا مثبت عدد جو کسی عدد کا مربع ہو۔ مثلاً: 1، 4، 9، 16، 25 وغیرہ۔

پائی: یہ دائرے کے محیط اور قطر کے درمیان نسبت ہے۔ اسے π سے ظاہر کیا جاتا ہے اور $\pi = \frac{22}{7} = 3.14$ (تقریباً)

فرہنگ اصطلاحات

کثیر رقمی: ایسا اظہاریہ جو ایک یا ایک سے زیادہ رقوم پر مشتمل ہو اور متغیر کی قوت مکمل عدد ہو۔

پراپرٹی ٹیکس: یہ کسی شخص کی ذاتی پراپرٹی پر حکومت کی طرف سے عائد کیا جاتا ہے۔

ناطق اعداد: یہ ایسا عدد ہوتا ہے جسے $\frac{p}{q}$ کی صورت میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ p اور q صحیح اعداد ہوتے ہیں اور $q \neq 0$۔
مثلاً: $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{0}{8}$

ترقیم ساز سیٹ شکل: سیٹ کی ایسی شکل جس میں سیٹ کے تمام ممبران کی مشترک خصوصیات کو علامات کی مدد سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مثلاً: $A = \{x / x \in N \wedge 1 \leq x \leq 10\}$.

دائرے کا قطعہ: ایسی شکل جس کی حدود دائرے کا قوس اور دائرے کا وتر ہوتی ہیں۔

نصف دائرے: آدھے دائرے ہوتے ہیں۔

ایک جیسی اشکال: ایسی اشکال جو بالکل یکساں شکل کی ہوتی ہیں لیکن جسامت کا یکساں ہونا ضروری نہیں ہے۔

جذرالمربع: یہ وہ عدد ہوتا ہے جسے خود اُس ہی سے ضرب دیا جائے تو اصل عدد حاصل ہوتا ہے۔ '$\sqrt{\ }$' جذرالمربع کی علامت ہے۔

اندراجی شکل: سیٹ کی ایسی شکل جس میں سیٹ کے ممبران کو براس (کرلی بریکٹ) میں لکھا جاتا ہے اور 'قوما' سے علیحدہ کیا جاتا ہے۔ مثلاً: $A = \{a, b, c, d\}$; $P = \{0, 1, 2, \ldots\}$

مختتم اعشاریہ: ایسی اعشاریہ جو نقطہ اعشاریہ کے بعد محدود تعداد میں ہندسے رکھتا ہے۔

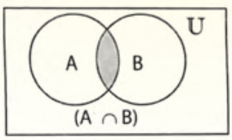
سہ رقمی: ایسی کثیر رقمی جو تین رقوم رکھتا ہے۔ مثلاً: $a^3 + 2a - b$, $x^2 + 2x + 1$.

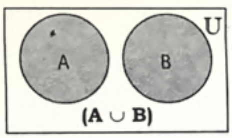
دو سیٹوں کا اتصال (یونین): ایسا سیٹ جو سیٹ A کے تمام ممبران یا سیٹ B کے تمام ممبران پر مشتمل ہوتا ہے۔ سیٹوں کے اتصال (یونین) کو علامت '$\cup$' سے ظاہر کرتے ہیں۔

کائناتی سیٹ: ایسا سیٹ جو کسی زیر غور مسئلے سے تعلق رکھنے والے تمام ارکان پر مشتمل ہوتا ہے۔ عام طور پر اسے 'U' سے ظاہر کرتے ہیں۔

بالائی جماعتی حد: یہ کسی جماعتی وقفہ کی بڑی سے بڑی قیمت ہوتی ہے۔

وین اشکال: انہیں سیٹ اور سیٹ پر عوامل کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔





زکوٰۃ: یہ اسلام کے پانچ ستونوں میں سے ایک ستون ہے۔ اس کا قرآن مجید میں نماز کے ساتھ ساتھ ذکر ہے۔
زکوٰۃ = سالانہ بچت × 2.5 فیصد

جوابات

مشق 1.1

I. **1.** قدرتی اعداد کا سیٹ = N **2.** پہلے چار جفت اعداد کا سیٹ = E **3.** پہلے پانچ طاق اعداد کا سیٹ = F
4. 10 کے تمام تقسیم کنندہ کا سیٹ = J **5.** پہلے چھ مکمل اعداد کا سیٹ = W **6.** 5 کے پہلے پانچ عاد کا سیٹ = S
7. 3 کے عاد کا سیٹ = T

II. **1.** A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.
2. B = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}.
3. C = {–3, –2, –1, 0, 1}.
4. D = {*p, a, k, i, s, t, n*}.
5. E = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}.
6. F = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29}
7. G = {1, 3, 5, 15}.

III. **1.** $A = \{x / x \in N \wedge x \leq 10\}$.
2. $B = \{x / x \in Z \wedge -2 \leq x \leq 5\}$.
3. C = {*x/x* پاکستان کے دریاؤں کے نام ہیں}
4. $E = \{x / x \in E \wedge 2 \leq x \leq 20\}$.
5. $D = \{x / x \in O\}$
6. S = {*x/x* سے شروع ہونے والے انگریزی میں ہفتے کے دنوں کے نام ہیں S}
7. $Z = \{x / x \in Z\}$
8. L = {*x/x* 4 کے عاد ہیں}

IV. **1.** A = {1, 2, 3, 4, 5}
2. B = {4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}
3. C = {–2, –1, 0, 1, 2,}
4. D = {0, 1, 2, 3, 4}

V سیٹ ترقیم ساز شکل	اندراجی شکل	بیانیہ شکل
A = {*x/x* انگریزی حروف تہجی کے واول کا سیٹ}	A = {*a, e, i, o, u*}	انگریزی حروف تہجی کے واول کا سیٹ = A
$B = \{x / x \in E^{+}\}$	B = {2, 4, 6, 8, ...}	تمام مثبت جفت اعداد کا سیٹ = B
$C = \{x / x \in N \wedge x \leq 5\}$	C = {1, 2, 3, 4, 5}	پہلے پانچ قدرتی اعداد کا سیٹ = C
$D = \{x / x \in N \wedge x \geq 50\}$	D = {51, 52, 53, ...}	50 کے برابر یا 50 سے بڑے قدرتی اعداد کا سیٹ = D
A = {*x/x* لفظ Pakistan کے حروف تہجی کا سیٹ}	E = {*p, a, k, i, s, t, n*}	لفظ Pakistan کے انگریزی حروفِ تہجی کا سیٹ = E
F = {*x/x* ہفتے کے دنوں کے ناموں کا سیٹ}	F = {پیر، منگل، بدھ، جمعرات، جمعہ، ہفتہ، اتوار}	ہفتے کے دنوں کے ناموں کا سیٹ = F

مشق 1.2

A. **1.** $A \cup B = \{4, 5, 6, 8, 9\}$
2. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$
3. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
4. $X \cup Y = \{2,3,5,6,7,9,11,12,15,18\}$
5. $D \cup E \cup F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$
6. $(A \cup B) \cup C = \{1,2,3\}$, $A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3\}$

B. **1.** $A \cap B = \{3\}$
2. $D \cap E = \{2, 4, 6, 8\}$
3. $P \cap Q = \{a\}$
4. $A \cap B = \{1, 2, 3, ...\}$
5. $(A \cap B) \cap C = \{\ \}$
6. $(D \cap E) \cap F = \{\ \}$, $D \cap (E \cap F) = \{\ \}$

C. **1.** A – B = {4} , B – A = {7, 8}
2. A – B = {9} , B – A = {7}
3. A – B = {0} , B – A = { }
4. A – B = {3, 6, 9, 15, 18} , B – A = {4, 8, 16, 20, 24}

مشق 1.3

A. **1.** غیر مشترک سیٹ **2.** متراکب سیٹ **3.** غیر مشترک سیٹ **4.** متراکب سیٹ **5.** متراکب سیٹ **6.** متراکب سیٹ **7.** متراکب سیٹ

B. **(i)** متراکب سیٹ **(ii)** متراکب سیٹ **(iii)** متراکب سیٹ **(iv)** غیر مشترک سیٹ
(v) غیر مشترک سیٹ **(vi)** غیر مشترک سیٹ **(vii)** متراکب سیٹ

جوابات

مشق 1.4

1. **(i)** $A' = \{b, c, d\}$ **(ii)** $A \cup A' = \{a, b, c, d, e, f\}$ **(iii)** $A \cap A' = \{\ \}$
   (iv) $U' = \{\ \}$ **(v)** $\varnothing' = \{a, b, c, d, e, f\}$

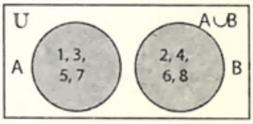
2. **(i)** $E' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ **(ii)** $E \cup E' = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ **(iii)** $E \cap E' = \varnothing$
   (iv) $U' = \varnothing$ **(v)** $\varnothing' = \{1, 2, 3, ..., 10\}$

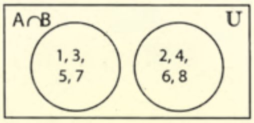
3. **(i)** $P' = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ **(ii)** $P \cup P' = \{0, 1, 2, 3, ..., 12\}$ **(iii)** $P' \cap P = \{\ \}$
   (iv) $U \cap U' = \{\ \}$

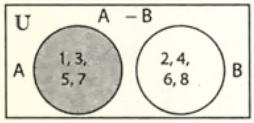
4. **(i)** $B' = \{u, v, w\}$ **(ii)** $B' \cup B = \{u, v, w, x, y, z\}$ **(iii)** $B' \cap B = \{\ \}$
   (iv) $U \cup U' = \{u, v, w, x, y, z\}$

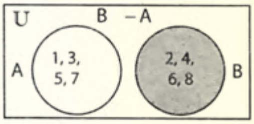
5. **(i)** $A' = \{8, 9, 10\}$ **(ii)** $B' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ **(iii)** $A' \cap A = \{\ \}$
   (iv) $A \cup A' = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ **(v)** $B \cup B' = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ **(vi)** $B \cap B' = \{\ \}$

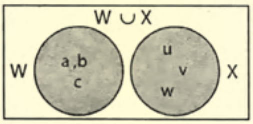
مشق 1.6

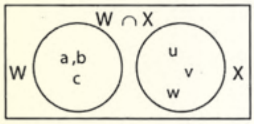
A. 1. (i)


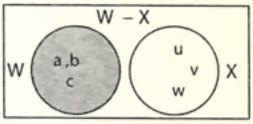
(ii)


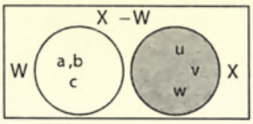
(iii)


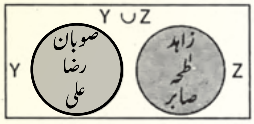
(iv)


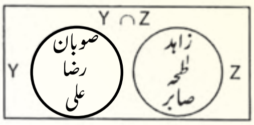
2. (i)


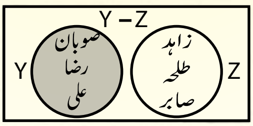
(ii)


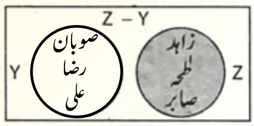
(iii)


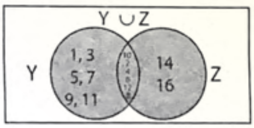
(iv)


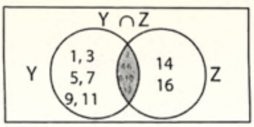
3. (i)


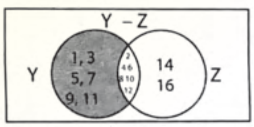
(ii)


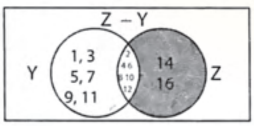
(iii)


(iv)


4. (i)


(ii)


(iii)


(iv)


B (1) $A' = \{11, 13, 15\}$
(2) $B' = \{10, 11, 12, 13, 14, 16\}$
(3) $A \cap B = \{10, 12, 14, 16\}$
(4) $(A - B)' = \{8, 11, 13, 15\}$
(5) $A \cup B' = \{8, 10, 11, 12, 13, 14, 16\}$
(6) $A' \cup B' = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$
(7) $A' \cap B' = \{15\}$
(8) $(A \cap B)' = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$
(9) $A' \cap B = \{15\}$
(10) $(A \cup B)' = \{11, 13\}$
(11) $A' \cup A = \{3, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$
(12) $B' \cap B = \{\ \}$

طلبہ کووین اشکال خود بنانا چاہیے۔

جوابات

جائزہ مشق 1

2. **(a)** {0, 1, 2, 3, 4} **(b)** انگریزی حروف تہجی کا سیٹ

5. **(i)** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$ **(ii)** $A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

(iii) $A - B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ **(iv)** $(A \cap C)' = \{2, 4, 6, 8, 10, 11, 12\}$

(v) $(B \cup C)' = \{\ \}$ **(vi)** $B' \cap C' = \{2, 4, 6, 8\}$

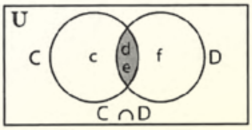
(vii) $A - B' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ **(viii)** $B - A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

(ix) $A' - C = \{12\}$ **(x)** $(B - C)' = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

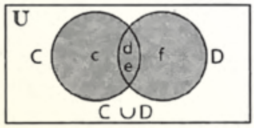
(xi) $(C - A)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$ **(xii)** $A' - C' = \{11\}$

7. **(i)** (a) **(ii)** (b) **(iii)** (a) **(iv)** (c) **(v)** (c)

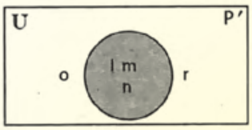
8. **(i)** $C \cap D = \{d, e\}$



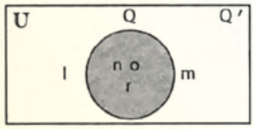
$C \cup D = \{c, d, e, f\}$



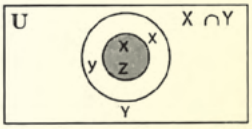
(ii) $P' = \{o, r\}$



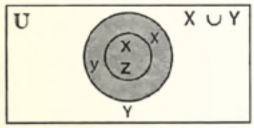
$Q' = \{l, m\}$



(iii) $X \cap Y = \{x, z\}$



$X \cup Y = \{x, y, z\}$



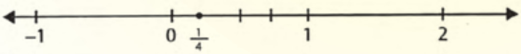
مشق 2.1

.1 **(i)** درست **(ii)** غلط **(iii)** غلط **(iv)** غلط **(v)** درست

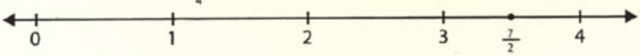
(vi) غلط **(vii)** درست **(viii)** درست **(ix)** غلط **(x)** غلط **(xi)** غلط

2. $2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{4}$

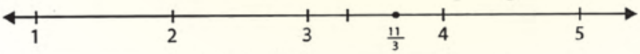
3. **(i)**



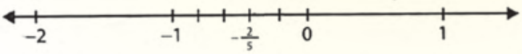
(ii)



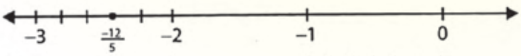
(iii)



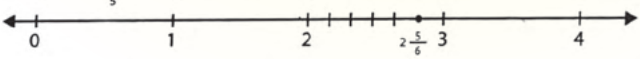
(iv)



(v)



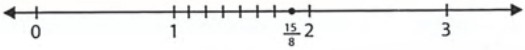
(vi)

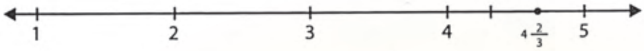


(vii)

(viii)

جوابات

(ix) 

(x) 

4. (i) غلط (ii) درست (iii) درست (iv) غلط (v) درست (vi) غلط

مشق 2.2

1. (i) $\frac{17}{19}$ (ii) $-\frac{1}{13}$ (iii) 10 (iv) $-\frac{25}{6}$

2. (i) $\frac{24}{7}$ (ii) $\frac{1}{3}$ (iii) 2 (iv) 1 (v) $-\frac{7}{40}$

(vi) $\frac{37}{42}$ (vii) $\frac{17}{14}$ (viii) $\frac{7}{10}$ (ix) $\frac{97}{72}$ (x) $\frac{29}{20}$

3. (i) $-\frac{17}{15}$ اور $\frac{15}{17}$ (ii) $+26$ اور $-\frac{1}{26}$ (iii) $+\frac{1}{20}$ اور -20 (iv) $+\frac{5}{19}$ اور $-\frac{19}{5}$

(v) جمعی معکوس صفر کا صفر ہی ہوتا ہے اور صفر کا ضربی معکوس نہیں ہوتا ہے۔ (vi) -8 اور $\frac{1}{8}$

(vii) $-\frac{1}{9}$ اور 9 (viii) $-\frac{200}{7}$ اور $\frac{7}{200}$

4. (i) $\frac{15}{16}$ (ii) $\frac{15}{7}$ (iii) $\frac{8}{105}$ (iv) $-\frac{12}{7}$ (v) 10

(vi) $-\frac{2}{3}$ (vii) $-\frac{3}{16}$ (viii) $-\frac{1}{3}$

مشق 2.3

6. (i) $\frac{8}{9}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ (iii) $\frac{5}{6}, \frac{4}{7}, \frac{1}{3}$

7. (i) $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{10}, \frac{2}{15}, \frac{4}{5}$ (iii) $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{6}$

8. (i) ترتیب صعودی: $\frac{1}{4}, \frac{5}{7}, \frac{4}{3}$
ترتیب نزولی: $\frac{4}{3}, \frac{5}{7}, \frac{1}{4}$

(ii) ترتیب صعودی: $\frac{1}{11}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}$
ترتیب نزولی: $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{11}$

(iii) ترتیب صعودی: $\frac{2}{9}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{3}$
ترتیب نزولی: $\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{2}{9}$

(iv) ترتیب صعودی: $\frac{4}{20}, \frac{1}{2}, \frac{9}{7}, \frac{20}{15}$
ترتیب نزولی: $\frac{20}{15}, \frac{9}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{20}$

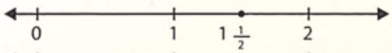
جوابات

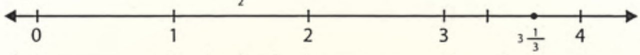
جائزہ مشق 2

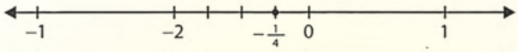
1. (ii) $-a$ (iii) $\frac{q}{p}$ (iv) $\frac{ps+qr}{qs}$ (vi) تفریق اور تقسیم

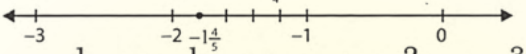
2. (i) ناطق عدد (ii) جمعی (iii) ناطق عدد (iv) ضربی معکوس (v) ضربی

3. (i) b (ii) a (iii) c (iv) d (v) d

4. (i)


(ii)


(iii)


(iv)


5. (i) 14 اور $-\frac{1}{14}$ (ii) $-\frac{1}{5}$ اور 5 (iii) $\frac{2}{3}$ اور $-\frac{3}{2}$ (iv) $\frac{11}{27}$ اور $-\frac{27}{11}$

6. (i) $>$ (ii) $<$ (iii) $>$ (iv) $<$ (v) $<$ (vi) $>$

7. (i) 1 (ii) $\frac{4}{7}$ (iii) $-\frac{13}{40}$ (iv) $-\frac{1}{12}$ (v) $-\frac{11}{60}$ (vi) $\frac{1}{5}$

8. (i) $\frac{1}{10}$ (ii) $-\frac{1}{11}$ (iii) $-\frac{27}{56}$ (iv) $\frac{32}{49}$ (v) $\frac{7}{11}$ (vi) $-\frac{6}{25}$

10. (i) خاصیت مبادلہ بالحاظ جمع (ii) خاصیت مبادلہ بالحاظ ضرب (iii) خاصیت تلازم بالحاظ ضرب
(iv) خاصیت تلازم بالحاظ جمع (v) خاصیت تلازم بالحاظ جمع (vi) ضرب کی خاصیت تقسیمی بالحاظ جمع
(vii) خاصیت مبادلہ بالحاظ ضرب (viii) تفریق پر ضرب کی خاصیت تقسیمی
(ix) تفریق پر ضرب کی خاصیت تقسیمی (x) ضرب کی خاصیت تقسیمی بالحاظ جمع

مشق 3.1

A. (1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{3}{5}$ (4) $\frac{4}{5}$ (5) $\frac{8}{10}$

B. (1) $\frac{3}{20}$ (2) $\frac{7}{20}$ (3) $\frac{12}{25}$ (4) $\frac{3}{4}$ (5) $\frac{18}{20}$

(6) $1\frac{3}{10}$ (7) $2\frac{1}{2}$ (8) $5\frac{1}{2}$ (9) $5\frac{3}{5}$ (10) $6\frac{17}{20}$

C. (1) $\frac{3}{125}$ (2) $3\frac{1}{8}$ (3) $\frac{3}{8}$ (4) $4\frac{13}{200}$ (5) $5\frac{27}{40}$

(6) $-\frac{1}{1000}$ (7) $-\frac{1}{2000}$ (8) $-\frac{1}{200}$ (9) $-5\frac{1}{200}$ (10) $-11\frac{3}{8}$

(11) $-\frac{1}{800}$ (12) $-1\frac{87}{160}$

جوابات

مشق 3.2

T = Terminating = مختتم　　N = Non- terminating = غیر مختتم

I.	(1)	N	(2)	T	(3)	N	(4)	N	(5)	N	(6)	N	(7)	T
	(8)	N	(9)	NT	(10)	T	(11)	N	(12)	T	(13)	N	(14)	NT
	(15)	N	(16)	T	(17)	N	(18)	N	(19)	N	(20)	N		

R = Recurring = متوالی　　N = Non- Recurring = غیر متوالی

II.	(1)	N	(2)	R	(3)	N	(4)	N	(5)	R	(6)	R	(7)	R
	(8)	N	(9)	N	(10)	N								

مشق 3.3

T = Terminating = مختتم

$\frac{12}{25}, \frac{17}{20}, \frac{117}{125}, -\frac{9}{40}$

$-\frac{96}{100}, \frac{101}{125}, \frac{125}{200}$

$\frac{372}{400}$

N = Non- terminating = غیر مختتم

$\frac{43}{21}, \frac{5}{12}, \frac{10}{33}, \frac{23}{60}$

$\frac{40}{35}, \frac{141}{144}, \frac{55}{75}$

$\frac{200}{201}, -\frac{210}{147}, -\frac{401}{333}$

مشق 3.4

N = Non- terminating = غیر مختتم

T = Terminating = مختتم　　R = Recurring = متوالی

I.	(1)	0.357142...	(N)	(2)	– 0.722222...	(R)	(3)	0.95	(T)
	(4)	– 3.95454545...	(R)	(5)	6.566666...	(R)	(6)	0.575	(T)
	(7)	– 0.735294117...	(N)	(8)	2.84375	(N)	(9)	– 3.98	(T)
	(10)	2.9375	(T)	(11)	1.4	(T)	(12)	– 1.8	(T)
	(13)	1.5555555...	(R)	(14)	0.944444444...	(R)			

مشق 3.5

I.	(1)	0.0575	(2)	0421875	(3)	0.883333...
	(4)	– 0.613333...	(5)	0.98571428...	(6)	0.9625
	(7)	0.47777778...	(8)	0.99166667...	(9)	0.82
	(10)	0.84375				
II.	(1)	0.26666...	(2)	– 0.916666...	(3)	6.888888...
	(4)	3.142887143...	(5)	1.3125...	(6)	0.075
	(7)	– 0.4	(8)	0.3181818...	(9)	0.366666...
	(10)	– 0.801980198...				
III.	(1)	0.90909090...	(2)	– 0.455555...	(3)	1.6183846...
	(4)	0.894736...	(5)	1.285714...	(6)	0.6521735...
	(7)	– 1.15625	(8)	0.78620689...		

IV.	(1)	0.46	(2)	0.36	(3)	0.67	(4)	0.11	(5)	1.91
	(6)	3.25	(7)	2.05	(8)	8.34	(9)	10.10	(10)	4.00
	(11)	13.10	(12)	12.82						
V.	(1)	4.517	(2)	6.747	(3)	0.010	(4)	0.986	(5)	206.418
	(6)	3.407	(7)	102.999	(8)	11.123	(9)	55.123	(10)	4.105
	(11)	66.396	(12)	59.920						

جوابات

جائزہ مشق 3

1. (i) $\frac{13}{40}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $2\frac{1}{2}$ (iv) $7\frac{3}{4}$ (v) $\frac{39}{50}$
   (vi) $1\frac{297}{1000}$ (vii) $2\frac{87}{250}$

2. (i) 8.2 (T) (ii) 9.25 (T) (iii) 3.11111... (N) (iv) 1.428571 ... (N)
   (v) 3.142857... (N) (vi) 1.3125 (T) (vii) 7.3 (T)

3. (i) 14.58 (ii) 10.78 (iii) 5.79 (iv) 6.80 (v) 25.49

4. Terminating = مختتم
   $\frac{13}{4}, \frac{17}{25}$

   Non- Terminating = غیر مختتم
   $\frac{80}{3}, \frac{15}{11}, \frac{19}{6}$
   $\frac{25}{15}, \frac{22}{7}, \frac{14}{9}$

5. (i) 0.21 (ii) 6.35 (iii) 0.52 (iv) 0.62 (v) 0.145
   (vi) 3.125 (vii) 3.8333 ... (viii) 1.375 (ix) 1.5

6. (i) 13.333... (ii) 2.8571 ... (iii) 4.54545... (iv) 6.153846 ... (v) 16.6666...
   (vi) 10.9090... (vii) 5.8333 (viii) 0.57142...

7. (i) 5.717 (ii) 11.604 (iii) 0.926 (iv) 3.409 (v) 0.744
   (vi) 23 158

.9 **(i)** مختتم اعشاریہ **(ii)** غیر مختتم اعشاریہ **(iii)** مکمل عدد-اعشاریہ حصہ **(iv)** ختم
(v) کسر عام **(vi)** ٹکڑے

.10 **(i)** ب **(ii)** د **(iii)** الف **(iv)** ج

مشق 4.1

1. **(i)** 3×3 اور 9 **(ii)** $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ اور 128
   (iii) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ اور 648 **(iv)** $5 \times 5 \times 7 \times 7$ اور 1225
   (v) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$
   (vi) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$ اور 21168

2. **(i)** 2, 5 اور 32 **(ii)** 5, 4 اور 625 **(iii)** 6, 3 اور 216 **(iv)** $\frac{2}{3}$, 6 اور $\frac{64}{729}$
   (v) $-\frac{1}{5}$, 7 اور $-\frac{1}{78125}$

4. **(i)** 10^3 **(ii)** 2^9 **(iii)** $(-7)^3$ **(iv)** 5^4 **(v)** $\left(-\frac{1}{10}\right)$ **(vi)** $\left(\frac{2}{3}\right)^5$
   (vii) $\left(-\frac{5}{7}\right)^3$ **(viii)** $\left(\frac{9}{4}\right)^3$ یا $\left(\frac{3}{2}\right)^6$

مشق 4.2

1. **(i)** $\left(\frac{5}{7}\right)^6$ **(ii)** $\left(\frac{3}{20}\right)^6$ **(iii)** $\left(\frac{1}{7}\right)^{10} \times \left(\frac{5}{7}\right)^{16}$ **(iv)** p^{13} **(v)** $(xy)^{11}$ **(vi)** $\left(\frac{4}{3}\right)^{18}$
   (vii) $x^7 y^{13}$ **(viii)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{14}$ **(ix)** $(xyz)^5$ **(x)** $(pq)^7$

جوابات

مشق 4.3

1. (i) 5^3 یا 125 (ii) $\left(\frac{5}{7}\right)^3$ یا $\frac{125}{343}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ یا $\frac{1}{16}$ (iv) x^6

(v) $\left(\frac{5}{3}\right)^6$ یا $\frac{15625}{729}$ (vi) 5^5 یا 3125 (vii) $\left(\frac{7}{5}\right)^{4-}$ یا $\frac{2401}{625}$

(viii) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ یا $\frac{64}{729}$ (ix) $\frac{7}{11}$ (x) $\frac{x^4}{y^4}$

مشق 4.4

1. (i) 5^{14} (ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{48}$ (iii) 3^{20} (iv) x^{100} (v) $\left(\frac{4}{7}\right)^{18}$ (vi) $\left(\frac{3}{4}\right)^{40}$

2. (i) 2^{-5} (ii) 3^{-7} (iii) x^{-6} (iv) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-6}$

3. (i) $\frac{1}{5^8}$ (ii) 3^7 (iii) $\frac{1}{x^5}$ (iv) $\frac{1}{y^7}$

4. (i) مثبت (ii) منفی (iii) مثبت (iv) مثبت (v) منفی (vi) مثبت

مشق 4.5

1. (i) 1 (ii) $\frac{4}{9}$ (iii) **2** (iv) 2 (v) $\frac{4}{5}$ (vi) 1

2. (i) 10 (ii) 1 (iii) 3 (iv) 5

جائزہ مشق 4

1. (i) 3, 5 اور 243 (ii) 7, 4 اور 2401 (iii) $\frac{3}{4}$, 2 اور $\frac{9}{16}$ (iv) $\frac{1}{4}$, 3 اور $\frac{1}{64}$

(v) 8,0 اور 1 (vi) y, 0 اور 1 2. (i) $\frac{1}{64}$ (ii) $\frac{256}{625}$ (iii) 216 (iv) $\frac{4}{49}$ (v) 3^{10} (vi) 4^{10}

(vii) 1 (viii) −5

4. (i) منفی (ii) مثبت (iii) مثبت (iv) منفی (v) مثبت

5. (i) $\frac{4}{3}$ (ii) 5^4 (iii) $\left(\frac{2}{5}\right)^5$ یا $\frac{32}{3125}$ 6. (i) $\frac{3}{2}$ (ii) 4 (iii) 2

مشق 5.1

A. (1) 121 (2) 361 (3) 625 (4) 500 (5) 4356 (6) 6084
(7) 10000 (8) 250000

B. (i) مکمل مربع (ii) مکمل مربع نہیں ہے (iii) مکمل مربع (iv) مکمل مربع

(v) مکمل مربع نہیں ہے (vi) مکمل مربع (vii) مکمل مربع نہیں ہے (viii) مکمل مربع نہیں ہے

جوابات

C. (1)، (2)، (4) اور (8) طاق اعداد کا مکمل مربع ہیں۔
(3)، (5)، (6) اور (7) جفت اعداد کا مکمل مربع ہیں۔

D. (1) $\frac{1}{25}$ اور $\frac{1}{25} < \frac{1}{5}$ (2) $\frac{9}{49}$ اور $\frac{9}{49} < \frac{3}{7}$ (3) $\frac{64}{81}$ اور $\frac{64}{81} < \frac{8}{9}$

(4) $\frac{25}{36}$ اور $\frac{25}{36} < \frac{5}{6}$ (5) $\frac{4}{9}$ اور $\frac{4}{9} < \frac{2}{3}$

E. (1) 0.01 اور 0.01 < 0.1 (2) 0.25 اور 0.25 < 0.5 (3) 0.0049 اور 0.0049 < 0.07
(4) 0.0121 اور 0.012 < 0.11 (5) 0.0225 اور 0.0225 < 0.15

مشق 5.2

A. (1) 5 (2) 4 (3) 9 (4) 36 (5) a (6) y (7) 49 (8) 8

B. (1) 26 (2) 13 (3) 22 (4) 31 (5) 70 (6) 33 (7) 40 (8) 48
(9) 56 (10) 41 (11) 37 (12) 45

C. (1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{6}{7}$ (3) $\frac{35}{99}$ (4) $1\frac{1}{12}$ (5) $1\frac{2}{11}$ (6) $1\frac{5}{6}$ (7) $\frac{31}{41}$ (8) $\frac{32}{35}$

(9) $1\frac{13}{24}$ (10) $2\frac{4}{13}$ (11) $1\frac{3}{9}$ (12) $1\frac{5}{6}$

D. (1) 1.8 (2) 2.1 (3) 2.3 (4) 2.7 (5) 2.5 (6) 6.1 (7) 2.8 (8) 3.2
(9) 5.5 (10) 10.0 (11) 5.8 (12) 5.9

مشق 5.3

(1) 28 قطاریں اور 28 کرسیاں (2) 15.5 میٹر (3) لمبائی = 46.5 میٹر اور چوڑائی 15.5 میٹر
(4) 46 قطاریں (5) 41 کرسیاں (6) 25 قطاریں اور 25 ٹرک
(7) 32 قطاریں اور 32 طلبہ (8) چوڑائی = 18.22 میٹر اور لمبائی = 54.66 میٹر
(9) 58.2 میٹر (10) 123 بستے

جائزہ مشق 5

2. (i) 961 (ii) 7 (iii) مکمل مربع (iv) کا مربع (v) $\frac{5}{6}$ (vi) 1

3. (i) غلط (ii) درست (iii) غلط (iv) غلط (v) درست (vi) غلط

4. (i) a (ii) c (iii) c

5. (i) 27 (ii) 84 (iii) 163 (iv) 205 (v) $2\frac{4}{11}$ (vi) $\frac{23}{49}$

(vii) $1\frac{4}{121}$ (viii) 0.16 (ix) 587 (x) $\frac{80}{99}$ (xi) $2\frac{3}{8}$ (xii) 11.45

(6) 110 میٹر (7) 12 میٹر (8) 62 میٹر (9) چوڑائی = 2.5 میٹر اور لمبائی = 7.5 میٹر

مشق 6.1

1. (i) 2 : 5 : 4 (ii) 24 : 56 : 63 (iii) 200 : 220 : 231
2. (i) 12 : 20 : 27 (ii) 55 : 77 : 65 (iii) 24 : 35 : 40
3. (i) 56 : 84 : 105 : 150 (ii) 140 : 105 : 147 : 180
4. (i) $\frac{5}{3}$ (ii) $\frac{7}{3}$ (iii) $\frac{28}{5}$

5. 40 : 72 : 99

جوابات

.6 سلیم کا حصہ = 400 روپے
عرفان کا حصہ = 600 روپے
عمران کا حصہ = 1000 روپے

7. 15 : 20 : 28

8. 90 : 36 : 48 : 56

.9 بجلی کا بل = 14000 روپے
فون کا بل = 5600 روپے
گیس کا بل = 4200 روپے
پانی کا بل = 3600 روپے

.10 انگریزی کی کتاب کی قیمت = 60 روپے
اردو کی کتاب کی قیمت = 90 روپے
سائنس کی کتاب کی قیمت = 225 روپے
ریاضی کی کتاب کی قیمت = 300 روپے

مشق 6.2

.1 600 روپے .2 9 پائپ .3 10 شخص .4 750 روپے .5 75 صفحات

.6 32 سپاہی .7 $5\frac{1}{3}$ گھنٹے .8 315 روپے .9 $\frac{392}{9}$ کلو گرام .10 12750 روپے

مشق 6.3

.1 15 کام کرنے والے .2 4 مزدور .3 10 کام کرنے والے .4 $2\frac{2}{5}$ دن .5 کام کا $\frac{7}{15}$ حصہ

.6 $42\frac{2}{3}$ دن .7 (i) 1250 بھیڑ (ii) $93\frac{3}{4}$ دن

مشق 6.4

.1 (i) 13.89 میٹر فی سیکنڈ (ii) 20.83 میٹر فی سیکنڈ (iii) 22.22 میٹر فی سیکنڈ (iv) 14.03 میٹر فی سیکنڈ

.2 (i) 108 کلو میٹر فی گھنٹہ (ii) 43.2 کلو میٹر فی گھنٹہ (iii) 151.2 کلو میٹر فی گھنٹہ (iv) 91.8 کلو میٹر فی گھنٹہ

.3 40 کلو میٹر فی گھنٹہ .4 3 گھنٹے .5 225 میٹر .6 $2\frac{4}{7}$ گھنٹے

.7 (i) 70 کلو میٹر فی گھنٹہ (ii) $1\frac{1}{6}$ کلو میٹر فی منٹ (iii) 19.4 میٹر فی سیکنڈ (iv) 315 کلو میٹر (v) 5 گھنٹے

جائزہ مشق 6

.1 4 : 10 : 7 .2 105 : 140 : 168 : 192 .3 425 روپے .4 14 مزدور .5 2

.6 21 .7 16.7 میٹر فی سیکنڈ .8 378 کلو میٹر فی گھنٹہ

.9 66 کلو میٹر اور رفتار = 1.2 کلو میٹر فی منٹ (i) 72 کلو میٹر فی گھنٹہ (ii) 1.2 کلو میٹر فی منٹ
(iii) 1200 میٹر فی منٹ (iv) 20 میٹر فی سیکنڈ

.10 کار A = 42 لٹر، کار B = 54 لٹر، کار C = 66 لٹر .11 (i) 375 روپے (ii) 224 کلو میٹر

مشق 7.1

.A .1 14,320 روپے .2 33,158 روپے .3 24,435 روپے .4 9,360 روپے .5 32,800 روپے

.B .1 1,275,000 روپے .2 897,500 روپے .3 96,000 روپے .4 283,333 روپے .5 780,000 روپے

.C .1 1.67% .2 10% .3 2% .4 2% .5 2% .D طلبہ کو جوابات خود دینا چاہئے۔

مشق 7.2

.1 1,118.75 روپے .2 824.50 روپے .3 2,176 روپے .4 GST = 2,584 روپے، کل قیمت = 17,784 روپے

.5 GST = 1,326 روپے، کل قیمت 9,126 روپے .6 30,235 روپے

.7 ڈش واشر کی قیمت 52,137 روپے، GST = 8,863 روپے .8 16,000 روپے .9 17% .10 17%

جوابات

مشق 7.3

1. نفع 790 روپے، شرح مارک اپ 42.7%   2. نفع 450 روپے، شرح مارک اپ 7.2%   3. 2,508 روپے

4. 1,826 روپے   5. 3503 روپے   6. 3,300 روپے   7. 820 روپے

8. 90 روپے   9. 57.8   10. 77.34%   11. 20.67%

سرگرمی (صفحہ 124)

i. 96,000 روپے   ii. 0.2 سال   iii. 30,000 روپے   iv. 24,000 روپے   v. 8%   vi. 2,250,000 روپے

مشق 7.4

1. 613,088 روپے   2. 188,662.50 روپے   3. 1,431 روپے   4. 113,333.30 روپے

5. (i) 192,000 روپے   (ii) 0.2 سال   (iii) 30,000 روپے   (iv) 24,000 روپے

مشق 7.5

1. 12,500 روپے   2. وہ صاحبِ نصاب نہیں ہے۔   3. 16,250 روپے   4. 820,000 روپے

5. 200,000 روپے   6. 3937.50 روپے   7. 250,000 روپے   8. 6150 روپے

جائزہ مشق 7

1. 1445 روپے   2. 47,692.30 روپے   3. 2847.50 روپے   4. 99,935.30 روپے   5. 318,750 روپے

6. 47,500 روپے   7. 12,500 روپے   8. 778,518.52 روپے   9. 14,875 روپے   10. 11,125 روپے

11. 500,000 روپے   12. 11,150 روپے   13. 40,000 روپے

مشق 8.1

A. (1) 13 (2) $2a$ (3) $-12x$ (4) $2ab$ (5) $7y$ (6) $9x^2 + 7x + 4$

B. (1) $8a + 8b$ (2) $7x + 2y$ (3) $11a - 6b$

(4) $9ab + 9cd + 12ad$ (5) $8a + 7b + 6c$ (6) $12a + 16b + 11c$

(7) $27a + 27b + 27c$ (8) $14a + 18b + 17c$ (9) $11a + 13b + 11c$

(10) $22c - f + 12g$

مشق 8.2

(1) $3a$ (2) $-19ab$ (3) $12a$ (4) $32c^6d^2$

(5) $4a + 8b + 21c$ (6) $14c + 4d + 3c$ (7) $8x + 7y + 4z$ (8) $6a + 5b + 18c$

(9) $-x^2 + 7ab + 27bc$ (10) $a + ab + b$ (11) $12a + b$ (12) $4x + 3y$

مشق 8.3

I. (1) $120a^2$ (2) $54ab$ (3) $20a$ (4) $4a + 4b$

(5) $-30a^2b^3$ (6) $18ab$ (7) $60m^9$ (8) $36x^5y^4$

II. (1) $9a + 9b$ (2) $-4xy + 4y^2$ (3) $-10m^3n + 15mn^4$

(4) $-18x^2y^3\ 12x^2y^4$ (5) $18l^3m^3n - 12l^2m^3n^2$ (6) $10bc^3d^2$

III. (1) $24c^2 - 20cd + 24d^2$ (2) a^2b^2 (3) $a^4 - b^4$

(4) $6x^2 + 11xy - 10y^2$ (5) $-4lm^2 + 6lmn - 6m^2n + 9mn^2$ (6) $16p^2q^3 - 6p^3q^2$

IV. (1) $4a^2bc - 6ab^2c + 8abc^2$ (2) $a^3b + ab^3 - abc^2$ (3) $-m^2n^3 - m^3n^2 + m^3n^3$

(4) $-3x^3y + 18x^2y - 27xy^3$ (5) $8pqr - 12p^2q^2r + 4pq^3r$ (6) $x^2y^2z^2 + x^3y^3z - xy^3z^3$

مفت تقسیم کے لیے

جوابات

V. (1) $1 + x - 5x^2 + 3x^3$ (2) $8c^3 - 8cd^2 + 12c^2d - 12d^3 - 6c^2e + 6d^2e$
(3) $a^3 - 2a^2b + b^3$ (4) $3x^3 - 19x^2 + 32x - 16$ (5) $a^4 - 2a^4b + 2a^2b^3 - b^4$
(6) $3p^4q - 3p^2q^3 + 2p^3q^2 - 2pq^4 - p^2q^2r + q^4r$

مشق 8.4

I. (1) $-a - 8ab$ (2) $-13m + 24mn$ (3) $36x^4 - 48x^2 - 36x^3 - 48xy$ (4) $3x + 3y^2$
(5) $12d^2l^2m^2 - 12l^2m^4 - 8lm^4n + 8lm^2n^3$ (6) $6p^4q^2 + 6p^2q^4 + 12p^2q^2r^2 - 12pq^2r^2$

مشق 8.8

(1) $5a(ax - 3)$ (2) $m^2(m^2 - m + 1)$ (3) $7(a^3 + 2a^2 - 1)$
(4) $mx(x - m - 1)$ (5) $n(13 - 2n^2 + 39n^4)$ (6) $abc(a + b^2 + c)$
(7) $(b + c)(3a + 6d)$ (8) $(a + b)(xy + ay + by + x)$
(9) $(x - y)(4lm + 8mnx - 8mny + 12nl)$ (x) $(p^2 - q)^2(pq + pr + qr)$

مشق 8.9

(1) $(x + 6)(x + 6)$ (2) $(a + 2)(a + 2)$ (3) $(2a + 9)(2a + 9)$
(4) $(3x + 7y)(3x + 7y)$ (5) $(5a + 8b)(5a + 8b)$ (6) $(4b + 5)(4b + 5)$
(7) $(2x + \frac{1}{2})(2x + \frac{1}{2})$ (8) $(12x - \frac{1}{6})(12x - \frac{1}{6})$ (9) $2(3c + 5d)(3c + 5d)$
(10) $4(a + 6)(a + 6)$ (11) $5(y + 4)(y + 4)$ (12) $3(s - 8t)(s - st)$
(13) $(3at + 7s)(3at + 7s)$ (14) $(2a^2 - 3)(2a^2 - 3)$ (15) $2(5pq - 7r)(5pq - 7r)$

مشق 8.10

(1) $(b + c)(b - c)$ (2) $(a + 6)(a - 6)$ (3) $(a + 7)(a - 7)$
(4) $(5 + y)(5 - y)$ (5) $(2x + 3)(2x - 3)$ (6) $(3x + 4y)(3x - 4y)$
(7) $6(x + 2)(x - 2)$ (8) $2(10 + 3z)(10 - 3z)$ (9) $(9a + 11b)(9a - 11b)$
(10) $(ac + 4cd)(ac - 4cd)$ (11) $(6 + 3a - 2b)(6 - 3a + 2b)$
(12) $(2x + 3y + 10z)(2x + 3y\ 10z)$ (13) $(8b + 6b + d)(8b - 6b - d)$
(14) $-3b(6a - 5b)$ (15) $-13b(8a - 29b)$ (16) $(22p - 8q)(8p - 22q)$
(17) $18(5c - d)(-c + 5d)$ (18) $31(4m - 4n + 5p - 5q)(4m - 4n - 5p + 5q)$

مشق 8.11

I. (1) $(x + 1)(5x + 4)$ (2) $(x + y)(a + b)$ (3) $(b + c^2)(b + 4)$
(4) $(p - 6q)(p - q)$ (5) $(a + b^2)(a + 5)$ (6) $(7x + py)(x + 1)$
(7) $2(cd - d)(c + 2d)$ (8) $2(y + 2)(y - 5)$ (9) $(xy - 1)(xy + 5)$
(10) $(p - q)(p - 1)$

II. (1) $(x + 2)(x + 4)$ (2) $(y + 2)(y + 6)$ (3) $(a + 2)(a + 5)$
(4) $(c + 1)(c + 6)$ (5) $(d + 1)(d + 5)$ (6) $(p - 1)(p - 3)$
(7) $(r + 4)(r + 3)$ (8) $(a - 2)(a + 5)$ (9) $(m + 2)(m - 7)$
(10) $(x + 3)(x + 7)$ (11) $(y - 2)(y + 9)$ (12) $(x + 3)(x + 7)$

جائزہ مشق 8

2. (i) $a^2 + 2ab + b^2$ (ii) $a^2 - 2ab + b^2$ (iii) $x^2 + (a + b)x + b^2$
(iv) حروفِ تہجی (v) (Literals) عددی حروف (vi) یک رقمی

جوابات

3. (i) b (ii) c (iii) c (iv) a (v) a

4. (i) $2x^2+4y^2+z^2$ (ii) $-2x^2-3z^2$ (iii) $4x^2-2y^2-3z^2$
(iv) $6y^2+7z^2$ (v) $2x^2+3z$ (vi) $-4x^2+2y^2+3z^2$

5. (i) x^2-4y^2 (ii) $12x^3+4x^2$ (iii) $2x^2+2y^2$
(iv) $2a^3b^3-3a^2b^4$ (v) a^4-b^4 (vi) $a^4-a^3+a^2-2a-1$
(vii) 0 (viii) 0

6. (i) $9x^2+x-20$ (ii) $4a^2-20ab+25b^2$ (iii) $9x^4+24x^2y^2+16y^4$
(iv) $(3x)^2-(5y)^2$

7. (i) $10a^2(1-20a^2b)$ (ii) $9xyz(4x^2y^2z^2-3x^3y-7z^3)$
(iv) $(a^2+11)(x-16)$ (v) $(ab+c)(x^2+xy+z^2)$

8. (i) $(a-13)(a-13)$ (ii) $(1-3x^2y^2z)(1-3x^2y^2z)$ (iii) $7a(b+7)(b-7)$
(iii) $3xy(5x^3+7x^2y-9xy-11y)^3$ (iv) $3(5+x-y)(5-x+y)$ (v) $(11x+3y)(3x+11y)$
(vi) $\left(\frac{3}{4}a+\frac{2}{3}b\right)\left(\frac{3}{4}a+\frac{2}{3}b\right)$ (vii) $\left(\frac{a}{b}l-\frac{c}{d}m\right)\left(\frac{a}{b}l-\frac{c}{d}m\right)$
(viii) $\left(a-\frac{9}{5}+\frac{6}{5}m\right)\left(a-\frac{9}{5}-\frac{6}{5}m\right)$

مشق 9.1

A. (1) $x=4$ (2) $x=5$ (3) $x=\frac{3}{5}$ (4) $x=-4$ (5) $x=3$ (6) $x=2$
(7) $x=2$ (8) $x=-1$ (9) $x=\frac{2}{3}$

B. (1) $x=4$ (2) $x=-\frac{2}{3}$ (3) $x=6\frac{2}{3}$ (4) $x=-1$ (5) $x=2$

C. (1) $x=3$ (2) $x=9$ (3) $x=\frac{8}{15}$ (4) $x=4$ (5) $x=1\frac{1}{6}$ (6) $x=1$

D. (1) $x=6$ (2) $x=12$ (3) $x=12$ (4) $x=4\frac{2}{13}$ (5) $x=\frac{7}{11}$ (6) $x=3$
(7) $x=\frac{7}{10}$ (8) $x=-2\frac{5}{6}$

مشق 9.2

(1) $x=3$ (2) $x=7$ (3) $x=4$ (4) $x=10$ (5) $x=6^{1/3}$ (6) $x=5$
(7) $x=-1\frac{1}{2}$ (8) $x=-27$ (9) $x=\frac{1}{25}$ (10) $x=-11$ (11) $x=2$ (12) $x=-5$

مشق 9.3

(1) اُس نے 30 روپے ادا کیے۔ (2) 5 روپے (3) 15 میٹر اور 5 16 میٹر
(4) $m\overline{AB}=2$ سینٹی میٹر، $m\overline{BC}=3$ سینٹی میٹر، $m\overline{AC}=6$ سینٹی میٹر (5) 8 سینٹی میٹر
(6) اصغر کے پاس 160 روپے اور حسین کے پاس 640 روپے ہیں۔ (7) ہاں (8) 21 اور 22 اعداد ہیں۔
(9) 15، 16 اور 17 مطلوبہ طاق اعداد ہیں۔ (10) 24 (11) 4 اور 5 مطلوبہ اعداد ہیں۔
(12) 27، 29، 31 اور 33

جوابات

جائزہ مشق 9

1. (i) $x + (x+2) = 42$ (ii) $x + (x+2) = 21$ (iii) $x + (x+1) + (x+2) + (x+3 = 46$

.4 (i) ایک متغیر (ii) (iii) (iv) قیمت

5. (i) (الف) (ii) (د) (iii) (الف) (iv) (ب)

6. (i) $x = 12$ (ii) $x = 19$ (iii) $x = 3$ (iv) $x = 9$
(v) $x = 5$ (vi) $x = -12$

.7 لمبائی= 35 سینٹی میٹر اور چوڑائی= 25 سینٹی میٹر ہے۔

مشق 10.1

1. (i) $(\angle POS, \angle SOR)$ (ii) $(\angle SOR, \angle QOR)$ (iii) $(\angle POR, \angle QOR)$ (iv) $\angle POS, \angle QOS$
2. $(\angle BOD, \angle AOD), (\angle AOC, \angle BOC)$ 3. $m\angle PON = 80^\circ$
4. $(49^\circ, 41^\circ), (62^\circ, 28^\circ), (54^\circ, 36^\circ), (36^\circ, 54^\circ), (67^\circ, 23^\circ), (81^\circ, 9^\circ), (15^\circ, 75^\circ)$
5. $(80^\circ, 100^\circ), (132^\circ, 48^\circ), (49^\circ, 131^\circ), (76^\circ, 104^\circ), (125^\circ, 55^\circ), (103^\circ, 77^\circ), (68^\circ, 112^\circ)$
6. $(m\angle AOP = m\angle COD = 55^\circ), (m\angle AOC = m\angle POD = 125^\circ)$
7. (i) $m\angle ACB = 55^\circ, m\angle BAC = 25^\circ$
(ii) $m\angle PRQ = 38^\circ, m\angle PQR = 80^\circ$ $m\angle PRT = 142^\circ = m\angle QRS$

.8 (i) 45° (ii) 90° (iii) منفرجہ (iv) قائمہ (v) حادہ (vi) قائمہ

مشق 10.2

.1 ایک جیسی اشکال
(ii), (v), (vi)

متماثل اشکال
(i), (iii), (iv), (vii)
(viii), (ix), (x)

.3 (i) شکل P اور شکل R یکساں شکل رکھتے ہیں۔ (ii) شکل P اور شکل R متماثل نہیں ہیں۔
(iii) شکل P اور شکل R یکساں جسامت نہیں رکھتے ہیں۔ (iv) شکل P اور شکل R ایک جیسی ہیں۔ (v) شکل P اور شکل Q متماثل ہیں۔

.4 (i) درست (ii) غلط
(iii) نہیں، یہ متماثل نہیں ہیں کیونکہ ان کی اشکال ایک جیسی ہیں لیکن جسامت یکساں نہیں ہے۔
(iv) ہاں، یہ متماثل نہیں ہیں کیونکہ ان کی صرف اشکال ایک جیسی ہیں لیکن جسامت یکساں نہیں ہے۔ (v) ہاں

مشق 10.3

.1 (iv) یکساں اشکال، یکساں جسامت (متماثل) (v) یکساں اشکال لیکن جسامت یکساں نہیں۔ (ایک جیسی)
(vi) یکساں اشکال، یکساں جسامت (متماثل) (vii) یکساں اشکال، یکساں جسامت (متماثل)
(viii) نہ یکساں اشکال اور نہ ہی یکساں جسامت (نہ ہی ایک جیسی اور نہ ہی متماثل)
(ix) نہ یکساں اشکال اور نہ ہی یکساں جسامت (نہ ہی ایک جیسی اور نہ ہی متماثل)

2. $(\overline{AB} \cong \overline{XY}), (\overline{DE} \cong \overline{XZ}), (\overline{MN} \cong \overline{CD}), (\overline{YZ} \cong \overline{GH}), (\overline{RS} \cong \overline{PQ}), (\overline{YZ} \cong \overline{EF})$
3. $(\angle ABC \cong \angle PRQ), (\angle XYZ \cong \angle MNS), (\angle COD \cong \angle PQR), (\angle AOB \cong \angle DEF)$

.4 (i) $m\angle DEF = 100^\circ$ (ii) $\angle PQR \cong \angle XYZ$ (iii) متماثل (iv) برابر (v) رداس

5. (i) $x = 15, y = 4$ (ii) $y = 12, x = 7$ (iii) $x = 6, y = 8$

مفت تقسیم کے لیے

جوابات

مشق 10.4

(1) $\overline{AP} \cong \overline{BP}$
$\overline{CP} \cong \overline{BP}$
$\angle APC \cong \angle BPD$
SAS ≅ SAS

(2) $\overline{PO} \cong \overline{MO}$
$\overline{QO} \cong \overline{NO}$
$m\angle PQO = m\angle MNO = 90^\circ$
HS ≅ HS

(3) $\angle PRQ \cong \angle PSQ$
$\angle PQR \cong \angle PQS$
$\overline{RQ} \cong \overline{SQ}$
ASA ≅ ASA

(4) $\overline{PQ} \cong \overline{SR}$
$\overline{QR} \cong \overline{PS}$
$\overline{PR} \cong \overline{PR}$
SSS ≅ SSS

(5) $\angle ABC \cong \angle EDC$
$\overline{BC} \cong \overline{DC}$
$\angle ACB = m\angle DCE$
ASA ≅ ASA

(6) $\overline{AC} \cong \overline{DC}$
$\angle ACB \cong \angle DCE$
$\overline{BC} \cong \overline{EC}$
SAS ≅ SAS

(7) $\overline{PQ} \cong \overline{PO}$
$\overline{QR} \cong \overline{OR}$
$\overline{PR} \cong \overline{PR}$
SSS ≅ SSS

(8) $\angle ABD \cong \angle CDB$
$\overline{BD} \cong \overline{BD}$
$\angle ADB = m\angle DBC$
ASA ≅ ASA

(9) $\overline{PO} \cong \overline{SO}$
$\angle PQO \cong \angle SRO$
$\overline{QO} \cong \overline{RO}$
HS ≅ HS

(10) $\overline{CE} \cong \overline{FD}$
$\angle CDE = m\angle FED$
$\overline{CD} \cong \overline{FE}$
HS ≅ HS

مشق 10.5

(1) وتر (2) رداس (3) رداسی قطعہ (4) مرکز (5) قطر
(6) مرکز، دگنا (7) قطر (8) لامتناہی، برابر (9) نصف (10) لامتناہی، برابر

جائزہ مشق 10

7. (1) $\overline{AB} \cong \overline{DC}$
$\overline{BC} \cong \overline{AD}$
$\overline{AC} \cong \overline{AC}$
SSS ≅ SSS

(2) $\overline{AB} \cong \overline{DC}$
$\angle BAC = m\angle ACD$
$\overline{AC} \cong \overline{AC}$
SAS ≅ SAS

(3) $\angle BAC \cong \angle ACD$
$\overline{AC} \cong \overline{AC}$
$\angle BCA \cong \angle DAC$
ASA ≅ ASA

12. (i) متصلہ زاویے (ii) کمپلیمنٹری زاویے (iii) شکل، یکساں (iv) راسی، برابر (v) وتر، وتر، متماثل
یکساں شکل

جائزہ مشق 11

A. (viii) ہاں، مربع ایک مستطیل ہوتا ہے، مربع ایک متوازی الاضلاع ہوتا ہے، مربع ایک معین ہوتا ہے۔

C. (1) مثلث (2) 67° (3) مستطیل (4) (الف) (5) (د)
(6) (د) (7) (ب) (8) (الف)

جوابات

مشق 12.1

A. (1) 88 cm (2) 110 cm (3) 132 mm (4) 176 mm

B. (1) 66 cm (2) 176 cm (3) 242 cm (4) 308 cm
(5) 374 cm (6) 396 cm (7) 506 cm (8) 484 cm

C. (1) 3.5 cm (2) 10.5 cm (3) 14 cm (4) 17.5 cm
(5) 21 cm (6) 28 cm (7) 35 cm (8) 31.5 cm

D. (1) 14 cm (2) 49 cm (3) 77 mm (4) 84 mm
(5) 15.4 mm (6) 9.8 cm (7) 16.8 cm (8) 12.6 cm

E. (1) 8.8 cm (2) 132 mm (3) 220 mm (4) 417.6 cm (5) 264 mm

F. (1) 66 cm (2) 176 cm (3) 4.4 m

مشق 12.2

A. (1) 616 sq cm (2) 346.55q cm (3) 1,386 sq cm (4) 962.5 sq mm
(5) 3,850 sq mm (6) 1,886.5 sq cm (7) 16,022.16 cm (8) 4,658.5 sq cm

B. (1) 7 mm (2) 28 cm (3) 49 mm (4) 42 mm
(5) 1.4 mm (6) 17.5 cm (7) 3.5 m (8) 4.9 mm
(9) 2.1 m

C. (1) 346.5 sq cm (2) 616 sq cm (3) 1,336 sq cm (4) 2462 sq cm
(5) 55.44 sq cm (6) 75.46 sq cm (7) 98.568 sq cm (8) 124.74 sq cm

D. (1) 14 cm (2) 42 mm (3) 70 mm (4) 112 mm
(5) 12.6 cm (6) 15.4 cm (7) 16.8 cm (8) 18.2 cm

مشق 12.3

A. (1) 3,520 sq cm (2) 1,760 sq cm (3) 6,600 sq cm (4) 4,400 sq cm
(5) 13,200 sq cm (6) 10,450 sq cm

B. (1) 19.5 cm (2) 22.5 cm (3) 44 mm (4) 27 cm (5) 32 cm

C. (1) r = 8 cm, h = 20 cm (2) r = 15 cm, h = 20 cm
(iii) r = 19 cm, h = 30 cm (4) r = 19.5 cm, h = 36.5 cm

مشق 12.4

A. (1) 12,320 cm^3 (2) 68,750 cm^3 (3) 98,560 cm^3 (4) 35,200 cm^3
(5) 8.6625 m^3 (6) 956,455.5 cm^3 (7) 192,500 mm^3 (8) 178,200 mm^3

B. (1) 25 cm (2) 28 cm (3) 42 mm (4) 210 mm (5) 35 mm

C. (1) 21 cm (2) 14 cm (3) 20 cm (4) 30 cm (5) 40 mm (6) 17.7 mm

مشق 12.5

(1) 11,000 روپے (2) 14 سینٹی میٹر (3) 264,000 میٹر یا 264 کلومیٹر (4) 31.5 سینٹی میٹر

(5) 1.8 میٹر (6) رقبہ = 616 مربع میٹر، قیمت = 12,320 روپے

(7) رقبہ = 3696 مربع میٹر، قیمت = 369,600 روپے (8) رقبہ= 6.16 مربع میٹر، قیمت= 616 روپے

(9) رقبہ= 38.5 مربع میٹر، قیمت= 2,887.50 روپے (10) رقبہ= 0.625 مربع میٹر، قیمت= 770 روپے

مشق 12.6

(1) رقبہ = 874.5 مربع میٹر، قیمت = 43,725 روپے (2) رقبہ = 677.6 مربع میٹر، قیمت = 67,760 روپے

(3) رقبہ= 50.16 مربع میٹر، قیمت = 15.048 روپے (4) رقبہ = 1.232 مربع میٹر

(5) رقبہ 4.07 مربع میٹر (6) حجم = 69,300,000 مکعب سینٹی میٹر، گنجائش = 69,300 لٹر

جوابات

(7) حجم = 123,750 مکعب سینٹی میٹر، گنجائش = 123.75 لٹر (8) حجم = 616 مکعب سینٹی میٹر

(9) حجم = 404.25 مکعب سینٹی میٹر، گنجائش = 0.40425 لٹر = 0.4 لٹر (تقریباً)

(10) حجم = 231 مکعب سینٹی میٹر، قیمت = 57,750 روپے (11) رداس = r = 1 میٹر

(12) حجم = 3,850,000 مکعب سینٹی میٹر، بلندی = 2.5 میٹر

(13) رقبہ (منحنی سطح دیوار) = 770 مربع میٹر، قیمت = 154,000 روپے

(14) رقبہ (قاعدہ) = 1386 مربع میٹر، رقبہ (منحنی سطح-دیوار) = 660 مربع میٹر

کل رقبہ = 2046 مربع میٹر، قیمت = 204,600 روپے

جائزہ مشق 12

A. **(8)** $v = \pi r^3$

B. **(1)** $2\pi rh$ **(2)** سلنڈر **(3)** سلنڈر **(4)** مکعب میٹر **(5)** 3.142

C.

1.	(i)	**2.**	(i)	**3.**	(ii)	**4.**	(ii)	**5.**	(iii)
6.	(iv)	**7.**	(ii)	**8.**	(iii)	**9.**	(i)	**10.**	(iii)

مشق 13.1

(1)

گروہ	پیریڈ یا جماعتی وقفہ	ٹیلی نشانات	تعدد
پہلا 1st	21 – 22	II	2
دوسرا 2nd	23 – 24	I	1
تیسرا 3rd	25 – 26	I	1
چوتھا 4th	27 – 28	II	2
پانچواں 5th	29 – 30	I	1

(2)

گروہ	پیریڈ یا جماعتی وقفہ	ٹیلی نشانات	تعدد
پہلا 1st	3001 – 4000	I	1
دوسرا 2nd	4001 – 5000	II	2
تیسرا 3rd	5001 – 6000	IIII	4
چوتھا 4th	6001 – 7000	III	3
پانچواں 5th	7001 – 8000	II	2

(3)

گروہ	پیریڈ یا جماعتی وقفہ	ٹیلی نشانات	تعدد
پہلا	551 – 650	~~IIII~~ I	6
دوسرا	651 – 750	~~IIII~~ IIII	9
تیسرا	751 – 850	~~IIII~~	5

مفت تقسیم کے لیے

جوابات

(4)

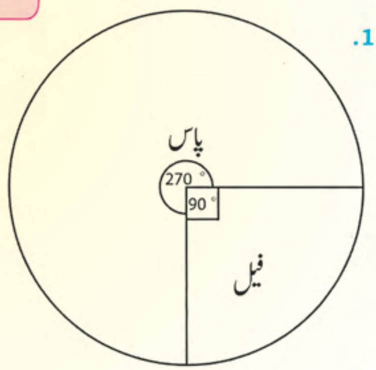
گروہ	پیریڈ یا جماعتی وقفہ	ٹیلی نشانات	تعداد
پہلا 1st	100 – 120	卌	5
دوسرا 2nd	121 – 140	卌 III	8
تیسرا 3rd	141 – 160	卌 III	8
چوتھا 4th	161 – 180	卌 I	6
پانچواں 5th	181 – 200	III	3

(5)

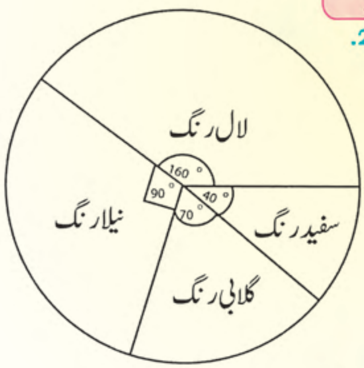
گروہ	پیریڈ یا جماعتی وقفہ	ٹیلی نشانات	تعداد
پہلا 1st	10 – 17	卌 I	6
دوسرا 2nd	18 – 25	IIII	4
تیسرا 3rd	26 – 33	IIII	4
چوتھا 4th	34 – 41	卌 II	7
پانچواں 5th	42 – 50	卌 IIII	9

مشق 13.2

.1



.2



.3

.4

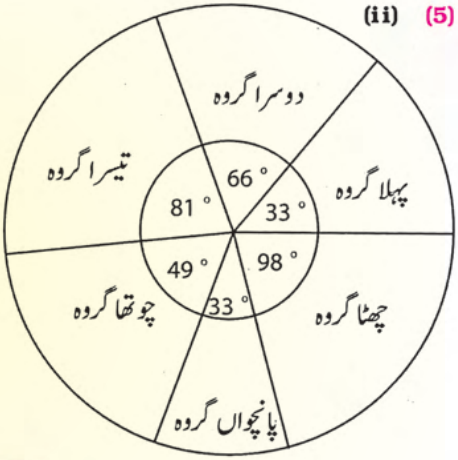
مفت تقسیم کے لیے

جوابات

(5) (i)

گروہ	پیریڈ یا جماعتی وقفہ	ٹیلی نشانات	تعداد
پہلا 1st	9 – 22	II	2
دوسرا 2nd	23 – 36	IIII	4
تیسرا 3rd	37 – 50	~~IIII~~	5
چوتھا 4th	51 – 64	III	3
پانچواں 5th	65 – 78	II	2
چھٹا 6th	79 – 92	~~IIII~~ I	6

(5) (ii)



.6 **(i)** مرغی (چکن) = 90 طلبہ
(ii) سبزیاں = 20 طلبہ
(iii) نوڈلز = 25 طلبہ

پسندیدہ غذا	تعداد	زاویہ
مرغی (چکن)		
(پسنے والی) نوڈلز	25	50°
سبزیاں	20	40°
مچھلی اور چپس	45	90°
کل	180	360°

جائزہ مشق 13

.1 **(i)** مواد **(ii)** تعدد **(iii)** خام **(iv)** زیریں جماعتی حد **(v)** جماعتی جدول
(vi) پیشکش **(vii)** ٹیلی **(viii)** بالائی جماعتی حد **(ix)** جسامت یا لمبائی **(x)** پائی گراف

.2 **(i)** (الف) **(ii)** (ب) **(iii)** (ج) **(iv)** (د)

.3

گروہ	پیریڈ یا جماعتی وقفہ	ٹیلی نشانات	تعداد
پہلا 1st	1 – 10	~~IIII~~ II	7
دوسرا 2nd	11 – 20	~~IIII~~	11
تیسرا 3rd	21 – 30	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
چوتھا 4th	31 – 40	~~IIII~~ IIII	9
پانچواں 5th	41 – 50	III	3