مفت ورهاست لاءِ

آزمائشي ڇاپو

درسي ڪتاب

رياضي

9 درجي لاءِ

سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ، ڄام شورو

ڇپيندڙ: پيراماؤنٽ پرنٽنگ پريس، ڪراچي

مفت ورهاست لاءِ

ايسوسيئيشن فار اڪيڊمڪ ڪوالٽي (آفاق) پاران **سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ ڄامشورو** لاءِ تيار ڪيو.

ڊائريڪٽوريٽ آف ڪريڪيولم ۽ ريسرچ سنڌ ڄامشورو جي صوبائي ريويو ڪميٽي پاران نظرثاني ڪيل. **بورڊ آف انٽرميڊيئيٽ اينڊ سيڪنڊري ايجوڪيشن، حيدرآباد، ڪراچي، سکر، لاڙڪاڻو، ميرپورخاص ۽ شهيد بينظيرآباد** پاران سيڪنڊري ڪلاسن لاءِ درسي ڪتاب طور منظور ٿيل.

اسڪول ايجوڪيشن اينڊ لٽريسي ڊپارٽمينٽ حڪومت سنڌ کان

نوٽيفڪيشن نمبر No.SO(C)SELD/STBB-18/2021 موجب منظور شده.

نگران اعلىٰ

عبدالعليم لاشاري

چيئرمين سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ

شاهد وارثي

مئنيجنگ ڊائريڪٽر

ايسوسيئيشن فار اڪيڊمڪ ڪوالٽي (آفاق)

خواجه آصف مشتاق

پروجيڪٽ ڊائريڪٽر

ايسوسيئيشن فار اڪيڊمڪ ڪوالٽي (آفاق)

رفيع مصطفىٰ

پروجيڪٽ مئنيجر

ايسوسيئيشن فار اڪيڊمڪ ڪوالٽي (آفاق)

داريوش ڪافي

سپروائيزر

سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ

يوسف احمد شيخ

چيف سپروائيزر

سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ

ليکڪ:

- ☆ مسٽر آفتاب علي
- ☆ مسٽر سيد آفاق احمد
- ☆ پروفيسر محمد فاروق خان
- ☆ مسٽر اويس سراج
- ☆ مس اقرا مغل
- ☆ مسٽر عمر خان

نظرثاني:

- ☆ مسٽر عبدل سليم ميمڻ
- ☆ مسٽر محمد صغير شيخ
- ☆ مسٽر محمد وسيم
- ☆ مسٽر افضل احمد
- ☆ پروفيسر محمد فاروق خان
- ☆ مسٽر اعجاز علي سبهپوٽو
- ☆ مسٽر نذير احمد ميمڻ
- ☆ مسٽر محمد ياسر انصاري
- ☆ مسٽر آفتاب علي

سنڌيڪار

- ☆ مسٽر نذير احمد ميمڻ
- ☆ مسز خالدا ميمڻ
- ☆ سيد منير احمد شاه

ايڊيٽر

- ☆ مسٽر مير سرفراز خليل ساند

ڪنسلٽنٽ:

- ☆ ڪامران لطيف لغاري، اي ايس ايس
- ☆ مير سرفراز خليل ساند: جي ايس ايس

ٽيڪنيڪي معاون

- ☆ مسٽرمحمد ارسلان شفاعت گدي

ڇپيندڙ: هي ڪتاب پيرامائونٽ پرنٽنگ پريس، ڪراچي ۾ ڇپيو.

مهاڳ

سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ هڪ اهڙو تعليمي ادارو آهي، جنهن جو ڪم درسي ڪتابن جي تياري ۽ اشاعت ڪرڻ آهي. هن جو اهم مقصد اهڙن درسي ڪتابن جي تياري ۽ فراهمي آهي، جيڪي نئين نسل کي جاڻ ، هنر سان گڏوگڏ منجهن اهڙي صلاحيت پيدا ڪن، جنهن جي ذريعي اهي آفاقي نظرين، پائيچاري، بزرگن جي ڪارنامن، پنهنجي ثقافتي ورثي، روايت جي حفاظت ڪندي، نئين دور جي سائنسي، ٽيڪنيڪي ۽ سماجي تقاضائن کي پورو ڪري ڪامياب زندگي گذاري سگهن.

نون ڇاپن ۾، تعارفي مضمون معلوماتي باڪس، خلاصا ۽ مختلف وسيع مشق کي شامل ڪيو ويو آهي. جيڪو آئون سمجهان ٿو نه صرف دلچسپي پيدا ڪندا پر تمام گهڻي حد تائين ڪتاب فائديمند ثابت ٿيندو.

سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ هن ڪتاب جي اشاعت لاءِ تمام تر تڪليفن محدود وسائل جي باوجود ڪتاب تي خاصو خرچ ڪيو آهي.

ڪوبه ڪتاب يقيناً حرف آخر نه هوندو آهي، ۽ ان ۾ هر وقت بهتري جي گنجائش هوندي آهي، جڏهن ته ليکڪت، پنهجي پوري صلاحيتن کي استعمال ڪندي مڪمل تصورن ۽ وضاحتن کي چٽي نموني پيش ڪيو آهي. هن ۾ اجا به ڪيتريون ئي خاميون ٿي سگهن ٿيون تنهن لاءِ ماهر استادن ۽ شاگردن کي عرض رکجي ٿو ته اٽپوري لڪائي، يا اٽپورين شڪلين بابت نشاندهي ڪن ۽ پنهنجيون تجويزون ۽ رايا ڏين ته جيئن ڪتابن کي ايندڙ ڇاپي ۾ سڌاريو وڃي.
آخر ۾ آئون ائسوسيئيشن فار اڪيبڊمڪ ڪوالٽي (آفاق)، اسان جي ماهر ليکڪن، ايڊيٽرن ۽ بورڊ جي ماهر عملي جو سنڌن تعليم جي لاءِ اڻ ٿڪ محنت ۽ ڪوشش لاءِ شڪر گذار آهيان.

چيئرمين
سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ، ڄامشورو

مفت ورهاست لاءِ

بِسۡمِ اللّٰهِ الرَّحۡمٰنِ الرَّحِيۡمِ

فهرست

مفت ورهاست لاءِ

يونٽ 1

حقيقي ۽ منجهيل عدد

Real and Complex Numbers

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

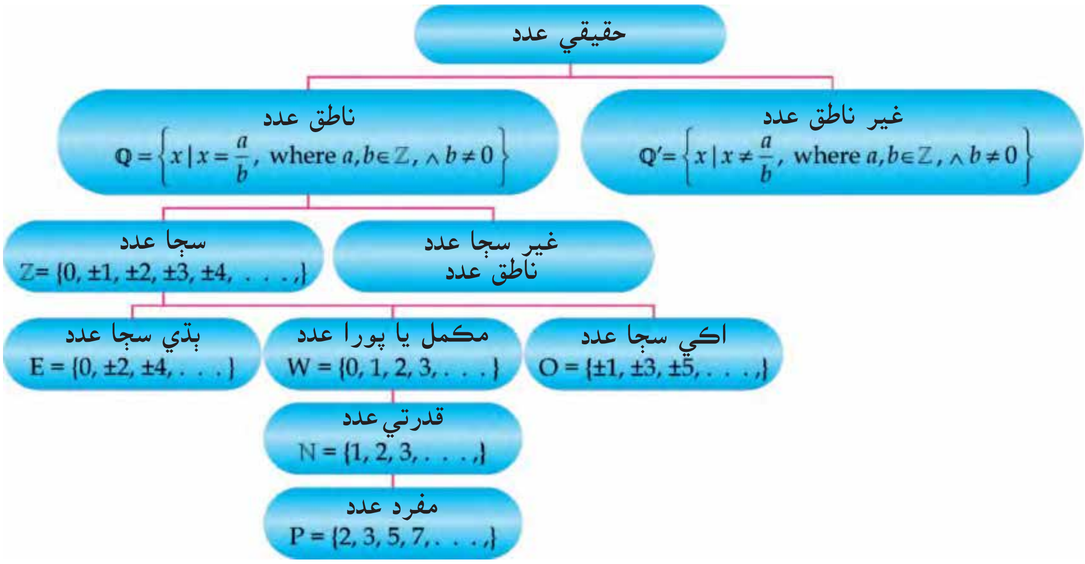
- ناطق ۽ غير ناطق عددن جي ميلاپ واري سيٽ کي حقيقي عددن جي سيٽ طور ياد ڪندا.
- حقيقي عددن کي عددي ليڪ تي ظاهر ڪندا.
- ختم ٿيندڙ، نہ ختم ٿيندڙ ورجندڙ ڏهائي عددن کي عددي ليڪ تي ڏيکاريندا.
- ناطق ۽ غير ناطق عددن جي ڏهائي واري سجاٽپ ۾ فرق ڪندا.
- حقيقي عددن جي خاصيتن جي ڄاڻ حاصل ڪندا.
- مول ۽ مولن جي پايي جي سجاٽپ ڪري سگهندا.
- مول ۽ سگهہ نما، صورت جي اظهار ۾ فرق ڪري سگهندا.
- مولي صورت واري اظهار کي سگهہ نما اظهار ۾ بدلائي سگهندا ۽ ان جي برعڪس پڻ.
- بنياد، سگهہ ۽ سگهہ جي ملهہ کي پڻ وري دهرائيندا.
- سگهن جا قاعدا استعمال ڪري حقيقي سگهہ نما اظهارن کي سادي صورت ۾ آڻي سگهندا.
- وضاحت سان منجهيل عددن (Complex numbers) z جي اظهار جي صورت ۾ وصف بيان ڪندا جيئن (a, b) يا $z = a + ib$، جڏهن تہ a حقيقي ۽ b تصوراتي حصو آهي ۽ هتي $i = \sqrt{-1}$ آهي.
- $z = (a, b)$ يا $z = a + ib$ ۾ a کي حقيقي ۽ b کي تصوراتي حصي طور سجاٽپ ڪندا.
- منجهيل عدد (Complex number) جي گردان (Conjugate) جي تعريف ڪري سگهندا.

$$\bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib = (a, -b)$$

- منجهيل عددن (Complex Numbers) جي برابري واري صورت بابت ڄاڻ
- منجهيل عددن (Complex numbers) جي بنيادي نشانيون (جوڙ، ڪٽ، ضرب ۽ ونڊ) جو استعمال ڪري سگهندا.

تعارف:

گذريل ڪلاسن ۾ اسان عددن جا ڪيترائي قسم سکي آيا آهيون، جهڙوڪ قدرتي عدد(عددن جي گروپ) سجا عدد، مڪمل يا پورا عدد، ناطق عدد وغيره. هي سيئي عَدَدَ حقيقي عددن جي سيٽ ۾ شامل آهن. ان ڪري حقيقي عددن جي درجا بندي هيٺ ڏجي ٿي.



1.1 حقيقي عدد

1.1.1 ناطق ۽ غير ناطق عددن جي ميلاپ واري سيٽ کي حقيقي عددن جي سيٽ طور ياد ڪندا.

حقيقي عددن جو سيٽ ناطق ۽ غير ناطق عددن جو ميلاپ آهي يعني $\mathbb{R} = Q \cup Q'$ اسان اڳيئي ناطق ۽ غيرناطق عددن بابت سکي چڪا آهيون. حقيقي عددن جون ڪيتريون ئي خاصيتون آهن جيئين توهان ناطق عددن جون خاصيتون سکيون آهن.

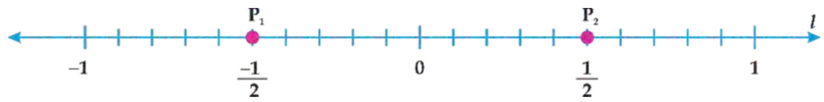
1.1.2 حقيقي عددن کي عددي ليڪ تي ظاهر ڪرڻ

گذريل ڪلاسن ۾ اسان پورن عددن، سجن عددن ۽ انهن کي عددي ليڪ تي ظاهر ڪرڻ جو مطالعو ڪري آيا آهيون.ساڳي طرح اسين حقيقي عددن کي به عددي ليڪ تي ظاهر ڪري سگهون ٿا.

اچو ته هيٺيان مثال ڏسون:

مثال 01 $\frac{1}{2}$ ۽ $-\frac{1}{2}$ کي عددي ليڪ l تي ظاهر ڪريو.

حل:



اهڙي طرح مٿئين شڪل ۾ ٽپڪو P_1 $-\frac{1}{2}$ ۽ P_2 $\frac{1}{2}$ کي ظاهر ڪري ٿو.

مثال 02 -1.5 ۽ $1\frac{1}{5}$ کي عددي ليڪ تي ظاهر ڪريو.

حل:

ساڳي طرح سان مٿئين شڪل ۾ نقطو P_1 ظاهر ڪري ٿو -1.5 کي ۽ P_2 ظاهر ڪري ٿو $1\frac{1}{5}$ کي.

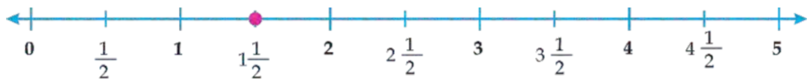
1.1.3 ختم ٿيندڙ ۽ نہ ختم ٿيندڙ، ورجندڙ ڏهائي واري عدد کي عددي ليڪ تي ڏيکارڻ.

ڪنهن بہ ختم ٿيندڙ، نہ ختم ٿيندڙ ورجندڙ ڏهائي واري عدد کي، عددي ليڪ تي ظاهر ڪرڻ لاءِ، جيئن تہ سيئي نقطا ناطق عدد $\frac{a}{b}$ سان لاڳاپيل آهن. جنهن ۾ a, b واڌو سچا عدد آهن، اسان هر هڪ ايڪي ڊيگهہ کي b هڪجيترن حصن ۾ ورهائيندا سين پوءِ a^{th} نقطو ورهاست جو اصل (Origin) جي ساڄي طرف $\frac{a}{b}$ کي ظاهر ڪندو ۽ کابي طرف $-\frac{a}{b}$ کي ظاهر ڪندو.

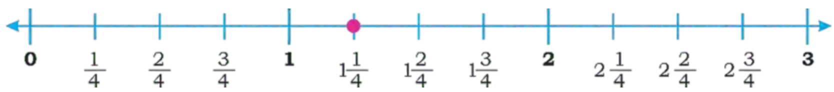
مثال 01 هيٺيان ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور عددي ليڪ تي ظاهر ڪريو.

i. $\frac{3}{2}$ ii. $\frac{5}{4}$

i. $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$



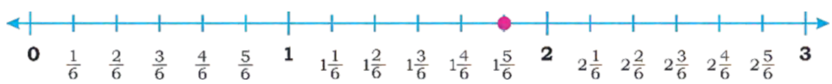
ii. $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$



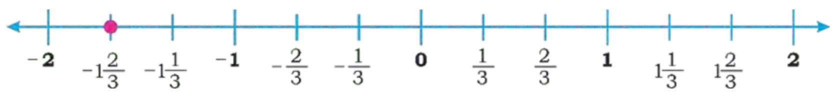
مثال 02 هيٺيان نہ ختم ٿيندڙ ورجندڙ ڏهائي اٽپور عددي ليڪ تي ظاهر ڪريو.

i. $\frac{11}{6}$ ii. $-\frac{5}{3}$

i. $\frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$



iii. $-\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3}$



1.1.4 ناطق ۽ غير ناطق عددن جي ڏهائي واري سجاڳپ ۾ فرق ڪندا

جڏهن اسين ناطق عدد ڪي ڏهائي جي صورت ۾ ظاهر ڪندا آهيون تہ ٻن قسمن جا ڏهائي اٽڪور ممڪن آهن جن ۾ ختم ٿيندڙ ۽ نہ ختم ٿيندڙ ورجندڙ ڏهائي اٽڪور آهن جڏهن تہ غيرناطق عدد، نہ ختم ٿيندڙ نہ ورجندڙ ڏهائي اٽڪور جي صورت ۾ ظاهر ڪبا آهن. اسان انهن کي هيٺ جدول ۾ ظاهر ڪريون ٿا.

نمبرشمار	عدد	بيان ڪرڻ
1.	$\frac{1}{2} = 0.5$	ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽڪور
2.	$\frac{1}{4} = 0.25$	ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽڪور
3.	$\frac{1}{3} = 0.333...$	نہ ختم ٿيندڙ ورجندڙ ڏهائي اٽڪور
4.	$\frac{9}{11} = 0.818181...$	نہ ختم ٿيندڙ ورجندڙ ڏهائي اٽڪور
5.	$\sqrt{2} = 1.414213...$	نہ ختم ٿيندڙ نہ ورجندڙ ڏهائي اٽڪور
6.	$\sqrt{3} = 1.73205...$	نہ ختم ٿيندڙ نہ ورجندڙ ڏهائي اٽڪور

مشق 1.1

1. هيٺين عددن مان ناطق ۽ غيرناطق عددن جي سڃاڻپ ڪريو ۽ هرهڪ کي الڳ ڪالم ۾ لکو.

(i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ (iii) $\frac{5}{\sqrt{6}}$ (iv) $\frac{2}{8}$ (v) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (vi) $\sqrt{8}$

(vii) 0 (viii) π (ix) $\sqrt{5}$ (x) $\frac{22}{3}$ (xi) $\frac{1}{\pi}$ (xii) $\frac{11}{12}$

2. هيٺين کي ڏهائي اٽڪور ۾ تبديل ڪريو. انهن جي ختم ٿيندڙ ۽ نہ ختم ٿيندڙ جي پڻ نشاندهي ڪريو.

(i) $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{4}{18}$ (iii) $\frac{1}{15}$ (iv) $\frac{49}{8}$ (v) $\frac{207}{15}$ (vi) $\frac{50}{76}$

3. هينيان ناطق عددن کي عددي ليڪ تي ظاهر ڪريو.

(i) $\frac{8}{10}$ (ii) $-\frac{8}{10}$ (iii) $1\frac{1}{4}$ (iv) $-1\frac{1}{4}$ (v) $\frac{2}{3}$ (vi) $-\frac{2}{3}$

4. ڇا توهان 1 ۽ 2 جي وچ ۾ سڀني حقيقي عددن جي فهرست ٺاهي سگهو ٿا؟

5. ثابت ڪريو ته (π) هڪ غيرناطق آهي.

6. صحيح بيان تي $(\checkmark)$ ٽڪ جو نشان لڳايو.

(i) $\frac{5}{7}$ غيرناطق عدد جو مثال آهي.

(ii) π هڪ غيرناطق عدد آهي.

(iii) $0.31591...$ نه ختم ٿيندڙ ۽ نه ورجندڙ ڏهائي اٽڪل آهي.

(iv) $0.12\bar{3}$ هڪ ورجندڙ ڏهائي اٽڪل آهي.

(v) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ 0 ۽ 1 جي وچ ۾ هوندا آهن.

(vi) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ناطق عدد جو هڪ مثال آهي.

1.2 حقيقي عددن جون خاصيتون

حقيقي عددن ۾ جوڙ ۽ ضرب جي لحاظ کان خاصيتون موجود آهن. حقيقي عددن لاءِ a,b جي جوڙ اپت $a+b$ ۽ ضرب اپت $a.b$ يا $a \times b$ يا صرف ab آهي.

1.2.1 حقيقي عددن جي خاصيتن جي ڇاڻ رکڻ

(a) جوڙ جي لحاظ کان حقيقي عددن جون خاصيتون

(i) بندش واري خاصيت (Closure property)

ٻن حقيقي عددن جي جوڙ اپت، وري هڪ حقيقي عدد ٿيندو.

$\forall a,b \in \mathbb{R} \Rightarrow a+b \in \mathbb{R}$ جوڙ جي لحاظ کان بندش جي خاصيت آهي.

مثال:

(i) $5,7 \in \mathbb{R} \Rightarrow 5+7=12 \in \mathbb{R}$

(ii) $\frac{4}{5}, \frac{3}{4} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{4}{5}+\frac{3}{4}=\frac{16+15}{20}=\frac{31}{4} \in \mathbb{R}$

(ii) مَٽا سَٽاواري خاصيت (Commutative property)

ڪن ٻـ ٻن حقيقي عددن a ۽ b لاءِ

$$a+b=b+a$$

ڪي جوڙ جي لحاظ ڪان مٽا واري خاصيت چئبو آهي.

مثال: $\sqrt{5}+\sqrt{6}=\sqrt{6}+\sqrt{5}$ (ii) $3+7=7+3$ (i)

(iii) سنگت واري خاصيت (Associative property)

ڪن ٻـ ٽن حقيقي عددن a,b ۽ c لاءِ

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

ڪي جوڙ جي لحاظ ڪان سنگت واري خاصيت چئبو آهي.

مثال: $(4+5)+6=4+(5+6)$

(iv) جوڙ لاءِ ذاتي عنصر (Additive inverse)

هڪ عدد ٻڙي 0 جنهنجو تعلق حقيقي عدد سان آهي $0\in\mathbb{R}$ اهڙي طرح $a+0=a=0+a, \forall a\in\mathbb{R}$

"0" کي جوڙ لاءِ ذاتي عنصر چئبو آهي.

مثال: $3+0=3=0+3, \frac{7}{8}+0=\frac{7}{8}=0+\frac{7}{8},$ وغيره

(v) جمعي ابتڙ (Additive inverse)

هرهڪ حقيقي عدد a لاءِ $-a$ حقيقي عدد موجود آهي اهڙي طرح جو $a+(-a)=0=(-a)+a$

تنهن کري $-a$ ۽ a هڪ ٻئي جا جمعي ابتڙ آهن.

مثال: $6+(-6)=0=(-6)+6=0$

هتي 6 ۽ 6- هڪ ٻئي جا جمعي ابتڙ آهن.

(b) ضرب جي لحاظ ڪان حقيقي عددن جون خاصيتون

(i) بندش واري خاصيت (Closure property)

ڪن ٻـ ٻن حقيقي عددن a ۽ b جي ضرب اپت وري ٻـ هڪ حقيقي عدد آهي.

$a,b\in\mathbb{R} \Rightarrow ab\in\mathbb{R}$ ضرب جي لحاظ ڪان بندش واري خاصيت سڏبو آهي.

مثال: $\frac{3}{5},\frac{6}{7}\in\mathbb{R}\Rightarrow\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right)=\frac{18}{35}\in\mathbb{R}$ (ii) $5,7\in\mathbb{R}\Rightarrow(5)(7)=35\in\mathbb{R}$ (i)

(ii) مَٽا سَٽاواري خاصيت (Commutative property)

ڪن بہ ٻن حقيقي عددن a ۽ b لاءِ

$ab = ba$ کي جوڙ جي لحاظ کان مٽاواري خاصيت چئبو آهي.

مثال: (i) $\sqrt{3}, \sqrt{5}\in\mathbb{R}\Rightarrow(\sqrt{3})(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})(\sqrt{3})$

(ii) $3, 4\in\mathbb{R}\Rightarrow 3\times4 = 4\times3$ etc.

(iii) سنگت واري خاصيت (Associative property)

ڪن بہ ٽن حقيقي عدد b,a ۽ c لاءِ

$(ab)\ c = a\ (bc)$ کي ضرب جي لحاظ کان سنگت واري خاصيت چئبو آهي.

مثال: (i) $4,5,6\in\mathbb{R}$, تہ پوءِ $(4\times5)\times6 = 4\times(5\times6)$,

(ii) $\frac{2}{5}, 4,\sqrt{3}\in\mathbb{R}$, تہ پوءِ $(\frac{2}{5}\times4)\times\sqrt{3}=\frac{2}{5}\times(4\times\sqrt{3})$, وغيره

(iv) ضرب لاءِ ذاتي عنصر (Multiplicative identity)

هر هڪ حقيقي عدد a لاءِ هڪ رڪن 1 موجود آهي جيڪو حقيقي عدد جي سيٽ سان تعلق رکي ٿو $1\in\mathbb{R}$.

$1, a\times1 = 1\times a = a$ کي ضرب لاءِ ذاتي عنصر چئبو آهي.

مثال: $\frac{3}{5}\times1=1\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$, $1\times3 = 3\times1 = 3$ وغيره.

(v) ضربي ابتڙ (Multiplicative inverse)

هر هڪ حقيقي عدد a لاءِ (a غير ٻڙي عدد آهي)، هڪ رڪن $\frac{1}{a}$ يا $a^{-1}\in\mathbb{R}$ موجود آهي جنهن جو تعلق حقيقي عدد سان آهي.

$a\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\times a=1$ تنهنڪري $\frac{1}{a}$ ۽ a هڪٻئي جا ضربي ابتڙ آهن.

مثال: $3\times\frac{1}{3}=1=\frac{1}{3}\times3$

هتي 3 ۽ $\frac{1}{3}$ هڪٻئي جا ضربي ابتڙ آهن.

(c) ضرب جي جوڙ تي ورهائجڻ واري خاصيت
(Distributive property of Multiplication over Addition)

ڪن به ٽن حقيقي عدد a, b, c لاءِ $a(b+c) = ab + ac$ (i)

ان کي ضرب جي جوڙ تي ورهائجڻ واري خاصيت چئبو آهي (کاٻي کان ورهاست واري خاصيت)

$(a+b)c = ac + bc$ (ii)

ان کي ضرب جي جوڙ تي ورهائجڻ واري خاصيت چئبو آهي (ساڄي کان ورهاست واري خاصيت)

مثال: $3(5+7) = 3\times5 + 3\times7$ (کاٻي کان ورهاست واري خاصيت)

$(3+7)2 = 3\times2 + 7\times2$ (ساڄي کان ورهاست واري خاصيت)

نوٽ: $a(b-c) = ab - ac$ ضرب جي ڪٽ تي ورهائجڻ واري خاصيت آهي.

(d) حقيقي عددن جي برابري واريون خاصيتون

هيٺيون حقيقي عددن تي برابر واريون خاصيتون آهن.

(i) عڪسي خاصيت (Reflexive property)

جيڪڏهن $a \in \mathbb{R}$ ته پوءِ $a = a$

(ii) هم شڪلي خاصيت (Symmetric property)

جيڪڏهن a,b حقيقي عدد آهن ته پوءِ $a = b \Leftrightarrow b = a$

(iii) متعدي خاصيت (Transitive property)

جيڪڏهن a,b,c حقيقي عدد آهن ته پوءِ $a = b$ ۽ $b = c \Leftrightarrow a = c$

(iv) جوڙ واري خاصيت (Additive property)

جيڪڏهن a,b,c حقيقي عدد آهن $a = b$ ته پوءِ $a + c = b + c$

(v) ضربي خاصيت (Multiplicative property)

جيڪڏهن a,b,c حقيقي عدد آهن اهڙي طرح جيئن $a = b$ ته پوءِ $ac = bc$

(vi) ڪاٽ واري خاصيت جوڙ جي لاءِ (Cancellation property for Addition)

جيڪڏهن a,b,c حقيقي عدد آهن ۽ جيڪڏهن $a + c = b + c$ ته پوءِ $a = b$

(vii) ڪاٽ واري خاصيت ضرب جي لاءِ (Cancellation property for Multiplication)

جيڪڏهن a,b,c حقيقي عدد آهن ۽ $c \neq 0$ جيڪڏهن $ac = bc$ ته پوءِ $a = b$

(e) حقيقي عددن ۾ اڻ برابري واري تعلق جون خاصيتون
(Properties of Inequalities of Real Numbers)

هيٺيون حقيقي عددن ۾ اڻ برابري واري تعلق جون خاصيتون آهن.

(i) ٽه رخي خاصيت (Trichotomy property)

جيڪڏهن $a,b \in \mathbb{R}$ ته پوءِ $a = b$ يا $a < b$ يا $a > b$

(ii) متعدي خاصيت (Transitive property)

جيڪڏهن $a,b,c \in \mathbb{R}$ ته پوءِ

(a) $a < b$ ۽ $b < c \Rightarrow a < c$ (b) $a > b$ ۽ $b > c \Rightarrow a > c$

(iii) جوڙ واري خاصيت (Additive property)

جيڪڏهن $a,b,c \in \mathbb{R}$ ته پوءِ

(a) $a < b \Rightarrow a+c < b+c$ (b) $a > b \Rightarrow a+c > b+c$

(iv) ضربي خاصيت (Multiplicative property)

جيڪڏهن $a,b,c \in \mathbb{R}$ ۽ $c > 0$ ته پوءِ

(a) $a > b \Rightarrow ac > bc$ (b) $a < b \Rightarrow ac < bc$

ساڳي طرح جيڪڏهن $c < 0$ ته پوءِ

(a) $a > b \Rightarrow ac < bc$ (b) $a < b \Rightarrow ac > bc$

(v) ابتڙ خاصيت (Reciprocative property)

جيڪڏهن $a,b \in \mathbb{R}$ ۽ b,a جون ساڳيون نشانيون هجن تو پوءِ

(a) $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ۽ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Rightarrow a > b$ (b) $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ۽ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Rightarrow a < b$

(vi) ڪاٽ واري خاصيت (Cancellation property)

جيڪڏهن $a,b,c \in \mathbb{R}$ ته پوءِ

(a) $a + c > b + c \Rightarrow a > b$

(b) $a + c < b + c \Rightarrow a < b$

(c) $c > 0$ ۽ $ac > bc \Rightarrow a > b$ ساڳي طرح

(d) $c > 0$ ۽ $ac < bc \Rightarrow a < b$

مشق 1.2

.1 هيٺين ۾ حقيقي عددن جي خاصيتن جي سڃاڻپ ڪريو.

(i) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$

(ii) $\frac{4}{3}+\left(1\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}+1\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}$

(iii) $9\times\left(\frac{10}{9}+\frac{20}{9}\right)=\left(9\times\frac{10}{9}\right)+\left(9\times\frac{20}{9}\right)$

(iv) $\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{7}\right)\times\frac{7}{8}=\left(\frac{4}{5}\times\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{5}{7}\times\frac{7}{8}\right)$

(v) $\left(\frac{7}{5}-\frac{3}{5}\right)\times\frac{10}{15}=\left(\frac{7}{5}\times\frac{10}{15}\right)-\left(\frac{3}{5}\times\frac{10}{15}\right)$

(vi) $\frac{d}{c}\times\frac{e}{f}=\frac{e}{f}\times\frac{d}{c}$

(vii) $11\times(15\times21)=(11\times15)\times21$

(viii) $\frac{2}{11}\times\frac{11}{2}=\frac{11}{2}\times\frac{2}{11}=1$

(ix) $\left(\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)=\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}\right)=0$

(x) $\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{b}{a}\right)=\left(\frac{b}{a}\right)\times\left(\frac{a}{b}\right)=1$

(xi) $\frac{15}{10}\times\left(\frac{8}{5}-\frac{4}{10}\right)=\left(\frac{15}{10}\times\frac{8}{5}\right)-\left(\frac{15}{10}\times\frac{4}{10}\right)$

(xii) $\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{3}=1$

.2 هيٺين حقيقي عددن کي مڪمل درست ڪرڻ لاءِ درست حقيقي عددن سان خال پُريو.

(i) $\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\square}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{2}}{5}$

(ii) $\frac{7}{10}+\left(\frac{70}{\square}+\frac{16}{33}\right)=\left(\frac{7}{\square}+\frac{\square}{10}\right)+\frac{16}{\square}$

(iii) $\frac{99}{50}\times\frac{50}{99}=\square$

(iv) $\left(\frac{59}{95}\right)\times\left(\frac{95}{59}\right)=\square$

(v) $(-21)+(\square)=0$

(vi) $\frac{5}{8}\times\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{7}\right)=\left(\frac{\square}{\square}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{5}{8}\times\frac{\square}{\square}\right)$

.3 هيٺين خاصيتن کي درست/صحيح ڪرڻ لاءِ خال پُريو.

(i) $5<8$ ۽ $8<10 \Rightarrow$ ____ $<$ ____

(ii) $10>8$ ۽ $8>5 \Rightarrow$ ____ $<$ ____

(iii) $3<6 \Rightarrow 3+9<$ ___ $+$ ___

(iv) $4<6 \Rightarrow 4+8<$ ___ $+$ ___

(v) $8>6 \Rightarrow 6+8>$ ___ $+$ ___

4. هيٺيان خال ڀريو جيڪي خاصيتن کي صحيح/درست ڪن.

(i) $5 < 7 \Rightarrow 5 \times 12 <$ ___ $\times$ ___

(ii) $7 > 5 \Rightarrow 7 \times 12 >$ ___ $\times$ ___

(iii) $6 > 4 \Rightarrow 6 \times (-7)$ ____ $4 \times (-7)$

(iv) $2 < 8 \Rightarrow 2 \times (-4)$ ____ $8 \times (-4)$

5. هيٺين حقيقي عددن جا جمعي ۽ ضربي ابتڙ معلوم ڪريو.

(i) 3 **(ii)** -7 **(iii)** 0.3 **(iv)** $\frac{-\sqrt{5}}{5}$ **(v)** $\frac{9}{\sqrt{12}}$ **(vi)** 0

1.3 مول ۽ مول جو پايو

1.3.1 مول ۽ مول جي پايي جي سڃاڻپ ڪرايو

سمجهو ته $n \in Z^+$ (واڌو سڄن عددن جو سيٽ) ۽ $n > 1$

۽ فرض ڪريو ته $a \in \mathbb{R}$، پوءِ ڪنهن به واڌو حقيقي عدد x لاءِ

(a جو ٻيو مول) $x^2 = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{a}$ جيئن

(a جو ٽيون مول) $x^3 = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{a}$ ساڳي طرح

(a جو چوٿون مول) $x^4 = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{4}} \Rightarrow x = \sqrt[4]{a}$

(a جو n وون مول) $x^n = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{n}} \Rightarrow x = \sqrt[n]{a}$ عام طرح

$\sqrt[n]{a}$ ۾ a کي مول جو پايو ۽ $'n'$ کي مول جي ڏسڻي چئبو آهي.

> $\sqrt{}$ کي مول جي نشاني سڏبو آهي.

1.3.2 مول ۽ سگهه نما صورت جي اظهار ۾ فرق ڪريو.

جيئن ته اسان پڙهي آيا آهيون ته $x = \sqrt[n]{a}$ هڪ مول واري صورت آهي.

ساڳي طرح $a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{2}{3}}, a^{\frac{3}{2}}, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{m}{n}}$ ڪجهه سگهه نما صورت جا مثال آهن.

ياد ڪريو ته

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$$

هتي $\sqrt[n]{a}$ هڪ مولي صورت آهي $a^{\frac{1}{n}}$ سگهه واري صورت آهي.

هتي پيو مول جون ڪجھ خاصيتون ڏجن ٿيون.

$\forall a,b \in \mathbb{R}^{+} \wedge m,n \in Z$ ته پوءِ

(i) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (ii) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

(iii) $\dfrac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$ (iv) $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$

(v) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 1$ (vi) $m\sqrt{a} \pm n\sqrt{a} = (m \pm n)\sqrt{a}$

(vii) $\sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}} = \sqrt{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}}, a,b \neq 0$

ساڳي طرح

(i) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ (ii) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(iii) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ (iv) $\sqrt[mn]{a^n} = a^{\frac{n}{nm}} = a^{\frac{1}{m}}$

(v) $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{mn}}$ (vi) $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n^2]{a} = a^{\frac{1}{n^2}}$

(vii) $\sqrt[n]{a^n} = a$ (viii) $\dfrac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{a^n}} = 1$

1.3.3 مولي صورت ۾ ڏنل اظهار کي سگهه واري صورت ۾ بدلائڻ ۽ ان جي برعڪس

جڏهن اسان مول ۽ سگهن تي مشتمل اظهارن کي سادي صورت ۾ آڻيندا آهيون ته ان لاءِ مول ۽ سگهه واريون خاصيتون تمام ڪارگر آهن.

مثال 01 هيٺين مولي اظهارن کي سگهه نما اظهارن ۾ بدلايو.

(i) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (ii) $\sqrt[3]{18}$ (iii) $\sqrt[5]{\frac{5}{7}}$ (iv) $\sqrt[9]{\left(\frac{x}{y}\right)^2}$ (v) $\sqrt[4]{(ab)^3}$

حل:

(i) $\sqrt{\frac{2}{3}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ (ii) $\sqrt[3]{18}=(18)^{\frac{1}{3}}$ (iii) $\sqrt[5]{\frac{5}{7}}=\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{5}}$

(iv) $\sqrt[9]{\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{9}}$ (v) $\sqrt[4]{(ab)^3}=(ab)^{\frac{3}{4}}$

مثال 02 هيٺين سگهه نما اظهارن کي مولي اظهارن ۾ بدلايو.

(i) $\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{3}}$ (ii) $(12)^{\frac{n}{2}}$ (iii) $(-7)^{\frac{3}{4}}$ (iv) $\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{2}{5}}$ (v) $\left(-\frac{x}{y}\right)^{\frac{m}{n}}$

حل:

(i) $\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$ (ii) $(12)^{\frac{n}{2}}=\sqrt{(12)^n}$ (iii) $(-7)^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{(-7)^3}$

(iv) $\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{\left(\frac{y}{x}\right)^{-2}}=\sqrt[5]{\left(\frac{x}{y}\right)^{2}}$ (v) $\left(-\frac{x}{y}\right)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{\left(-\frac{x}{y}\right)^{m}}$

مشق 1.3

.1 هيٺين ۾ مول جو پايو ۽ مول جي ڏسٽي جي سڃاڻپ ڪريو.

(i) $\sqrt[3]{5}$ (ii) $\sqrt[4]{\frac{x}{y}}$ (iii) $\sqrt[5]{x^2yz}$

2. هيٺين کي سگهه واري نموني ۾ تبديل ڪريو.

(i) $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)}$ (ii) $\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^5}$ (iii) $\sqrt[3]{\left(\frac{y}{x}\right)^{-5}}$ (iv) $\sqrt[3]{(yz)^7}$ (v) $\sqrt[9]{27}$

(vi) $\sqrt[3]{(-64)^2}$ (vii) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^m}$ (viii) $\sqrt[5]{(xy)^3}$ (ix) $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{4}{3}}}$

3. هيٺين کي مول واري نموني ۾ تبديل ڪريو.

(i) $\left(5^3\right)^{\frac{1}{7}}$ (ii) $(ab^{-2})^{\frac{1}{3}}$ (iii) $\left[\left(\frac{5}{7}\right)^3\right]^{\frac{5}{7}}$ (iv) $\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{m}{2}}$ (v) $\left[\left(\frac{11}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right)\right]^{\frac{1}{5}}$

1.4 سگهن جا قاعدا

سگهن يا سگهه نما جا قاعدا رياضي جي ڪيترن ئي حصن ۾ اهم آهن.

1.4.1 بنياد، سگهه ۽ سگهه جي ملهه کي دهرايو.

سمجهو ته a^n سگهن واري صورت ۾ آهي. جنهن ۾ $'a'$ بنياد ۽ $'n'$ سگهه يا سگهه نما آهي جنهن کي a جي n وين سگهه پڙهبو.

a^n جو نتيجو، جڏهن $a \in \mathbb{R}$ آهي ته ان جو ملهه حقيقي آهي.

1.4.2 سگهن جا قاعدا استعمال ڪري حقيقي سگهه نما اظهارن کي سادي صورت ۾ بيان ڪرڻ.

هيٺيان سگهن جا قاعدا اظهارن کي سادي صورت ۾ آڻڻ لاءِ ڪارگر آهن.

(i) سگهن جي ضرب اپت جو قاعدو (Law of Product of Power)

(a) جيڪڏهن $x,y \in Z^+$ ۽ $a,b \in \mathbb{R}$ ته پوءِ $a^x \times a^y = a^{x+y}$

هيٺ ڪجهه مثال هن قاعدي مطابق ڏنل آهن.

(a) $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$ (b) $3 \times 3^5 = 3^{1+5} = 3^6 = 729$

(ii) سگهه جي سگهه جو قاعدو (Law of Power of Power)

جيڪڏهن $a \in \mathbb{R}$ ۽ $x, y \in Z^+$ ته پوءِ $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

هيٺ ڪجهه مثال هن قاعدي مطابق ڏنل آهن.

(a) $(5^2)^4 = 5^{2\times4} = 5^8$

(b) $\left\{\left(\frac{6}{11}\right)^4\right\}^3 = \left(\frac{6}{11}\right)^{4\times3} = \left(\frac{6}{11}\right)^{12}$ (c) $\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)^3\right\}^3 = \left(-\frac{3}{4}\right)^{3\times3} = \left(-\frac{3}{4}\right)^9 = -\left(\frac{3}{4}\right)^9$

(iii) ضرب اپت جي سگهه جو قاعدو (Law of Power of a Product)

$\forall a, b, \in \mathbb{R}$ ۽ $n \in Z^+$,

تہ پوءِ $(a\times b)^n = a^n \times b^n$

هينيان مثال هن قاعدي مطابق ڏنل آهن.

(a) $(xy)^3 = x^3y^3$ (b) $\left\{\left[\frac{8}{9}\right]\left[\frac{7}{11}\right]\right\}^3 = \left(\frac{8}{9}\right)^3\left(\frac{7}{11}\right)^3$

(iv) اٽپور جي سگهه جو قاعدو (Law of Power of a Quotient)

$\forall a, b, \in \mathbb{R}$ ۽ $n \in Z^+$, تہ پوءِ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ جڏهن $b \neq 0$

مثال هن قاعدي مطابق ڏنل آهن.

(a) $\left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{5^3}{8^3}$ (b) $\left(\frac{f}{g}\right)^4 = \frac{f^4}{g^4}, g\neq0$

(v) سگهن جي ونڊ اپت جو قاعدو (Law of quotient of Power)

جيڪڏهن $m, n \in Z^+$ ۽ $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ تہ پوءِ

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ جيڪڏهن $m > n$

$= \frac{1}{a^{n-m}}$ جيڪڏهن $n > m$

جيڪڏهن $m = n$ تہ پوءِ

$a^{m-n} = a^{m-m} = a^0 = 1$

ساڳي طرح $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = \frac{a^n}{a^n} = 1$

ياد رکو تہ:

جيڪڏهن n هڪ بڌي سگهہ آهي. $(-a)^n = a^n$

جيڪڏهن n هڪ اکي سگهہ آهي. $(-a)^n = -a^n$

هينيان مثال هن قاعدي مطابق ڏنل آهن.

(a) $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 27$

(b) $\frac{7^3}{7^5} = \frac{1}{7^{5-3}} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

ياد رکو تہ:

جيڪڏهن ڪنهن غير ٻڙي عدد جي سگهہ ٻڙي آهي تہ ان جوملهہ 1 جي برابر ٿيندو. مثال طور $3^0 = 1$

مشق 1.4

1. سادي صورت ۾ آڻيو.

(i) $\dfrac{3^5}{3^2}$ (ii) $\dfrac{2^4 \cdot 5^3}{10^2}$ (iii) $\dfrac{(a+b)^2 \cdot (c+d)^3}{(a+b) \cdot (c+d)^2}$

2. سگهه جا قاعدا استعمال ڪري سادي صورت ۾ آڻيو.

(i) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^4 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^5$ (ii) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^5 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^2$ (iii) $\left(-\dfrac{4}{5}\right)^3 \times \left(-\dfrac{4}{5}\right)^5$

(iv) $(-3 \times 5^2)^3$ (v) $[3 \times (-4)^2]^3$ (vi) $\left(-\dfrac{a}{bc}\right)^5 \times \left(-\dfrac{a}{bc}\right)^4$

(vii) $\left(-\dfrac{c}{d}\right)^2 \left(-\dfrac{c}{d}\right)^3 \left(-\dfrac{c}{d}\right)^5$ (viii) $mn^2t^4n^3m^5t^7$ (ix) $a^2c^5b^2a^3c^3b^4a^4$

3. سگهه جا قاعدا استعمال ڪري سادي صورت ۾ آڻيو.

(i) $(5^2)^3$ (ii) $\{(xy)^3\}^5$ (iii) $\{(-4)^2\}^5$ (iv) $\{(-3)^3(-4)^2\}^3$ (v) $\left(\dfrac{b^2}{5}\right)^3$

(vi) $\left\{\left(-\dfrac{4}{9}\right)^2\right\}^3$ (vii) $\{(z^3)^2\}^4$ (viii) $\{(mm^2m^3m^4)^2\}^5$ (ix) $-[(-0.1)^2\,(-0.1)^3\,(-0.1)^4]^2$

1.5 منجهيل عدد (Complex numbers)

1.5.1 وضاحت سان منجهيل عددن (Complex numbers) z جي اظهار جي صورت ۾ وصف بيان ڪنداجيئن (a, b) يا $z = a + i\,b$، جڏهن تہ a حقيقي ۽ b تصوراتي حصو آهي ۽ هتي $i = \sqrt{-1}$ آهي.

اسان کي خبر آهي تہ حقيقي عدد جو چورس غيرڪاٽو آهي. تہ پوءِ $x^2+1=0$ مساوات جو حل $\mathbb{R}$ سان تعلق نٿو رکي. حقيقي عددن جي هن ناڪافي هجڻ کي قابو پائڻ لاءِ رياضي دانن هڪ نئون عدد تصوراتي ايڪو $\sqrt{-1}$ روشناس ڪرايو، جنهن کي لفظ i (iota) سان ظاهر ڪيو ويو، جنهن کي $i^2=-1$ جي خاصيت آهي. ظاهر آهي تہ "i" حقيقي عدد نہ آهي. اهو رياضي ۾ هڪ نئون وجود آهي جيڪو اسان کي هر آلجبري مساوات جي نموني $x^2+a=0$ جڏهن تہ $a>0$ جو حل ڪرڻ جي قابل بنائي ٿو. عدد جهڙوڪ $\sqrt{-1}=i, \sqrt{-5}=\sqrt{5}i, \sqrt{-49}=7i$ خالص تصوراتي عدد آهن.

منجهيل (Complex) عددن جي وصف:

هڪ عدد جيڪو $a+ib$ جي نموني ۾ مليل هجي، جنهن ۾ a,b حقيقي عدد ۽ i هڪ تصوراتي ايڪو هجي ته اهڙي عدد کي منجهيل (Complex) عدد چئبو آهي ۽ ان کي z سان ظاهر ڪبو آهي. مثال طور $z=3+4i$ هڪ منجهيل (Complex) عدد آهي.

منجهيل (Complex) عدد $a+ib$ کي ترتيب ڏنل جوڙي جي صورت (a,b) جهڙي طرح $5+8i=(5,8)$ ۾ لکي سگهجي ٿو.

1.5.2 $z=a+ib$ ۾ a کي حقيقي ۽ b کي تصوراتي حصي طور سڃاڻپ ڪريو.

منجهيل (Complex) عدد $z=a+ib$ ۾ "a" حقيقي حصو ۽ "b" تصوراتي حصو آهي. منجهيل عدد جو حقيقي حصي کي $\text{Re}(z)$ سان ظاهر ڪبو آهي ۽ ان جي تصوراتي حصي کي $\text{Im}(z)$ سان ظاهر ڪبو آهي.

مثال 01 مليل منجهيل (Complex) عددن جي حقيقي ۽ تصوراتي حصن جي سڃاڻپ ڪريو.

$$z=3-2i$$

هتي $\text{Re}(z)=a=3$ ۽ $\text{Im}(z)=b=-2$

1.5.3 منجهيل (Complex) عدد جي گردان (Conjugate) جي تعريف لکو.

z جو گردان (Conjugate) کي $\bar{z}$ سان ظاهر ڪبو آهي.

جيڪڏهن $z=a+ib$ ته پوءِ $\bar{z}=a-ib$ يا $z=(a,b)$ ته پوءِ $\bar{z}=(a,-b)$

۽ جيڪڏهن $z=a-ib$ ته پوءِ $\bar{z}=a+ib$ يا $z=(a,-b)$ ته پوءِ $\bar{z}=(a,b)$

گردان (Conjugate) ۾ اسان صرف تصوراتي حصي جي نشاني تبديل ڪندا آهيون.

نوٽ: جيڪڏهن ڪو منجهيل (Complex) عدد z آهي ته $\overline{(\bar{z})}=z$

مثال هيٺين منجهيل (Complex) عددن جو گردان (Conjugate) معلوم ڪريو.

(i) $3+4i$ (ii) $\left(-\frac{4}{5},\frac{5}{4}\right)$

حل:

(i) فرض ڪريو ته $z_1=3+4i$

ته پوءِ $\overline{z_1}=\overline{3+4i}$

$\overline{z_1}=3-4i$

(ii) فرض ڪريو ته $z_2=\left(-\frac{4}{5},-\frac{5}{4}\right)$

$\overline{z_2}=\overline{\left(-\frac{4}{5},-\frac{5}{4}\right)}$

$\overline{z_2}=\left(-\frac{4}{5},\frac{5}{4}\right)$

1.5.4 منجهيل عددن (Complex Numbers) جي برابري واري صورت بابت ڄاڻ

ٻه منجهيل عدد (Complex Numbers) ڪي برابر چئبو جيڪڏهن انهن ۾ هڪ جهڙا حقيقي ۽ تصوراتي حصا هجن جيئن

$$\forall a,b,c,d\in\mathbb{R},\quad a+ib=c+id,\ \text{تہ پوءِ}\ \ a=c\ \text{۽}\ b=d.$$

مثال 01 جيڪڏهن $x+3yi=16+9i$ تہ x ۽ y معلوم ڪريو.

حل: مليل آهي تہ

$$4x+3yi=16+9i\ \Rightarrow 4x=16\ \text{۽}\ 3y=9,$$

$$\Rightarrow \frac{4x}{4}=\frac{16}{4}\ \text{۽}\ \frac{3y}{3}=\frac{9}{3},\Rightarrow x=4\ \text{۽}\ y=3.$$

مثال 02 جيڪڏهن $x^2+iy^2=25+i36$ تہ x ۽ y معلوم ڪريو.

حل: مليل آهي تہ

$$x^2+y^2i=25+36i\Rightarrow x^2=25\ \text{۽}\ y^2=36,$$

$$x=\pm\sqrt{25}\ \text{۽}\ y=\pm\sqrt{36}\Rightarrow x=\pm5\ \text{۽}\ y=\pm6$$

مشق 1.5

1. هيٺيان منجهيل عدد (Complex Numbers) کي ***a+ib*** واري نموني ۾ لکو.

(i) (1,2) (ii) (2,2) (iii) (3,4)

(iv) (−1,1) (v) (−2,2) (vi) (−3,4)

2. هيٺين منجهيل عددن (Complex Numbers) مان حقيقي ۽ تصوراتي حصن جي سڃاڻپ ڪريو.

(i) $1+2i$ (ii) $9i+4$ (iii) $(-5,6)$

(iv) $-1-i$ (v) $\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)i$ (vi) $2i-1$

3. هيٺين منجهيل عدد (Complex Numbers) جو ڳرداڻ (Conjugate) معلوم ڪريو.

(i) $3+2i$ (ii) $(4,9)$ (iii) $(-1,1)$

(iv) $1-i$ (v) $\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)i$ (vi) $3i+1$

4. هينين منجهيل (Complex Numbers) جي چڪاس ڪريو تہ $(\overline{\overline{z}}) = z$

(i) $\left(\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{9}{10}\right)i$ (ii) $\left(-\frac{9}{11}\right)+\left(\frac{10}{9}\right)i$ (iii) $\frac{1}{2}-3i$

(iv) $2+3i$ (v) $-2-3\left(-\frac{10}{9}\right)i$ (vi) $4x+3iy$

5. x ۽ y جا ملهہ لهو جڏهن:

(i) $x+yi=-5+5i$ (ii) $x^2+iy^2=\frac{16}{9}+\frac{9}{25}i$

(iii) $y^2+\frac{x}{3}i=121-\frac{9}{5}i$ (iv) $\frac{\sqrt{5}}{3}x-\frac{3}{\sqrt{2}}yi=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{9}i$

1.6 منجهيل عددن (Complex Numbers) تي بنيادي نشانيون (Basic Operations)

1.6.1 منجهيل عددن (Complex Numbers) تي بنيادي نشانيون استعمال ڪريو (جوڙ، ڪٽ، ضرب ۽ ونڊ)

(i) منجهيل عددن (Complex Numbers) جو جوڙ

فرض ڪريو تہ $z_1= a + ib$ ۽ $z_2= c + id$ ڪي بہ منجهيل (Complex) عدد آهن.

جيئن $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ تہ پوءِ انهن جو جوڙ ٿيندو.

$$z_1+z_2 = (a + ib) + (c + id)$$
$$= (a+ c) +i (b + d) = (a + c, b + d).$$

ياد رکو تہ:

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

مثال جيڪڏهن $z_1= 6+ 9i$ ۽ $z_2 = -1 + 2i$ تہ $z_1+ z_2$ جا ملهہ لهو.

حل: مليل آهي تہ $z_2= -1 + 2i = (-1,2)$ ۽ $z_1= 6+ 9i = (6,9)$

اسان کي خبر آهي تہ $\mathbf{z_1 + z_2 = (a + c) +i(b+d) = (a + c, b + d)}$

$\therefore \quad z_1+ z_2 = (6, 9) + (-1, 2) = (6 - 1, 9 +2)$

$\Rightarrow \quad z_1+ z_2= (5, 11)$

(ii) منجهيل عددن (Complex Numbers) جي ڪٽ

فرض ڪريو تہ $z_1= a + ib$ ۽ $z_2= c + id, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

تہ پوءِ $z_1- z_2 = (a + ib) - (c + id)$

$$= (a -c) + i.(b-d) = (a -c, b-d)$$

ياد رکو تہ:

$(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$

مثال جيڪڏهن $z_1= - 7 + 2i$ ۽ $z_2= 4 -9i$ تہ $z_1- z_2$ جا ملهہ لهو.

حل: مليل آهي تہ $z_2= 4 -9i = (4,-9)$ ۽ $z_1= - 7 + 2i = (-7,2)$

اسان کي خبر آهي تہ $\mathbf{z_1 - z_2 = (a - c, b - d)}$

$\therefore \quad z_1- z_2 = (- 7 - 4, 2+9)$

$\Rightarrow \quad z_1- z_2= (-11, 11)$

(iii) منجهيل عددن (Complex Numbers) جي ضرب

فرض ڪريو تہ $z_1 = a + ib$ ۽ $z_2 = c + id$ ڪي بہ ٻہ منجهيل عددآهن جنهن ۾ $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$

$$z_1 \cdot z_2 = (a+ib)(c+ib)$$
$$= c(a+ib) + di(a+ib)$$
$$= ac + bci + adi + bdi^2$$
$$= (ac-bd) + i(ad+bc) = (ac-bd, ad+bc) \quad \because i^2 = -1$$

ياد ڪريو تہ:

$(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

مثال جيڪڏهن $z_1 = 3+4i = (3,4)$ ۽ $z_2 = -3-4i = (-3,-4)$ تہ $z_1 z_2$ جي ضرب معلوم ڪريو.

حل: مليل آهي تہ $(-3,-4) = z_2 = -3-4i$ ۽ $z_1 = 3+4i = (3,4)$

اسان کي خبر آهي تہ $z_1 z_2 = (ac-bd, ad+bd)$

$$\therefore \quad z_1 z_2 = (3,4)\cdot(-3,-4)$$
$$\Rightarrow \quad z_1 z_2 = (-9+16, -12-12) = (7,-24)$$

(iv) منجهيل عددن (Complex Numbers) جي ونڊ

فرض ڪريو تہ $z_1 = a+ib = (a,b)$ ۽ $z_2 = c+id = (c,d)$ $z_2 \neq 0$, $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$

تہ z_1 ۽ z_2 جي ونڊ هن طرح لکبي.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id}$$
$$= \frac{a+ib}{c+id} \times \frac{c-id}{c-id}$$
$$= \frac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$
$$= \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + i\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$
$$= \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

ياد ڪريو تہ:

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

مثال 01 سادي صورت ۾ آڻيو. $\dfrac{2+3i}{4+2i}$

حل:

$$\frac{2+3i}{4+2i}$$
$$=\frac{2+3i}{4+2i}\times\frac{4-2i}{4-2i}$$
$$=\frac{(8+6)+i(12-4)}{(4)^2-(i2)^2}$$
$$=\frac{14+8i}{20}$$
$$=\frac{14}{20}+i\frac{8}{20}$$
$$=\frac{7}{10}+i\frac{4}{10}$$
$$=\left(\frac{7}{10},\frac{4}{10}\right)=\left(\frac{7}{10},\frac{2}{5}\right)$$ تنهنڪري سادي صورت ۾ آهي.

مثال 02 ونڊ جو فارمولا استعمال ڪري منجهيل عدد (Complex Number) جي ونڊ ڪريو.

$$(-1,3)\div(2,-4)$$

حل: فارمولا

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(a,b)}{(c,d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$
$$\frac{(-1,3)}{(2,-4)}=\left(\frac{(-1)(2)+(3)(-4)}{2^2+(-4)^2},\frac{(3)(2)-(-1)(-4)}{2^2+(-4)^2}\right)$$
$$=\left(\frac{-2-12}{4+16},\frac{6-4}{4+16}\right)$$
$$=\left(\frac{-14}{20},\frac{2}{20}\right)$$
$$=\left(\frac{-7}{10},\frac{1}{10}\right)$$

مشق 1.6

.1 هيٺين منجهيل عددن (Complex Numbers) کي ٻڌايل نشانين عمل ذريعي جي حل ڪريو.

(i) $(3,2)+(9,3)$ (ii) $\left(\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)$

(iii) $(15,12)-(10,-9)$ (iv) $\left(\frac{4}{5},\frac{8}{15}\right)-\left(\frac{4}{5},\frac{6}{10}\right)$

(v) $(1,2)(1,-2)$ (vi) $(4,-5)(5,-4)$

(vii) $(3,-7)\div(3,2)$ (viii) $(4,5)\div(2,-3)$

.2 سادي صورت ۾ آڻي، پنهنجو جواب $a+ib$ جي صورت ۾ لکو.

(i) $\frac{-1}{1+i}$ (ii) $(1+i)^4$ (iii) $\left(\frac{1}{1+i}\right)^2$ (iv) $(1+i)^8$

.3 جيڪڏهن $z_1=-4+6i$ ۽ $z_2=2\frac{1}{2}-2i$، چڪاس ڪريو ته

(i) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ (ii) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

.4 جيڪڏهن $z_1=1+i$ ۽ $z_2=1-i$، چڪاس ڪريو ته

(i) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ (ii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

مشق ورجايو 1

.1 هيٺيان خال ڀريو.

(i) $\sqrt{5}$ جو ضربي ابتڙ آهي ______________.

(ii) $Q\cup Q'=$ ______________.

(iii) $\mathbb{R}$ ۾ جوڙلا ذاتي عنصر آهي ______________.

(iv) $5+(6+7)=(5+6)+$ ______________.

(v) $3+(-3)=$ ______________.

(vi) π ____________ عدد آهي.

(vii) $\frac{22}{7}$ هڪ ____________ عدد آهي.

(viii) $-3+5i$ جو گرداڻ (Conjugate) ____________ آهي.

(ix) $2i(3-i)$ ۾ حقيقي حصو ____________ آهي.

(x) ٻن منجهيل عددن (Complex Numbers) (c,d) ۽ (a,b) جي ضرب جيڪا

$(a,b).(c.d)=$ ____________.

.2 هيٺين بيانن کي غور سان پڙهو، درست بيانن لاءِ T تي گولو لڳايو. غلط بيانن لاءِ F تي گولو لڳايو.

(i)	ضرب جي تحت $\mathbb{R}$ بندش واري حالت ۾ آهي.	F / T
(ii)	جيڪڏهن $x<y \wedge y<z \Rightarrow x<z$	F / T
(iii)	$\forall x,y,z\in \quad ,x(y-z)=xy-xz$	F / T
(iv)	هر ٻن تصوراتي عددن جي ضرب، حقيقي آهي.	F / T
(v)	ٻن حقيقي عددن جو جوڙ هڪ حقيقي عدد آهي.	F / T

.3 درست جواب تي (✓) ٽڪ جو نشان لڳايو.

(i) $\sqrt{5}$ جو جوڙ جو ابتڙ آهي.

(a) $-\sqrt{5}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (c) $\sqrt{-5}$ (d) -5

(ii) $(5i).(-2i)=$ ____________.

(a) -10 (b) 10 (c) $-10i$ (d) $10i$

(iii) $3(5+7)=3.5+3.7$ ، خاصيت جو نالو آهي.

(a) متاوازي (b) سنگت (c) ورهاست (d) بندش

(iv) $\sqrt{-2}\times\sqrt{-2}=$ ____________.

(a) 2 (b) -2 (c) $2i$ (d) $-2i$

خلاصو

- حقيقيعددن جو سيٽ، ناطق ۽ غيرناطق جي سيٽ جو ميلاپ آهي جيئن $\mathbb{R}=Q\cup Q'$
- نہ ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽيورن جا بہ قسم آهن جيڪي نہ ورجندڙ ڏهائي اٽيور ۽ ورجندڙ ڏهائي اٽيور
- حقيقي عددن جون "+" ۽ "×" جي لحاظ سان خاصيتون

(i) بندش واري خاصيت

$a+b\in\mathbb{R}$ ۽ $ab\in\mathbb{R}\ ,\forall a,b\in\mathbb{R}$

(ii) سنگت واري خاصيت

$a+(b+c)=(a+b)+c$ ۽ $a(bc)=(ab)c,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}$

(iii) مٽاواري خاصيت

$a+b=b+a$ ۽ $ab=ba,\forall a,b\in\mathbb{R}$

(iv) ذاتي عنصر واري خاصيت (Identities Property)

$a+0=a=0+a$ ۽ $a\cdot 1=a=1\cdot a\ \ \forall a\in\mathbb{R}$

(v) ورهائجن واري خاصيت

$a(b+c)=ab+ac$ يا $(b+c)a=ba+ca,\forall a,b,c\in\mathbb{R}$

(vi) ابتڙن واري خاصيت (Inverses Property)

$a+(-a)=0=-a+a$ ۽ $a\times\frac{1}{a}=1=\frac{1}{a}\times 1,\forall a,\in\mathbb{R}\ \wedge a\neq 0$

- عددي ليڪ: اهڙي ليڪ جيڪا حقيقي عددن کي ظاهر ڪرڻ لاءِ استعمال ٿئي ان کي عددي ليڪ چئبو آهي.

- مول ۽ مول جو پايو: $\sqrt[n]{a}$ ۾ $\sqrt{\ }$ کي مول جي نشاني ۽ a کي مول جو پايو چئبو آهي.

- سگهن جا قاعدا:

(i) جيڪڏهن $a^x \times a^y = a^{x+y}$ ته $x, y \in Z^+$ ۽ $a, b \in \mathbb{R}$

(ii) جيڪڏهن $y \in Z^+$ ۽ x ۽ $a \in \mathbb{R}$ ته پوءِ $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

(iii) $n \in Z^+$ ۽ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ته پوءِ $\left(a \times b\right)^n = a^n \times b^n$

(iv) $n \in Z^+$ ۽ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ته پوءِ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ جڏهن ته $b \neq 0$

- منجهيل عدد (Complex Numbers): $z = a + ib = \left(a, b\right)$ کي منجهيل عدد چئبو آهي. جڏهن ته $'a'$ حقيقي حصو ۽ $'b'$ تصوراتي حصو آهي z جو ۽ $i = \sqrt{-1}$

- ٻن منجهيل عددن (Complex Numbers) تي عمل (نشانيون) جڏهن $z_2 = c + id$ ۽ $z_1 = a + ib$

$$z_1 + z_2 = \left(a + c\right) + i\left(b + d\right)$$

$$z_1 - z_2 = \left(a - c\right) + i\left(b - d\right)$$

$$z_1 z_2 = \left(ac - bd\right) + i\left(ad + bc\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + i\left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)$$

يونٽ 2

لاگرٿم

LOGARITHMS

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته:

- عدد کي سائنسي لکڻي جي معياري صورت ۾ ظاهر ڪن ۽ برعڪس.
- حقيقي عدد جو لاگرٿم جنهن جو بنياد (Base) a ۽ جنهن تي ڪجهه سگهه (Exponent) ڏنگ سان ڪو عدد ملي ان جي وصف بيان ڪرڻ $(\text{i.e., } a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x,\ a > 0,\ y > 0 \text{ and } a \neq 1)$
- عام لاگرٿم جي وصف بيان ڪري عدد جي لاگرٿم جوگڻ ۽ مئنٽيسا بيان ڪري سگهن.
- عددن جو لاگرٿم معلوم ڪرڻ لاءِ جدول استعمال ڪري سگهن.
- ضد لاگرٿم جو تصور ڏين ۽ جدول (Table) کي استعمال ڪندي ڪنهن عدد جو ضد لاگرٿم معلوم ڪن.
- ڪئلڪيوليٽر جي استعمال سان لاگرٿم ۽ ضد لاگرٿم معلوم ڪن.
- عام لاگرٿم ۽ قدرتي لاگرٿم ۾ فرق بيان ڪري سگهن
- $\log_{10} y = \log y$ يا صرف $\log y$ ۽ $\log_e(y)$ کي لکن

  (i) $\log_{10} y = x \Leftrightarrow y = 10^x$

  (ii) $\ln y = x \Leftrightarrow y = e^x.$
- لاگرٿم جا هينيان قاعدا ثابت ڪريو.

  (i) $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$

  (ii) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n,$

  (iii) $\log_a m^n = n\log_a m,$

  (iv) $\log_a m.\ \log_m n = \log_a n.$
- لاگرٿم جا هي قاعدا استعمال ڪري، ضرب، ونڊ ۽ سگهن جي ڏکين طريقن کي جوڙ ۽ ڪٽ وغيره جي آسان طريقن ۾ تبديل ڪن

تعارف:

مسلمان رياضي دان ابو محمد موسيٰ الخوارزمي لاگرتم روشناس ڪرايو. ان کان پوءِ سترهين صدي عيسويءَ ۾ جان نيپيئر انهيءَ ۾ وڏيڪ سڌارو آندو ۽ سندس جدولون تيار ڪيون. انهن جدولن ۾ عدد e کي بنياد بنايو ويو. e هڪ غيرناطق عدد آهي جنهن جو ملهه تقريبا 2.71828 .... آهي. 1631ع ۾ پروفيسر هينري ڊرگس 10 کي بنياد بڻائي لاگرتم جون جدولون تيار ڪيون.

لاگرتم جي استعمال سان حساب ڪتاب آسان ٿي پيو ۽ ان جو استعمال وڏيڪ ڪارآمد ٿي ويو.

۲/۱ سائنسي لکڻي (Scientific Notation)

سائنسي لکڻي، تمام وڏن ۽ تمام ننڍن عددن کي آسانيءَ سان لکڻ جو هڪ خاص نمونو آهي.

2.1.1 عدد کي سائنسي لکڻي جي معياري صورت ۾ ظاهر ڪرڻ ۽برعڪس.

سائنس ۽ ٽيڪنالاجي جي دنيا ۾ اسان جو واسطو تمام وڏن ۽ ننڍن عددن، مقدارن، سان پوندو آهي. ڌرتي کان سج جو مفاصلو تقريبا 150,000,000 ڪلوميٽر آهي ۽ هئڊروجن ائٽم جو وزن (0.000,000,000,000,000,000,000,000,001,7) گرام آهي. اهڙي قسم جي عددن کي عام لکڻي (معياري لکڻي) ۾ هرهڪ لاءِ لکڻ تمام ڏکيو آهي ۽ وقت بہ گهڻو گهربل آهي. سائنسدانن تمام ننڍن عددن ۽ تمام وڏن عددن کي لکڻ لاءِ مناسب ۽ آسان طريقو روشناس ڪرايو آهي جنهن کي سائنسي لکڻي چئبو آهي.

مٿي ڏنل حصي 2.1.1 ۾ ڏيڪاريل عددن کي آساني سان سائنسي لکڻي ۾ ترتيبوار 1.5×10^{8} km ۽ 1.7×10^{-27}g لکبو.

هيٺيان مثال سائنسي لکڻي کي سمجهڻ لاءِ مَدَد فراهم ڪندا.

مثال 01

هيٺين عددن کي سائنسي لکڻي ۾ لکو.

(i) 400900 (ii) 0.0000075

حل: (i) **400900**

ڏنل عدد ۾، ڏهائي ايڪي واري عَدَد کان پوءِ آهي، تنهنڪري ڏهائي جي نشاني کي ساڄي کان کابي طرف پنجن عددن تائين ٽپايو ٿ $400900 = 4.009 \times 10^5$, لکو جيڪو گهربل سائنسي لکڻي ۾ آهي.

(ii) **0.0000075**

ڏنل ڏهائي عدد ۾ ڏهائي جو نشان کان پوءِ 7 انگ آهن جنهن ۾ 7 پهريون غير ٻڙي عدد آهي. تنهنڪري ڏهائي نشان کي 6 عددن تائين کابي کان ساڄي طرف ٽپايو ۽ لکو $0.0000075 = 7.5 \times 10^{-6}$، جيڪو ڏنل عدد جي گهربل سائنسي لکڻي ۾ آهي.

مثال 02

هيٺين کي عام لکڻي ۾ لکو

(i) 2.76×10^6 (ii) 5.24×10^{-4}

حل: (i) 2.76×10^6

10 جي سگهه 6 آهي تنهنڪري اسان ڏهائي نشان کي 6 درجن تائين کابي کان ساڄي طرف ٽپائينداسين، پر مليل انگ ۾ آهن ان ڪري اسان چار ٻڙيون ساڄي طرف لکي پوءِ ڏهائي ڏينداسين يعني $2.76 \times 10^6 = 2760000$, جيڪو گهربل عام لکڻي وارو عدد آهي.

حل: (ii) 5.24×10^{-4}

10 جي سگهه ڪاٽو 4 آهي تنهنڪري اسان ڏهائي نشان کي 4 درجن تائين ساڄي کان کابي طرف ٽپائينداسين ، پر مليل انگ هڪ آهي. ان ڪري اسان ٽي ٻڙيون کابي طرف وڌائي پوءِ ڏهائي ڏينداسين ، يعني جيڪو گهربل عام لکڻي وارو عدد آهي. $5.24 \times 10^{-4} = 0.000524$

مشق 2.1

1. هينين عددن مان هر هڪ کي سائنسي لکڻي ۾ ظاهر ڪريو.

(i)	9700	(ii)	4,980,000	(iii)	96,000,000
(iv)	4169	(v)	84,000	(vi)	0.718
(vii)	0.00643	(viii)	0.0074	(ix)	0.21005

2. هينين عددن کي عام لکڻي (معياري نشاني) ۾ ظاهر ڪريو.

(i)	7×10^{4}	(ii)	8.072×10^{-10}	(iii)	6.018×10^{6}
(iv)	7.865×10^{8}	(v)	2.05×10^{-4}	(vi)	7.25×10^{10}
(vii)	4.502×10^{6}	(viii)	2.865×10^{-8}	(ix)	3.056×10^{6}

2.2 لاگرتم

لاگرتم ضرب / ونڊ/ سگهن تي مشتمل منجهيل حساب کي سادي صورت ۾ لکڻ جو طريقو آهي.

2.2.1 حقيقي عدد جو لاگر تم جنهن جو بنياد a (Base) ۽ جنهن تي ڪجهه سگهه (Exponent)

ڏيڻ سان ڪو عدد ملي ان جي وصف بيان ڪرڻ (i.e., $a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x$, $a > 0$, $y > 0$ and $a \neq 1$)

جيڪڏهن $a^x = y$ ته y جو لاگرتم a بنياد تي x کي چئبو هي ۽ علامتن ۾ لکنداسين $\log_a y = x$ جڏهن ته $a \neq 1$ ۽ $a > 0, y > 0$

تنهنڪري $a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x$

اهو ظاهر ٿئي ٿو ته $a^x = y$ سگهه واري صورت ۽ $\log_a y = x$ لاگرتمي صورت ۾ آهن.

هينيان مثال سگهه ۽ لاگرتمي صورت جي تصور کي سمجهڻ ۾ مدد ڪندا.

مثال 01 $2^{-4} = \dfrac{1}{16}$ کي لاگرتمي صورت ۾ لکو.

حل: $$2^{-4} = \frac{1}{16} \Rightarrow \log_2 \frac{1}{16} = -4$$

مثال 02 $\log_3 81 = 4$ کي سگهه واري صورت ۾ لکو.

حل: $$\log_3 81 = 4 \Rightarrow 3^4 = 81$$

مثال 03 $\log_4 2$ جو ملهه لهو.

حل: فرض ڪريو ته $x = \log_4 2$

سگهه واري صورت آهي

$$\therefore \quad 4^x = 2$$

$$\Rightarrow \quad (2)^{2x} = 2^1$$

پنهي طرف سگهن کي هڪبئي جي برابر ڪرڻ سان.

$$2x = 1$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

مثال 04 x جو ملهه لهو جيڪڏهن $\log_x 8 = \frac{3}{2}$

حل: $\log_x 8 = \frac{3}{2}$

سگهه واري صورت آهي.

$$\Rightarrow \quad = (x)^{\frac{3}{2}} \quad 8$$

$$\Rightarrow \quad = (x)^{\frac{3}{2}} \quad 2^3$$

پنهي طرف $\frac{2}{3}$ سگهه ڏيڻ سان

$$\Rightarrow \quad = (x^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} \quad (2^3)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad = \quad x \quad 2^2$$

$$\Rightarrow \quad = \quad x \quad 4$$

مثال 05 x جو ملهه لهو جيڪڏهن $\log_{64} x = \frac{-2}{3}$

حل:

سگهه واري صورت آهي.

$$(64)^{\frac{-2}{3}} = x \qquad \Rightarrow (4^3x)^{\frac{-2}{3}} = x$$

$$4^{-2} = x \qquad \Rightarrow \quad \frac{1}{4^2} = x$$

$$\frac{1}{16} = x \qquad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{16}$$

مشق 2.2

1. هيٺين کي لاگرٿمي صورت ۾ لکو.

(i) $7^3 = 343$ (ii) $3^{-4} = \frac{1}{81}$

(iii) $10^{-3} = 0.001$ (iv) $\sqrt[3]{8^2} = 4$

2. هيٺين کي سگهه واري صورت ۾ لکو.

(i) $\log_{27} 81 = \frac{4}{3}$ (ii) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$

(iii) $\log_{10} 1 = 0$ (iv) $\log_{10}(0.01) = -2$

3. هيٺين مان نامعلوم لهو.

(i) $\log_{32} x = \frac{1}{2}$ (ii) $\log_a 3 = \frac{1}{2}$ (iii) $\log_{\sqrt{5}} 25 = y$

(iv) $\log_4 x = \frac{3}{2}$ (v) $\log_{10} 100 = y$ (vi) $\log_a 64 = 3$

(vii) $\log_a 1 = 0$ (viii) $\log_{55} 55 = y$ (ix) $\log_{64} 8 = \frac{x}{2}$

2.2.2 عام لاگرٿم جي وصف لکو، عدد جي لاگرٿم جوگڻ ۽ مئنٽيسا جي وصف لکو.

عام لاگرٿم

عام لاگرٿم جو بنياد 10 هوندو آهي. ان کي مصنوعي لاگرٿم يا برگز (Briggs Logarithms) پڻ سڏبو آهي.

عام لاگرٿم کي $\log_{10} y$ يا صرف $\log y$ سان لکبو آهي.

$$\log y = x \Leftrightarrow y = 10^x$$

عدد جي لاگرٿم جا گڻ (Characteristics) ۽ مئنٽيسا (Mantissa)

ڪنهن عدد جو لاگرٿم ٻن حصن تي مشتمل هوندو آهي. هڪڙو سڄو عددي حصو ۽ ٻيو ڏهائي يا اٽپور حصو. سڄي عددي حصي کي گڻ (Characteristics) ۽ ڏهائي حصي کي مئنٽيسا (Mantissa) چئبو آهي.

لاگرٿم جوگڻ واڌو (Positive) يا ڪاٽو (Negative) ٿي سگهي ٿو، پر مئنٽيسا هميشه واڌو ٿيندو آهي سائنسي لکٽي ۾ 10 جي سگهه کي گڻ ۽ مئنٽيسا معلوم ڪرڻ لاءِ لاگرٿم جدول استعمال ڪبي جيڪا اسان اڳيان بحث ڪنداسين.

مثال 01 هيٺين عددن جا ڳڻ معلوم ڪريو.

0.765, 0.04, 0.004567, 2.134, 23.56 and 3456.

نمبرشمار	عدد	سائنسي لکڻي	ڳڻ
1	0.765	7.65×10^{-1}	-1 يا $\bar{1}$
2	0.04	4.0×10^{-2}	-2 يا $\bar{2}$
3	0.0045467	4.5467×10^{-3}	-3 يا $\bar{3}$
4	2.134	2.134×10^{0}	0
5	23.56	2.356×10^{1}	1
6	3456	3.456×10^{3}	3

اسان مشاهدو ڪيو ته:

- 1 کان وڏي عدد جي لاگرتم جو ڳڻ هميشہ غيرڪاٽو ٿيندو آهي.
- 1 کان ننڍي عدد جي لاگرتم جو ڳڻ هميشہ ڪاٽو ٿيندو آهي.

مئنٽيسا:

مئنٽيسا معلوم ڪرڻ لاءِ لاگرتم جدول استعمال ڪبي آهي هي جدول ڏهائي جي 7 انگن تائين لاگرتم معلوم ڪرڻ لاءِ ناهي ويئي آهي.پَرَ عملي طرح هن سطح تي عددن جو درست لاگرتم معلوم ڪرڻ لاءِ چئن انگن واري لاگرتم جدول ڪارگر آهي.

چا توهان سمجهيو؟

لاگرتم جي ڪاٽو ڳڻ ڪي-1، -2، -3جي بدران ترتيبوار لکبو آهي. $\bar{1}$، $\bar{2}$، $\bar{3}$ جڏهن مئنٽيسا ڪاٽو هجي ته ان کي واڌو ۾ تبديل ڪبو چاڪاڻ ته مئنٽيسا هميشہ واڌو هوندو آهي.

2.2.3 عددن جو لاگرتم معلوم ڪرڻ لاءِ جدول جو استعمال ڪرڻ.

هيٺيان مثال جدول جي استعمال سان لاگرتم معلوم ڪرڻ لاءِ مددگار ٿيندا.

مثال 01 هيٺ ڏنل لاگرتم عددن جو مئنٽيسا معلوم ڪريو.

(i) log (43.254)   (ii) log (0.002347).

حل: (i) log (43.254)

قدم 1: ڏهائي ڪي غور ۾ آڻڻ بنا، 4 انگن تي مشتمل عدد ڪٽو جيڪو 4325 آهي.

قدم 2: لاگرتم جدول ۾ ڪاٻي پاسي ڪان پهرئين ڪالم ۾ عدد 43 تلاش ڪريو.

قدم 3: ساڳي طرح ٽيون انگ ”2“ ڪٽي پهرئين ڪالم جي عدد 48 جي افقي ليڪ سان ”2“ واري ڪالم مان عدد 6355 لکو.

قدم 4: وري ساڳي طرح سان چوٿون انگ ”5“ ڪي فرق واري ڪالم (mean Difference)۾ پهرئين ڪالم جي 43 واري افقي ليڪ سان تلاش ڪريو جيڪو عدد آهي ”5“.

قدم 5: عدد ”5“ ڪي 6355 ۾ جوڙ ڪريو، جيڪو 0.6360 ٿيندو اهو عدد (43.25) جو مئنٽيسا آهي.

Logarithm Table

											Mean Differences								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0017	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	2560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	6	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7

Logarithm Table

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences								
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	3	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	3	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	882	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

(ii) log (0.002347)

حل: log (0.002347) ۾ ڏھائي ۾ پڙين کي غور ۾ آڻڻ بنا چئن انگن تي مشتمل عدد 2347 کڻو. پھرئين ڪالم جي 23 قطار تي نشان ڏيو، عدد 4 کي چوٿين ڪالم ۾ 23 قطار جي ڪاٽ واري رقم 3692 کڻو. آخري عدد 7 کي فرق واري ڪالم (Mean Difference) ۾ تلاش ڪريو جيڪو 13 آھي. ھن عدد کي 3692 ۾ جوڙ ڪريو جنھن جو حاصل 3705 ٿيندو. تنھنڪري گھربل مئنٽيسا ٿيندو.

مثال 02 ھيٺين عددن جو لاگرٿم معلوم ڪريو.

(i) 278.27 (ii) 0.07058

حل: (i) فرض ڪريو تہ $x = 278.27$

ٻنھي پاسي لاگرٿم ڏيڻ سان

$\therefore$ $\text{Log}x = \log (278.27)$

قدم 1: عدد کي 4 انگن تائين ڪٽو جيڪو ٿيندو 278.3

قدم 2: $278.3 = 2.783 \times 10^2$ تنھنڪري ڳڻ آھي 2

قدم 3: مئنٽيسا معلوم ڪرڻ لاءِ ڏھائي تي غور ڪرڻ بنا عدد ٿيندو 2783 لاگرٿم جي جدول استعمال ڪري مئنٽيسا حاصل ڪريو، جيڪو 0.4445 ٿيندو.

قدم 4: ڳڻ ۽ مئنٽيسا کي جوڙ ڪريو جيڪو ٿيندو

$\log x = 2.4445$

حل: (ii) فرض ڪريو تہ $x = 0.07058$

قدم 1: ڏھائي ۽ ٻڙي تي غور ڪرڻ بنا چئن انگن وارو عدد ٿيندو 7058

قدم 2: مليل عدد کي سائنسي لکٽي ۾ تبديل ڪريو تہ ڳڻ ٿيندو. 7058×10^{-2} -2 يا $\bar{2}$

قدم 3: ڏھائي کي غور ۾ آڻڻ بنا 7058 جو مئنٽيسا معلوم ڪريو. لاگرٿم جدول استعمال ڪريو تہ مئنٽيسا ٿيندو 0.8487

قدم 4: ڳڻ ۽ مئنٽيسا کي جوڙ ڪريوتہ حاصل ٿيندو

$\text{Log}\, x = \log (0.07058) = \bar{2}.8487$

ياد رکو تہ

ساڳي ترتيب واري اھم (Significant) عددن جي لاگرٿم جو مئنٽيسا ہہ ساڳيو ٿيندو.

مثال طور: 0.004576, 0.04576, 0.4576, 45.76 وغيره جو مئنٽيسا ہہ ساڳيو آھي.

مشق 2.3

1. هيٺين لاگرٿم جو گڻ ۽ مئنٽيسا معلوم ڪريو.

(i)	8	(ii)	5054	(iii)	9.992
(iv)	765.3	(v)	0.00329	(vi)	0.0000300

2. هيٺين عددن جو لاگرٿم معلوم ڪريو.

(i)	9	(ii)	55.56	(iii)	29.592
(vi)	405.3	(v)	0.00469	(vi)	0.000076

3. جيڪڏهن **log 31.09=1.4926**، ته لاگرٿم جدول استعمال ڪرڻ کان بغير هنن جو ملهه معلوم ڪريو.

(i)	log 3.109	(ii)	log 310.9	(iii)	log 0.003109
(iv)	log 3109	(v)	log 310.942	(vi)	log 310926

2.2.4 ضد لاگرٿم جو تصور ڏيو ۽ جدول استعمال ڪري عددن جو ضد لاگرٿم معلوم ڪريو.

جيڪڏهن $\log x = y$، ته x کي y جو ضد لاگرٿم چئبو آهي ۽ ان کي لکبو $x = \text{antilog}\, y$ ، جيڪڏهن x جو عام لاگرٿم y آهي جيئن

جيڪڏهن $\log x = y$ ته x معلوم ڪرڻ لاءِ ضد لاگرٿم جون جدولون هيٺ ڏنل قاعدن مطابق استعمال ڪندا سين.

قاعدو1: جيڪڏهن گڻ غير ڪاٽو n آهي ته پوءِ ضد لاگرٿم ۾ n+1 انگ سجهي حصي ۾ هوندو.

قاعدو2: جيڪڏهن گڻ ڪاٽو n آهي ته پوءِ ضد لاگرٿم ۾ n-1 ، ٻڙيون ڏهائي جي نشاني کان پوءِ هونديون.

ضد لاگرٿم جو طريقو هيٺين مثالن سان واضح ڪيل آهي.

Antilogarithm Table

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0000	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	1	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2

Antilogarithm Table

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1821	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6

Antilogarithm Table

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2970	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	2	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4374	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	4070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6415	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14

Antilogarithm Table

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7196	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8275	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	####	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

مثال 01 عدد معلوم ڪريو جنهن جو لاگرٿم آهي.

(i) 1.3247 (ii) $\bar{2}.1324$

حل : (i) فرض ڪريو ته $x = \text{anti log}\ (1.3247)$ هتي $\text{Log}\ x = 1.3247$

قدم1: هاڻ گڻ = 1 ۽ مئنٽيسا = 0.3247

قدم2: ضد لاگرٿم جدول ۾ 32. واري قطار کي ظاهر ڪريو.

قدم3: ٽيئن انگ کي جيڪو "4" آهي 32 واري قطار ۾ چوٿين ڪالم جي ڪاٽ سان معلوم ڪريو جيڪو.2109 آهي.

قدم4: وري فرق واري ستين ڪالم ۾ انگ تلاش ڪريو جيڪو 3 آهي

قدم5: 3 کي 2109 ۾ جوڙ ڪريو جيڪو ٿيندو 2112 .

قدم6: جيئن ته گڻ 1 آهي تنهنڪري ڏهائي بن درجن کان پوءِ کاٻي کان ساڄي طرف ڏيو ته گهربل ضد لاگرٿم ٿيندو 21.12 .

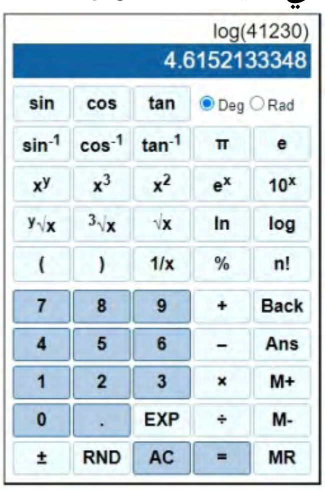
حل (ii): فرض ڪريو ته $x = \text{antilog}\ (\bar{2}.1324)$، هتي $\text{Log}\ \bar{x} = \bar{2}.1324$

هتي گڻ $\bar{2}$ ۽ مئنٽيسا = 0.1324

هاڻ ضد لاگرٿم جدول ۾ 13. واري قطار کي ظاهر ڪريو ۽ ڪالم 2 جي ڪاٽ سان ملندو 1355 ۽ چوٿين ڪالم جو فرق آهي 1 تنهنڪري اهو ٿيندو 1356 = 1 + 1355 جيئن ته گڻ آهي 2- تنهنڪري گهربل عدد آهي 0.01356

2.2.5 ڪئلڪيوليٽر جي استعمال سان لاگرٿم ۽ ضد لاگرٿم معلوم ڪرڻ.

مثال1: ڪئلڪيوليٽر جو استعمال ڪري log (41230) جي قيمت معلوم ڪريو.



حل: فرض ڪريو ته $x = \log 41230$

اسان جو پهريو قدم آهي log بٽڻ کي دٻايو هاڻ (41230) رقم لکو.

ڏنگين بند ڪري "=" واري بٽڻ کي دٻايو

اسان ڏسنداسين ته $\log(41230) = 4.615213335$

تنهنڪري $\log(41230) = 4.615213335$

مثال 02 ڪئلڪيوليٽر استعمال ڪري $\text{antilog}(4.615213335)$ جو ملهه لهو.

حل: اسان ضد لاگرٿم بٽڻ استعمال ڪنداسين.

(i) shift key يا function 2^{nd} بٽڻ کي دٻايو.

(ii) log بٽڻ کي دٻايو.

(iii) 4.615213335 ڏنگين کي گڏ ڪري لکو.

(iv) Enter بٽڻ کي دٻايو

ضد لاگرٿم جو جواب $\text{antilog}(4.615213335) = 41230.00002$

2.3 عام لاگرٿم ۽ قدرتي لاگرٿم ۾ فرق معلوم ڪرڻ.

عام لاگرٿم جو بنياد "10" هوندو آهي، ۽ ان کي $\log_{10}(x)$ جي بدران $\log(x)$ ساں ظاهر ڪيو ويندو آهي. جڏهن ته قدرتي لاگرٿم جو بنياد "e" هوندو آهي(e هڪ غيرناطق عدد آهي جنهن جي قيمت ...2.718281 آهي) ۽ ان کي $\log_e(x)$ جي بدران $\ln x$ سان ظاهر ڪيو ويندو آهي.

مشق 2.4

1. جدول استعمال ڪري عدد معلوم ڪريو جن جا عام لاگرٿم هيٺ ڏجن ٿا.

(i) 0.35749 (ii) 3.56721 (iii) $\bar{1}.7427$

(iv) 5.8196 (v) $\bar{4}.3847$ (vi) 0.9187

2. ڪئلڪيوليٽر استعمال ڪري هيٺين عددن جا لاگرٿم معلوم ڪريو.

(i) 900 (ii) 45.54 (iii) 36582

(iv) 826.3 (v) 0.00851 (vi) 0.000097

3. ڪئلڪيوليٽر استعمال ڪري هيٺين مان x جو ملهه معلوم ڪريو.

(i) $\log x = 1.7505$ (ii) $\log x = 0.6609$ (iii) $\log x = \bar{1}.6132$

(iv) $\log x = 3.4800$ (v) $\log x = \bar{7}.0038$ (vi) $\log x = 0.2665$

2.4 لاگرٿم جا قاعدا (Laws of Logarithms)

2.4.1 هيٺيان لاگرٿم جا قاعدا ثابت ڪريو.

(i) $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$

(ii) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

(iii) $\log_a m^n = \text{n} \log_a m$

(iv) $\log_a n = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$

(i) $m, n, a, a > 0, \ a \neq 1,$ ۽ $\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$

ثابتي: فرض ڪريو تہ $\log_a m = x$ ۽ $\log_a n = y$ تہ پوءِ

$m = a^x$ ۽ $n = a^y$

هاڻ $mn = a^x \cdot a^y$

(سگهن جو قاعدو) $mn = a^{x+y}$

سگهہ واري صورت کي لاگرٿم واري صورت ۾ تبديل ڪرڻ سان

$\log_a (mn) = x+y$

تنهنڪري $\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$

> ٻن عددن جي ضرب اپت جو لاگرٿم انهن جي الڳ الڳ لاگرٿم جي جوڙ برابر آهي.

(ii) حقيقي عدد m, n, a ۽ $a > 0, a \neq 1$ لاءِ

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

ثابتي: فرض ڪريو تہ $\log_a n = y$ ۽ $\log_a m = x$

تہ پوءِ $m = a^x$ ۽ $n = a^y$

هاڻ $\dfrac{m}{n} = \dfrac{a^x}{a^y}$

$\dfrac{m}{n} = a^{x-y}$

سگهہ واري صورت کي لاگرٿم واري صورت ۾ تبديل ڪرڻ سان

$\Rightarrow \quad \log_a \dfrac{m}{n} = x-y$

تنهنڪري $\log_a \dfrac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$

> ٻن عددن جي ونڊ اپت جو لاگرٿم،انهن جي الڳ الڳ لاگرٿم جي تفاوت برابر آهي.

(iii) حقيقي عدد m, n, a ۽ $a > 0, a \neq 1$ لاءِ

$$\log_a m^n = \text{n} \log_a m$$

ثابتي: فرض ڪريو تہ $\log_a m = x$

تہ پوءِ $m = a^x$

هاڻ $m^n = (a^x)^n$

$m^n = a^{nx}$

سگھہ واري صورت کي لاگرٿم واري صورت ۾ تبديل ڪرڻ سان

$\Rightarrow \quad \log_a m^n = nx$

تنهنڪري $\log_a m^n = n\log_a m$

عددن جي n سگھہ جو لاگرٿم،انهيءَ عدد جي لاگرٿم کي n سان ضرب جي برابر آهي.

(iv) بنيادن جي بدلائڻ واري خاصيت

حقيقي عددن m, n, a ۽ $a > 0, a \neq 1$

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

ثابتي: فرض ڪريو تہ $\log_a n = x$

تہ پوءِ $n = a^x$

بنياد b تي ٻنهي طرف لاگرٿم وٺڻ سان

$\log_b n = \log_b a^x$

$\log_b n = x\log_b a \quad \therefore \quad \log_b m^n = n\log_b m$

$$x = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

تنهنڪري $$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

مثال 01 $\log_a (2bc)$ کي لاگرٿم جي جوڙ ۾ ظاهر ڪريو.

لاگرٿم جو قاعدو استعمال ڪرڻ سان

$\log_a (2bc) = \log_a 2 + \log_a b + \log_a c,$

لاگرٿم جي جوڙ ۾ ظاهر ڪيو ويو.

مثال 02 $\log(52.5 \times 63 \times 4.567)$ کي لاگرٿم جي جوڙ ۾ ظاهر ڪريو.

حل: لاگرٿم جو قاعدو استعمال ڪرڻ سان

$\log(52.5\times63\times4.567) = \log 52.5 + \log 63 + \log 4.567$

لاگرٿم جي جوڙ ۾ ظاهر ڪيو ويو.

نوٽ ڪريو ته

(i) $\log_a(mn) \neq \log_a m \times \log_a n$
(ii) $\log_a m + \log_a n \neq \log_a (m+n)$

مثال 03 $\log\left(\frac{213.1}{34.22}\right)$ ڪي لاگرتم تفاوت ۾ ظاهر ڪريو.

حل: لاگرتم جي تفاوت جو قاعدو استعمال ڪريو ته $\log\left(\frac{213.1}{34.22}\right)$ ٿيندو

$$\log\left(\frac{213.1}{34.22}\right) = \log 213.1 - \log 34.22.$$

لاگرتم جي تفاوت ۾ ظاهر ڪيوويو.

مثال 04 $\log_a 2^x$ ڪي ضرب واري صورت ۾ ظاهر ڪريو.

حل: اسان کي خبر آهي ته $\log_a m^n = n\log_a m$

$$\therefore \log_a 2^x = x \log_a 2$$

مشق 2.5

1. هيٺين لاگرتم کي $\log_a x, \log_a y$ ۽ $\log_a z$ جي رقمن جي صورت ۾ لکو.

(i) $\log_a \frac{x^3 y}{z^2}$ (ii) $\log_a \sqrt{xy^2 z}$

(iii) $\log_a \left(\sqrt[3]{x^{-1}\sqrt{y^3}} \div \sqrt{y^3\sqrt{x}}\right)$ (iv) $\log_a \frac{x\sqrt{y^3}}{\sqrt[3]{z^2 x^5}}$

2. هيٺين کي هڪ لاگرتم جي صورت ۾ گهٽايو.

(i) $\log_a 20 - \log_a 15 + \frac{1}{2}\log_a \frac{9}{2}$

(ii) $\frac{1}{3}\log_a (x-1)^3 + \frac{10}{9}\log_a (x+1) - \frac{1}{9}\log_a (x+1)$

(iii) $\log x - 2\log x + 3\log(x+1) - \log(x^2-1)$.

.3 جيڪڏهن $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ ۽ $\log 5 = 0.6990$ ته جدول استعمال ڪرڻ کان بغير هيٺين جون قيمتون معلوم ڪريو.

(i) $\log 15$ (ii) $\log 64$ (iii) $\log\sqrt{5\times 2}$ (iv) $\log 48$

(v) $\log\sqrt{18}$ (vi) $\log 30$ (vii) $\log\frac{8}{3}$ (viii) $\log\frac{5}{\sqrt{3}}$

.4 هيٺيان ثابت ڪريو.

(i) $\log_b m\times\log_m a = \log_b a$ (ii) $\log_a b\times\log_c a = \log_c b$

(iii) $\log_b a.\log_c b\frac{1}{\log_c a} = 1$ (iv) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

.5 هيٺين جي چڪاس ڪريو.

(i) $\log_5 7\times\log_7 25 = 2$ (ii) $\log_3 2\times\log_2 81 = 4$

(iii) $\log_5 343\times\log_7 25 = 6$ (iv) $\log_6 16\times\log_2 216 = 12$

2.5 لاگرٿم جي قاعدن جا استعمال

2.5.1 لاگرٿم جي قاعدن کي استعمال ڪري، ضرب ونڊ ۽ سگهن جي ڏگهن طريقن کي جوڙ ، ڪٽ وغيره جي آسان طريقن ۾ تبديل ڪريو.

هيٺيان مثال لاگرٿم جي قاعدن جي استعمال کي سمجهڻ ۾ مدد ڪندا.

مثال 01 لاگرٿم استعمال ڪري $(8.573)(28.74)$ جي قيمت معلوم ڪريو.

حل: فرض ڪريو ته $x = (8.573)(28.74)$

ٻنهي طرف لاگرٿم وٺڻ سان اسان کي ملندو

$$\therefore \quad \log x = \log(8.573)(28.74)$$

$$\Rightarrow \quad \log x = \log(8.573) + \log(28.74)$$

$$\Rightarrow \quad \log x = 0.9332 + 1.4585$$

$$\Rightarrow \quad \log x = 2.3917$$

$$\therefore \quad x = \text{antilog}(2.3917)$$

تنهنڪري $x = 246.4$

مثال 02: لاگرٿم جي مدد سان $\frac{213.1}{34.22}$ جو ملهہ معلوم ڪريو.

حل: فرض ڪريو تو $x=\frac{213.1}{34.22}$

ٻنهي طرف لاگرٿم وٺڻ سان اسان کي ملندو

$$\log x=\log\left(\frac{213.1}{34.22}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \log x=\log\left(\frac{213.1}{34.22}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \log x=\log 213.1-\log 34.22, \quad \left(\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log a-\log b\right)$$

لاگرٿم جدول کي استعمال ڪرڻ سان

$$\log x = 2.3286 - 1.5343 = 0.7943$$

$$\Rightarrow \quad \log x = 0.7943,$$

ضد لاگرٿم ڪرڻ سان اسان کي ملندو

$$x = \text{antilog }(0.7943)$$

ضد لاگرٿم جي جدول استعمال ڪرڻ سان اسان کي ملندو $x = 6.227$ (گڻ=0 ۽ 0.7943= مئنٽيسا

تہ $\frac{213.1}{34.22}$ جو گهربل ملهہ مليو 6.227

مثال 03 لاگرٿم جا قاعدا استعمال ڪري $\sqrt{\frac{3.41\times 37.92}{2.34}}$ جو ملهہ لهو.

حل: فرض ڪريو تہ $x=\sqrt{\frac{3.41\times 37.92}{2.34}}$

ٻنهي طرف لاگرٿم وٺڻ سان اسان کي ملندو

$$\log x = \log\left(\frac{3.41\times 37.92}{2.34}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{3.41\times 37.92}{2.34}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(\log 3.41 + \log 37.92 - \log 2.34)$$
$$= \frac{1}{2}(0.5325 + 1.5788 - 0.3692)$$
$$= \frac{1}{2}(1.7424)$$
$$= 0.8712$$
$$x = \text{antilog }(0.8712)$$
$$= 7433$$
$$= 7.433$$

مثال 04 4^5 ۾ انگن جو تعداد معلوم ڪريو.

حل: فرض ڪريو تہ $n=4^5$

ٻنهي طرف لاگرٿم وٺڻ سان اسان کي ملندو

$\therefore \quad \log n = \log 4^5, \qquad (\because \log a^n = n\log a)$

$\Rightarrow \quad \log n = 5\log 4,$

$\Rightarrow \quad \log n = 5\times 0.6021,$ (جيئن تہ $\log 4 = 0.6021$)

$\Rightarrow \quad \log n = 3.0105,$

جيئن تہ انگن جو تعداد = ڳڻ + 1

تنهنڪري انگن جو تعداد ٿيندو $4^5 = 3+1=4$

مشق 2.6

.1 لاگرتم جي استعمال سان هيٺين جا ملهہ لهو.

(i) 57.86×4.385 (ii) $25.753\times 0.5341\times 490.8$ (iii) $\dfrac{25.753}{0.5341}$

(iv) $\dfrac{(790.6\times 30.32)}{25.753}$ (v) $\dfrac{99.87}{(8.369)\times(0.785)}$ (vi) $\sqrt[5]{2.709}\times\sqrt[7]{1.239}$

(vii) $\dfrac{(26.62)^{\frac{1}{2}}\times(87.19)^{3}}{\sqrt{69.53}}$ (viii) $\dfrac{(4308)^{3}\times\sqrt{80.06}}{(0.3387)^{3}}$

.2 هيٺين ۾ انگن جو تعداد معلوم ڪريو.

(i) 4^{12} **(ii)** 7^{25} **(iii)** 3^{30} **(iv)** 5^{20} **(v)** 9^{30}

مشق ورجايو 2

.1 هيٺين بيانن کي ڌيان سان پڙهو ۽ درست بيانن لاءِ T تي گولو پايو ۽ غلط بيانن لاءِ F تي گولو پايو.

(i) 0.025 کي سائنسي لکٽي ۾ 2.5×10^{3} لکي سگهجي ٿو. T/F

(ii) لاگرتم البيروني روشناس ڪرايو. T/F

(iii) ڪنهن عدد جي لاگرتم ۾ سڄي حصي کي ان جو ڳڻ چئبو آهي. T/F

(iv) لاگرتم عدد جو مئنٽيسا غيرڪاٽو ہ ٿي سگهجي ٿو. T/F

(v) $\log_a x = y \Leftrightarrow a^{y} = x.$ T/F

.2 هيٺيان خال ڀريو.

(i) جنهن لاگرٿم جو بنياد 10 هجي ان کي چئبو ___________.

(ii) $\log 1 =$ ___________ .

(iii) لاگرٿم جي اٽڪل حصي کي سڏبو ___________.

(iv) $\log 512 =$ ___________ .

(v) $\log_a m \times \log_m n =$ ___________ .

(vi) $x = \log_a y$ جي سگهه واري صورت آهي ___________.

(vii) $a^{10} = y$ جي لاگرٿم صورت آهي ___________.

(viii) $\log_b a \times \log_a b =$ ___________ .

(ix) $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) =$ ___________

(x) $\log(10 \times 10) =$ ___________ .

.3 درست جواب تي (✓) جو نشان لڳايو.

(i) جيڪڏهن $\log_{10} x = 4$ ته $x =$ ___________

(a) 500 (b) 100 (c) 1000 (d) 10000

(ii) $\log 54.58$ جو ڳڻ آهي ___________.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4

(iii) عام لاگرٿم جو بنياد آهي ___________.

(a) 5 (b) 10 (c) e (d) 100

(iv) $\log xyz =$ ___________ .

(a) $\log x \log y \log z$ (b) $\log x + \log y + \log z$

(c) $\log(xy)^z$ (d) $\log x - \log y - \log z$

(v) 0.00789 جي سائنسي لکڻي آهي:

(a) 7.89×10^{-3} (b) 7.89×10^{3}

(c) 0.789×10^{-2} (d) 78.9×10^{-4}

(vi) جيڪڏهن $\log x = 2$ تہ $x =$ __________

(a) 200 (b) 1000 (c) 100

(d) 2/10

(vii) جيڪڏهن $\log_2 8 = x$ تہ $x =$ __________

(a) 64 (b) 3 (c) 3

(d) 2

(viii) قدرتي لاگرٿم جو بنياد آهي ____________.

(a) 10 (b) e (c) π

(d) 5

(ix) $3^5 = 243$ کي لاگرٿم صورت ۾ لکبو ______________.

(a) $\log_3 5 = 243$ (b) $\log_3 243 = 5$

(c) $\log_5 243 = 12$ (d) $\log_5 3 = 243$

خلاصو

- جيڪڏهن $a^x = y$ تہ y جو لاگرٿم a بنياد تي x کي چئبو ۽ ان کي هن ريت لکبو

  $\log_a y = x,\ a > 0, y > 0$ ۽ $a \neq 1$

- عام لاگرٿم جو بنياد 10 آهي، ان کي برگز لاگرٿم چئبو آهي. گهڻو ڪري $\log_{10} x$ جي بدران $\log x$ لکيو ويندو آهي. قدرتي لاگرٿم جو بنياد e آهي (هڪ غيرناطق عدد جنهن جي قيمت ...2.7182818 آهي ان کي $\log_e x$ جي بدران $\ln x$ لکبو آهي.

- $\log x = y \Leftrightarrow 10^y = x$

- $\ln x = y \Leftrightarrow e^{y} = x$
- لاگرتم ۾ سڄي عددي حصي کي گڻ چئبو آهي ۽ اڻپوري حصي کي مئنٽيسا چئبو آهي.
- لاگرتم عدد جوگڻ 1 کان وڌيڪ هميشہ غير ڪاٽو هوندو آهي.
- لاگرتم عدد جوگڻ 1 کان گهٽ هميشہ ڪاٽو هوندو آهي.
- لاگرتم جو ڪاٽو گڻ کي 1- 2- ,3- جي بدران $\bar{1}$ $\bar{2}, \bar{3}$ لکبو آهي.
- لاگرتم عدد جن کي انگن جي هڪ جهڙي ترتيب هجي تن جو مئنٽيسا پڻ ساڳيو ٿيندو آهي.
- عدد جيڪو مليل لاگرتم سان مشابهت رکي ان کي ضد لاگرتم چئبو آهي.
- لاگرتم جا قاعدا:

(i) $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$

(ii) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

(iii) $\log_a m^n = n\log_a m$

(iv) $\log_a n = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$

هي قاعدا هن ريت بہ لکي سگهجن ٿا: $\log_b a . \log_a n = \log_b n$

يونٽ 3

آلجبري اظهار ۽ فارمولا

Algebraic Expression and Formulas

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته:

- ناطق اظهار، ناطق عددن وانگر هوندا آهن جي ڄاڻ حاصل ڪندا.
- ناطق اظهار جي تعريف ٻن گهڻ رقمين $p(x)$ ۽ $q(x)$ جي ونڊ اپت (Quotient) $\frac{p(x)}{q(x)}$ (جنهن ۾ $q(x)$ گهٽ رقمي ٻڙي نه آهي) بيان ڪندا.
- ڏنل آلجبري اظهارن جي چڪاس ڪري سگهندا ته
  - گهڻ رقمي آهي يا نه
  - ناطق اظهار آهي يا نه
- ناطق اظهار کي $\frac{p(x)}{q(x)}$ جي طور وضاحت ڪندا، جيڪڏهن $p(x)$ ۽ $q(x)$ مڪمل عددي سِرَن سان گهڻ رقميون آهي جن ۾ ڪو به مشترڪ جزو نه هجي.
- چڪاس ڪندا ته ناطق آلجبري اظهار سادي صورت ۾ آهي يا نه.
- ناطق اظهار کي سادي صورت ۾ گهٽائي سگهندا.
- ناطق اظهار جو جوڙ، ڪٽ ۽ ضرب اپت معلوم ڪري سگهندا.
- هڪ ناطق اظهار کي، ٻي ناطق اظهار سان ونڊ ڪري سادي صورت ۾ آڻي سگهندا.
- خاص حقيقي عددن سان، آلجبري اظهارن جي قيمت معلوم ڪري سگهندا.
- فارمولا بابت ڄاڻ حاصل ڪري سگهن.
  - $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ ۽ $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$.
  - $'a^2 + b^2'$ ۽ $'ab'$ جو ملهه معلوم ڪن، جڏهن $(a+b)$ ۽ $(a-b)$ جا ملهه معلوم هجن.

- فارمولا بابت ڄاڻ حاصل ڪري سگهن

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$

- $a^2 + b^2 + c^2$ جو ملهه معلوم ڪريو جڏهن $a+b+c$ ۽ $ab + bc + ca$ جو ملهه مليل هجي.
- $a+b+c$ جو ملهه معلوم ڪريو، جڏهن $a^2 + b^2 + c^2$ ۽ $ab + bc + ca$ جو ملهه مليل هجي.
- $ab + bc + ca$ جو ملهه معلوم ڪريو، جڏهن $a^2 + b^2 + c^2$ ۽ $a+b+c$ جو ملهه مليل هجي.
- فارمولا بابت ڄاڻ حاصل ڪري سگهن

$(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3$

  - $a^3 \pm b^3$ جو ملهه معلوم ڪريو، جڏهن $'a \pm b'$ ۽ $'ab'$ جو ملهه مليل هجي.
  - $x^3 \pm \frac{1}{x^3}$ جو ملهه معلوم ڪريو، جڏهن $x \pm \frac{1}{x}$ جو ملهه مليل هجي.

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$

  - $x+\frac{1}{x}$ ۽ $x^2+\frac{1}{x^2}-1$ جي ضرب معلوم ڪن.
  - $x-\frac{1}{x}$ ۽ $x^2+\frac{1}{x^2}+1$ جي ضرب معلوم ڪن
  - لاڳيتي ضرب معلوم ڪري سگهندا.

$(x+y)(x-y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2).$

- غير ناطق عدد ۽ انهن جا استعمال جي سڃاڻپ ڪري سگهن.
- ٻي درجي جي غير ناطق عدد جي وضاحت ڪن.
- بنيادي عملن ڪي ٻي درجي جي غير ناطق عددي اظهارن جي چيدن ڪي ناطق ڪن ۽ ان جو جائزو وٺي سگهن.
- چيد ڪي ناطق ڪرڻ جي جي عمل جي وضاحت ڪن، ۽ $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ نموني جي اظهار جي چيد ڪي ناطق ڪن ۽ جڏهن ته x ۽ y قدرتي عدد a ۽ b سچا عدد آهن.

3.1 آلجبري اظهار

اسان اڳيئي گذريل ڪلاسن ۾ آلجبري اظهارن بابت پڙهيو آهي اچو ته ان جي قسمن تي بحث ڪريون

آلجبري اظهار هينين ٽن قسمن جا ٿيندا آهن.

(a) گهڻ رقمي اظهار يا گهڻ رقمي. (Polynomial Expression or Polynomial)

(b) ناطق اظهار (Rational Expression)

(c) غير ناطق اظهار (Irrational Expression)

(a) گهڻ رقمي اظهار يا گهڻ رقمي. (Polynomial Expression or Polynomial)

هڪ گهڻ رقمي ڪنهن بدلجندڙ x ۾ هينئين نموني لکي سگهجي ٿي

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} \ldots + a_{n-1}x^1 + a_n$$

جتي $'n'$ هڪ غير منفي (يعني واڌو) سڄو عدد آهي ۽ عددي سرا (منڊ) $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ حقيقي عدد آهن.

اڪثر ڪري هڪ گهڻ رقميءَ کي $p(x)$ لکبو آهي، تنهن ڪري مٿي ڏيڪاريل الجبري اظهار کي $P(x)=a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} \ldots + a_{n-1}x^1 + a_n$ ظاهر ڪبو.

جيڪڏهن $a_0 \neq 0$، ته ان گهڻ رقمي کي n درجي جي گهڻ رقمي ۽ a_0 کي گهڻ رقمي جو عددي سرو (منڊ) چئبو آهي.

گهڻ رقمين ۽ انجي درجن جا ڪجھ مثال هيٺ ڏجن ٿا.

(i) $8x-5$ درجو 1 آهي (ii) $x^4-2x^3+5x^2+1$ درجو 4 آهي.

(iii) $6x^{31}+3$ درجو 31 آهي (iv) $12x^4 - x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 3x + 1$ درجو 4 آهي.

(v) 4 درجو 0 آهي. (vi) $\sqrt{10}x^{12} + 2x^6 - x^5 - 18x + 1$ درجو 12 آهي.

$x^3 - x^3y^2 + x^2y^2 - 10$ ٻن متغيرن (بدلجندڙن) Variables x ۽ y سان هڪ آلجبري اظهار جو درجو 5 آهي.

ساڳيءَ طرح $x^3y^5z^2 - x^3y^2z^3 + x^2yz - 34$ ٽن متغيرن بدلجندڙن (Variables) x, y ۽ z سان هڪ آلجبري اظهار جو درجو 10 آهي.

(ڇو جو هن آلجبري اظهار جي سڀني رقمن مان سگهن جو وڏي ۾ وڏو جوڙ 10 آهي).

ياد رکو تہ:

- جيڪڏهن گهڻ رقميءَ ۾ صرف هڪ رقم موجود هجي تہ انکي هڪ رقمي (Monomial) اظهار چئبو آهي، مثال طور : $3x, 7xy, 6xy^2z^5$ وغيره.
- جيڪڏهن گهڻ رقميءَ ۾ صرف ٻہ رقم موجود هجن تہ انکي ٻہ رقمي (Binomial) اظهار چئبو آهي، مثال طور : $x+4, 5x+y, 7x-3$ وغيره.
- جيڪڏهن گهڻ رقميءَ ۾ صرف ٽي رقم موجود هجي تہ انکي ٽي رقمي (Trinomial) اظهار چئبو آهي، مثال طور : x^2-2x+1 ، $\frac{1}{\sqrt{3}}x^2y^2-5xy+3$ وغيره.
- جيڪڏهن گهڻ رقميءَ ۾ چار يا وڌيڪ رقمون موجود هجن تہ انکي ڪيترائي رقمي (Multinomial) اظهار چئبو آهي.

(b) ناطق اظهار (Rational Expression)

اهڙي آلجبري اظهار جيڪو $\frac{p(x)}{q(x)}$ جي صورت ۾ لکي سگهجي جنهن ۾ $p(x)$ ۽ $q(x)$ گهڻ رقميون هجن ۽ $q(x) \neq 0$ هجي انکي ناطق آلجبري اظهار چئبو آهي.

مثال طور: $\frac{x+1}{x}$ ، $\frac{x^2-x+1}{x-5}$ ، $\frac{\sqrt{3}x^2-5x+4}{x^2+6x-5}$ وغيره.

نوٽ: هر گهڻ رقمي اظهار ناطق اظهار آهي پر هر ناطق اظهار گهڻ رقمي اظهار نہ آهي.

(c) غير ناطق اظهار (Irrational Expression)

اهڙي آلجبري اظهار جيڪو $\frac{p(x)}{q(x)}$ جي صورت ۾ لکي نہ سگهجي جنهن ۾ $p(x)$ ۽ $q(x)$ گهڻ رقميون هجن ۽ $q(x) \neq 0$ هجي انکي غير ناطق آلجبري اظهار چئبو آهي.

مثال طور: $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ، $\frac{\sqrt{x}+1}{x}$ ، $\frac{\sqrt{x^3}+2x+3}{\sqrt{x}-9}$ ، $\sqrt{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}$ وغيره.

3.1.1 اهو معلوم هجي تہ ناطق آلجبري اظهار ناطق عددن وانگر عمل ڪندا آهن.

جيئن p ۽ q ٻہ ناطق عدد آهن تہ پوءِ $\frac{p}{q}$ سچا عدد ٿي سگهن ٿا يا نہ تنهن ڪري عددن جو سرشتو وڌايو آهي ۽ $\frac{p}{q}$ کي ناطق جي صورت ۾ ظاهر ڪيو آهي، جتي $p,q \in Z$ جنهن ۾ $q \neq 0$

ساڳيءَ طرح: جيڪڏهن $p(x)$ ۽ $q(x)$ ٻه گهڻ رقميون آهن ته لازمي نه آهي ته $\frac{p(x)}{q(x)}$ به گهڻ رقمي هجي

3.1.2 ناطق اظهار جي وضاحت ڪريو جيئين $\frac{p(x)}{q(x)}$ وند اپت آهي $p(x)$ ۽ $q(x)$ جي، جتي $q(x) \neq 0$

جيئن اسين ڄاڻون ٿا $\frac{p(x)}{q(x)}$ صورت ۾ جتي $p(x)$ ۽ $q(x)$ ٻه گهڻ رقميون آهن، $q(x)$ غير ٻڙي گهڻ رقمي آهي. انکي ناطق اظهار چئبو آهي.

مثال طور: $\frac{x^2-5}{3x^2+4}$ ، $3x^2+4 \neq 0$ ناطق اظهار آهن.

3.1.3: چڪاس ڪريو ته ڏنل آلجبري اظهار

(i) گهڻ رقمي آهي يا نه (ii) ناطق اظهار آهي يا نه

هينيان مثال گهڻ رقمي ۽ ناطق اظهارن کي سڃاڻڻ مدد ڪندا.

مثال 01

(i) $2x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ (ii) $6x^3 - 4x^2 - 5x$

حل: (i) $2x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$

اهو گهڻ رقمي اظهار نه آهي ڇاڪاڻ ته ٻي رقم کي سگهه واڌو سجو عدد نه آهي.

حل: (ii) $6x^3 - 4x^2 - 5x$

اهو گهڻ رقمي اظهار آهي ڇاڪاڻ ته هر رقم کي سگهه واڌو سجو عدد آهي.

مثال 02 ناطق اظهار آهي يا نه

(i) $\frac{x-2}{3x^2+1}$ (ii) $6x^3 - \frac{1}{\sqrt{x+4}}$

حل (i) $\dfrac{x-2}{3x^2+1}$

انس ۾ چيد بئي گهڻ رقمي اظهار آهن، تنهنڪري اهو ناطق اظهار آهي.

حل (ii) $6x^3-\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$

اهو ناطق اظهار نہ آهي چاڪاڻ تہ بي رقم جو چيد گهڻ رقمي اظهار نہ آهي.

3.1.4 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ کي انجي سادي صورت ۾ وضاحت ڪريو جڏهن $p(x)$ ۽ $q(x)$ گهڻ رقمي اظهار آهن انهن کي عددي سرا(منڊ) (Coefficient) سچا عدد (Integral) آهن ۽ ڪو عام جزو (Common factor) نہ آهي.

ناطق اظهار کي مختصر حالت ۾ تڏهن چونداسين جڏهن $p(x)$ ۽ $q(x)$ وٽ 1 کان علاوه ڪو بہ مشترڪ جزو نہ آهي.

مثال طور: $\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}$ جي ننڍي ۾ ننڍي صورت $\dfrac{x+1}{x-1}$ آهي.

3.1.5 چڪاس ڪريو تہ ڏنل ناطق الجبري اظهار سندس ننڍي ۾ ننڍي صورت ۾ آهي. $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ ناطق اظهار جي چڪاس ڪرڻ لاءِ $p(x)$ ۽ $q(x)$ جا عام جزا (Common factors) ڏسو.

جيڪڏهن عام جزو 1 آهي تہ ناطق الجبري اظهار ننڍي صورت ۾ آهي.

مثال طور: $\dfrac{x+1}{x-1}$ ننڍي ۾ ننڍي صورت ۾ آهي چاڪاڻ تہ $x+1$ ۽ $x-1$ جو عام جزو 1 آهي.

3.1.6 ناطق اظهارن کي سنڌن سادي صورت ۾ آڻيو:

فرض ڪريو ته $\frac{p(x)}{q(x)}$ هڪ ناطق اظهار آهي جنهن ۾ $q(x) \neq 0$

قدم1: جيڪڏهن ممڪن هجي ته $p(x)$ ۽ $q(x)$ اظهارن جا جزا لهو.

قدم2: جيڪڏهن ممڪن هجي ته $p(x)$ ۽ $q(x)$ جا عام جزا لهو.

قدم3: $p(x)$ ۽ $q(x)$ جا عام جزا پاڻ ۾ ڪٽيو.

مثال 01 هيٺين ناطق اظهارن کي ساديءَ صورت ۾ آڻيو.

(i) $\frac{(x^2-x)(x^2-5x+6)}{2x(x^2-3x+2)}$ (ii) $\frac{5(x^2-4)}{(3x+6)\,(x-3)}$

حل: (i)

$$\frac{(x^2-x)(x^2-5x+6)}{2x(x^2-3x+2)}$$

$$=\frac{x(x-1)}{2x}\cdot\frac{x^2-3x-2x+6}{x^2-2x-x+2}$$

$$=\left(\frac{x-1}{2}\right)\cdot\frac{\{x(x-3)-2(x-3)\}}{\{x(x-2)-1(x-2)\}}$$

$$=\frac{(x-1)(x-3)(x-2)}{2(x-2)(x-1)}$$

$$=\frac{(x-3)}{2}$$

$=\frac{1}{2}(x-3)$ گهربل سادي صورت آهي.

حل: (ii)

$$\frac{5(x^2-4)}{(3x+6)\,(x-3)}$$

$$=\frac{x^2-4}{x-3}\cdot\frac{5}{3x+6}$$

$$=\frac{x^2-2^2}{x-3}\cdot\frac{5}{3(x+2)}$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)}{x-3} \cdot \frac{5}{3(x+2)}$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)}{x-3} \cdot \frac{5}{3(x+2)} \qquad x \neq -2$$

$$= \frac{5(x-2)}{3(x-3)}$$ گهربل سادي صورت آهي

3.1.7 ناطق اظهارن جي جوڙ، ڪٽ ۽ ضرب اپت لهو.

ناطق اظهارن جي جوڙ، ڪٽ ۽ ضرب هيٺين مثالن جي مدد سان ڪبي آهي.

مثال 01 $\frac{3}{x+1} + \frac{4x}{x^2-1}$

حل:

$$\frac{3}{x+1} + \frac{4x}{x^2-1}$$

$$= \frac{3}{x+1} + \frac{4x}{(x-1)(x+1)}$$ جزا

$$= \frac{3(x-1)+4x}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{3x-3+4x}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{7x-3}{(x-1)(x+1)} \qquad x \neq 1, -1.$$

$$= \frac{7x-3}{x^2-1}$$ گهربل سادي صورت آهي

مثال 02 $\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^3-1}$

حل:

$$=\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^3-1}$$

$$=\frac{1}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$ جزا

$$=\frac{(x^2+x+1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{x^2+x+1-x-1}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{x^2}{(x+1)(x^3-1)}$$ گهربل سادي صورت آهي

مثال 03 $\frac{x^2}{x^2+x-12}\cdot\frac{x^2-9}{2x^2}$

حل:

$$\frac{x^2}{x^2+x-12}\cdot\frac{x^2-9}{2x^2}, x\neq 0$$

$$=\frac{x^2}{x^2+4x-3x-12}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{2x^2}$$

$$=\frac{1}{x(x+4)-3(x-4)}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{2}$$

$$=\frac{1}{(x+4)(x-3)}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{2}$$

$$=\frac{(x+3)}{2(x+4)}$$ گهربل سادي صورت آهي

3.1.8 هڪ ناطق اظهار کي ٻئي ناطق اظهار سان ونڊ ڪري ساديءَ صورت ۾ آڻڻ:

هڪ ناطق اظهار کي ٻئي ناطق اظهار سان ونڊ ڪرڻ جي ترتيب، پهرين ونڊ کي ضرب ۾ بدلائي ساديءَ صورت ۾ آڻبو:

مثال 01 $\dfrac{3x-9y}{2x+10y} \div \dfrac{x^2-3xy}{4x+20y}$

حل:

$$\dfrac{3x-9y}{2x+10y} \div \dfrac{x^2-3xy}{4x+20y}$$

ضرب ۾ بدلائڻ $= \dfrac{3x-9y}{2x+10y} \times \dfrac{4x+20y}{x^2-3xy}$

گهربل سادي صورت آهي $= \dfrac{3(x-3y)}{2(x+5y)} \times \dfrac{4(x+5y)}{x(x-3y)} = \dfrac{6}{x}$

3.1.9 ڪجھ مخصوص حقيقي عددن سان آلجبري اظهارن جو ملهه لهو:

ڪجھ مخصوص حقيقي عددن سان آلجبري اظهارن جو ملهه لهڻ هيٺ ڏنل مثالن ۾ واضح ڪيل آهي.

مثال 01 $\dfrac{x^2+yz}{x^3+y^2-7yz^4}$ جو ملهه لهو جڏهن $x=3$, $y=2$ ۽ $z=-1$

مليل $x=3$, $y=2$ ۽ $z=-1$

حل

$$= \dfrac{x^2+yz}{x^3+y^2-7yz^4}$$

$$= \dfrac{(3)^2+(2)(-1)}{(3)^3+(2)^2-7(2)(-1)^4}$$

$$= \dfrac{9-2}{27+4-14} = \dfrac{7}{17}$$

مشق 3.1

1. ٻڌايو ته هيٺ آلجبري اظهار گهڻ رقمي آهن يا نه:

(i) $2xy^2-3x^2+5y^3-6$ (ii) $3xy^{-2}$

(iii) $6x^2-10x+7-\sqrt{45}$ (iv) $5\sqrt{x}-x+5x^2$

(v) $\dfrac{2}{x+2}$ (vi) $\dfrac{2}{x}+x^3-2$

2. ٻڌايو ته هيٺ ڏنل آلجبري اظهار ناطق آهن يا نه:

(i) $\dfrac{x^2+2x+3}{x-4}$ (ii) $\dfrac{x^2+5\sqrt{x}-2x}{3x^2+5x+4}$ (iii) $\dfrac{13x^2-9x+4}{x^2+5x+\sqrt{7}}$

(iv) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ (v) $\dfrac{7}{x+7}$ (vi) $5\sqrt{x}-x+5x^2$

3. هينيان ساديءَ صورت ۾ آڻيو:

(i) $\dfrac{p^2-100}{p\ +10}$ (ii) $\dfrac{3a^2+3ab}{3a^2+6ab+3b^2}$ (iii) $\dfrac{(a-b)}{(a+b)}\times\dfrac{(a^2+ab)}{(2a^2-2b^2)}$

(iv) $\dfrac{(x+y)^2-z^2}{x+y+z}$ (v) $\dfrac{(m^2-6m)(3m+15)}{2m-12}$ (vi) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x-2}$

4. هينيان ساديءَ صورت ۾ آڻيو:

(i) $\dfrac{4x-1}{2x-2}+\dfrac{4x+1}{2x+2}$ (ii) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x+3}$ (iii) $\dfrac{xy}{xy+1}+\dfrac{xy+1}{xy-1}$

(iv) $\dfrac{x-2}{x+3}-\dfrac{x+1}{x+6}$ (v) $\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a-b}$ (vi) $\dfrac{4y}{y^2-1}-\dfrac{y+1}{y-1}$

5. ساديءَ صورت ۾ آڻيو:

(i) $\left(\dfrac{x^2}{4y^2-x^2}+1\right)\div\left(1-\dfrac{x}{2y}\right)$ (ii) $\dfrac{x+3}{3y-2x}\cdot\dfrac{4x^2-9y^2}{xy+3y}$

(iii) $\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}\times\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ (iv) $\dfrac{8(y+3)}{9}\times\dfrac{12(y+1)}{4(y+3)}\div\dfrac{8(y+1)}{5}$

(v) $\dfrac{q^2-25}{q^2-3q}\div\dfrac{q^2+5q}{q^2-9}$ (vi) $\dfrac{4}{z^2-4z-5}\div\dfrac{2}{4z^2-4}$

.6 $t+\frac{1}{t}$ جو ملهه لهو، جڏهن $t=\frac{x-y}{x+y}$ هجي.

.7 هيٺين جو ملهه لهو:

(i) $\frac{5(x+y)}{3x^2\sqrt{y}+6}$, if $x=-4$, $y=9$

(ii) $\frac{42ab^2c^3}{3a^2b+1}$, if $a=3$, $b=2$ and $c=1$

(iii) $\frac{(x+y)^3-z^2}{x^2y^2+z^2}$, if $x=2$, $y=-4$ and $z=3$,

(iv) $\frac{3x^2y}{z}-\frac{bc}{x+1}$, if $x=2$, $y=-1$, $z=3$, $b=4$, $c=\frac{1}{3}$

(v) $\frac{(ab^2-c)}{(a+cd^2)}\times\frac{(c+d)}{(a^2b-d)}$, if $a=1$, $b=3$, $c=-3$ and $d=2$.

3.2 آلجبري فارمولا

اسان گذريل ڪلاسن ۾ ڪجھ آلجبري فارمولا پڙهيا ۽ استعمال ڪيا آهن، هاڻي ڪجھ نوان فارمولا سڪندا سين ۽ لاڳو ڪندا سين:

3.2.1 فارمولا جاچڻ:

(i) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

چڪاس

$$\text{L.H.S} = (a+b)^2+(a-b)^2$$
$$= a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2 \qquad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$= 2a^2+2b^2 \qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$\text{L.H.S} = 2(a^2+b^2) = \text{R.H.S}$$

(ii) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

چڪاس

$$\text{L.H.S} = (a+b)^2-(a-b)^2$$
$$= a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2) \qquad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$= a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2 \qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$\text{L.H.S} = 4ab = \text{R.H.S}$$

مثال 01 هينين مثالن ۾ طريقو واضح ڪيل آهي

(i) $a^2 + b^2$ (ii) ab جو ملهه لهو، جڏهن $a + b = 6$ ۽ $a - b = 4$

(i) ڳهربل $a^2 + b^2 = ?$

حل: مليل $a + b = 6$ ، $a - b = 4$

اسان کي معلوم آهي ته $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

$a+b = 6$ ۽ $a - b = 4$ جو ملهه وجهڻ سان

$$
\begin{aligned}
& (6)^2 + (4)^2 = 2(a^2 + b^2), \\
\Rightarrow\quad & 36 + 16 = 2(a^2 + b^2) \\
\Rightarrow\quad & 52 = 2(a^2 + b^2) \\
\Rightarrow\quad & 26 = a^2 + b^2 \\
\Rightarrow\quad & \boxed{a^2 + b^2 = 26}
\end{aligned}
$$

(ii) ڳهربل $ab = ?$

$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$

$a + b = 6$ $a - b = 4$ جو ملهه وجهڻ سان

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad & (6)^2 - (4)^2 = 4ab, \\
\Rightarrow\quad & 36 - 16 = 4ab, \\
\Rightarrow\quad & 20 = 4ab, \\
\Rightarrow\quad & 5 = ab, \\
& \boxed{ab = 5}
\end{aligned}
$$

جيئن ته $a^2 + b^2 = 26$ ۽ $ab = 5$

3.3.2 فارمولا چاڙو:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$
\begin{aligned}
(a+b+c)^2 &= (a+b+c)(a+b+c) \\
&= a(a+b+c) + b(a+b+c) + c(a+b+c) \\
&= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca
\end{aligned}
$$

مثال 01 $a^2+b^2+c^2$ جو ملهه لهو، جڏهن $a+b+c=7$ ۽ $ab+bc+ca=15$

حل: گهربل $a^2+b^2+c^2=?$

اسان کي معلوم آهي ته $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

هاڻي $a+b+c=7$ ۽ $ab+bc+ca=15$ جو ملهه وجهڻ سان

$\therefore \quad (7)^2 = a^2+b^2+c^2+2(15)$

$\Rightarrow \quad 49 = a^2+b^2+c^2+30$

$\Rightarrow \quad 49-30 = a^2+b^2+c^2$

$\Rightarrow \quad 19 = a^2+b^2+c^2$

$\Rightarrow \quad \boxed{a^2+b^2+c^2=19}$

جيئن ته $(a^2+b^2+c^2)$ جو ملهه 19 آهي.

مثال 02 $(a+b+c)$ جو ملهه لهو، جڏهن $a^2+b^2+c^2=38$ ۽ $ab+bc+ac=31$ هجي.

حل: مليل $a^2+b^2+c^2=38$ ۽ $ab+bc+ac=31$

اسان کي معلوم آهي ته $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$a^2+b^2+c^2=38$ ۽ $ab+bc+ac=31$ جو ملهه وجهڻ سان

$(a+b+c)^2 = 38+2(31)$

$\Rightarrow \quad (a+b+c)^2 = 38+62$

$\Rightarrow \quad (a+b+c)^2 = 100$

$\Rightarrow \quad (a+b+c) = \left(\pm\sqrt{100}\right)$

$\Rightarrow \quad \boxed{(a+b+c)=\pm 10}$

جيئن ته $(a+b+c)$ جو ملهه ±10 آهي.

مثال 03 $(ab+bc+ac)$ جو ملهه لهو، جڏهن $a+b+c=8$ ۽ $a^2+b^2+c^2=20$ هجي.

حل: مليل $a+b+c=8$ ۽ $a^2+b^2+c^2=20$

اسان کي معلوم آهي ته $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$a+b+c=8$ ۽ $a^2+b^2+c^2=20$ جو ملهه وجهڻ سان

$(8)^2 = 20+2(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow \quad 64 = 20+2(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow \quad 64-20 = 2(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow \quad 44 = 2(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow \quad 22 = ab+bc+ac$

$\Rightarrow \quad ab+bc+ac = 22$

جيئن ته $(ab+bc+ac)$ جو ملهه 22 آهي.

3.2.3: ڪعب جو فارمولا:

(i) $$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

چڪاس

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+b^3+3a^2b+3ab^2\\ &= a^3+b^3+3ab(a+b)\end{aligned}$$

(ii) $$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

چڪاس

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2\\ &= (a-b)(a^2-2ab+b^2)\\ &= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3\\ &= a^3-b^3-3a^2b+3ab^2\\ &= a^3-b^3-3ab(a-b)\end{aligned}$$

هيٺيان مثال ڪعب جي فارمولا جو استعمال سمجهڻ لاءِ ڪارائتا آهن:

مثال 01 a^3+b^3 جو ملهه لهو، جڏهن $a+b=4$ ۽ $ab=5$ هجي.

حل مليل $a+b=4$ ۽ a^3+b^3

اسان کي معلوم آهي ته $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$

$a+b=4$ ۽ $ab=5$ جو ملهه وجهڻ سان

$$\begin{aligned}&(4)^3 = a^3+b^3+3(5)(4)\\ \Rightarrow\quad &64 = a^3+b^3+60\\ \Rightarrow\quad &64-60 = a^3+b^3\\ \Rightarrow\quad &4 = a^3+b^3\\ \Rightarrow\quad &\boxed{a^3+b^3=4}\end{aligned}$$

جيئن ته (a^3+b^3) جو ملهه 4 آهي.

مثال 02 ab جو ملهه لهو، جڏهن $a^3 - b^3 = 5$ ۽ $a - b = 5$ هجي.

حل: مليل: $a^3 - b^3 = 5$ ۽ $a - b = 5$

اسان کي معلوم آهي تہ $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

$a^3 - b^3 = 5$ ۽ $a - b = 5$ جو ملهه وجهڻ سان

$$(5)^3 = 5 - 3ab(5)$$
$$\Rightarrow \quad 125 = 5 - 15ab$$
$$\Rightarrow \quad 125 - 5 = -15ab$$
$$\Rightarrow \quad 120 = -15ab$$
$$\Rightarrow \quad -8 = ab$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{ab = -8}$$

جيئن تہ ab جو ملهه 8- آهي

مثال 03 $x^3 + \frac{1}{x^3}$ جو ملهه لهو، جڏهن $x + \frac{1}{x} = 3$ هجي.

حل: مليل $x + \frac{1}{x} = 3$

ٻنهي پاسن ڪعب لڳائڻ سان

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 3^3$$

$$\Rightarrow \quad x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x \cdot \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 27 \qquad \left[\ (a+b)^3 = a^3 + b^3 - 3ab(a+b)\ \right]$$

$$\Rightarrow \quad x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(3) = 27$$

$$\Rightarrow \quad x^3 + \frac{1}{x^3} + 9 = 27$$

$$\Rightarrow \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = 27 - 9$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x^3 + \frac{1}{x^3} = 18}$$

جيئن تہ $x^3 + \frac{1}{x^3}$ جو ملهه 18 آهي.

مثال 04 $8x^3-\frac{1}{x^3}$ جو ملهه لهو، جڏهن $2x-\frac{1}{x}=4$ هجي.

حل: مليل $2x-\frac{1}{x}=4$

ٻنهي پاسن ڪعب لڳائڻ سان $(2x-\frac{1}{x})^3=(4)^3$

$$(2x)^3-(\frac{1}{x})^3-3(2x)(\frac{1}{x})(2x-\frac{1}{x})=64$$

$$8x^3-\frac{1}{x^3}-6(4)=64$$

$$8x^3-\frac{1}{x^3}-24=64 \qquad \Rightarrow 8x^3-\frac{1}{x^3}=88$$

جيئن ته $8x^3-\frac{1}{x^3}$ جو ملهه 88 آهي.

3.2.4: ڪعب جو فارمولا:

(i) $a^3 \pm b^3=(a \pm b)(a^2 \mp ab+b^2)$

چڪاس $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$$

$$=a^3+b^3$$

(ii) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

چڪاس $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$$

$$=a^3-b^3$$

مثال 01 $\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)$ ۽ $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ جي ضرب اپت لهو.

حل: $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)$

$$\therefore\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$$

مثال 02 $\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)=x^3-\frac{1}{x^3}$ ۽ $\left(x-\frac{1}{x}\right)$ جي ضرب اپت لھو.

حل:

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\therefore \quad (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)=x^3-\frac{1}{x^3}$$

مثال 03 $(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$ ۽ $(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$ جي لاڳيتي ضرب اپت لھو.

حل:

$$(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$$

$$= (x^3+y^3)(x^3-y^3) \qquad [\because (a\pm b)\,(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3]$$

$$= x^6-y^6.$$

مشق 3.2

1. a^2+b^2 ۽ ab جو ملھ لھو، جڏھن $a+b=8$ ۽ $a-b=6$ ھجي.
2. a^2+b^2 ۽ ab جو ملھ لھو، جڏھن $a+b=5$ ۽ $a-b=3$ ھجي.
3. $a^2+b^2+c^2$ جو ملھ لھو، جڏھن $a+b+c=9$ ۽ $ab+bc+ac=13$ ھجي.
4. $a^2+b^2+c^2$ جو ملھ لھو، جڏھن $a+b+c=\frac{1}{3}$ ۽ $ab+bc+ac=\frac{-2}{9}$ ھجي.
5. $a+b+c$ جو ملھ لھو، جڏھن $a^2+b^2+c^2=29$ ۽ $ab+bc+ac=10$ ھجي.
6. $a+b+c$ جو ملھ لھو، جڏھن $a^2+b^2+c^2=0.9$ ۽ $ab+bc+ac=0.8$ ھجي.
7. $ab+bc+ac$ جو ملھ لھو، جڏھن $a+b+c=10$ ۽ $a^2+b^2+c^2=20$ ھجي.
8. a^3+b^3 جو ملھ لھو، جڏھن $a+b=4$ ۽ $ab=3$ ھجي.
9. ab جو ملھ لھو، جڏھن $a^3-b^3=16$ ۽ $a-b=4$ ھجي.
10. ab جو ملھ لھو، جڏھن $a^3-b^3=5$ ۽ $a-b=5$ ھجي.
11. a^3-b^3 جو ملھ لھو، جڏھن $a-b=5$ ۽ $ab=7$ ھجي.

.12 $125x^3 + y^3$ جو ملھ لھو، جڏھن $5x + y = 13$ ۽ $xy = 10$ ھجي.

.13 $216a^3 - 343b^3$ جو ملھ لھو، جڏھن $6a - 7b = 11$ ۽ $ab = 8$ ھجي.

.14 $x^3 + \frac{1}{x^3}$ جو ملھ لھو، جڏھن $x + \frac{1}{x} = 7$ ھجي.

.15 $x^3 - \frac{1}{x^3}$ جو ملھ لھو، جڏھن $x - \frac{1}{x} = 11$ ھجي.

.16 ٻڌايو تہ ھيٺ ڏنل آلجبري اظھارگھڻ رقمي آھن يا نہ:

(i) $\left(\frac{3}{2}b + \frac{2}{3b}\right)\left(\frac{9b^2}{4} + \frac{4}{9b^2} - 1\right)$ (ii) $\left(\frac{7y^2}{9} + \frac{9}{7y^2}\right)\left(\frac{49y^4}{81} + \frac{81}{49y^4} - 1\right)$

(iii) $\left(\frac{x^4}{12} + \frac{12}{x^4}\right)\left(\frac{x^8}{144} + \frac{144}{x^8} + 1\right)$ (iv) $\left(c^2 - \frac{1}{c^2}\right)\left(c^4 + \frac{1}{c^4} + 1\right)$

.17 مناسب فارمولا جي مدد سان لاڳيتي ضرب اپت لھو.

(i) $(2x^2 + 3y^2)(4x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4)$

(ii) $(2x^2 - 3y^2)(4x^4 + 6x^2y^2 + 9y^4)$

(iii) $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$

(iv) $(2x + 3y)(2x - 3y)(4x^2 + 9y^2)(16x^4 + 81y^4)$

3.3 غير ناطق عددي اظھار (Surds) ۽ انھن جو استعمال

3.3.1 غير ناطق عددي اظھار (Surds) جي سڃاڻپ ۽ انھن جو استعمال

وصف: اھڙو عددي اظھار جنھن ۾ موجود رقمن ۾ گھٽ ۾ گھٽ ھڪ رقم تي ٻيئي مول جي نشاني ھجي انکي ”غير ناطق عددي اظھار“ (Surd) چئبو آھي.

مثال طور: $\sqrt{2}, \sqrt{a-4}, \sqrt[3]{\frac{5}{10}}, \left(\frac{1}{3} + \sqrt{3}\right), \left(\sqrt[5]{2} - \frac{1}{2}\right)$ غير ناطق عددي اظھار (Surds) آھن.

سيئي (سرڊ Surds) غير ناطق عددي اظھار آھن.

جيڪڏھن $\sqrt[n]{a}$ ھڪ غير ناطق عدد ھجي ۽ 'a' مکمل n^{th} وين سگھہ نہ ھجي تہ انکي n^{th} ترتيب جو غير ناطق عدد چئبو. $\sqrt[n]{a}$ حل ھڪ غير ناطق عدد آھي ان کي غير ناطق مول ۽ ناطق مول جو پايو چئبو آھي.

مثال طور: $\sqrt{\frac{5}{7}},\sqrt[3]{5},\sqrt[4]{6},\sqrt[5]{2},\sqrt[7]{10}$ 2nd, 3rd, 4th, 5th ۽ 7th ترتيب جا سرڊ Surds آهن.

پر $\sqrt[3]{27}$ ۽ $\sqrt{\frac{1}{4}}$ سرڊ (Surds) نہ آهن. ڇاڪاڻ تہ آهي عدد 3 ۽ $\frac{1}{2}$ جي نمائندگي ڪن ٿا جيڪي غير ناطق عدد نہ آهن.

3.3.2 ٻي درجي جو غير ناطق عددن (Surd of the second order) جي وضاحت ڪريو. ٻئي درجي جي غير ناطق عددن ڪي بنيادي عمل استعمال ڪري، جيڊ ڪي ناطق ڪري انجو جائزو وٺو.

(a) ٻي ترتيب جو غير ناطق عددي اظهار (Surd of the second order)

(i) هڪ غير ناطق اظهار جيڪو هڪ رقم وارو هجي انکي هڪ رقمي غير ناطق اظهار (Monomial Surd) چئبو آهي.

مثال طور: $\sqrt{\frac{4}{5}},\sqrt{a-9},\sqrt{53}$ وغيره ٻي درجي جا هڪ رقم وارو غير ناطق اظهار آهن.

(ii) هڪ غير ناطق عدد جيڪو ٻن هڪ رقمي غير ناطق اظهارن جو جوڙ يا فرق رکي يا هڪ رقمي غير ناطق اظهار ۽ ناطق اظهار جو جوڙ هجي انکي ٻہ درجي ناطق اظهار (Binomial Surd) چئبو آهي.

مثال طور: $\sqrt{3}-35,\sqrt{2}-13,\sqrt{17}+\sqrt{11}$ وغيره ٻي ترتيب جا ٻہ درجي غير ناطق عدد آهن.

(iii) ٻہ درجي غير ناطق اظهارن جو ميل (Conjugate of Binomial Surds) اظهار جا نمونا.

(a) $\left(\sqrt{a}+c\sqrt{b}\right)$ ۽ $\left(\sqrt{a}-c\sqrt{b}\right)$ هڪٻئي جا غير ناطق ميل (زوج) (Conjugate) آهن.

(b) $a+\sqrt{b}$ ۽ $a-\sqrt{b}$ هڪٻئي جا غير ناطق ميل (زوج) (Conjugate) آهن.

(b) ٻي ترتيب جي غيرناطق اظهارن تي بنيادي عمل، انجي جيڊن ڪي ناطق اظهارن ۾ بدلائڻ ۽ انهن جومطلب لهڻ.

(i) غير ناطق اظهارن (Surds) جي جوڙ ۽ ڪٽ

غير ناطق اظهارن (Surds) جي جوڙ ۽ ڪٽ ڪرڻ لاءِ هيٺيان قائدا استعمال ڪري سگهجن ٿا.

مثال طور: $a\sqrt{c}+b\sqrt{c}=(a+b)\sqrt{c}$ ۽ $a\sqrt{c}-b\sqrt{c}=(a-b)\sqrt{c}$

مثال 01 $\sqrt{343}-3\sqrt{7}-2\sqrt{7}$ ساديءَ صورت ۾ آڻيو:

حل:

$$\sqrt{343}-3\sqrt{7}-2\sqrt{7}$$
$$=\sqrt{\underline{7\times7}\times7}-3\sqrt{7}-2\sqrt{7}$$
$$=7\sqrt{7}-3\sqrt{7}-2\sqrt{7}$$
$$=(7-3-2)\sqrt{7}$$
$$=(7-5)\sqrt{7}$$
$$=2\sqrt{7}$$

مثال 02 $\sqrt{32}+5\sqrt{2}+\sqrt{128}+7\sqrt{2}$ ساديءَ صورت ۾ آڻيو:

حل:

$$\sqrt{32}+5\sqrt{2}+\sqrt{128}+7\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{16\times2}+5\sqrt{2}+\sqrt{64\times2}+7\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{(4)^2\times2}+5\sqrt{2}+\sqrt{(8)^2\times2}+7\sqrt{2}$$
$$=4\sqrt{2}+5\sqrt{2}+8\sqrt{2}+7\sqrt{2}$$
$$=(4+5+8+7)\sqrt{2}$$
$$=24\sqrt{2}$$

(ii) غير ناطق اظهارن (Surds) جي ضرب ۽ ونڊ

غير ناطق اظهارن (Surds) جي ضرب ۽ ونڊ ڪرڻ لاءِ هينيان قائدا استعمال ڪري سگهجن ٿا.

(a) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ (b) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}},\ a>0$ ۽ $b>0$

مثال 01 $\sqrt{125}\times\sqrt{48}$ ساديءَ صورت ۾ آڻيو:

حل:

$$\sqrt{125}\times\sqrt{48}$$
$$=\sqrt{(5)^2\times5}\times\sqrt{(4)^2\times3}$$
$$=5\sqrt{5}\times4\times\sqrt{3}$$
$$=(5\times4)\left(\sqrt{5}\times\sqrt{3}\right)$$
$$=20\sqrt{15}$$

مثال 02 $\frac{\sqrt{162}}{\sqrt{144}}$ ساديءَ صورت ۾ آڻيو:

حل:

$$\frac{\sqrt{162}}{\sqrt{144}}$$

$$=\frac{\sqrt{2\times 81}}{\sqrt{12\times 12}}$$

$$=\frac{\sqrt{2\times(9)^2}}{\sqrt{(12)^2}}=\frac{9\sqrt{2}}{12}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

مشق 3.3

1. ساديءَ صورت ۾ آڻيو:

(i) $\sqrt[4]{81x^{-8}z^{4}}$ (ii) $\sqrt[3]{256a^{6}b^{12}c^{9}}$ (iii) $\sqrt[7]{128}$ (iv) $\sqrt{7776}$

(v) $\frac{\sqrt[3]{(125)^2\times 8}}{\sqrt{(2\times 32)^2}}$ (vi) $\frac{\sqrt{21}\times\sqrt{28}}{\sqrt{121}}$ (vii) $\sqrt{\frac{(216)^{\frac{2}{3}}\times(125)^{2}}{(0.04)^{-3}}}$

(viii) $\frac{\sqrt[6]{4}\times\sqrt[3]{27}\times\sqrt{60}}{\sqrt{180}\times\sqrt[3]{0.25}\times\sqrt[4]{9}}$

2. هيٺين جو ميل (زوج) (Conjugate) لهو.

(i) $\left(8-4\sqrt{3}\right)$ (ii) $\left(6\sqrt{6}+2\sqrt{3}\right)$ (iii) $\left(8\sqrt{12}+\sqrt{8}\right)$ (iv) $\left(2-\sqrt{3}\right)$

3. ساديءَ صورت ۾ آڻيو:

(i) $\left(6\sqrt{2}+4\sqrt{2}+7\sqrt{128}\right)$ (ii) $\sqrt{5}+\sqrt{125}+7\sqrt{5}$

(iii) $\left(13+15\sqrt{3}\right)+\left(7-6\sqrt{3}\right)$ (iv) $\sqrt{250}+\sqrt{490}+3\sqrt{10}$

(v) $\sqrt{245}+\sqrt{625}-\sqrt{45}$ (vi) $10\sqrt{11}-\sqrt{396}-3\sqrt{11}$

(vii) $\sqrt{17}\left(10\sqrt{17}-2\sqrt{17}\right)$ (viii) $\frac{3}{2}\left(\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{50}\right)$

(ix) $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (x) $\left(\sqrt{13}+\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{13}-\sqrt{11}\right)$

(xi) $\left(3\sqrt{6}-4\sqrt{5}\right)^2$ (xii) $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)^2$

3.4 ناطق ڪرڻ (Rationalization)

3.4.1 غير ناطق اظهارن تي حقيقي عددن جي ناطق ڪرڻ جا نمونا $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ۽ انهن جا مجموعا، جتي x,y قدرتي عدد آهن ۽ (a ۽ b) سچا عدد آهن.

- جيڪڏهن ٻن غير ناطق اظهارن (Surds) جي ضرب اپت هڪ ناطق عدد آهي ته هر غير ناطق اظهار هڪٻئي جو ناطق ڪندڙ جزو سڏبو.
  مثال طور: $\left(35-\sqrt{31}\right)$ ۽ $\left(35+\sqrt{31}\right)$ هڪٻئي جا ناطق جزا آهن.
- ڏنل غير ناطق اظهارن جي پنهنجي ناطق ڪندڙ جزي سان ضرب جو عمل سان ناطق عدد ضرب اپت جي طور تي حاصل ڪرڻ کي ناطق ڪندڙ چئبو آهي.

غير ناطق اظهارن ميل (Conjugate surds) جي ضرب اپت هڪ ناطق عدد آهي.

مثال 01 $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ جي ضرب اپت لهو:

حل: $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ ۽ $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

$$=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2$$

جيڪو هڪ ناطق عدد آهي $3-2=1$

چيدن جو ناطق ٿيڻ (Rationalization of denominator)

متين بحث کي ذهن ۾ رکي، اسان نتيجو ڪڍيو ته $(a+b\sqrt{x})$ يا $(a-b\sqrt{x})$ نموني جي هڪ چيد کي ناطق ڪرڻ لاءِ اسين ٻئي چيد ۽ انس جي ميل جزي $(a+b\sqrt{x}$ Conjugate factor) يا $(a-b\sqrt{x})$ سان ضرب ڪنداسين.ائين ڪرڻ سان اسان ٻئي مول کي خارج ڪيون ٿا ۽ اهڙيءَ طرح چيد کي ڪنهن به غير ناطق اظهار (Surd) کان آزاد حاصل ڪري سگهون ٿا.

حقيقي عددن جي ناطق ٿيڻ جا نمونا (Rationalization of real numbers of the types)

(i) $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

هينيان مثال ناطق ڪرڻ جي تصور (Concept of Rationalization) کي سمجهڻ ۾ مدد ڪندا.

مثال 01 $\frac{1}{5+2\sqrt{3}}$ ناطق ڪريو:

چيد کي $5-2\sqrt{3}$ سان ان جي ميل $5+2\sqrt{3}$ کي ضرب ۽ ونڊ ڪريو.

حل:

$$\frac{1}{5+2\sqrt{3}}$$
$$=\frac{1}{5+2\sqrt{3}}\times\frac{5-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$$
$$=\frac{5-2\sqrt{3}}{(5)^2-(2\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{5-2\sqrt{3}}{25-12}$$
$$=\frac{5-2\sqrt{3}}{13}$$
$$=\frac{5}{13}-\frac{2}{13}\sqrt{3}$$

مثال 02 $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ناطق ڪريو:

حل:

$$\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$
$$=\frac{5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$
$$=\frac{5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{3-2}$$
$$=\frac{5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{1}$$
$$=5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

مشق 3.4

.1 هينين جي ڇيد کي ناطق ڪريو:

(i) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{1}{4\sqrt{3}-5\sqrt{2}}$

(iv) $\frac{16}{\sqrt{12}+\sqrt{11}}$ (v) $\frac{9-\sqrt{2}}{9+\sqrt{2}}$ (vi) $\frac{\sqrt{13}+3}{\sqrt{13}-3}$

.2 (i) جيڪڏهن $x=8-3\sqrt{7}$ ته $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ لهو.

(ii) جيڪڏهن $\frac{1}{x}=2\sqrt{28}-11$ ته x لهو.

(iii) جيڪڏهن $x=3-2\sqrt{2}$ ته $x+\frac{1}{x}, x-\frac{1}{x}, x^2+\frac{1}{x^2}, x^2-\frac{1}{x^2}$ ۽ $x^4+\frac{1}{x^4}$ لهو:

مشق ورجايو 3

.1 درست جوابن تي گول پايو:

(i) هر گهڻ رقمي آهي:

(a) هڪ غير ناطق اظهار (b) هڪ ناطق اظهار

(c) هڪ جملو (d) انهن مان ڪو به نه

(ii) هڪ اهڙو غيرناطق عدد جيڪو بن هڪ رقمي غيرناطق اظهارن جو جوڙ هجي انکي چئبو آهي:

(a) ٽه رقمي غيرناطق اظهار (b) ٻه رقمي غير ناطق اظهار

(c) غيرناطق اظهارن جو ميل (d) هڪ رقمي غير ناطق اظهار

(iii) $3x + 2y - 3$ آهي هڪ آلجبري:

(a) اظهار (b) مساوات (c) جملو (d) غيرمساوات

(iv) $3x^2y + 5y^4 - 10$ جو درجو آهي:

(a) 4 (b) 5

(c) 3 (d) 10

(v) $\sqrt{7}$ آهي:

(a) هڪ رقمي غير ناطق اظهار جو (b) ٽه رقمي غير ناطق اظهار جو

(c) ٻه رقمي غير ناطق اظهار جو (d) غير ناطق اظهارن جي ميل جو

(vi) ٻن گهڻ رقمي اظهارن $p(x)$ ۽ $q(x)$ جي وند اپت $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ جتي $q(x) \neq 0$ انکي چئبو آهي:

(a) هڪ ناطق اظهار (b) هڪ غير ناطق اظهار

(c) گهڻ رقمي (d) ميل (conjugate)

(vii) $\dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{x+y}$ جي برابر آهي:

(a) $\dfrac{2x}{x^2-y^2}$ (b) $\dfrac{2y}{x^2-y^2}$ (c) $\dfrac{-2x}{x^2-y^2}$ (d) $\dfrac{-2y}{x^2-y^2}$

(viii) $2 - \sqrt{3}$ جو ميل آهي:

(a) $2+\sqrt{3}$ (b) $-2-\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{2} + 3$ (d) $\sqrt{3}-4$

(ix) $a^3 - 3ab(a-b) - b^3$ جي برابر آهي:

(a) $(a-b)^3$ (b) $(a+b)^3$ (c) $a^3 + b^3$ (d) $a^3 - b^3$

(x) جيڪڏهن $a+b=5$ ۽ $a-b=3$ ته ab جو ملهه آهي:

(a) 4 (b) 5 (c) 3 (d) 6

(xi) $\left(5+\sqrt{15}\right)\left(5-\sqrt{15}\right)$ جي برابر آهي:

(a) 10 (b) 15 (c) 25 (d) 30

(xii) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ جي برابر آهي:

(a) $(a+b-c)^2$ (b) $(a+b+c)^2$ (c) $(a-b+c)^2$ (d) $(a+b+c)^3$

.1 خال پريو:

(i) ڪنهن به گهڻ رقميءَ جو درجو ________ آهي.

(ii) غير ناطق اظهار $2-\sqrt{3}$ جو ميل (Conjugate) ________ آهي.

(iii) ڪنهن به گهڻ رقمي اظهار $2x^3+x^2-4x^4+7x-9$ جو درجو ________ آهي.

(iv) $\dfrac{\sqrt{x}}{3x+5}$ هڪ ________ اظهار آهي $x \neq \dfrac{-5}{3}$

(v) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$ ________ جي برابر آهي.

خلاصو

- هڪ گهڻ رقمي اظهار هڪ بدلجندڙ x ۾ لکي سگهجي ٿو.
- جيئن $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}x^1+a_n$ هڪ گهڻ رقمي اظهار اڪثر $p(x)$ طور ظاهر ڪبو آهي.
- هڪ آلجبري اظهار جيڪو $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ جي صورت ۾ لکي سگهجي ٿو، جتي $q(x) \neq 0$ ، ۽ $p(x)$, $q(x)$ ٻئي گهڻ رقمي اظهار آهن انکي x ۾ ناطق اظهار چئبو آهي.
- هڪ آلجبري اظهار جيڪو $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ جي صورت ۾ نٿو لکي سگهجي، جتي $q(x) \neq 0$، ۽ $p(x)$, $q(x)$ ٻئي گهڻ رقمي اظهار آهن انکي x ۾ غير ناطق اظهار چئبو آهي.
- هڪ گهڻ رقمي اظهار جيڪو صرف هڪ درجو رکي ٿو انکي هڪ درجي گهڻ رقمي چئبو آهي.
- هڪ گهڻ رقمي اظهار جيڪو ٻہ درجا رکي ٿو انکي ٻہ درجي گهڻ رقمي چئبو آهي.
- هڪ گهڻ رقمي اظهار جيڪو ٽي درجا رکي ٿو انکي ٽہ درجي گهڻ رقمي چئبو آهي.

- هڪ گھڻ رقمي اظهار جيڪوتي ياٽي ڪان وڌيڪ درجا رکي ٿو انکي وڌيڪ رقمي چئبو آهي.
- الجبري اظهار $\frac{p(x)}{q(x)}$ کي پنهجي سادي صورت ۾ چئجي ٿو، جيڪڏهن $p(x)$ ۽ $q(x)$ گھڻ رقمي اظهار آهن بنهي جا عددي سرا (منيد) سجن عددن سان ۽ انهن کي ڪو بہ عام جزو (Common Factor) نہ آهي.
- $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ ۽ $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$
- $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$
- $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$ ۽ $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$
- $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
- هڪ آلجبري اظهار کي غير ناطق اظهار (Surd) چئبو آهي، جنهن کي گھٽ ۾
- گھٽ هڪ رقم بي مول جي نشانيءَ واري هجي. مثالطور: $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{\frac{3}{10}}$ غير ناطق اظهار (Surd) آهن.
- جيڪڏهن $\sqrt[n]{a}$ هڪ غير ناطق اظهار آهي ۽ 'a' مڪمل (nth) وين سگھ نہ آهي تہ پوءِ انکي (nth) وين ترتيب جو غير ناطق اظهار (Surd) چئبو آهي.
- هڪ غيرناطق اظهار جنهن کي هڪ رقم هجي انکي هڪ رقمي اظهار(Monomial) چئبو آهي.
- هڪ غير ناطق عدد جيڪو ٻن هڪ رقمي ناطق اظهارن جو جوڙ يا فرق رکي يا هڪ درجي غير ناطق اظهار ۽ ناطق اظهار جو جوڙ هجي انکي بہ درجي ناطق اظهار چئبو آهي.
- $\left(\sqrt{a}+c\sqrt{b}\right)$ ۽ $\left(\sqrt{a}-c\sqrt{b}\right)$ نموني جا اظهار هڪبئي جا غير ناطق ميل آهن.
- $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ ۽ $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ مهيا ڪيل $a>0$ ۽ $b>0$
- جيڪڏهن ٻن غير ناطق اظهارن (Surds) جي ضرب اپت هڪ ناطق عدد آهي تہ پوءِ هر هڪ غير ناطق اظهار (Surd) کي هڪبئي جو ناطق ڪندڙ جزو چئبو آهي.
- ڏنل غيرناطق اظهار (surd) جي ضرب جو عمل انجي ناطق ڪندڙ جزي سان ناطق عدد حاصل ڪرڻ لاءِ ضرب اپت کي غيرناطق اظهار (surd) جو ناطق ٿيڻ چئبو آهي.

یونٽ 4

جزالھڻ
Factorization

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته:

- هيٺين نمونن جي اظهارن جي جزن لهڻ جي عمل کي Recall ڪندا
- $ka + kb + kc$ (سيني رقمن ۾ مشترڪ جزا)
- $ac + ad + bc + bd$ (رقمن جي جوڙي ۾ مشترڪ جزا)
- $a^2 \pm 2ab + b^2$ (مڪمل چورس)
- $a^2 - b^2$ (ٻن چورسن جو فرق)
- $(a^2 \pm 2ab + b^2) - c^2$
- $(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2$
- هيٺين نمونن جي اظهارن جا جزا لهڻ.

نمونو I: $a^4 + a^2b^2 + b^4$ ۽ $a^4 + b^4$

نمونو II: $x^2 + px + q$

نمونو III: $ax^2 + bx + c$

نمونو IV:

$(ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + d) + k$

$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + k$

$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + kx^2$

نمونو V: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ۽ $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

نمونو VI: $a^3 \pm b^3$

- پاڇي واري ستيان کي بيان ڪري ثابت ڪرڻ ۽ مثالن سان وضاحت ڪرڻ
- پاڇي لهڻ (وند ڪرڻ کان سواءِ) جڏهن مليل گهڻ رقمي، هڪ درجي واري گهڻ رقمي سان وند ٿيل هجي.
- گهڻ رقمي جي ٻڙي جي وضاحت ڪرڻ.
- جزن وارو سڌيان بيان ۽ ثابت ڪريو
- مصنوعي ورهاست واري طريقي کي بيان ڪرڻ.
- وند اپت ۽ پاڇي معلوم ڪرڻ جڏهن مليل گهڻ رقمي، هڪ درجي واري گهڻ رقمي سان وند ٿيل هجي.
- نامعلوم جي قيمت معلوم ڪرڻ، جيڪڏهن گهڻ رقمي جون ٻڙيون مليل هجن.
- نامعلوم جي قيمت معلوم ڪرڻ جيڪڏهن گهڻ رقمي جا جزا مليل هجن.
- جزن وارو سڌيان استعمال ڪري ٽن درجن واري گهڻ رقمي جا جزا لهڻ.

تعارف:

اسان جزا لهڻ بابت مطالعو ڪنداسين، جنهن جو رياضي ۾ اهم ڪردار آهي. اهي منجهيل اظهارن کي (آسان) سادي اظهارن ۾ تبديل ڪرڻ لاءِ مددگارآهن

4.1 جزا لهڻ Factorization

فرض ڪريو ته $p(x), q(x)$ ۽ $r(x)$ ٽي گهڻ رقميون آهن، اهڙي طرح جو هتي $p(x)\times q(x) = r(x)$ آهي. گهڻ رقمي $p(x), r(x)$ ۽ $q(x)$ جي ضرب اپت آهي ۽ گهڻ رقمي $p(x)$ ۽ $q(x)$ کي $r(x)$ جا جزا چئبو آهي.

گهڻ رقمين جي جزن جا ڪجهه مثال هيٺ ڏجن ٿا.

(i) $6x^2y^3=(2\times3)(x\times x)(y\times y\times y)$

(ii) $ax + aby + abcz = a(x + by + bcz)$

(iii) $5x + 15xy= 5x(1+3y)$

(iv) $x - y=\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$

4.1.1 هيٺين نمونن جي اظهارن جي جزن لهڻ جي عمل کي ياد ڪرڻ

(i) $ka + kb + kc$ (سيني رقمن ۾ مشترڪ جزا)

(ii) $ac + ad + bc + bd$ (رقمن جي جوڙي ۾ مشترڪ جزا)

(iii) $a^2 \pm 2ab + b^2$ (مڪمل چورس)

(iv) $a^2 - b^2$ (ٻن چورسن جو فرق)

(v) $(a^2 \pm 2ab + b^2) - c^2$

(vi) $(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2$

(i) $ka + kb + kc$ نموني جا جزا لهڻ

اچو ته هيٺيان مثال ڏسو

مثال 01 $10a + 15b - 20c$ جا جزا لهو.

حل: $10a + 15b - 20c$

$5(2a + 3b - 4c)$ (5 عدد اظهار مان common ڪرڻ سان)

مثال 02 $\frac{4}{9}-\frac{8}{12}x-\frac{16}{15}xy$ جا جزا لهو

حل: $\frac{4}{9}-\frac{8}{12}x-\frac{16}{15}xy$

$$=\frac{4}{3\cdot 3}-\frac{4\cdot 2\cdot}{3\cdot 4}x-\frac{4\ \ 4}{3\cdot 5}xy$$

$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}\right)-x\frac{4}{5}xy$ ($\frac{4}{3}$ کي اظھارن مان common ڪرڻ سان)

(ii) $ac+ad+bc+bd$ نموني جا جزا لهڻ.

هيٺيان مثال ڏسو.

مثال 01 $3a-ac-3c+c^2$ جا جزا لهو.

حل: $3a-ac-3c+c^2$

$$= a(3-c)-c\,(3-c)$$
$$= (3-c)\,(a-c)$$

مثال 02 $9y^2z+3xyz-9xy^2-3x^2y$ جا جزا لهو.

حل: $9y^2z+3xyz-9xy^2-3x^2y$

$$= 3yz(3y+x)\ -3xy(3y+x)$$
$$= (3y+x)(3yz-3xy)$$
$$= (3y+x)\times 3y(z-x)$$

$3y\ (x+3y)(z-x)$ گهربل جزا آهن.

(iii) $a^2\pm 2ab+b^2$ نموني جا جزا لهڻ

اسان کي خبر آهي ته

$$a^2+2ab+b^2=(a)^2+2(a)(b)+(b)^2=(a+b)^2$$

۽

$$a^2-2ab+b^2=(a)^2-2(a)(b)+(b)^2=(a-b)^2$$

اچو تہ هينيان مثال ڏسون.

مثال 01 $16a^2 + 40ab + 25b^2$ جا جزا لهو.

حل: $16a^2 + 40ab + 25b^2$

$= (4a)^2 + 2(4a)(5b) + (5b)^2$

$= (4a + 5b)^2 \qquad [\because a^2+2ab+b^2=(a+b)^2]$

مثال 02 $4p^2 - 28\,pq + 49q^2$ جا جزا لهو.

حل: $4p^2 - 28\,pq + 49q^2$

$= (2p)^2 - 2(2p)(7q) + (7q)^2$

$= (2p - 7q)^2 \qquad [\because a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2]$

(iv) $a^2 - b^2$ نموني جا جزا لهڻ.

اچو تہ هينيان مثال ڏسون.

مثال 01 $4x^2 - 1$ جا جزا لهو.

حل: $4x^2 - 1$

$= (2x)^2 - (1)^2$

$= (2x - 1)(2x + 1) \qquad [\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$

مثال 02 $96y^2 - 6z^2$ جا جزا لهو.

حل: $96y^2 - 6z^2$

$= 6(16y^2 - z^2)$

$= 6[(4y)^2 - z^2]$

$= 6(4y - z)(4y + z) \qquad [\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$

مثال 03 $9r^4 - (6s - t^2)^2$ جا جزا لهو.

حل: $9r^4 - (6s - t^2)^2$

$= (3r^2)^2 - (6s - t^2)^2$

$= [3r^2 - (6s - t^2)][3r^2 + (6s - t^2)], \qquad [\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$

$= (3r^2 - 6s + t^2)(3r^2 + 6s - t^2)$

(v) $(a^2 \pm 2ab + b^2) - c^2$ نموني جا جزا لهڻ.

اچو تہ هينيان مثال ڏسون.

مثال 01 $x^2 + 4xy^2 + 4y^4 - 4z^2$ جا جزا لهو.

حل: $x^2 + 4xy^2 + 4y^4 - 4z^2$

$$= \{(x)^2 + 2(x)(2y^2) + (2y^2)^2\} - (2z)^2$$
$$= (x + 2y^2)^2 - (2z)^2$$
$$= \{(x+2y^2) + 2z\}\{(x + 2y^2) - 2z\} \quad [\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$$
$$= (x + 2y^2 + 2z)(x + 2y^2 - 2z)$$

مثال 02 $9p^2 - 6pq + q^2 - 9r^2$ جا جزا لهو.

حل: $9p^2 - 6pq + q^2 - 9r^2$

$$= (3p)^2 - 2(3p)(q) + q^2 - (3r)^2$$
$$= (3p - q)^2 - (3r)^2$$
$$= (3p - q + 3r)(3p - q - 3r) \quad [\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$$

(vi) $\left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2$ نموني جا جزا لهڻ.

مثال 01 $\left(\sqrt{xy}\right)^2 - \left(\sqrt{z}\right)^2$ جا جزا لهو.

حل: $\left(\sqrt{xy}\right)^2 - \left(\sqrt{z}\right)^2$

$$= \left(\sqrt{xy} - \sqrt{z}\right)\left(\sqrt{xy} + \sqrt{z}\right) \qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

مشق 4.1

.1 هينين جا جزا لهو.

(i) $4x + 16y + 24z$ (ii) $x^2 + 3x^2y + 4x^2y^2z$

(iii) $3pqr + 6pqt + 3pqs$ (iv) $9qr(s^2 + t^2) + 18q^2r^2(s^2 + t^2)$

(v) $\dfrac{z^2x}{16} - \dfrac{x^2z^2}{8} + \dfrac{x^2z^3}{12}$ (vi) $a(x-y) - a^2b(x-y) + a^2b^2(x-y)$

2. هيٺين جا جزا لهو.

(i) $7x + xz + 7z + z^2$

(ii) $9a^2b + 18ab^2 - 6ac - 12bc$

(iii) $6t - 12p + 4tq - 8pq$

(iv) $r^2 + 9rs - 7rs - 63s^2$

(v) $\frac{y^2}{4} - \frac{y^2z}{4} - \frac{z^2t}{9} + \frac{z^3t}{9}$

(vi) $\frac{10xy}{11} + \frac{5xz}{11} - \frac{14y^2}{11} - \frac{7yz}{11}$

3. جزا معلوم ڪريو.

(i) $4a^2 + 12ab + 9b^2$

(ii) $36x^4 + 12x^2 + 1$

(iii) $x^2 + 1 + \frac{1}{4x^2}$

(iv) $81y^2 + 144yz + 64z^2$

(v) $625 + 50a^2b + a^4b^2$

(vi) $a^2 + 0.4a + 0.04$

4. جزا لهو.

(i) $b^4 - 4b^2c^2 + 4c^4$

(ii) $\frac{9}{4}x^4 - 2 + \frac{4}{9x^4}$

(iii) $2a^3b^3 - 16a^2b^4 + 32ab^5$

(iv) $9(p+q)^2 - 6(p+q)r^2 + r^4$

(v) $x^2y^2 - 0.1xy + 0.0025$

(vi) $(a - b)^2 - 18(a - b) + 81$

5. جزا لهو.

(i) $4a^2 - 9b^2$

(ii) $16x^2 - 25y^2$

(iii) $100x^2z^2 - y^4$

(iv) $\frac{1}{100}x^4 - 100y^4$

(v) $\frac{64}{81}f^2 - \frac{81}{64}g^4$

(vi) $\frac{x^4}{121} - 121y^2$

6. جزا معلوم ڪريو.

(i) $(2x + z)^2 - (2x - z)^2$

(ii) $(4a - 9b)^2 - (2a + 5b)^2$

(iii) $169x^4 - (3t + 4)^2$

(iv) $(9x^2 - 4y^2)^2 - (4x^2 - y^2)^2$

(v) $\left(a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}\right) - \left(b^2 - 2 + \frac{1}{b^2}\right)$

(vi) $9x^2 + \frac{1}{9x^2} - 4y^2 - \frac{1}{4y^2} + 4$

7. جزا معلوم ڪريو.

(i) $(x^2 + 2xy + y^2) - 9z^4$

(ii) $(4a^2 + 8ab^2 + 4b^4) - 9c^2$

(iii) $16d^4 - (c^4 - 2c^2d + d^2)$

(iv) $4(x^2 + 2xy^2 + y^4) - 9y^6$

(v) $x^2 - y^2 - 4x - 2y + 3$

(vi) $4x^2 - y^2 - 2y - 1$

8. جزا لکو.

(i) $(\sqrt{ab})^2 - (\sqrt{c})^2$ (ii) $(\sqrt{4x})^2 - (\sqrt{9y})^2$

(iii) $(\sqrt{yz})^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{yz}}\right)^2$ (iv) $xzt - \frac{1}{t}$

4.1.2 هيٺين نمونن جي اظهارن جا جزا لکو.

نمونو I: $a^4 + a^2b^2 + b^4$ or $a^4 + 4b^4$

هن نموني ۾ اُهي آلجبري اظهار شامل آهن جيڪي نه مڪمل چورس ۽ نه وري ٻن چورسن جي فرق واري صورت ۾ آهن.

هن نموني جي جزن لکڻ لاءِ هيٺين مثالن ۾ وضاحت ڪيل آهي.

مثال 01 $a^4 + a^2b^2 + b^4$ جا جزا لکو.

حل: $a^4 + a^2b^2 + b^4$

$= (a^4 + b^4) + a^2b^2$ (رقمن کي ترتيب ۾ لکو)

$= (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - 2a^2b^2 + a^2b^2$ ($2a^2b^2$ کي جوڙ ۽ ڪٽ ڪرڻ سان)

$= \{(a^2)^2 + 2(a^2)(b^2) + (b^2)^2\} - a^2b^2$

$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$

$= \{(a^2 + b^2) - ab\}\{(a^2 + b^2) + ab\}$ $[\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$

$= (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$ گهربل جزا آهن.

مثال 02 $a^4 + 4b^4$ جا جزا لکو.

حل: $a^4 + 4b^4$

$= (a^2)^2 + (2b^2)^2$

$= (a^2)^2 + (2b^2)^2 + 2(a^2)(2b^2) - 2(a^2)(2b^2)$ [$2(a^2)(2b^2)$ جوڙ ۽ ڪٽ ڪرڻ سان]

$= \{(a^2)^2 + 2(a^2)(2b^2) + (2b^2)^2\} - 4a^2b^2$

$= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2$

$= \{(a^2 + 2b^2) - 2ab\}\{(a^2 + 2b^2) + 2ab\}$ $[\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$

$(a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2)$ گهربل جزا آهن.

مثال 03 x^8+x^4+1 جا جزا لهو.

حل: x^8+x^4+1

$$= (x^8+1)+x^4$$
$$= \{(x^4)^2+(1)^2+2(x^4)(1)\}-2(x^4)(1)+x^4$$
$$= (x^4+1)^2-x^4 \qquad \boxed{[2(x^4)(1) \text{ جوڙ ۽ ڪٽ ڪرڻ سان}]}$$
$$= (x^4+1)^2-(x^2)^2$$
$$= \{(x^4+1)-x^2\}\{(x^4+1)+x^2\} \qquad [\because a^2-b^2=(a-b)(a+b)]$$
$$= \{(x^4+x^2+1)\}(x^4-x^2+1)$$
$$= \{(x^2+1)^2-2x^2+x^2\}(x^4-x^2+1)$$
$$= \{(x^2+1)^2-x^2\}(x^4-x^2+1)$$

$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$ گهربل جزا آهن.

نمونو II: x^2+px+q

هن نموني جي اظهار جي جزن لهڻ لاءِ وچين رقم کي ٽوڙيو آهي.

مثال 01 $y^2+7y+12$ جا جزا لهو.

حل: $y^2+7y+12$

$$= y^2+3y+4y+12$$
$$= y(y+3)+4(y+3)$$
$$= (y+3)(y+4)$$

مثال 02 $x^2+13xy-30y^2$ جا جزا لهو.

حل: $x^2+13xy-30y^2$

$$= x^2+15xy-2xy-30y^2$$
$$= x(x+15)-2y(x+15)$$
$$= (x+15)(x-2y)$$

نمونو III: $ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ جڏهن ته

$ax^2+bx+c=0$ جي اظهار جا جزا لهڻ لاءِ هينين قدمن جي ضرورت آهي.

(i) ac جي ضرب اپت لهو جڏهن تہ a ، عددي منيو آهي x^2 جو ۽ c مستقل آهي.

(ii) بہ عدد x_1 ۽ x_2 لهو، جيئن تہ $x_1+x_2=b$ ۽ $x_1x_2=ac$

هن طريقي جي وضاحت لاءِ هينيان مثال مددگار ثابت ٿيندا

مثال 01 $10x^2-19xy+6y^2$ جا جزا لهو.

حل: $10x^2-19xy+6y^2$

$$= 10x^2-15xy-4xy+6y^2$$
$$= 5x(2x-3y)-2y(2x-3y)$$
$$= (2x-3y)(5x-2y)$$

مثال 02 $4x^2+12x+5$ جا جزا لهو.

حل: $4x^2+12x+5$

$$= 4x^2+10x+2x+5$$
$$= 2x(2x+5)+1(2x+5)$$
$$= (2x+5)(2x+1)$$

مشق 4.2

1. هينين جا جزا لهو.

(i) $a^4+a^2x^2+x^4$ (ii) b^4+b^2+1

(iii) $a^8+a^4x^4+x^8$ (iv) z^8+z^4+1

2. جزا لهو.

(i) x^4+4y^2 (ii) $36x^4z^4+9y^4$

(iii) $4t^4+625$ (iv) $4t^4+1$

3. جزا لهو.

(i) $x^2+3x-10$ (ii) $a^2b^2-3ab-10$

(iii) $y^2+7y-98$ (iv) $^2y^2z^2+2xyz-24$

4. جزا لهو.

(i) $9y^2+21yz-8z^2$ (ii) $42x^2-8x-2$

(iii) $4x^2+12x+5$ (iv) $3x^2-38xy-13y^2$

نمونو IV: $(ax^2+bx+c)(ax^2+bx+d)+k$

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+k$

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+kx^2$

اسان هنن نمونن جي اظهارن جي جزن لهڻ جي طريقي کي هيٺين مثالن جي مدد سان واضح ڪنداسين.

مثال 01 $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-120$ جا جزا لهو

حل: $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-120$

فرض ڪريو ته $x^2+5x=t$ ته پوءِ

$$
\begin{aligned}
& (t+4)(t+6)-120 \\
&= t^2+10t+24-120 \\
&= t^2+10t-96 \\
&= t^2-6t+16t-96 \quad \text{(جزن ڪرڻ سان)} \\
&= t(t-6)+16(t-6) \\
&= (t-6)(t+16) \\
&= (x^2+5x-6)(x^2+5x+16) \qquad \because\ t=x^2+5x \\
&= (x^2-x+6x-6)(x^2+5x+16) \\
&= [x(x-1)+6(x-1)](x^2+5x+16) \\
&= (x-1)(x+6)(x^2+5x+16)
\end{aligned}
$$

مثال 02 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15$ جا جزا لکو.

حل: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15$

هتي $1+4=2+3=5$

$(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-15$ (جزن کي ترتيب ۾ رکڻ سان)

$= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-15$

$= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-15$

$= (t+4)(t+6)-15$ جڏهن ته $t = x^2+5x$

$= t^2+10t+24-15$

$= t^2+10t+9$

$= (t+1)(t+9)$

$= (x^2+5x+1)(x^2+5x+9) \quad \because \; t = x^2+5x$

مثال 03 $(x+2)(x-2)(x-3)(x+3)+(-2x^2)$ جا جزا لکو.

حل: $(x+2)(x-2)(x-3)(x+3)+(-2x^2)$

$= (x+2)(x-2)(x-3)(x+3)+(-2x^2)$

$= (x^2-2^2)(x^2-3^2)-2x^2 \qquad [\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2)]$

$= (x^2-4)(x^2-9)-2x^2$

$= x^4 - 9x^2 - 4x^4 + 36 - 2x^2$

$= x^4 - 15x^2 + 36$

$= x^4 - 3x^2 - 12x^2 + 36$

$= x^2(x^2-3) - 12(x^2-3)$

$= (x^2-3)(x^2-12)$

$= [(x)^2 - (\sqrt{3})^2][(x)^2 - (2\sqrt{3})^2]$

$= (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})$

مشق 4.3

1. هيٺين جا جزا لهو.

(i) $(x^2-4x-5)(x^2-4x-12)-144$ (ii) $(x^2+5x+6)(x^2+5x+4)-3$

(iii) $(x^2-2x+3)(x^2-2x+4)-42$ (iv) $(x^2-8x+4)(x^2-8x-4)+15$

(v) $(x^2+9x-1)(x^2+9x+5)-7$ (vi) $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-120$

2. جزا لهو.

(i) $(x+1)(x+2)\ (x+3)(x+4)-48$ (ii) $(x+2)(x+3)\ (x+4)(x+5)-24$

(iii) $(x-1)(x-2)\ (x-3)(x-4)-99$ (iv) $(x-3)(x-5)\ (x-7)(x-9)+15$

(v) $(x-1)(x-2)\ (x-3)(x-4)-224$ (vi) $(x-1)(x-3)\ (x-4)(x-5)-255$

3. جزا لهو.

(i) $(x-2)(x-3)(x+2)(x+3)-2x^2$ (ii) $(x-1)(x+1)(x+3)\ (x-3)-3x^2-23$

(iii) $(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)+4x^2$ (iv) $(x-2)(x+2)(x-4)\ (x+4)-14x^2$

(v) $(x+5)(x+2)(x-5)(x-2)+4x^2$ (vi) $(x^2-x-12)(x^2-x-12)-x^2$

نمونو V: $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ۽ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

اسان کي خبر آهي تہ

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$$

۽

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$$

تہ مٿي ڏنل نموني جي جزن کي سمجھڻ لاءِ هيٺيان مثال مددگار ٿيندا.

مثال 01 جزا لهو (i) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$ (ii) $64x^3-12x^2+\frac{3x}{4}-\frac{1}{64}$

حل (i): $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$

$$=(2x)^3+3(2x)^2(y)+3(2x)(y)^2+(y)^3 \qquad [\because (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3]$$

$$=(2x+y)^3$$

حل (ii): $64x^3-12x^2+\frac{3x}{4}-\frac{1}{64}$

$$=(4x)^3-3(4x)^2\left(\frac{1}{4}\right)+3(4x)\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^3 \qquad [\because (a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3]$$

$$=\left(4x-\frac{1}{4}\right)^3$$

مشق 4.4

1. هينين جا جزا لهو.

(i) $b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$ (ii) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$

(iii) $64x^3+12x^2+3x+\frac{1}{64}$ (iv) $8x^3+36x^2+54x+27$

(v) $\frac{1}{27}+\frac{1}{3}y^2+y^4+y^6$ (vi) $\frac{8}{27}x^3+2x^2y+3xy+\frac{27}{8}y^3$

(vii) $\frac{64}{9}+\frac{16}{3}x^2+4x+x^3$ (viii) $\frac{z^3}{8}+\frac{z^2y}{4}+\frac{zy^2}{6}+\frac{y^3}{27}$

2. جزا لهو.

(i) $d^3-6d^2c+12dc^2-8c^3$ (ii) $x^6-\frac{16}{3}x^4+4x^2-\frac{64}{9}$

(iii) $\frac{x^3}{125}-\frac{3}{25}x^2y+\frac{3}{5}xy^2-y^3$ (iv) $125z^3-75z^2y^2+15zy^4-y^6$

(v) $\frac{z^3}{27}-\frac{z^2y}{3}+36zy^2-216y^3$ (vi) $\frac{b^6}{27}-\frac{b^4c^2}{4}+\frac{b^2c^4}{6}-\frac{c^6}{8}$

(vii) $216+\frac{9}{2}z^2-54z-\frac{z^3}{8}$ (viii) $\frac{8}{27}x^3-2x^2y+3xy-\frac{27}{8}y^3$

نمونو VI: $a^3\pm b^3$

اسان کي خبر آهي تہ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$,

۽ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

تہ مٿي ڏنل نموني جي جزن کي سمجهڻ لاءِ هينيان مثال مددگار ثيندا.

مثال 01 $8x^3+27$ جا جزا لھو

حل: $8x^3+27$

$$= (2x)^3+(3)^3$$
$$= (2x+3)[(2x)^2-(2x)(3)+(3)^2] \quad [\because a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)]$$
$$= (2x+3)(4x^2-6x+9)$$

تنهنڪري
$$8x^3+27=(2x+3)(4x^2-6x+9)$$

مثال 02 $108x^3-256xz^3$ جا جزا لھو

حل: $108x^4-256xz^3$

$$= 4x(27x^3-64z^3)$$
$$= 4x[(3x)^3-(4z)^3 \quad [\because a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)]$$
$$= 4x(3x-4z)[(3x)^2+(3x)(4z)+(4z)^2]$$
$$= 4x(3x-4z)(9x^2+12xz+16z^2)$$

تنهنڪري
$$108x^3-256xz^3=4x(3x-4z)[(9x^2+12xz+16z^2).$$

مشق 4.5

1. هيٺين جا جزا لھو.

(i) x^3+8y^3 (ii) $a^{11}+a^2b^9$ (iii) a^6+1 (iv) a^3b^3+512

(v) $a^3b^3+27b^6$ (vi) $\frac{x^3}{125}+\frac{125}{x^3}$ (vii) $x^9+x^3y^6z^9$ (viii) $\frac{x^6}{27}+\frac{8}{x^3}$

2. جزا لھو.

(i) x^3-8y^3 (ii) x^9-8y^9 (iii) $1000-\frac{x^3y^3}{125}$ (iv) a^6-b^6

(v) $\frac{x^6}{64}-\frac{64}{x^{12}}$ (vi) $x^{12}-y^{12}$ (vii) $\frac{27}{x^3}-8y^6$ (viii) $8x^6-\frac{1}{729}$

4.2 پاچي ۽ جزن وارو سڌيان

ٽي يا وڌيڪ درجن وارين گھڻ رقمي اظهارن جي جزن معلوم ڪرڻ لاءِ گھٽو ڪري پاچي ۽ جزن وارا سڌيان استعمال ٿيندا آهن.

4.2.1: پاچي واري سڌيان کي بيان ڪري ثابت ڪريو، ۽ مثالن سان وضاحت ڪريو.

بيان:

جيڪڏهن ڪنهن $n \geq 1$ درجي واري گھڻ رقمي $p(x)$ کي $(x-a)$ سان ونڊ ڪجي ته پاچي $R = p(a)$ ملندي.

اسان $p(x)$ کي $p(x)=q(x)(x-a)+R$ لکي سگھون ٿا.(جنهن کي ونڊ جو الگورٿم چئبو آهي) جڏهن ته R مستقل (پاچي) آهيءِ $q(x)$ جون درجو $p(x)$ کان هڪ گهٽ آهي.

ثابتي:

ونڊ جي الگورٿم تحت

$$p(x) = q(x)(x-a)+R,$$

فرض ڪريو ته $x=a$ ته پوءِ

$$p(a) = q(a)\times (a-a)+R,$$

$$p(a) = q(a)\times 0+R$$

$\Rightarrow$ $p(a) = R =$ پاچي.

4.2.2: پاچي معلوم ڪريو (ونڊ ڪرڻ کان سواءِ) جڏهن مليل گھڻ رقمي هڪ درجي واري گھڻ رقمي سان ورڇ ٿيل هجي.

هينيان مثال، پاچي واري سڌيان استعمال ڪرڻ ۾ اسان لاءِ مددگار ثابت ٿيندا.

مثال 01 پاچي لهو جڏهن x^2-3x+4 کي $x-2$ سان ونڊ ڪجي.

حل: فرض ڪريو ته $p(x)=x^2-3x+4$

هتي پاچي واري سڌيان مطابق $a=2$ آهي.

$$p(2) = (2)^2 - 3\ (2) + 4$$
$$= 4 - 6 + 4 = 8 - 6 = 2$$
$$p(2) = R = 2$$

تنهنڪري پاچي 2 آهي

مثال 02 k جو ملھ لھو، جيڪڏھن گھڻ رقمي x^3+kx^2+3x-4 کي $x+2$ سان ونڊ ڪجي تہ پاڇي -2 بچي.

حل: ھتي $p(x)=x^3+kx^2+3x-4$

$$\therefore \quad p(-2) = (-2)^3 + k(-2)^2 + 3(-2) - 4$$

پاڇي $=-2$

$$\Rightarrow \quad -2 = 4k - 18$$
$$\Rightarrow \quad 4k = -2 + 18$$
$$\Rightarrow \quad 4k = 16$$
$$\Rightarrow \quad k = 4,$$

تنھنڪري k جو ملھ آھي 4

4.2.3: گھڻ رقمي جي ٻڙي

جيڪڏھن $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n$ حقيقي منڍي (coefficient) واري گھڻ رقمي ھجي ۽ جيڪڏھن گھڻ رقمي $p(x)$ ۾ $x=a$ وجھڻ سان $p(a)=0$ ملي تہ "a" کي $p(x)$ گھڻي رقمي جي ٻڙي چئبو آھي.

مثال 03 $P(x) = x + 7$ تہ پوءِ -7 گھڻ رقمي جي ٻڙي جيئن $P(-7) = -7 + 7 = 0$

4.2.4: جزن وارو سڌيان بيان ڪري ثابت ڪريو.

بيان: جيڪڏھن $p(a) = 0$ تہ ھڪ درجي گھڻ رقمي $x-a$ $p(x)$ گھڻ رقمي جو جزو آھي.

ثابتي: فرض ڪريو تہ $q(x)$ کي $x - a$ سان ونڊ ڪجي تہ پوءِ

$$p(x)=(x-a)q(x)+R$$

پاڇي واري سڌيان مطابق $R = p(a)$

تنھنڪري. $p(x)=q(x)(x-a)+p(a)$

جيڪڏھن $p(a)=0$ ھجي تہ پوءِ $p(x)=q(x)(x-a)$ ٿيندو. جڏھن تہ $(x-a)$ گھڻ رقمي $p(x)$ جو ھڪ جزو آھي

هينيان مثال جزن واري سڌيان کي استعمال ڪرڻ ۾ مددگار ثابت ٿيندا.

مثال 01 معلوم ڪريو ته $x+2$ ، جزو آهي $x^3+\frac{9}{2}x^2+3x-4$ جو يا نه

حل: فرض ڪريو ته $p(x)=x^3+\frac{9x^2}{2}+3x-4$

$$\therefore\ R=p(-2)=(-2)^3+\frac{9}{2}(-2)^2+3(-2)-4$$
$$=-8+18-6-4$$
$$=-18+18=0\Rightarrow R=0,$$

پاچي = 0

x + 2 جزو آهي P(x) جو

مثال 02 معلوم ڪريو ته x + 3 جزو آهي $x^3-x^2-8x+12$ جو.

حل: فرض ڪريو ته $p(x)=x^3-x^2-8x+12$

$$R=p(-3)=(-3)^3-(-3)^2-8(-3)+12$$
$$=-27-9+24+12$$
$$R=p(-3)=-36+36=0$$

x+3 جزو آهي $x^3-x^2-8x+12$ جو.

مشق 4.6

.1 پاچي وارو سڌيان استعمال ڪري پاچي لهو جڏهن

(i) $x^3-6x^2+11x-8$ کي $(x-1)$ سان ونڊ ڪجي

(ii) $x^3+6x^2+11x+8$ کي $(x+1)$ سان ونڊ ڪجي

(iii) x^3-x^2+14 کي $(x-2)$ سان ونڊ ڪجي

(iv) $x^3-3x^2+4x-14$ کي $(x+2)$ سان ونڊ ڪجي

(v) $(2y-1)^3+6(3+4y)-9$ کي $(2y+1)$ سان ونڊ ڪجي

(vi) $4y^3-4y+3$ کي $(2y-1)$ سان ونڊ ڪجي

(vii) $(2y+1)^3-6(3-4y)-10$ کي $(2y-1)$ سان ونڊ ڪجي

(viii) $x^4+x^2y^2+y^4$ کي $(x-y)$ سان ونڊ ڪجي

4. m جو ملھ لھو، جيڪڏھن $p(y) = my^3+4y^2+3y-4$ ۽ $q(y) = y^3-4y+m$ کي $(y-3)$ سان ونڊ ڪجي تہ ساڳي پاچي بچي.

5. جيڪڏھن گھڻ رقمي $4x^3 - 7x^2 + 6x - 3k$ کي $(x+2)$ سان پورو ورهائجي سگهجي تہ k جو ملھ لھو.

6. جيڪڏھن گھڻ رقمي $3y^2 - 4ry - 4r^2$ جو جزو آھي $(y+2)$ تہ r جو ملھ لھو.

4.3 مصنوعي ورھاست (Synthetic Division)

مصنوعي ورھاست، گھڻ رقمي کي، ھڪ درجي گھڻ رقمي سان ونڊ ڪرڻ جو طريقو آھي.

4.3.1: مصنوعي (Synthetic) ورھاست وارو طريقو بيان ڪريو.

مصنوعي ورھاست واري طريقي کي ھيٺ ڏنل مثالن جي مدد سان بيان ڪيو ويو آھي.

مثال 01 مصنوعي ورھاست کي استعمال ڪري گھڻ رقمي $p(x)=x^3-3x^2+5x+7$ کي $(x-1)$ سان ونڊ ڪريو.

حل: ھتي ، $x-1=0 \Rightarrow x=1$, (1 ضرب ڪندڙ آھي)

گھڻ رقمي جا عدد سَرَ (منيا) لکو

تنھنڪري

(قطار 1)	7	5	-3	1	1
(قطار 2)	3	-2	1		
(قطار 3)	10= R	3	-2	1	

تفصيل

قدم I: گھڻ رقمي P(x) جا عددي سَرَ (منيا) ۾ منتقل پھرين قطار ۾ وڏ نندائي ترتيب ۾ لکو.

قدم II: پھريون عددي سرو (منيو) 3 قطار ۾ ان جي ھينيان (1 قطار) ساڳي جاء تي لکو.

قدم III: ضرب ڪندڙ 1 ۽ عددي سَرَي 1 جي ضرب اپت کي ٻئي عددي سري جي ھيٺان قطار 2 ۾ لکوء جوڙ ڪري، ان جو جوڙ قطار 3 ۾ لکو ۽ ساڳي عمل کي دھرايو.

تہ پوء $q(x)=x^2-2x+3$ ۽ $p(1) = R = 10$

نوٽ: $q(x)$ جو درجو= [$p(x)$ جو درجو-1] $3-1=2$
ڪريو ته ۽ 3 قطار جو آخري رڪن، پاڇي آهي.

4.3.2 مصنوعي ورهاست ڪي استعمال ڪري

(a) وند اپت ۽ پاڇي معلوم ڪريو جڏهن مليل گهڻ رقمي هڪ درجي واري گهڻ رقمي سان وند ٿيل آهي.

(b) نامعلومن جي قيمت معلوم ڪريو، جيڪڏهن گهڻ رقمين جون ٻڙيو مليل هجن.

(c) نامعلومن جي قيمت معلوم ڪريو جيڪڏهن گهڻ رقمي جا جزا مليل هجن.

مثال 01 وند اپت ۽ پاڇي معلوم ڪريو جڏهن،

$p(x) = x^4-12x+50x^2-84x+49$ کي هڪ درجي گهڻ رقمي $x-5$ سان وند ڪجي.

حل: اسان کي مليل آهي ته $p(x)=x^4-12x^3+50x^2-84x+49$,

۽ هڪ درجي گهڻ رقمي $x-a=x-5, a=5$ ضرب ڪندڙ $p(5)=R=?$ ۽ $q(x)=?$ آهي.

وند اپت ۽ پاڇي معلوم ڪرڻ لاءِ اسان مصنوعي ورهاست استعمال ڪنداسين.

5	1	−12	50	−84	49	(قطار 1)
		5	−35	75	−45	(قطار 2)
	1	−7	15	−9	4 = R	(قطار 3)

ته پوءِ $q(x)=x^3-7x^2+15x-9$ ۽ $R=4$ گهربل ونداپت ۽ پاڇي آهن.

نوٽ: $R\neq 0$ تنهنڪري $(x-5)$ مليل گهڻ رقمي $p(x)$ جو جزو نه آهي.

مثال 02 m جي ڪهڙي ملهه لاءِ ، 1 گهڻ رقمي جي ٻڙي آهي.

حل: مليل آهي ته $p(x)= x^3-mx^2+x-1$

هتي ضرب ڪندڙ $a=1$ آهي

ته مصنوعي ورهاست واري طريقي مطابق اسان وٽ

$1 \rfloor$	1	$-m$	1	-1	(قطار 1
		1	$1-m$	$2-m$	(قطار 2
	1	$1-m$	$2-m$	$1-m = R,$	(قطار 3

جيئن تہ 1 گھڻ رقمي جي بڙي آهي تنھنڪري x-1 هڪ جزو آهي

هتي R=0

$$\Rightarrow \quad 1 - m = 0$$

تہ پوءِ

$$m = 1$$

تہ پوءِ گھڻ رقمي جي بڙي لاءِ m برابر ٿيندي 1 جي.

مشق 4.7

1. مصنوعي ورهاست واري طريقي سان هيٺ ڏنل گھڻ رقمين کي وند ڪريو ۽ انهن جي وند اپت ۽ پاچي پڻ معلوم ڪريو.

(i) $p(x)=x^3-x^2+x-1$ *by* $x-1$ (ii) $p(x)=x^3-x^2-x-1$ *by* $x+1$

(iii) $p(x)=x^3-6x^2+11x-6$ *by* $x+2$ (iv) $p(x)=x^3+6x^2-11x-6$ *by* $x-2$

(v) $p(x)=x^4-x^3+x^2-x-1$ *by* $x+2$ (vi) $p(x)=x^4+x^3-x^2+x-1$ *by* $x-1$

(vii) $p(x)=x^5+x^3-2x^2-3$ *by* $x+3$ (viii) $p(x)=x^5-x^4+x^3-3x^2+6x-6$ *by* $x-3$

(ix) $p(x)=2x^4-2x^3+100x^2-168x+95$ *by* $x-2$

(x) $p(x)=6x^4-72x^3+300x^2-564x+270$ *by* $x-5$

2. K جي ڪهڙي ملھ لاءِ گھڻ رقمي $p(x)=x^3+x^2-14x-k$ جو جزو 2- بڙي آهي.

3. m جي ڪهڙي ملھ لاءِ $x^3+mx^2-7x-10$ جو جزو x-2 ٿيندو.

4. m جي ڪهڙي ملھ لاءِ $x^3-7x^2+6x-3m$ جو جزو x+2 آهي.

5. k جي ڪهڙي ملھ لاءِ $P(x)=2x^3-4mx^2+x-1$ گھڻ رقمي -1 جي ، بڙي آهي.

4.4 ٽه درجي گهڻ رقمين جا جزا لهڻ

اسان اڳ ۾ هڪ درجي ۽ ٻه درجي گهڻ رقمين کي حل ڪرڻ جا طريقا پڙهي آيا آهيون. هاڻ اسان جزن واري سڌيان کي استعمال ڪري ٽه درجي گهڻ رقمين جو ملهه لهنداسين.

4.4.1 جزن وارو سڌيان استعمال ڪري ٽه درجن گهڻ رقمين جا جزا لهڻ ٽه درجي گهڻ

رقمين جا جزا، جزن واري سڌيان سان لهڻ جي لاءِ اهو ضروري آهي ته گهڻ رقمين جو هڪ جزو يا وڌيڪ پڙيو معلوم هجن.

اچو ته هينيان مثال ڏسون

مثال 01 $x^3-6x^2+11x-6$ جا جزا لهو

حل: فرض ڪريو ته $p(x)=x^3-6x^2+11x-6$

6 جا جزا آهن $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$

$$p(1)=(1)^3-6(1)^2+11(1)-6$$
$$p(1)=1-6+11-6$$
$$p(1)=0$$

تنهنڪري P(x) جو x-1 هڪ جزو آهي

مصنوعي ورهاست ذريعي ونڊ

قطار (1	-6	11	-6	1	1
قطار (2	6	-5	1		
قطار (3	0	6	-5	1	

$$p(x)=(x-1)(x^2-5x+6)$$
$$=(x-1)\{x^2-2x-3x+6\}$$
$$=(x-1)\{x(x-2)-3(x-2)\}$$

مثال 02 جا جزا لهو x^3-4x^2+x+6

حل: جيڪڏهن x-1 جزو آهي P(x) جو تہ پوءِ

$$p(1)=(1)^3-4(1)^2+1+6$$
$$=1-4+1+6$$
$$=4\neq 0$$

تنهنڪري x-1 جزو نہ آهي P(x) جو

جيڏهن x+1 جزو آهي P(x) جو تہ پوءِ

$$p(-1)=(-1)^3-4(-1)^2+1(-1)+6$$
$$=-1-4-1+6$$
$$=0$$

تنهنڪري x+1 جزو آهي P(x) جو

مصنوعي ورهاست جي طريقي سان

-1	1	-4	1	6	(قطار 1)
		-1	5	-6	(قطار 2)
	1	-5	6	0	(قطار 3)

$$p(x)=(x+1)(x^2-5x+6)$$
$$=(x+1)\{x^2-2x-3x+6\}$$
$$=(x+1)\{x(x-2)-3(x-2)\}$$
$$p(x)=(x+1)(x-2)(x-3)$$

مشق 4.8

جزن واري طريقي سان جزا معلوم ڪريو.

1. x^3-x^2+x-1
2. x^3+x^2-x-1
3. $x^3-6x^2+11x-6$
4. $x^3+6x^2-11x-6$
5. x^3-2x^2+x-1
6. $6x^3+7x^2-x-2$
7. $x^3+8x^2+19x+12$
8. $2x^3+9x^2+10x+3$
9. $x^3+12x^2+44x+48$

ورجايل مشق 4

.1 صحيح ۽ غلط سوال

هيٺيان جملا غور سان پڙهو ۽ صحيح بيان لاءِ T ، غلط بيان لاءِ F تي گول لڳايو.

(i)	$x^2+x-6=(x+3)(x-2)$	T/F
(ii)	$a^3+27=(a+3)(a^2-3a+9)$	T/F
(iii)	$b^3-8=(b-2)(b^2+2b+4)$	T/F
(iv)	$a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a+b)^2$	T/F
(v)	$a^6+b^6=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$	T/F
(vi)	$a^5+b^5=(a+b)^5$	T/F

.2 هيٺين جملن کي مڪمل ڪريو.

(i) $16x^2-y^4=(4x-y^2)$ ____________

(ii) $x^3-64y^3=(x-4y)$ ____________

(iii) $x^2+5x+6=(x+2)$ ____________

(iv) $x^2+y^2=(x-y)^2$ ____________

(v) $a^3+27b^3=(a+3b)$ ____________

.3 صحيح جواب تي ($a^2+2ab+b^2-c$) ٽڪ ڪرو.

(i) $a^2+2a-24$ جا جزا آهن

(a)	$a+4, a-6$	(b)	$a-4, a+6$
(c)	$a+3, a-8$	(d)	$a+8, a-3$

(ii) $a^2+2ab+b^2-c^2$ جا جزا آهن

(a)	$(a-b+c)(x-b-c)$	(b)	$(a+b+c)(a-b-c)$
(c)	$(a+b+c)(a+b-c)$	(d)	$(a+b+c)(a-b-c)$

(v) $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{y}{x^2-y^2}=$ جي سادي صورت آهي.

(a) $\dfrac{y+1}{x^2-y^2}$ (b) $\dfrac{x}{x^2-y^2}$

(c) $\dfrac{y}{x^2-y^2}$ (d) $\dfrac{y-1}{x^2-y^2}$

(vi) m جو ملهه لهو، جڏهن x^2+4x+m مڪمل چورس آهي.

(a) 8 (b) -8

(c) 4 (d) -4

خلاصو

- جزا لهڻ هڪ عمل آهي، جنهن ۾ اسان ڏنل گهڻ رقمي (اظهار) کي ٻہ يا ٻن کان وڌيڪ اظهارن جي ضرب اپت ۾ ظاهر ڪندا آهيون.
- فارمولا:

(i) $ka + kb + kc = k(a + b + c)$

(ii) $\underline{ac + ad} + \underline{bc + bd} = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d)$

(iii) $a^2 + 2ab + b^2 = (a)^2 + 2(a)(b) + (b)^2 = (a + b)^2$

(iv) $a^2 - 2ab + b^2 = (a)^2 - 2(a)(b) + (b)^2 = (a - b)^2$

(v) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

- پاڃي ۾ جزن وارا سڌيان، ٻہ اهم سڌيان آهن، هي اهڙي قسم جي گهڻ رقمين کي حل ڪرڻ لاءِ استعمال ٿيندا آهن، جن کي فارمولا جي مدد سان حل ڪري نہ سگهبو آهي.

(i) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$ (ii) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$

(iii) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ (iv) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

- گهڻ رقمين جون پڙيون

جيڪڏهن ڪو مخصوص عدد، گهڻ رقمي P(x) ۾ بدلجندڙ x جو متبادل آهي،جيئن P(a) جي قيمت ٻڙي آهي، تہ پوءِ a کي گهڻ رقمي (Px) جو ٻڙي چئبو آهي.

- جزن وارو سڌيان

جزن واري سڌيان کي هن ريت بيان ڪري سگهبو آهي

جيڪڏهن $p(a)=0$ تہ هڪ درجي گهڻ رقمي $(x-a)$ ، گهڻ رقمي $p(x)$ جو هڪ جزو آهي.

مصنوعي ورهاست واري طريقي جي وضاحت

قدم I: گهڻ رقمي P(x) جا عددي سِرا (منيا) ۽ مستقل (Constant) پهرين قطار ۾ ننڍ وڏائي ترتيب ۾ لکو.

قدم II: پهريون عددي سِرو (منيو) ، 3 قطار ۾ ان جي هيٺان 1 قطار جي ساڳي جاءِ تي لکو.

قدم III: عددي سري ۽ ان جي ضربيندڙ 2 جي ضرب اپت کي قطار 2 جي هيٺان لکو ۽ جوڙ ڪري ان جو جوڙ قطار 3 ۾ لکو ۽ ساڳي عمل کي ورجايو.

يونٽ 5

آلجبري هيرا ڦيري

ALGEBRAIC MANIPULATION

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي مطالعي کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- آلجبري اظهارن جو جزن ذريعي وڏو عام پورو ونڊيندڙ (H.C.F) ۽ ننڍي عام ييج اپت معلوم ڪندا.
- ونڊ ذريعي ، وڏو عام پوروونڊيندڙ ۽ ننڍي عام ينج اپت ظاهر ڪندا.
- وڏي عام پوري ونڊيندڙ ۽ ننڍي عام ينج اپت جي وچ ۾ تعلق بابت جاڻي سگهندا.
- وڏو عام پورو ونڊنيڙ ۽ ننڍي عام ينج اپت سان تعلق رکندڙ روزمره زندگي جا حساب حل ڪري سگهندا.
- وڏو عام پورو ونڊيندڙ ۽ ننڍي عام ينج اپت کي استعمال ڪري، جوڙ، ڪٽ، ضرب ۽ ونڊ تي مشتمل اٽپوري اظهارن کي حل ڪري سگهندا.
- آلجبري اظهارن جو جزن ۽ ونڊ ذريعي ٻيومول معلوم ڪري سگهندا.

تعارف:

آلجبري هيرا ڦيري (manipulation) ۽ آلجبري اظهارن جي هيراڦيري سان تعلق رکي ٿي جي اظهار اڪثر ڪري سادي صورت ۾ ، يا اهڙي صورت ۾ هوندو جنهن ڪي آساني سان حل ڪري سگهجي، اها آلجبري اظهارن جي حسابن ڪي حل ڪرڻ لاءِ اهم ۽ بنيادي مهارت آهي.

هن يونٽ ۾ اسان جزن ۽ وند ذريعي آلجبري اظهارن جي وڏي عام پوري وندبندڙ ۽ ننڍي عام ينج اپت ۽ ٻيو مول ڪي، ۽ ان جي روزمره زندگي ۾ استعمال تي بحث ڪنداسين.

5.1 وڏو عام پورو وندبندڙ (HCF) / (GCD) ۽ ننڍي عام ينج اپت (LCM)

5.1.1: آلجبري اظهار جي جزن ذريعي وڏو عام پورو وندبندڙ ۽ ننڍي عام ينج اپت معلوم ڪريو.

(a) جزن ذريعي وڏو عام پورو وندبندڙ لهڻ

مليل اظهار جو وڏو عام پورو وندبندڙ معلوم ڪرڻ لاءِ پهريائين اسان هر هڪ گهڻ رقمي جا جزا معلوم ڪنداسين ، ان کانپوءِ اسان مشترڪ جزن جي ضرب ڪنداسين. مشترڪ جزن جي هن ضرب اپت کي، جزن ذريعي وڏو عام پورو وندبندڙ چئبو آهي.

نوٽ: جيڪڏهن ڪوبه مشترڪ جزو نه هجي ته پوءِ و ع پ و ا ٿيندو آهي.

مثال 01 هيٺين اظهارن جو جزن ذريعي و . ع . پ . و لهو.

(i) $x^2+12x+35$ ۽ x^2+x-20

(ii) x^2+4x+3 ۽ $(x+1)^2, x^2-1$

حل: (i) اسان ڏنل اظهارن x^2+x-20 ۽ $x^2+12x+35$ جا جزا لهنداسين، جيڪي هن ريت آهن.

$$x^2+x-20 = x^2+5x-4x-20$$
$$= x(x+5)-4(x+5)$$
$$=(x+5)(x-4)$$

۽

$$x^2+12x+35 = x^2+7x+5x+35$$
$$= x(x+7)+5(x+7)$$
$$= (x+5)(x+7)$$

ٻنهي اظهارن ۾ مشترڪ جزو آهي $(x+5)$.

تنهنڪري و ع پ و ٿيندو $(x+5)$

حل: (ii) اسان ڏنل اظھارن x^2-1 ، $(x+1)^2$ ۽ x^2+4x+3 جا جزا لھنداسين، جيڪي ھيٺ ڏجن ٿا.

$$(x+1)^2 = (x+1)(x+1)$$
$$x^2-1 = (x+1)(x-1)$$
۽
$$x^2+4x+3 = x^2+3x+x+3$$
$$= x(x+3)+1(x+3)$$
$$= (x+3)(x+1)$$

تنھي ڏنل اظھارن ۾ مشترڪ جزو $(x+1)$ آھي.

تنھنڪري و ع پ و ٿيندو $(x+1)$

مثال 02 ھينين اظھارن جو جزن ذريعي و ع پ و لھو.

حل: a^3-b^3 , a^6-b^6

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^6-b^6 = (a^2)^3-(b^2)^3$$
$$= (a^2-b^2)\{(a^2)^2+a^2b^2+(b^2)^2\}$$
$$= (a-b)(a+b)\{(a^2)^2+2a^2b^2+(b^2)^2-a^2b^2\}$$
$$= (a-b)(a+b)\{(a^2+b^2)^2-(ab)^2\}$$
$$= (a-b)(a+b)(a^2+b^2-ab)(a^2+b^2+ab)$$
$$\text{H.C.F} = (a-b)(a^2+b^2+ab)= a^3- a^3-b^3$$

(b) جزن ذريعي ننڍي عام ينج اپت لھڻ.

ھِہ يا ھِن کان وڏيڪ گھڻ رقمين جي ن ع پ ا، ننڍي درجي وارو اھڙو اظھار آھي جيڪو مليل گھڻ رقمي سان ونڊ جي سگھندو.

جزن ذريعي ن ع پ ا لھڻ لاءِ اسان ھينين فارمولا استعمال ڪنداسين.

ن ع پ ا = مشترج جزن جي ضرب x غير مشترڪ جزن جي ضرب.

مثال 01 x^3-8 ۽ x^2+x-6 جي ن ع پ ا لھو.

حل: اسان ھاڻ x^3-8 ۽ x^2+x-6 جا جزا لھنداسين.

$$\therefore \quad x^3-8 = (x)^3-(2)^3 = (x-2)(x^2+2x+4)$$
۽
$$x^2+x-6 = x^2+3x-2x-6 = x(x+3)-2(x+3)$$
$$= (x+3)(x-2)$$

مشترڪ جزو آھي $(x-2)$

غير مشترڪ جزا آھن $(x+3)(x^2+2x+4)$

ن ع پ ا = مشترڪ جزا × غير مشترڪ جزا

ن ع پ ا = $(x-2)(x^2+2x+4)(x+3)=(x^3-8)(x+3)$

مثال 2: x^3-1 ۽ x^3-2x^2+x جي ننڍي عام پينج اپت لهو.

اسان ڏنل اظهارن x^3-1 ۽ x^3-2x^2+x جا جزا لهنداسين.

$\therefore \quad x^3-1=(x)^3-(1)^3=(x-1)(x^2+x+1)$

۽ $\quad x^3-2x^2+x=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2$

ن ع پ ا = مشترڪ جزا × غير مشترڪ جزا

ن ع پ ا = $x(x-1)^2(x^2+x+1)$

5.1.2 وڏو عام پورو ونڊيندڙ ۽ ننڍي عام پينج اپت جي وچ ۾ تعلق بابت ڄاڻ. ٻن گهڻ

رقمين P(x) ۽ q(x) جي صورت ۾ و ع پ و ۽ ن ع پ ا، جو تعلق هينئين طرح بيان ڪبو آهي.

$p(x) \times q(x) =$ و ع پ و × ن ع پ ا

مثال 1: هيٺ ڏنل گهڻ رقمين P(x) ۽ q(x) جي، ن ع پ ا ۽ و ع پ و لهو ۽ ن ع پ ا ۽ و ع پ و جي پاڻ ۾ تعلق جي چڪاس / تصديق ڪريو.

$p(x) = x^2-5x+6$ ۽ $q(x) = x^2-9$.

حل: سڀ کا پهريائين، ڏنل گهڻ رقمين P(x) ۽ q(x) جا ننڍي ۾ ننڍا جزا لهو

$p(x) = x^2-5x+6$

$= x^2-3x-2x+6$

$= x(x-3)-2(x-3)$

$= (x-3)(x-2)$

۽ $\quad q(x) = x^2-9 = (x-3)(x+3)$

و ع پ و $= (x-3)$

۽ ن ع پ ا $= (x-2)(x-3)(x+3) = (x-2)(x^2-9)$

هان P(x) ۽ q(x) جي ضرب اپت لهو

so, $\quad p(x) \times q(x) = (x^2-5x+6) \times (x^2-9) \quad \ldots$ (i)

$\text{LCM} \times \text{HCF} = (x-2)(x-3)(x+3) \times (x-3)$

$\Rightarrow \quad = (x^2-5x+6) \times (x^2-9) \quad \ldots$ (ii)

(i) ۽ (ii) جي مليل نتيجن مان اسان کي معلوم ٿيو ته

$P(x) \times q(x) =$ و ع پ و X ن ع پ ا

تنهنڪري تصديق ٿي وئي.

مثال 2: هيٺين گهٽ رقمين جي فارمولا جي مدد سان ن ع پ ا، لهو

$q(x)= x^2+8x+12$ ۽ $p(x)= x^2+14x+48$

حل: پهريائين اسان P(x) ۽ q(x) جو و ع پ و لهنداسين

$$
\begin{aligned}
p(x) &= x^2+14x+48\\
&= x^2+8x+6x+48\\
&= x(x+8)+6(x+8)\\
&= (x+6)(x+8)
\end{aligned}
$$

۽

$$
\begin{aligned}
q(x) &= x^2+8x+12\\
&= x^2+6x+2x+12\\
&= x(x+6)+2(x+6)\\
&= (x+2)(x+6)
\end{aligned}
$$

تنهنڪري P(x) ۽ q(x) جو و ع پ و آهي $x+6$

$$
\begin{aligned}
\text{LCM} &= \frac{p(x)\times q(x)}{\text{HCF}}\\
&= \frac{(x^2+14x+48)\times(x^2+8x+12)}{(x+6)}\\
&= \frac{(x+6)(x+8)(x+2)(x+6)}{(x+6)}
\end{aligned}
$$

$\text{LCM} = (x+2)(x+6)(x+8).$

5.1.3: جزن يا وندڊ ذريعي و ع پ و ۽ ن ع پ ا کي ظاهر ڪرڻ.

ٻہ يا ٻن کان وڌيڪ آلجبري اظهارن جو وندڊ ذريعي و ع پ و لهڻ جو لاءِ هيٺيان مثال سمجهڻ ۾ مدد ڪندا.

مثال 1: هيٺ ڏنل گهڻ رقمين جو وندڊ ذريعي و ع پ و معلوم ڪريو.

$2x^3 + 9x^2 + 11x + 2$ ۽ $2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$

حل: اصلوڪي وندڊ جي طريقي سان اسان کي ملندو.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 1 \\ 2x^3+7x^2+4x-4 & \;2x^3+9x^2+11x+2 \\ & \underline{-2x^3 \pm 7x^2 \pm 4x \mp 4} \\ & \quad 2x^2+7x+6 \end{array}$$

وري

$$\begin{array}{r|l} & \quad x \\ 2x^2+7x+6 & \;2x^3+7x^2+4x-4 \\ & \underline{-2x^3 \pm 7x^2 \pm 6x + 0} \\ & \quad -2x-4 \end{array}$$

-2 کي (common) ڪرڻ سان

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2x+3 \\ x+2 & \;2x^2+7x+6 \\ & \underline{-2x^2 \pm 4x + 0} \\ & \quad 3x+6 \\ & \underline{-3x \pm 6} \\ & \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

گهربل و ع پ و آهي $x+2$

مثال 2: هيٺ ڏنل گهڻ رقمين جو وندڊ ذريعي و ع پ و معلوم ڪريو.

$x^2 + 4x + 3$ ۽ $x^2 + 2x + 1, x^2$

حل: پهريائين اسان ٻن اظهارن جو و ع پ و لهنداسين ۽ پوءِ ان جو ٽين **اظهار** سان و ع پ و لهنداسين،

هاڻ اصلوڪي وندڊ جي طريقي سان اسان کي ملندو

$$\begin{array}{r|l} & \quad 1 \\ x^2+2x+1 & x^2+4x+3 \\ & \underline{x^2 \pm 2x \pm 1} \\ & \quad 2x+2 \end{array}$$

اسان 2+ کي (common) خارج ڪرڻ سان

وري.

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x+1 & x^2+2x+1 \\ & -x^2 \pm x+0 \\ \hline & x+1 \\ & -x \pm 1 \\ \hline & 0 \quad 0 \end{array}$$

تہ x^2+2x+1 , $x+1$ ۽ x^2+4x+3 جو و ع پ و آهي x+1

هاڻ اسان $x+1$ ۽ x^2-1 جو و ع پ و لهنداسين

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ \hline x+1 & x^2-1 \\ & -x^2 \pm x \\ \hline & -x-1 \\ & mxm1 \\ \hline & 0 \quad 0 \end{array}$$

تنهي گهڻ رقمين جو و ع پ و آهي (x+1)

هاڻ اسان ونڊ ذريعي ن ع پ ا لهنداسين

ہ يا ہن کان وڌيڪ آلجبري اظهارن (گهڻ رقمين) جي ونڊ ذريعي ن ع پ ا معلوم ڪرڻ لاءِ هيٺين فارمولا استعمال ڪنداسين

$$\boxed{\text{L.C.M} = \frac{\text{ہن گهڻ رقمين جي ضرب اپت}}{\text{ہن گهڻ رقمين جو و ع پ و}}}$$

مثال 3: $x^3-6x^2+11x-6$ ۽ x^3-4x+3 جي ن ع پ ا لهو

حل: $x^3-6x^2+11x-6$ ۽ x^3-4x+3

پهريائين عام ونڊ جي طريقي سان و ع پ و لهو

$$\begin{array}{r|l} x^3-4x+3 & x^3-6x^2+11x-6 \\ & -x^3 \qquad \pm 4x \pm 3 \\ \hline & -6x^2+15x-9 \end{array}$$

$-6x^2+15x-9$ مان -3 کي خارج ڪرڻ سان $2x^2-5x+3$ ملندو

هاڻ x^3-4x+3 by 2 کي 2 سان ضرب ڪرڻ سان

$$\begin{array}{r|l} & x+5 \\ \hline 2x^2-5x+3 & 2x^3-8x+6 \\ & -2x^3 \pm 3x \mp 5x^2 \\ \hline & 5x^2-11x+6 \end{array}$$

2 سان ضرب ڪرڻ سان ملندو $10x^2-22x+12$,

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 5 \\
2x^2-5x+3 & \; 10x^2-22x+12 \\
 & -10x^2 \quad 25x \pm 15 \\ \hline
 & \qquad 3x-3
\end{array}
$$

(3x-3) مان 3 خارج ڪرڻ سان ملندو (x-1)

$$
\begin{array}{r|l}
 & \; 2x-3 \\
x-1 & \; 2x^2-5x+3 \\
 & -2x^2 \quad 2x \\ \hline
 & \qquad -3x+3 \\
 & \qquad \; 3x \pm 3 \\ \hline
 & \qquad \; 0 \quad 0
\end{array}
$$

HCF = $x-1$

اسان کي خبر آهي ته $\dfrac{p(x).q(x)}{\text{HCF}}$

$$\text{L.C.M} = \frac{(x^3-6x^2+11x-6)(x^3-4x+3)}{x-1}$$

هاڻ $x^3-6x^2+11x-6$ کي $x-1$ سان ونڊ ڪريو.

$$
\begin{array}{r|l}
x-1 & \; x^3-6x^2+11x-6 \\
 & -x^3 \quad \mp x^2 \\ \hline
 & \qquad -5x^2+11x \\
 & \qquad -5x^2 \quad \pm 5x \\ \hline
 & \qquad \qquad 6x-6 \\
 & \qquad \qquad -6x \pm 6 \\ \hline
 & \qquad \qquad \; 0 \quad 0
\end{array}
$$

$$\text{L.C.M} = (x^3-4x+3)(x^2-5x+6)$$

5.1.4 و ع پ ع ۽ ن ع ي ا، سام تعلق رکندڙ روزمره زندگي جا حساب حل ڪريو.

مثال 1: ردا وٽ ڪپڙن جا ٻہ ٽڪرا آهن، هڪ 45 انچ ۽ ٻيو 90 انچ ويڪرو آهي. هوءَ ٻنهي پٽين کي برابر ويڪر ۾ ڪٽڻ چاهي ٿي. تہ ڪيتري ويڪر واريون پٽيون ڪٽي سگهندي.

حل: هي حساب و ع پ و جي ذريعي حل ڪري سگهجي ٿو. چاڪاڻ تہ هوءَ ڪپڙي کي ممڪن ويڪرن پٽين ۾ ڪٽڻ يا تقسيم ڪري ٿي

تنهنڪري 45 ۽ 90 جو و ع پ و ٿيندو

$$45 = 3 \times 3 \times 5$$
$$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

و ع پ و = مشترڪ جزن جي ضرب اپت

و ع پ و = $3 \times 3 \times 5$

و ع پ و = 45

تہ پوءِ ردا هر هڪ ٽڪر 45 انچن جي ويڪر جو ڪٽي.

مثال 2: سرفراز هر 8 ڏينهن ڪان پوءِ ۽ عمران هر 4 ڏينهن ڪان پوءِ ورزش ڪن ٿا. سرفراز ۽ عمران ٻنهي اڄ ورزش ڪئي آهي، تہ ڪيترن ڏينهن ڪان پوءِ هوگڏجي ورزش ڪندا.

حل: هي حسان ن ع ي ا جي ذريعي حل ڪري سگهبو، چاڪاڻ تہ اسان ورزش جو وقت معلوم ڪرڻ جي ڪوشش پيا ڪريون، اهو 8 ۽ 4 جي ن ع ي ا آهي.

$$8 = 2 \times 2 \times 2$$
$$4 = 2 \times 2$$

ن ع ي ا = مشترڪ جزن جي ضرب اپت x غيرمشترڪ جزن جي ضرب اپت

ن ع ي ا = $2 \times 2 \times 2$

ن ع ي ا = 8

تنهنڪري اهي وري 8 ڏينهن ڪان پوءِ گڏجي ورزش ڪندا.

مشق 5.1

.1 هيٺين اظهارن جو جزن ذريعي وڏو عام پورو ونڊيندڙ لهو.

(i) $72x^4y^5z^2$ ۽ $120x^3y^6z^8$ (ii) $18r^3s^4t^5, 120r^4s^3t^8$ ۽ $210r^7s^7t^3$

(iii) $x^2-3x-18$ ۽ x^2+5x+6 (iv) $4x^2-9$ ۽ $2x^2-5x+3$

(v) $(2a^2-8b^2), (4a^2+4ab-24b^2)$ ۽ $(2a^2-12ab+16b^2)$

(vi) x^3+x^2+x+1 ۽ x^3+3x^2+3x+1

.2 هيٺين اظهارن جو ونڊ وسيلي وڏو عام پورو ونڊيندڙ لهو.

(i) x^2+3x+2 ۽ $3x^2-3x-6$

(ii) $2x^3+15x^2+31x+12$ ۽ $6x^3+46x^2+100x+8$

(iii) $x^3-5x^2+10x-8$ ۽ x^3-4x^2-7x-6

(iv) $x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ ۽ $x^3+4x^2+4x+1x^3+5x^2+7x+2$

.3 هيٺين اظهارن جي جزن وسيلي ننڍي عام پنج اپت لهو.

(i) $27a^4b^5c^2$ ۽ $81ab^2c^8$ (ii) $24p^2q^3r^4, 100p^5q^4r^5$ ۽ $300p^3qr^8$

(iii) $21x^2-14x$ ۽ x^2-5x+2 (iv) $x^2+11x+28$ ۽ x^2+x-12

(v) $6x^2+11x+3, 3x^2-2x-1$ ۽ $3x^2-11x-4$

(vi) x^2-y^2, x^3-y^3 ۽ $x^4+x^2y^2+y^4$

.4 ونڊ وسيلي ننڍي عام پنج اپت لهو.

(i) $x^2-25x+100$ ۽ x^2-x-20

(ii) $3x^2+14x+8$ ۽ $6x^2+x-2$

(iii) $x^2-y^2-z^2-2yz$ ۽ $y^2-z^2-x^2-2xz$

(iv) $3x^3+9x^2-84x$ ۽ $4x^4-24x^3+32x^2$

.5 جيڪڏهن $x^2-11x+24$ ۽ $x+6$ جو و ع پ و.$(x-3)$آهي ته ان جي ن ع پا لهو.

.6 $x^2+8x+15$ ٻن اظهارن جو و ع پ و ۽ ن ع پ ا$(x+3)$۽ $(x^3+7x^2+7x-15)$ آهي، جيڪڏهن هڪ اظهار آهي ته ٻيو اظهار لهو.

.7 ٻن ٻه درجي گهڻ رقمين جو و ع پ و ۽ ن ع پ ا، ترتيبوار $3x-2$ ۽ x^3+7x^2-4 آهن ته ٻنهي اظهارن جي ضرب اپت معلوم ڪريو.

.8 و ع پ و ۽ ن ع پ ا جي وچ ۾ تعلق جي تصديق ڪرو.

$(HCF \times LCM = p(x)\ q(x))$آهي جڏهن ته$p(x)=x^2-8x-20$ ۽ $q(x)=x^2-15x+50$ آهي.

9. هڪ واڍي ڪاٺ جا ڪجھ تختا ورتا، جن مان ڪجھ 12 س م ۽ ڪجھ 18 س م ڊگها آهن. هو انهن کي اهڙي طرح ڪٽڻ چاهي ٿو ته جيئن هن وٽ آساني سان استعمال ڪرڻ جي لاءِ هڪجيتري ماپ وارا تختا هجن. ڪاٺ جو ضايع ڪرڻ کان سواءِ هن کي ڪيتري ماپ جا تختا ڪٽڻ گهرجن

10. ٽرين A ۽ ٽرين B حيدرآباد ۾ صبح جو 10:30 تي بيهن ٿيون. ٽرين A هر 12 منٽن کان پوءِ ۽ ٽرين B هر 14 منٽن کان پوءِ بيهن ٿيون. ٻڌايو ته اهي ٻئي گڏ ڪڏهن بيهنديون.

5.2 آلجبري اٽڀورن تي بنيادي عمل

جيڪڏهن $p(x)$ ۽ $q(x)$ آلجبري اظهار آهن ۽ $q(x) \neq 0$ ته پوءِ $\frac{p(x)}{q(x)}$ هڪ آلجبري اٽپور سڏبو آهي.

آلجبري اٽپور جي سادي صورت، هڪ اهڙو اٽپور آهي، جنهن جي انس ۽ چيد ۾ 1 کانسواءِ ڪوبہ مشترڪ جزو نہ هجي. آلجبري اٽپور ۾ بنيادي عمل $(\times,\div,-,+)$ جو استعمال عام اٽپور وانگرئي ٿيندو آهي.

هينئين مثالن ۾ اسان و ع پ و ۽ ن ع پ ا جي استعمال وسيلي بنيادي عملن وارن اٽپوري اظهارن کي سادي صورت ۾ ڪرڻ بابت وضاحت ڪنداسين.

5.2.1 وڏو عام پورو ونديندڙ ۽ ننڍي عام پنج اپت جي استعمال وسيلي، جوڙ، ڪٽ، ضرب ۽ ونڊ تي مشتمل اٽپوري اظهارن کي گهٽ ڪرڻ.

مثال 01 سادي صورت ۾ آڻيو. $\frac{x^2-x-6}{2x^2-5x-3}+\frac{1}{4x^2-1}$

حل:

$$\frac{x^2-x-6}{2x^2-5x-3}+\frac{1}{4x^2-1}$$

$$=\frac{x^2-3x+2x-6}{2x^2-6x+x-3}+\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$=\frac{x(x-3)+2(x-3)}{2x(x-3)+1(x-3)}+\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$=\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(2x+1)}+\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$ جڏهن $x \neq 3$

$$= \frac{(x+2)}{(2x+1)} + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{(x+2)(2x-1)+1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{2x^2-x+4x-2+1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{2x^2+3x-1}{4x^2-1}$$

مثال 02 سادي صورت ۾ آڻيو $\frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{2x^2+x-6}$

حل: $\frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{2x^2+x-6}$

$$= \frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{2x^2+4x-3x-6}$$

$$= \frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{2x(x+2)-3(x+2)}$$

$$= \frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{(x+2)(2x-3)}$$

$$= \frac{2(2x-3)-(x-4)}{(x+2)(2x-3)}$$

$$= \frac{4x-6-x+4}{(x+2)(2x-3)}$$

$$= \frac{3x-2}{2x^2+x-6}$$

مثال 03 : سادي صورت ۾ آڻيو $\frac{ab^2+2a}{ab-6+2b-3a} \times \frac{b^2-6b+9}{b^3+2b}$

حل: $\frac{ab^2+2a}{ab-6+2b-3a} \times \frac{b^2-6b+9}{b^3+2b}$

$$\frac{ab^2+2a}{ab-6+2b-3a} \times \frac{b^2-6b+9}{b^3+2b} = \frac{a(b^2+2)}{b(a+2)-3(a+2)} \times \frac{b^2-3b-3b+9}{b(b^2+2)}$$

$$= \frac{a}{(a+2)(b-3)} \times \frac{b(b-3)-3(b-3)}{b}$$

$$= \frac{a}{(a+2)(b-3)} \times \frac{(b-3)(b-3)}{b}$$

$$= \frac{a}{(a+2)(b-3)} \times \frac{(b-3)(b-3)}{b}$$

$$= \frac{a(b-3)}{b(a+2)}$$ جڏهن ته $p + q \neq 0$

۽ $r + s \neq 0$

مثال 4: سادي صورت ۾ آڻيو. $\frac{p^2 - q^2}{r^2 + 2rs + s^2} \div \frac{2(p+q)}{3(r+s)s}$

حل:

$$\frac{p^2 - q^2}{r^2 + 2rs + s^2} \div \frac{2(p+q)}{3(r+s)s}$$

$$= \frac{(p+q)(p-q)}{(r+s)^2} \div \frac{2(p+q)}{3(r+s)s}$$

$$= \frac{(p+q)(p-q)}{(r+s)^2} \times \frac{3(r+s)s}{2(p+q)}$$

$$= \frac{3s(p-q)}{2(r+s)},$$

مشق 5.2

1. هيٺين کي سادي صورت ۾ آڻيو.

(i) $\frac{4x}{x^2+2x+1} + \frac{3}{x+1}$

(ii) $\frac{3}{x(2x+1)} + \frac{6x+7}{3x(x+1)}$

(iii) $\frac{3x-1}{x^2+2x+1} - \frac{4x^2-1}{x^2-2x-3}$

(iv) $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3}$

(v) $\frac{x^2+4x+3}{5} \times \frac{10}{x+1}$

(vi) $\frac{x^2-4x-21}{x^2-6x-7} \div \frac{x+9}{x+1}$

(vii) $\left[\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right] \div \left[\frac{2}{x+3} - 1\right]$

(viii) $\left(\frac{1}{x^2-9}\right) \div \left(\frac{1}{x+3}\right) - \frac{3}{x-2}$

(ix) $\frac{1}{x^2+8x+15} + \frac{1}{x^2+7x+12} - \frac{1}{x^2+x-12}$

(x) $2\left(\frac{x^2+7x+12}{x^2-16} + \frac{x^2+x-2}{x^2+4x+4}\right) \times \frac{x^2-2x-8}{8x^2+2x+4}$.

5.3 آلجبري اظهار جو ٻيو مول

5.3.1 آلجبري اظهار جو جزن ۽ ونڊ ذريعي ٻيو مول لهو.

آلجبري اظهارن جو ٻيو مول لهڻ لاءِ اسان ٻن طريقن بابت بحث ڪنداسگهن.

(a) جزن ذريعي (b) ونڊ ذريعي

(a) جزن ذريعي ٻيو مول لهڻ جو طريقو

مثال 1: آلجبري اظهار $49x^2+126xy+81y^2$ جو ٻيو مول جزن ذريعي لهو.

حل:

$$49x^2+126xy+81y^2$$
$$= (7x)^2+2(7x)(9y)+(9y)^2,$$
$$= (7x+9y)^2,$$

تنهنڪري

$$\sqrt{49x^2+126xy+81y^2} = \sqrt{(7x+9y)^2} = 7x+9y$$

(b) ونڊ ذريعي ٻيو مول لهڻ جو طريقو

مثال 02 $4x^4+12x^3-19x^2-42x+49$ اظهار جو ونڊ ذريعي ٻيو مول لهو.

حل: طريقو هيٺ واضح ڪيو ويو آهي.

$$2x^2+3x-7$$

$2x^2$	$4x^4+12x^3-19x^2-42x+49$
$+2x^2$	$\pm 4x^4$
$4x^2+3x$	$12x^3-19x^2-42x+49$
$+3x$	$\pm 12x^3 \pm 9x^2$
$4x^2+6x-7$	$-28x^2-42x+49$
-7	$28x^2 \quad 42x \pm 49$
$4x^2+6x-14$	$0 \quad 0 \quad 0$

تنهنڪري

$$\sqrt{4x^4+12x^3-19x^2-42x+49} = 2x^2+3x-7.$$

مثال 03 a جو اهڙو ملھ لھو جيڪو $36x^4 + 36x^3 + 57x^2 + 24x + a$ کي هڪ مڪمل چورس بڻائي.

حل: ونڊ واري طريقي سان اسان کي

	$6x^2 + 3x + 4$
$6x^2$	$36x^4 + 36x^3 + 57x^2 + 24x + a$
$+6x^2$	$\pm 36x^4$
$12x^2 + 3x$	$36x^3 + 57x^2 - 24x + a$
$+ 3x$	$\pm 36x^3 \pm 9x^2$
$12x^2 + 6x + 4$	$48x^2 + 24x + a$
$+4$	$\pm 48x^2 \pm 24x \pm 16$
$12x^2 + 6x + 8$	$a - 16$

مليل اظهار مڪمل چورس ٿيندو جيڪڏهن

$$a - 16 = 0 \Rightarrow a = 16,$$

تنهنڪري $a = 16$ ڏنل اظهارن کي مڪمل چورس بڻائيندو.

مثال 04 $x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 5$ ۾ ڇا جوڙ ڪجي جو هڪ مڪمل چورس ملي.

حل: ونڊ واري طريقي سان اسان کي

	$x^2 + 2x + 3$
x^2	$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 5$
x^2	$\pm x^4$
$2x^2 + 3x$	$4x^3 + 0x^2 + 0x + 5$
$+ 3x$	$\pm 4x^3 \pm 4x^2$
$2x^2 + 4x + 3$	$6x^2 + 0x + 5$
$+3$	$\pm 6x^2 \pm 0x \pm 9$
$2x^2 + 4x + 6$	$-12x - 4$

يا $-(12x + 4)$

تنهنڪري $12x+4$ جي جوڙ ڪرڻ سان ڏنل اظهار مڪمل چورس ٿيندو.

مشق 5.3

1. هيٺين آلجبري اظهارن جو ٻيو مول جزن وسيلي لهو.

(i) $36x^2-60xy+25y^2$

(ii) $9x^2+\frac{1}{x^2}+6$

(iii) $4x^4y^4-\frac{12x^3y^3}{z^2}+\frac{9x^2y^2}{z^4}$

(iv) $36(3-2x)^2-48(3-2x)y+16y^2$

(v) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x-\frac{1}{x}\right)+3$

(vi) $(4x^2-4x+1)(9x^2-54x+81)$

(vii) $(x^2-2x+1)(x^2-6x+9)$

(viii) $(x^2+8x+15)(x^2+7x+10)(x^2+5x+6)$

2. هيٺين آلجبري اظهارن جو ٻيو مول ونڊ ذريعي لهو.

(i) $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$

(ii) $25x^4+40x^3+26x^2+8x+1$

(iii) $4x^4+8x^3+20x^2+16x+16$

(iv) $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+47-\frac{14y}{x}+\frac{14x}{y}$

(v) $x^2-2x+3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$

(vi) $x^2+\frac{y^2}{9}+9z^2+\frac{2xy}{3}+2yz+6xz$

(vii) $(x^2+\frac{1}{x^2})^2-8(x^2+\frac{1}{x^2})+16$

(viii) $x^6+\frac{1}{x^6}-4\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+6,\ x\neq 0$

3. $4x^4+4x^3+17x^2+8x+9$ ۾ ڇا جوڙ ڪجي، جو هڪ مڪمل چورس بڻائي.

4. $9x^6-12x^5+4x^4-18x^3-12x^2+18$ مان ڇا ڪٽ ڪجي جو هڪ مڪمل چورس بڻائي.

5. جو اهڙو ملهه جيڪو m', $9x^4+12x^3+34x^2+mx+25$ کي هڪ مڪمل چورس بڻائي.

6. p ۽ q جي ڪهڙن ملهن لاءِ $x^4+8x^3+30x^2+px+q$ اظهار هڪ مڪمل چورس ٿيندو.

ورجايل مشق 5

.1 غلط ۽ صحيح سوال

هيٺين جملن کي غور سان پڙهو ۽ صحيح بيان لاءِ "T" غلط بيان لاءِ "F" تي گول لڳايو.

(i) y^2-4 ۽ y-2 جو و ع پ و y-2 آهي.	T / F
(ii) a^2-1 ۽ a^3-1 جو و ع پ و a+1 آهي.	T / F
(iii) x^3+1. ۽ x+1 جي ن ع پ ا، x^3+1 آهي.	T / F
(iv) x^2+y^2 ۽ x^2-y^2 جي ن ع پ ا، x^4-y^4 آهي.	T / F
(v) $a+3$. ۽ a^2+5a+6 جو و ع پ و a^2+4a+3 آهي.	T / F

.2 خال ڀريو.

(i) ڳڻ رقمين جو و ع پ و معلوم ڪرڻ لاءِ ________ طريقا آهن.

(ii) ٻن اظهارن جي ن ع پ ا x و ع پ و = ________ آهي.

(iii) y^2-5y، $y+6$ ۽ $y-2$ جو و ع پ و ________ آهي.

(iv) y^2+5y+6 ۽ y^2+3y+2 جي ننڍي عام ڀينج اپٽ ________ آهي.

(v) $y^2-\frac{1}{y^2}$ ۽ $y+\frac{1}{y}$ جو و ع پ و ________ آهي.

.3 صحيح جواب تي (✓) ٽڪ لڳايو.

(i) x^3-8y^3 ۽ $x^2-4xy+4y^2$ جو و ع پ و آهي.

(a) $x-4y$ (b) $x^2+2xy+y^2$

(c) $x+2y$ (d) $(x-2y)$

(ii) $(2y+3z)^5$ ۽ $(2y+3z)^3$ جي ن ع پ ا آهي.

(a) $2y+3z$ (b) $(2y+3z)^3$

(c) $(2y+3z)^2$ (d) $(2y+3z)^5$

(iii) x^3-y^3 ۽ x^2+xy+y^2 جو و ع پ و آهي.

(a) $x+y$ (b) x^2+xy+y^2

(c) $x-y$ (d) $(x-y)^2$

(iv) $(x-y)^4$ ۽ $(x-y)^3$ جي ن ع پ ا آهي.

(a) $(x-y)$ (b) $(x-y)^3$

(c) $(x-y)^4$ (d) $(x-y)^7$

(v) $\dfrac{y}{x^2-y^2}+\dfrac{1}{x+y}$ جي سادي صورت آهي.

(a) $\dfrac{y+1}{x^2-y^2}$ (b) $\dfrac{x}{x^2-y^2}$

(c) $\dfrac{y}{x^2-y^2}$ (d) $\dfrac{x+y}{x^2-y^2}$

(vi) $\dfrac{1}{5x-y}-\dfrac{y}{25x^2-y^2}$ جي سادي صورت آهي.

(a) $\dfrac{5x}{25x^2-y^2}$ (b) $\dfrac{5x}{5x^2-y}$

(c) $\dfrac{-5x}{5x+y}$ (d) $\dfrac{-5x}{25x^2-y^2}$

(vii) $\dfrac{a^3x^3+a^3y^3}{a^2(x+y)}=$ ________ :

(a) ax^2+ay^2 (b) x^2+y^2

(c) $a(x^2-xy+y^2)$ (d) $a(x^2+xy+y^2)$

(viii) $\dfrac{b}{a+b}-\dfrac{a}{a-b}=$ ________ :

(a) $\dfrac{a^2+b^2}{a-b}$ (b) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-b^2}$

(c) $\dfrac{a+b}{a^2-b^2}$ (d) $\dfrac{a-b}{a^2-b^2}$

(ix) ن ع پ ا = ________

(a) $\dfrac{\text{HCF}}{\text{P×Q}}$ (b) $\dfrac{\text{P×Q}}{\text{HCF}}$

(c) $\dfrac{\text{P}}{\text{HCF}}$ (d) $\dfrac{Q}{\text{HCF}}$

(x) x^2-x+1 ۽ x^3+1 جي ن ع پ ا آهي.

(a) $x+1$ (b) x^2-x+1 (c) x^3+1 (d) x^2+x+1

خلاصو

- الجبري اظهارن جو و ع پ و ۽ ننڍي عام ڀنج اپت معلوم ڪرڻ لاءِ ٻہ طريقا آهي.
  (1) جزن ذريعي (2) وندڻ ذريعي
- ٻن اظهارن جي ن ع پ ا x و ع پ و = ٻن اظهارن جي ضرب اپت
- ن ع پ ا ۽ و ع پ و جي مدد سان آلجبري اظهارن جي جوڙي ڪٽ ضرب ۽ وندڻ معلوم ڪري سگهجي ٿي.
- آلجبري اظهارن جو ٻيومول معلوم ڪرڻ لاءِ ٻہ طريقا آهن.

(i) جزن واري طريقي سان ٻيومول

(ii) وندڻ واري طريقي سان ٻيومول.

يونٽ 6

هڪ درجي مساواتون ۽ اڻ برابري

Linear Equation and Inequalities

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته:

- هڪ بدلجندڙ (variable) واري هڪ درجي مساوات (equation) دهرائيندا.
- ناطق عددي سرن (مَنِي) سان هڪ درجي مساواتون حل ڪندا.
- بيئي مول جي نشانين واريون هڪ درجي مساواتون ساديون ڪندا ۽ انهن جو حل لهندا.
- قطعي ملهه (Absolute Value) بيان ڪري سگهندا.
- هڪ بدلجندڙ ۾ قطعي ملهه واريون مساواتون حل ڪندا.
- اڻ برابري $(<, >)$ ۽ $(\leq, \geq)$ واضح ڪندا.
- اڻ برابري جون خاصيتو سڃاڻي سگهندا، جهڙوڪ: (ٽه رخي، متعدي، جوڙاپت ۽ ضرب اپت)
- ناطق عددي سرن (مَنِي) واريو هڪ درجي غير مساواتون حل ڪندا.

6.1 هڪ درجي مساواتون

6.1.1 هڪ متغير (بدلجندڙ) (Variable) واري هڪ درجي مساوات (Equation) دهرايو.

جيڪڏهن هڪ ڪليل جملي ۾ "=" شامل هجي ته اهڙي جملي کي مساوات چئبو آهي. هڪ متغير (بدلجندڙ) (Variable) سان هڪ درجي مساوات جيئن: $ax+b=0$ ۾ $a \neq 0$ مساواتون آهن. جتي متغير (بدلجندڙ) (Variable) کي "1" سگهه آهي جيڪا عام طور تي ظاهر نہ ڪبي آهي.

6.1.2 ناطق عددن واريون هڪ درجي مساواتون حل ڪريو.

اڻ ڄاتل متغير (بدلجندڙ) (Variable) جيڪو مساوات ۾ ڏنل آهي انجي ملھ لاءِ مساوات درست تي وڃي تہ انکي حل يا مساوات جو مول چئبو آهي.

مثال 01 حل ڪيو $3x-1=5$

حل

$$3x-1=5$$
$$\Rightarrow \quad 3x=5+1$$
$$\Rightarrow \quad x=\frac{6}{3}$$
$$\Rightarrow \quad x=2$$

جيئن تہ $\{2\}$ حل سيٽ آهي.

مثال 02 حل ڪيو $\frac{2}{3}(x+3)=3+\frac{5x}{9}$

حل

$$\frac{2}{3}(x+3)=3+\frac{5x}{9}$$
$$9\times\frac{2}{3}(x+3)=9\times 3+9\times\frac{5x}{9}$$

ٻنهي پاسن 9 ضرب ڪرڻ سان

$$\Rightarrow \quad 3\times 2(x+3)=27+5x$$
$$\Rightarrow \quad 6(x+3)=27+5x$$
$$\Rightarrow \quad 6x+18=27+5x$$
$$\Rightarrow \quad 6x-5x=27-18$$
$$\Rightarrow \quad x=9$$

جيئن تہ $\{9\}$ حل سيٽ آهي.

مثال 03 پيءُ جي عمر پٽ جي عمر کان تيرهوڻي آهي. اها چئن سالن کانپوءِ صرف پنجوڻي تي وڃي تي تہ ٻنهي جون موجوده عمريون ٻڌايو.

حل

فرض ڪريو تہ پٽ جي موجوده عمر x سال آهي

۽ پيءُ جي موجوده عمر $13x$ سال آهي

ڏنل شرط مطابق $\quad 13x+4=5(x+4) \quad \therefore$

$\Rightarrow \quad 13x + 4 = 5x + 20$

بنھي پاسن کان $5x$ کٽ ڪرڻ سان $\Rightarrow \quad 13x - 5x + 4 = 5x - 5x + 20$

$\Rightarrow \quad 8x + 4 = 20$

بنھي پاسن کان 4 کٽ ڪرڻ سان $\Rightarrow \quad 8x + 4 - 4 = 20 - 4$

$\Rightarrow \quad 8x = 16$

بنھي پاسي ونڊ ڪرڻ سان $\Rightarrow \quad \frac{8x}{8} = \frac{16}{8}$

$\Rightarrow \quad x = 2$

جيئن تہ: پٽ جي موجوده عمر 2 سال

۽ پيءُ جي عمر $13 \times 2 = 26$ سال آهي.

مثال 04 جڏھن ھڪ عدد جي $\frac{1}{3}$ حصي ۾ 16 جوڙ ڪرڻ سان جواب اصل عدد جو $2\frac{1}{3}$ اچي تہ عدد لھو.

حل: فرض ڪريو تہ عدد x آهي،

ڏنل شرط مطابق $16 + \frac{1}{3}x = 2\frac{1}{3}x$

$$\Rightarrow \quad 16 + \frac{1}{3}x = \frac{7}{3}x$$

$$\Rightarrow \quad 16 = \frac{7}{3}x - \frac{1}{3}x$$

$$\Rightarrow \quad 16 = \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{3}\right)x$$

$$\Rightarrow \quad 16 = \left(\frac{7-1}{3}\right)x$$

$$\Rightarrow \quad 16 = \frac{6}{3}x$$

$$\Rightarrow \quad 16 \times 3 = 6x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{48}{6} = x \qquad \Rightarrow x = 8$$

6.1.3 مساوات جنھن ۾ مول شامل آهن، ھڪ درجي مساوات جي نموني سادي ڪريو ۽ انھن جو حل لھو.

ھڪ بدلجندڙ واري مساوات جنھن ۾ مولي اظھار شامل ھجن انکي مولي مساوات (Radical Equation) چئبو آهي.

مثال طور: $\left(3\sqrt{t} - \sqrt{t+1} = 2\right)$ ۽ $\sqrt{x} = 8$ مولي مساواتون آهن.

هيٺين مثال جي مدد سان مساواتون حل ڪري سگهجن ٿيون.

مثال 01 حل ڪيو. $\sqrt{2x+11}=\sqrt{3x+7}$

حل:

$$\sqrt{2x+11}=\sqrt{3x+7}$$

ٻئي پاسا چورس ڪرڻ سان $\therefore \quad \left(\sqrt{2x+11}\right)^2=\left(\sqrt{3x+7}\right)^2$

$$\Rightarrow \quad 2x+11=3x+7$$
$$\Rightarrow \quad 2x-3x=7-11$$
$$\Rightarrow \quad -x=-4$$
$$\Rightarrow \quad x=4$$

جيئن تہ 4 حل سيٽ آهي.

چڪاس: مساوات ۾ $x=4$ جو ملھ وجھڻ سان

$$\sqrt{2(4)+11}=\sqrt{3(4)+7}$$
$$\sqrt{8+11}=\sqrt{12+7}$$
$$\sqrt{19}=\sqrt{19}$$

نوٽ: ڪنھن وقت مليل جزمولي مساوات کي مطمئن نہ ڪندي آهي تہ انکي ٻاهريان جز چئبو آهي.

مشق 6.1

1. هيٺيون مساواتون حل ڪريو:

(i) $\frac{1}{4}x=5$ (ii) $\frac{x}{4}=-3$ (iii) $-5=\frac{-x}{6}$

(iv) $\frac{-x}{8}=-5$ (v) $y-\frac{2}{5}=-\frac{1}{3}$ (vi) $2y-\frac{3}{5}=\frac{1}{2}$

(vii) $\frac{2x-4}{5}=\frac{5x-12}{4}$ (viii) $\frac{3x}{5}+7=\frac{2x}{3}$ (ix) $\frac{3x}{5}+7=\frac{2x}{3}+\frac{4x}{5}$

(x) $\frac{6}{2x-5}-\frac{4}{x-3}=0$ (xi) $\frac{7x-4}{15}=\frac{7x+4}{10}$

(xii) $\frac{3x-2}{10}=\frac{7x-3}{15}-2$ (xiii) $\frac{12x-3}{12}=\frac{12x+3}{8}$

(xiv) $\frac{1}{4}x+x=-3+\frac{1}{2}x$ (xv) $\frac{1}{3}+2m=m-\frac{3}{2}$

.1 جڏهن هڪ عدد ۾ 25 جوڙ ڪري نتيجي کي اڌ ڪجي ٿو ته جواب اصل عدد جي ٽيڻ ٿئي ٿو، ٻڌايو ته عدد ڪهڙو آهي؟

.2 هڪ عدد ۾ 4 جوڙ ڪرڻ سان نتيجو اصل عدد جي ٽيڻ مان 10 ڪٽ ڪرڻ جي برابر ٿئي ٿو، ٻڌايو ته عدد ڇا آهي.

.3 بلال عليءَ کان 6 سال وڏو آهي، هاڻي کان 5 سال بعد سندن عمرين جو جوڙ 40 ٿيندو ته ٻنهي جي عمر ڪيتري آهي.

.4 هيٺين مساواتن جو حل سيٽ لهو ۽ جوابن جي چڪاس پڻ ڪريو.

(i) $6+\sqrt{x}=7$ (ii) $\sqrt{x-9}=1$ (iii) $\sqrt{\frac{y}{4}-2}=3$

(iv) $\sqrt{4x+5}=\sqrt{3x-7}$ (v) $\frac{\sqrt{3y+12}}{7}=3$ (vi) $\sqrt{x}+9=7$

(vii) $\sqrt{25y-50}=10\sqrt{y+3}$ (viii) $\sqrt{x}-8=1$ (ix) $10\sqrt{x+20}=100$

6.2 قطعي ملهه واريون مساواتون

6.2.1 قطعي ملهه جي وضاحت:

هڪ حقيقي عدد x جو قطعي ملهه $|x|$ لکبو آهي. جيڪو ٻڙيءَ کان عدد تائين جو مفاصلو آهي، اهو ٻڙيءَ جي کابي پاسي هجي يا ساڄي پاسي هجي، تنهنڪري قطعي ملهه ڪڏهن به ڪاٽو نه ٿيندو آهي.

جيڪڏهن x ڪو حقيقي عدد آهي، ته پوءِ x جو قطعي ملهه يا مقدار $|x|$ ظاهر ڪبو آهي، انکي هيٺين ريت بيان ڪبو.

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{جڏهن } x>0 \\ 0, & \text{جڏهن } x=0 \\ -x, & \text{جڏهن } x<0 \end{cases}$$

$$|-5|=5, |+7|=7, \left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}, |0|=0$$

نوٽ: – عدد جو قطعي ملهه هميشه غيرڪاٽو ٿيندو آهي.

6.2.2 مساواتون حل ڪريو، هڪ بدلجندڙ ۾ قطعي ملهه شامل آهن.

هيٺيان مثال قطعي ملهه تي مشتمل مساواتن کي حل ڪرڻ کي سمجهڻ ۾ مدد ڪندا.

مثال 01 $|5x-3|-2=3$

حل: مليل $|5x-3|-2=3$

$\Rightarrow \quad |5x-3|=5$

قطعي ملهه جي وصف مطابق

$5x-3=5$ يا $5x-3=-5$

$\Rightarrow \quad 5x=5+3$ يا $5x=-5+3$

$\Rightarrow \quad 5x=8$ يا $5x=-2$

$\Rightarrow \quad x=\frac{8}{5}$ يا $x=-\frac{2}{5}$

تنهنڪري حل سيٽ آهي $\left\{\frac{8}{5}\ ,\ -\frac{2}{5}\right\}$

مثال 02 $|5x-3|+7=3$ جو حل سيٽ لهو:

حل: مليل $|5x-3|+7=3$

$\Rightarrow \quad |5x-3|=-5$

قطعي ملهه جي قائدي مطابق حقيقي عددن جو مقدار ڪڏهن به ڪاٽو نٿو ٿي سگهي.

تنهنڪري حل سيٽ { } خالي سيٽ آهي

مثال 03 حل ڪريو $|5x-3|-2=3$ جڏهن ته $x\in W$

حل: مليل $|5x-3|-2=3$

$\Rightarrow \quad |5x-3|=5$

مقدار جي قائدي مطابق

$5x-3=\pm 5$

تنهنڪري $5x-3=5$ يا $5x-3=-5$

$\Rightarrow \quad 5x=5+3$ يا $5x=-5+3$

$\Rightarrow \quad 5x=8$ يا $5x=-2$

$\Rightarrow \quad x=\frac{8}{5}$ يا $x=-\frac{2}{5}$

$-\frac{2}{5}$ ۽ $\frac{8}{5}\notin W$

اهڙيءَ طرح حل سيٽ { } خالي سيٽ آهي.

مثال 04 حل ڪريو $|2y-5|+2=7$

مليل $|2y-5|+2=7$

$$\Rightarrow \quad |2y-5| = 7-2$$
$$\Rightarrow \quad |2y-5| = 5$$

قائدي مطابق

تنهنڪري	$2y-5=5$	يا	$2y-5=-5$
$\Rightarrow$	$2y=5+5$	يا	$2y=-5+5$
$\Rightarrow$	$2y=10$	يا	$2y=0$
$\Rightarrow$	$y=\dfrac{10}{2}$	يا	$y=\dfrac{0}{2}$
$\Rightarrow$	$y=5$	يا	$y=0$

تنهنڪري حل سيٽ $\{5, 0\}$ آهي.

مشق 6.2

هيٺين مساواتن جو حل سيٽ لهو:

1. $|2x+1|=6$
2. $|5x-12|=7$, where $x\in W$
3. $\left|\dfrac{2x}{7}\right|=12$
4. $\left|\dfrac{2x+1}{3}\right|=8$
5. $|5x-3|-8=4$, where $x\in N$
6. $\left|\dfrac{5x+1}{7}\right|-3=8$
7. $\left|\dfrac{2x+3}{4}\right|+2=7$
8. $\left|\dfrac{3x+6}{12}\right|+1=3$, where $x\in Z$
9. $\dfrac{3}{2}=|7x+8|$
10. $\left|\dfrac{2x-3}{5}\right|-12=5$

6.3 هڪ درجي غير مساواتون

هڪ اهڙو الجبري اظهار جنهن ۾ برابر نہ هئڻ جي نشاني "$\neq$" هجي انکي غير مساوات چئبو آهي.

6.3.1 غير مساواتن ۾ $(\leq, \geq)$ ۽ $(<, >)$ نشانيون استعمال ڪبيون آهن.

هيٺ اڻ برابري واريون نشانيون ڏجن ٿيون

'$<$' ننڍو آهي

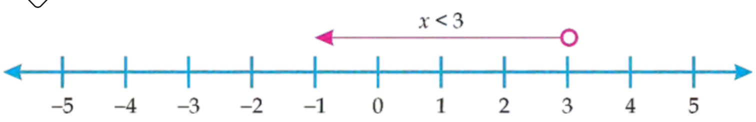
'$>$' وڏو آهي

'$\leq$' ننڍو آهي يا برابر آهي

'$\geq$' وڏو آهي يا برابر آهي

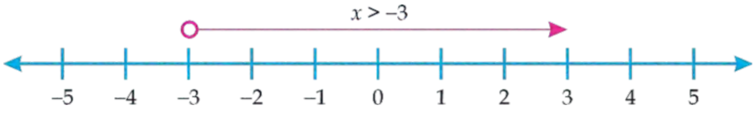
مثال 01

$x < 3$



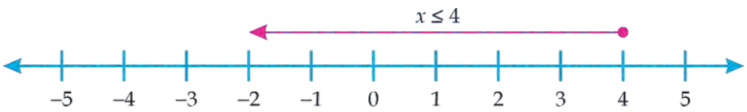
مثال 02

$x > -3$



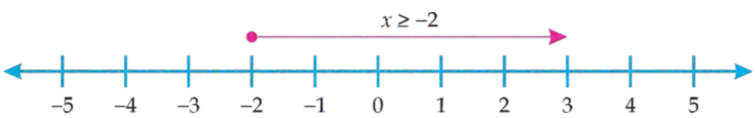
مثال 03

$x \leq 4$



مثال 04

$x \geq -2$



نوٽ: خالي گول "o" ظاهر ڪري ٿو ته عدد شامل نه آهي ۽ رنگيل گول "●" عدد شامل هئڻ کي ظاهر ڪري ٿو.

6.3.2 اڻ برابري جون خاصيتون سجاڻو، (ٽه رخي، متعدي، جوڙاپت، ضرب اپت). هيٺ ڪجھ غير مساواتن جا مثال آهن:

(i) ٽه رخي خاصيت (Trichotomy Property)

ٻن حقيقي عدد a ۽ b لاءِ هينين مان هڪ ۽ صرف هڪ بيان صحيح آهي.

$a < b$، $a = b$ يا $a > b$

(ii) متعدي خاصيت (Transitive Property)

ٽن حقيقي عددن a، b ۽ c لاءِ

جيڪڏهن $a < b$ ۽ $b < c \Rightarrow a < c$

۽ $a > b$ ۽ $b > c \Rightarrow a > c$

(iii) (Additive Property) جوڙ اپت واري خاصيت

تن حقيقي عددن لاءِ:

جيڪڏهن $a>b$ ته پوءِ $a+c>b+c$, ، $\forall\ a,b,c\in\mathbb{R}$

جيڪڏهن $a<b$ ته پوءِ $a+c<b+c$, ، $\forall\ a,b,c\in$

(iv) (Multiplicative Property) ضرب اپت واري خاصيت

(a) جيڪڏهن $a>b$ ته پوءِ $ac>bc$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ ۽ $c>0$

يا جيڪڏهن $a<b$ ته پوءِ $ac<bc$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ ۽ $c>0$

(b) جيڪڏهن $a>b$ ته پوءِ $ac<bc$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ ۽ $c<0$

يا جيڪڏهن $a<b$ ته پوءِ $ac>bc$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ ۽ $c<0$

6.4 هڪ درجي غير مساواتون حل ڪرڻ

6.4.1 حقيقي عددي سرن سان، هڪ درجي غير مساواتون حل ڪرڻ.

هيٺيان مثال اسانجي مدد ڪندا حل سمجھڻ ۾ عددي ليڪ تي ظاهر ڪرڻ ۾.

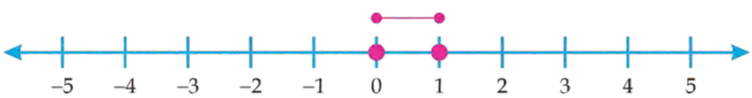
مثال 01 $3x+1<7\quad \forall x\in W$ کي عددي ليڪ تي ظاهر ڪريو:

حل: گھربل

$$\begin{aligned} 3x+1&<7 \qquad \forall x\in W \\ 3x-1&<7-1 \\ 3x&<6 \\ x&<\frac{6}{3} \\ x&<2 \end{aligned}$$

جيتوڻيڪ، حل سيٽ $\{x\,|\,x\in W \text{ and } x<2\}=\{0,1\}$ آهي.

حل کي عددي ليڪ تي هيٺين ريت ظاهر ڪبو آهي.



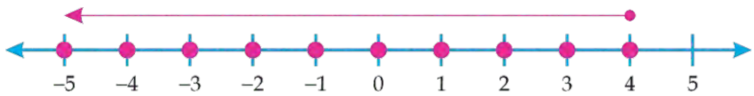
مثال 02 $x-11\le 9-4x \;\; \forall x\in Z$ کي عددي ليڪ تي ظاهر ڪريو:

حل مليل $x-11\le 9-4x \;\; \forall x\in Z$

$$x-11\le 9-4x$$
$$x+4x\le 9+11$$
$$5x\le 20$$
$$x\le \frac{20}{5}$$
$$x\le 4$$

تنهنڪري، حل سيٽ $\{x\,|\,x\in Z \text{ and } x\le 4\}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ آهي

حل کي عددي ليڪ تي هينئن ريت ظاهر ڪبو آهي.



مثال 03 $2x+5>7\; x\in Z$ جو حل سيٽ لهو، عددي ليڪ تي پڻ ظاهر ڪريو:

حل مليل $2x+5>7\; x\in Z$

هيءُ غير مساوات هينئن ريت ظاهر ڪبي آهي.

$$2x>7-5$$
يا $$2x>2$$
يا $$x>1$$

تنهنڪري حل سيٽ $\{x\,|\,x\in Z \wedge x>1\}$ آهي.

عددي ليڪ تي هينئن ريت ظاهر ڪبو آهي.

مثال 04 $-6<2x+1<11,\;\; \forall x\in Z$ جو حل سيٽ لهو، عددي ليڪ تي پڻ ظاهر ڪريو:

حل مليل $-6<2x+1<11,\;\; \forall x\in Z$

هيءُ غير مساوات هينئن ريت ظاهر ڪبي آهي.

$2x+1<11$ ۽ $-6<(2x+1)$

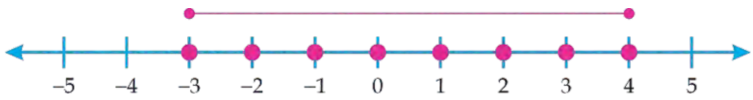
يا $2x+1<11-1$ ۽ $-6-1<2x$

يا $2x<10$ ۽ $-7<2x$

$x < 5$ ۽ $\frac{-7}{2} < x$ يا

تنهنڪري حل سيٽ $\{x|x \in Z \wedge -\frac{7}{2} < x < 5\} = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ آهي.

عددي ليڪ تي هينئن ريت ظاهر ڪبو آهي.



مثال 05 عائشه چئن مان ٽن ٽيسٽن ۾ 78، 72 ۽ 86 اسڪور ڪيو، چوٿين ٽيسٽ ۾ڪيترو اسڪور ڪرڻ گهرجي جو سراسري 80 اسڪور ٿئي.

حل: فرض ڪريو ته چوٿين ٽيسٽ جو اسڪور x آهي.

$$\frac{78+72+86+x}{4} \geq 80$$

$$78+72+86+x \geq 320$$

$$236+x \geq 320$$

$$x \geq 320-236$$

$$x \geq 84$$

عائشه کي 80 جي سراسري برقرار رکڻ لاءِ چوٿين ٽيسٽ ۾ 84 اسڪور ڪرڻ گهرجي.

مشق 6.3

.1 هيٺين غير مساواتن جو حل سيٽ لهو ۽ عددي ليڪ تي ظاهر ڪريو.

(i) $2x-7 > 6+x \quad \forall x \in \mathbb{N}$

(ii) $7x-6 > 3x+10, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(iii) $\frac{y+5}{20} < \frac{25-4y}{10}, \forall y \in \mathbb{N}$

(iv) $|2x+3| < x+2, \forall y \in \mathbb{Z}$

(v) $|2y+8| < 11, \forall y \in \mathbb{R}$

(vi) $5(2y-3) > 6(y-8), \forall y \in \mathbb{R}$

.2 عليءَ پنهنجي ٻن ٽيسٽن ۾ ترتيبوار 66 ۽ 72 مارڪون اسڪور ڪيون، هن کي ٽئين ٽيسٽ لاءِ ڪيترون مارڪون اسڪور ڪرڻ گهرجن. جيڪڏهن هڪ اضافي انعام جي قابل ٿيڻ لاءِ گهٽ ۾ گهٽ سراسري 75 مارڪون گهربل هجن.

.3 7 ننڍو آهي هڪ عدد جي ٽي دفعا جوڙاپٽ جي ۽ 5 گهٽ ۾ گهٽ آهي 10 کان، ان صورت ڪي مطمئن ڪندڙ سڀ عدد لهو.

مشق ورجايو 6

.1 صحيح ۽ غلط سوال

هيٺين جملن کي غور سان پڙهو ۽ صحيح بيان جي صورت ۾ "T" تي گول ڪريو ۽ غلط جي صورت ۾ "F" تي.

(i) $ay+b=0$ جتي $a=0$ هڪ درجي مساوات آهي. T/F

(ii) $3y-2<7 \wedge y\in\mathbb{N}$ جو حل سيٽ $\{4, 5, 6, \ldots\}$ آهي. T/F

(iii) $\sqrt{y}+1=3$ جو حل سيٽ $\{4\}$ آهي. T/F

(iv) $|4y|=8$ جو حل سيٽ $\{2, -2\}$ آهي. T/F

(v) $-2\le x\le 2, x\in\mathbb{R}$ جو حل سيٽ $\{-2,0,2\}$ آهي. T/F

.2 خال ڀريو:

(i) $2y=-y$ جو حل سيٽ ________ آهي.

(ii) $\sqrt{y+5}=5$ جو حل سيٽ ________ آهي.

(iii) $|x|-4=0$ جو حل سيٽ ________ آهي.

(iv) $\sqrt{x+5}+2=4$ جو حل سيٽ ________ آهي.

(v) $0<y+2<5$ جو حل سيٽ ________ آهي جڏهن $y\in$.

.3 صحيح جوابن تي ٽڪ (✓) جو نشان لڳايو.

(i) هڪ متغير (بدلجندڙ) (Variable) ۾ هڪ درجي مساوات جو حل سيٽ آهي.

(a) هڪ عنصر (b) ٻه عنصر

(c) ٽي عنصر (d) هڪ کان وڌيڪ عنصر

(ii) $|-20|$

(a) $=20$ (b) <20

(c) $=-20$ (d) >20

(iii) $x\le 4$ جو مطلب آهي

(a) $x<4$ (b) $x=4$

(c) $x<4$ or $x=4$ (d) $x>4$ or $x=4$

(iv) $\sqrt{y} = 10$ جو حل سيٽ آهي:

(a) $\{100\}$ (b) $\{10\}$

(c) $\{-10\}$ (d) $\{-10,10\}$

(v) $\sqrt{y+4} + 2 = 8$ آهي هڪ:

(a) هڪ درجي مساوات (b) مولي مساوات

(c) ڪعبي مساوات (d) ٻہ درجي مساوات

(vi) $5-3y = -7$ جو حل سيٽ آهي.

(a) $\{-4\}$ (b) $\{1, 4\}$

(c) $\{4\}$ (d) $\{12\}$

(vii) $\sqrt{5y+5} + 5 = 10$ جو حل سيٽ آهي:

(a) $\{\pm 4\}$ (b) $\{5\}$

(c) $\{4\}$ (d) $\{-4\}$

(viii) $\left|\frac{5y}{3}\right| = 5$ جو حل سيٽ آهي:

(a) $\{3\}$ (b) $\{-5, 5\}$

(c) $\{3, -3\}$ (d) $\{-3\}$

(ix) $|-y| = 0$ جو حل سيٽ آهي:

(a) $\{1\}$ (b) $\{-1\}$

(c) $\{0\}$ (d) $\{\ \}$

(x) جيڪڏهن $x > 0$، $y > 0$ ۽ $x-y < 0$ تہ پوءِ

(a) $x < y$ (b) $x + y < 0$

(c) $x > y$ (d) $y - x < 0$

خلاصو

- $ax + b = 0,$ جهڙي هڪ مساوات جتي $a,b\in \mathbb{R}$ ۽ $a\neq 0$ هجي انکي هڪ درجي مساوات چئبو آهي.
- هڪ مساوات جنهن ۾ مول جي نشاني هجي انکي مولي مساوات غير ناطق (Irrational equation) چئبو آهي، مولي مساوات جي پاهرين بنيادن جي صورت ۾ حل جي چڪاس ضروري آهي.
- جيڪڏهن $x\in \mathbb{R}$ تہ پوءِ $|x| = \begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -x & <0 \end{cases}$
- جيڪڏهن $x,y\in \mathbb{R}$ پوءِ

(i) $|x|\geq 0$ (ii) $|-x|=|x|$ (iii) $|xy|=|x|\cdot|y|$

(iv) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$ (v) $|x|=b$ then $x=b$ or $x=-b$

- غير مساوات لاءِ اسين $>$ ، $<$ ، $\geq$ ، $\leq$ استعمال ڪندا آهيون:
- هڪ درجي آلجبري اظهار جنهن ۾ غير برابريءَ جي نشاني هجي انکي هڪ درجي غير برابري يا غير مساوات چئبو آهي.
- غير مساوات جون خاصيتون:

(i) $a<b$ يا $a=b$ يا $a>b$ ، $\forall a,b\in \mathbb{R}$ تہ رخي مساوات (Trichotomy)

(ii) $a>b$ ۽ $b>c\Rightarrow a>c$ ، $\forall a,b,c\in \mathbb{R}$ معتدي مساوات (Transitive)

(iii) $a>b$ ، $c>0\Rightarrow ac>bc$ ۽ $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ ، $\forall a,b,c\in \mathbb{R}$ ضرب ۽ ونڊ جي خاصيت.

(Multiplication and Division Properties)

يونٽ 7

سڌي ليڪ ۾ گراف ۽ ان جا استعمال

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ کي مڪمل ڪرڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته:

- حقيقي عددن جي جوڙي کي ترتيبوار جوڙي جي صورت ۾ سڃاڻي سگهن.
- مختلف مثالن سان هڪ ترتيبوار (جوڙي جي سڃاڻپ ڪري سگهن جهڙي طرح (2, 3) کي امتحاني هال ۾ ظاهر ڪيل جاءِ جي صورت ۽ انهن جي بي قطار ۽ ٽي ڪالم جي صورت ۾ ڪاٽ ڪن.
- ڪارتيسي مٿاڇري / عام مٿاڇري تي گوني ڪنڊ ٺڪندي تي ڪپيندڙ بن ليڪن کي O نقطي وٽ اڏواڏ ڪرڻ کي ڳاڻ ڪري سگهن.
- مستطيلي مٿاڇري تي x— محور ۽ y— محورکي ترتيبوار ٽپڪو "O" کي اصل ٽپڪي طور ۽ محددي محور ڪري سڃاڻپ ڪن.
- مستطيلي مٿاڇري تي، ترتيب ڏنل جوڙي کي جاميٽري جي ٽپڪن طور ظاهر ڪري سڃاڻپ ڪن ته
  - a کي x— محددي (يا abscissa) x— محدد
  - b کي y— محددي (يا ordinate) y— محدد
- ٽپڪن جي ڏنل سيٽن کي ملائي مختلف جاميٽري جون شڪلون ناهي سگهن (ليڪ ٽڪر، ٽڪنڊو مستطيل وغيره).
- ٻن بدلجندڙن جي هڪ درجي مساوات جي مليل جوڙي ۾ رقمن جي جدول ناهي سگهن.
- ڏنل اظهار جو گراف حاصل ڪرڻ لاءِ ٽپڪن جا جوڙا ظاهر ڪري سگهن.
- گراف ناهڻ لاءِ مناسب پيمانو چونڊي سگهن.
- گراف ناهي سگهن.
  - $y = c$ نموني جي مساوات جو
  - $x = a$ نموني جي مساوات جو
  - $y = mx + c$ نموني جي مساوات جو
  - $y = mx$ نموني جي مساوات جو
- x ۽ y جي رقمن لاءِ مليل جدول مان گراف ناهي سگهن.
- روزمره زندگي سان تعلق رکندڙ حساب حل ڪري سگهن.
- سڌي تناسب ۾ مليل ٻن مقدارن جي تبديل ٿيندڙ گراف کي سڌي ليڪ جي گراف ۾ بڏائي سگهن.
- هڪ مقدار جي بي مقدار سان مشابهت رکندڙ گراف کي پڙهي ۽ سڃاڻي سگهن.
- تبديل ڪرڻ جي نمونن جا گراف پڙهي سگهن.
  - ميل ۽ ڪلوميٽر
  - ايڪڙ ۽ هيڪٽر
  - سينٽي گريڊ ۽ فارنهائيٽ
  - پاڪستاني ۽ ٻين ملڪن جو چالو سڪو وغيره.
- همزاد هڪ درجي مساوات ٻن بدلجندڙ سان، گراف جي طريقي سان حل ڪري سگهن.

7.1 ڪارٽيسي مٿاڇرو ۽ سڌي ليڪ جا گراف

7.1.1 حقيقي عدد جي جوڙي جي ترتيب ڏنل جوڙي جي صورت ۾ سڃاڻپ ڪريو.

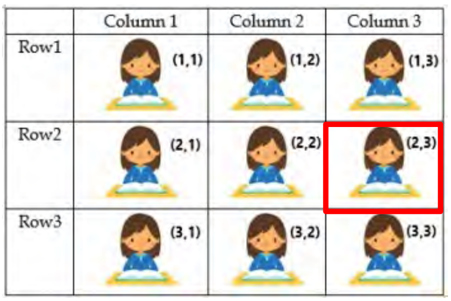
ترتيب ڏنل جوڙو ٻن حقيقي عددن جي جوڙو آهي، جنهن کي خاص ترتيب سان ننڍين ڏنگين ۾ لکيو ويندو آهي. هي ۽ رخي جڳهه ۾ شين جي جڳهه کي ظاهر ڪرڻ ۾ مدد ڪندو آهي.

7.1.2 مختلف مثالن سان ترتيب ڏنل جوڙي جي سڃاڻپ ڪريو، جيئن (2, 3) ترتيب ڏنل جوڙ، امتحان هال ۾ سيٽ کي ڏيکارڻ لاءِ ظاهر ڪري ٿو ته ٻي قطار ۽ ٽيون ڪالم آهي.

اچو ته پنهنجي چوڌاري موجود شين جا مثال ڏسون، هنن مثالن سان اسان، شين کي قطار ۽ ڪالم ۾ موجود جڳهه کي ظاهر ڪريون ٿا جيڪي ترتيب ڏنل جوڙو ناهين ٿيون. ترتيب ڏنل جوڙ ڪنهن شيءِ يا جڳهه جي حالت جي نشاندهي ڪري ٿو.

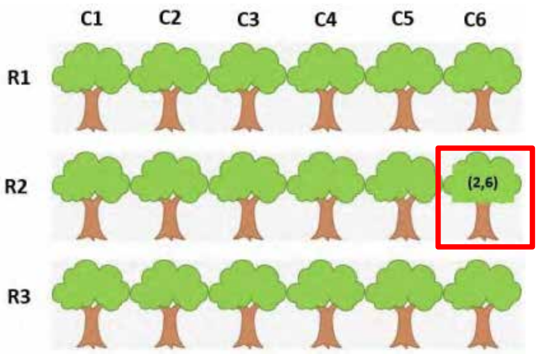
مثال 01

ترتيب ڏنل جوڙو (2, 3) شاگرد جي امتحان هال ۾ موجود جڳهه کي ظاهر ڪري ٿو. جيئن ٻي قطار ۽ ٽيون ڪالم. ساڳي طرح هر شاگرد منفرد ترتيب سان ظاهر ٿيل آهي.



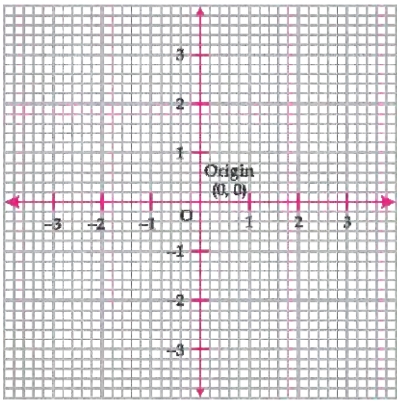
مثال 02

جيڪڏهن هڪ هاري باغ ۾ هڪ جيتري مفاصلي تي وڻ پوکڻ جي منصوبه بندي ڪري ٿو، ته پوءِ (2, 6) ظاهر ڪري ٿو ته ٻي قطار ۽ ڇهون ڪالم جو وڻ باغ ۾.

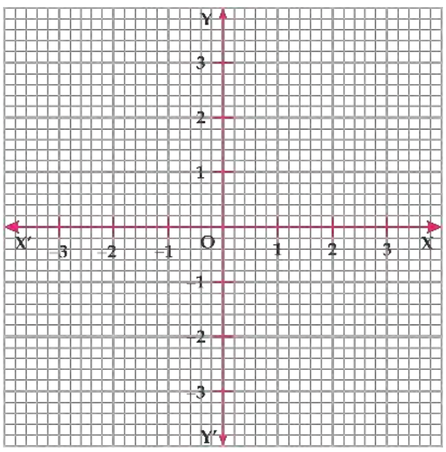


7.1.3 ڪارٽيسي/ يام متاچري تي ٻہ عددي ليڪون ڪنهن گوني ڪند ڪي O ٽبڪي تي ڪپين ٿيون بيان ڪريو.

ڪارٽيسي محددي نظام مشتمل حصي ٻن حقيقي عددن جي ليڪن تي جيڪي گوني ڪند تي "O" ٽبڪي وٽ پاڻ ڪي ڪپين ٿيون. ان تي مشتمل هوندو آهي هي ٻہ عددي ليڪون هڪ سڌي سطح جي تعريف ڪن ٿيون جن ڪي ڪارٽيسي متاچرو چئبو آهي.



7.1.4 مستطيلي متاچري ۾ اصل ٽبڪو "O" ۾ محددي محور (فقي ۾ عمودي محور x– محور ۾ y– محور) جي سڃاڻپ ڪريو.



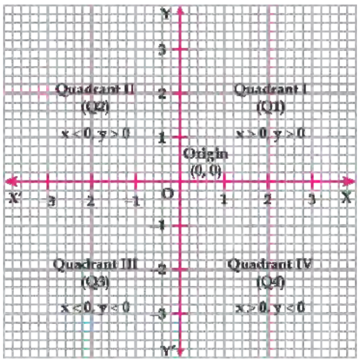
ڪارٽيسي محددي نظام ۾، افقي عددي ليڪ ڪي x–محور ۾ عمودي عددي ليڪ ڪي y–محور چئبو آهي. اهو نقطو جتي ٻئي ليڪون هڪٻئي ڪي ڪپين تہ ان ڪي اصل ٽبڪو چئبو آهي، جنهن ڪي O سان ظاهر ڪيو ويندو آهي.

مليل شڪل ۾ افقي ليڪ XX′، x– محور آهي ۽ عمودي ليڪ YY′، y– محور آهي، نقطو جتي ٻئي ليڪون پاڻ ۾ ملن ٿيون ان ڪي متاچري جو اصل چئبو آهي جيڪو "O" آهي.

7.1.5 مستطيلي متاچري تي ترتيب ڏنل جوڙي کي جاميٽري جي ٽپڪن طور ظاهر ڪري، سڃاڻپ ڪريو.

- a کي $x-$ محددي (يا abscissa) $x-$ محدد
- b کي $y-$ محددي (يا ordinate) $y-$ محدد

عام طور تي ڪوبه ٽپڪو ڪارٽيسي متاچري تي ترتيب ڏنل جوڙي (a,b) جي صورت ۾ ظاهر ڪري سگهبو آهي، جنهن ۾ a، $x-$ محددي (abscissa) ۽ b، $y-$ محددي (ordinate) آهي.



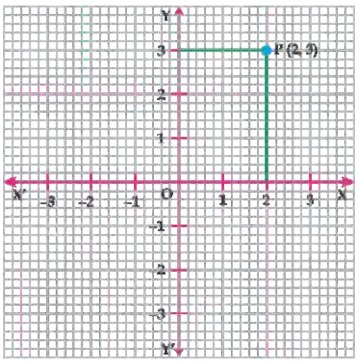
متاچري تي ٽپڪن کي ظاهر ڪرڻ لاءِ اسان کي $x-$ محددي، جيڪو افقي مفاصلو آهي $y-$ محور کان ۽ $y-$ محددي جيڪو عمودي مفاصلو آهي $x-$ محور کان ضروري معلوم هجي.

$x-$ محور ۽ $y-$ محور ڪارٽيسي متاچري کي چئن حصن (چوٿن) ۾ ورهائين ٿا جن جا رومن عددي عدد I، II، III ۽ IV آهن. ڪارٽيسي متاچري کي xy متاچرو پڻ چئبو آهي.

- پهرين چوٿي I ۾ ٻئي $x-$ محددي ۽ $y-$ محددي واڌو آهن $x > 0$ ۽ $y > 0$.
- ٻئي چوٿي II ۾ x محددي ڪاٽو ۽ $y-$ محددي واڌو آهي $x < 0$ ۽ $y > 0$.
- ٽئين چوٿي III ۾ x محددي ۽ $y-$ محددي ڪاٽو آهن $x < 0$ ۽ $y < 0$.
- چوٿين چوٿي IV ۾ x محددي واڌو ۽ $y-$ محددي ڪاٽو آهي $x > 0$ ۽ $y < 0$.
- اصل ٽپڪي تي $x = y = o$، تنهنڪري اصل نقطي جا محددي $(0, 0)$ آهن.

گراف ڪيڏڻ جو طريقي جڏهن هڪ ٽپڪو ڪارٽيسي متاچري (xy متاچري) تي

اچو ته هينين مثالن ذريعي سکون ته ڪيئن هڪ ٽپڪو ڪارٽيسي متاچري تي ظاهر ڪجي.



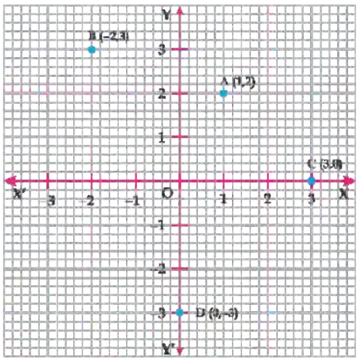
$(2, 3)$ کي ظاهر ڪرڻ جي لاءِ، اصل ٽپڪي کان شروع ڪريو ۽ 2 ايڪا ساڄي طرف $y-$ محور کان ۽ پوءِ 3 ايڪا مٿي $x-$ محور کان حرڪت ڪريو جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي. اسان P ٽپڪي تي پهچي وياسين جيڪو $(2,3)$ کي ظاهر ڪري ٿو.

مثال 01 هينئين ٽپڪن جا x محددي ۽ $y-$ محددي ظاهر ڪريو. اهو پڻ ٻڌايو ته ڪهڙي چوٿين ۾ اهي موجود آهن، ٽپڪا پڻ ظاهر ڪريو.

(i) A (1, 2) (ii) B (−2, 3)

(iii) C (3, 0) (iv) D (0, −3)

حل: پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ايڪو



(i) A (1, 2)

هتي $x-$ محددي 1 ايڪو ۽ محددي 2 ايڪا آهن.

جيئن ته $x > 0$ ۽ $y > 0$ مليل ٽپڪا پهرين چوٿين ۾ آهن.

(ii) B (−2, 3)

هتي $x-$ محددي -2 ايڪا ۽ $y-$ محددي 3 ايڪا آهن.

جيئن ته $x > 0$ ۽ $y > 0$ تنهنڪري مليل ٽپڪا ٻئي چوٿين ۾ آهن.

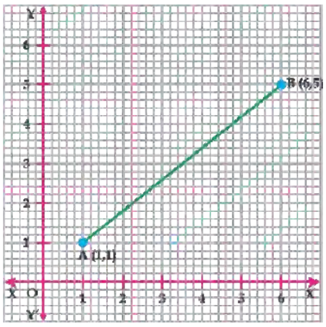
(iii) C (3, 0)

هتي $x-$ محددي -3 ايڪا ۽ $y-$ محددي 0 ايڪا آهي. تنهنڪري C ٽپڪو $x-$ محور تي آهي جيڪو اصل کان ساڄي طرف آهي.

(iv) D (0, −3)

هتي $x-$ محددي 0 ايڪا، $y-$ محددي 3 ايڪا آهن. تنهنڪري D ٽپڪو $y-$ محور تي آهي جيڪو اصل کان هيٺ آهي.

7.1.6 مختلف جاميٽري جون شڪليون ٺاهيو (ليڪ ٽڪر ٽڪنڊو ۽ مستطيل وغيره.



هينئين ڪلاسن ۾ اسان ڪيترن ئي جاميٽري جي شڪلين جي باري ۾ پڙهي آيا آهيون ۽ پڻ ڏنل معلومات مطابق ڪيئن ٺا ناهجي. هاڻ اسان مختلف جاميٽري جون شڪليون گراف پيپر تي مليل ٽپڪن مطابق ناهينداسين.

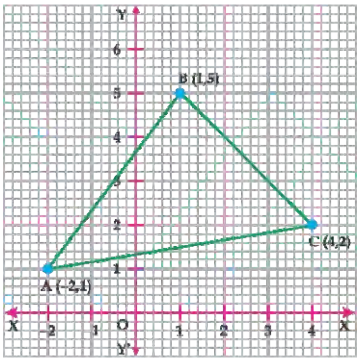
مثال 01 ليڪ ٽڪر AB ناهيو جنهن جا آخري ٽپڪا A (1, 1) ۽ B (6, 5) آهن.

طريقو: پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ايڪو.

پهرئين اسان گراف پيپر تي ليڪ جي ٽپڪن جي نشاندهي ڪنداسين، پوءِ انهن کي ليڪ ٽڪر $\overline{AB}$ حاصل ڪرڻ لاءِ ملائينداسين، جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.

مثال 02 تڪندو ABC ناهيو جنهن جا ڪنڊ وارا ٽپڪا $A\ (-2, 1)$، $B\ (1, 5)$ ۽ $C\ (4, 2)$ آهن.

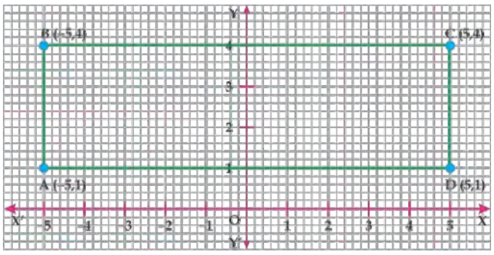
طريقو:



پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ايڪو.
پهرئين اسان A، B ۽ C جي ٽپڪن جي نشاندهي ڪنداسين، پوءِ انهن کي ملائي ΔABC حاصل ڪنداسين، جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.

مثال 03 هڪ مستطيل ناهيو جنهن جا ڪنڊ وارا ٽپڪا $A\ (-5, 1)$، $B\ (-5, 4)$، $C\ (5, 4)$ ۽ $D\ ((5, 1))$ آهن.

طريقو:



پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ايڪو.
$A\ (-5, 1)$، $B\ (-5, 4)$، $C\ (5, 4)$ ۽ $D\ ((5,1))$ ٽپڪن جي گراف پنهي تي نشاندهي ڪريو. هاڻ ٽپڪن A، B، C ۽ D کي پاڻ ۾ ملايو، نتيجو (1) AB مستطيل آهي.

7.1.7 ٻن بدلجندڙن ۾ هڪ درجي مساوات کي حل ڪرڻ لاءِ رقمن جي جوڙن جي جدول کي ٺاهڻ

هن جي هيٺين مثالن جي مدد سان وضاحت ڪري سگھجي ٿي.

مثال 01 فرض ڪريو ته $x + y = 5$، ٻن بدلجندڙن x ۽ y ۾ هڪ درجي مساوات هجي x ۽ y جي ڪجھ رقمن لاءِ جدول ناهيو.

حل: مليل آهي ته $x + y = 5$ جنهن $y = 5x$ لکي سگھجي ٿو.
هاڻ جدول تيار ڪيو، x جون رقمون وجهو ۽ y جي قيمتون حاصل ڪريو.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	8	7	6	5	4	3	2	...

مشق 7.1

1. هيٺين ٽپڪن مان x– محددي ۽ y محددي جي وضاحت ڪريو.

i. A(-2, 2) ii. B(5, -1) iii. C(4, 0)
iv. D(-5, -6) v. E(3, 4) vi. F($-\sqrt{8}, \sqrt{8}$)

2. هيٺيان ٽپڪا ڪهڙي چوٿائي ۾ موجود آهي واضح ڪريو.

i. A(2, -1) ii. B(-3, 3) iii. C($2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}$)
iv. D(-2, -4) v. E(5, 4) vi. F$\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

3. x ۽ y متاچري ۾ هيٺين ٽپڪن A، B، C ۽ D ڪي ناهيو.

i. A(2, 1), B(3, 2), C(-3, 4), D(-4, -5)
ii. A(2, 0), B(0, 2), C(3, -3), D(-3, 3)
iii. A(0, 0), B(-3, -3), C(5, -6), D(-6, 5)

4. ٽپڪن A (4, 6) ۽ B (−6, 8) کي ملائي، ليڪ ٽڪر $\overline{AB}$ ناهيو.

5. ٽپڪن A (−1, 4) ۽ B (−3, 6) کي (3, −2) کي ملائي ٽڪنڊو ABC ناهيو.

6. ٽپڪن A (0,−1)، B (0,5)، C (7,−1) ۽ D (7,5) کي ملائي ABCD مستطيل ناهيو.

7. ٽپڪن O (0, 0)، A (5, 0)، B = (5, 5) ۽ C (−2, −3) کي ملائي OABC چورس ناهيو.

8. ٽپڪن O (0, 0)، A (2, 4)، B (5, 0) ۽ C (6, 4) کي ملائي OABC هڪ پوروچوٽ چوڪندو ناهيو.

9. هيٺين هڪ درجي مساوات جي لاءِ x ۽ y جي ڪجهه رقمن جي جدول ناهيو.

i. $x+y-2=0$ ii. $2x-y-2=4$

iii. $\frac{1}{2}(x+2y)-6=0$ iv. $\frac{2}{3}(x-2y)=-2$

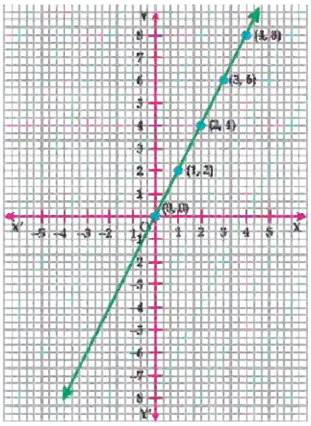
7.1.8 مليل اظهار جو گراف حاصل ڪرڻ لاءِ رقمن جا جوڙ ظاهر ڪريو.

فرض ڪريو تہ هڪ درجي مساوات $y=2x$ ٻن بدلجندڙن تي مشتمل آهي جتي x کي آزاد (Independent) ۽ y کي منحصر (Dependent) بدلجندڙ چئبو آهي. چاڪاڻ تہ y جي رقم جو دارومدار x جي رقم تي آهي.

مسلسل مساوات جو گراف ناهڻ جي لاءِ اسان x ۽ y جي جدول ناهيندا آهيون ۽ هي ترتيب ڏنل جوڙ انهي جي محددي متاچري تي رکنداسين، ٻہ ٽپڪا ليڪ کي واضح ڪرڻ لاءِ ڪافي آهن، تنهن هوندي بہ ممڪن غلطين کان بچڻ خاطر ٻن کان وڌيڪ ٽپڪا پڻ ظاهر ڪري سگهجن ٿا.

x	0	1	2	3	4	…
y	0	2	4	6	8	…

لاڳيتو ترتيب ڏنل جوڙن x, y کي گراف ۾ جوڙ ڪندي اهو واضح آهي ته y جي رقم x جي رقم کان ٻيڻي آهي ۽ ان کان پوءِ هڪ ئي ليڪ تي موجود تنهن کي ڊيڪارٽ لاءِ اسان هڪ ليڪ ناهينداسين گراف تير جا نشان اهو ظاهر ڪن ٿا، گراف تي ٻنهي پاسي نه ڪٽنڌڙ ليڪ آهي. هيٺيون گراف ائين ڏسڻ ۾ اچي ٿو شڪل ۾ ڏسو.



7.1.9 گراف ناهڻ جي لاءِ مناسب پئماني جي چونڊ ڪريو.

پئماني جي اهڙي طرح چونڊ ڪجي جو مواد آساني ظاهر ڪري ۽ پڙهي سگهجي.

هڪ مساوات جو گراف ناهڻ جي لاءِ اسان هڪ پئمانو چونڊينداسين. مثال طور هڪ ننڍو چورس هڪ يونٽ کي ظاهر ڪندو يا 2 ننڍا چورس 1 يونٽ کي ظاهر ڪندا وغيره، ان جي چونڊ پني جي پکيڙ ڏسي ڪبي. ڪنهن وقت ٻنهي x ۽ y محددن جي لاءِ اسان ساڳي پئماني جي چونڊ ڪنداسين اسان مختلف پئمانا، x ۽ y محددن جي رقمن کي ڏسي چونڊ ڪنداسين.

7.1.10 گراف ٺاهيو.

- $y = c$ جي نموني جي مساوات جو.
- $x = a$ واري نمونڱ جي مساوات جو.
- $y = mx$ واري نمونڱ جي مساوات جو.
- $y = mx + c$ واري نمونڱي جي مساوات جو.

7.1.10 (i) $y = c$ نموني واري مساوات جو گراف ٺاهڻ.

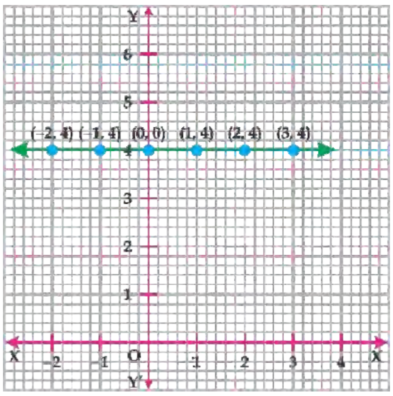
مثال 01 گراف ٺاهيو جڏهن $y = 4$

حل: پيمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ايڪو

گراف ٺاهڻ جي لاءِ جدول ٺاهيو.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	4	4	4	4	4	4	4	…

$y = 4$ مساوات جو گرف شڪل ۾ ڏيکاريل آهي



نوٽ:
$y = c$ جو گراف x– محور جي پورروچوٽ آهي.

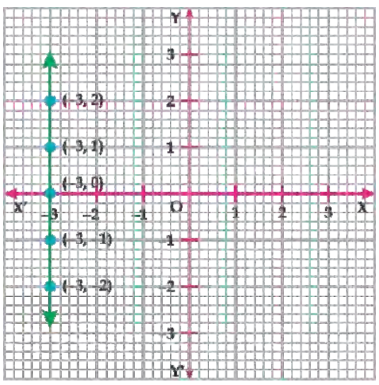
7.1.10 (ii) $x = a$ نموني واري مساوات جو گراف ٺاهڻ.

مثال 01 $x = 3$ مساوات جو گراف ٺاهيو.

طريقو: پيمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ايڪو.

x	-3	-3	-3	-3	-3	…
y	-2	-1	0	1	2	…

مساوات جو گراف شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.



نوٽ:
$x = a$ جو گراف y– محور جي پورروچوٽ آهي.

(iii) 7.1.10 $y = mx$ نموني واري مساوات جو گراف ناهڻ.

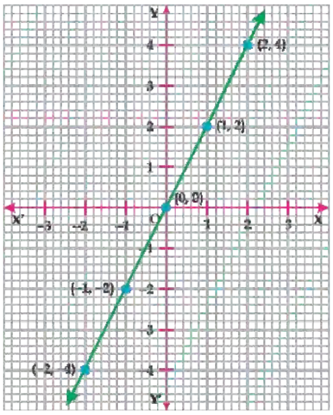
$y = mx$ مساوات ۾ y جي رقم (يا y– محدد) m ۽ ضرب پت آهي جڏهن ته m هڪ مستقل حقيقي عدد آهي.

مثال 01 جيڪڏهن $y = 2x$ ته m جو ملهه لهو ۽ گراف ناهيو.

حل: پيمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ايڪو.

گراف جي لاءِ جدول ناهيو.

x	-2	-1	0	1	2	...
y	-4	-2	0	2	4	...



نوٽ:
$y = mx$ جو گراف هميشه اصل ٽيڪي مان گذرندو.

(iv) 7.1.10 $y = mx + c$ نموني واري مساوات جو گراف ناهڻ.

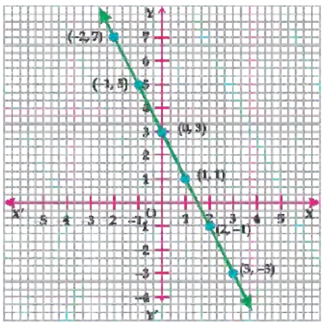
$y = mx + c$ مساوات ۾ m ۽ c حقيقي عدد آهن ۽ m = گهيريا لاهي، y = ليڪ کي جدا ڪندڙ.

مثال 01 $y = -2x + 3$ جو گراف ناهيو.

پيمانو: 3 ننڍا چورس = 1 ايڪو.

گراف ڪيڻ ڪاءِ جدول ناهيو.

x	-2	-1	0	1	2	3	...
y	7	5	3	1	-1	-3	...



نوٽ:
$y = mx + c$ جو گراف هميشه y– محور کي $y = c$ تي ڪپيندو.

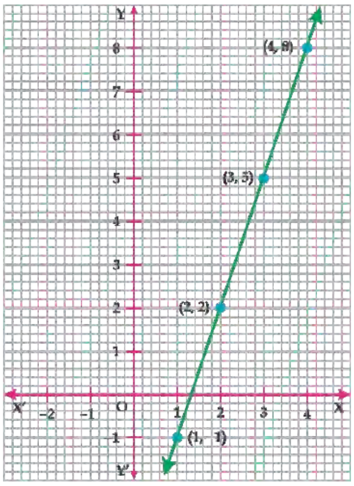
7.1.11 جدا جدا رقمن جي ڏنل جدول گراف ناهڻ.

جدا جدا مليل رقمن جي جدول جو گراف ناهڻ جي لاءِ x ۽ y کي ٽيڪن جي صورت ۾ ملائبو آهي جيڪي گراف پني تي ظاهر ڪبيون آهن.

مثال 01 هيٺ ڏنل جدول ۾ مليل ٽپڪن جو گراف ناهيو.

x	1	2	3	4	…
y	-1	2	5	8	…

طريقو: مليل جدول ۾ A (1, 1)، B (2, 2)، C (3, 5) ۽ D (4, 8) آهي ته اسان گراف پني تي گراف ناهينداسين.
پئمانو: 5 ننڍ چورس = 1 ايڪو.

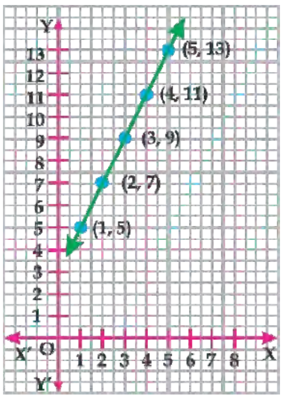


7.1.12 روزمرو زندگي سان تعلق رکندڙ حسابن کي حل ڪريو.

هڪ درجي مساوات کي روزمرو زندگي جي حسابن سان نموني طور عددن کي استعمال ڪري سگهجي ٿو، جهڙوڪ وقت جي عرصي ۾ توهان ڪيترا پئسا ناهي سگهو ٿا يا سائيڪل هلائڻ وارو گهٽ شرح تي پيڊلنگ ڪرڻ سان ڪيتري مفاصلي تائين سفر ڪري سگهي ٿو. محددي مٿاچري تي اهڙن تعلقن جو گراف ناهڻ جي لاءِ اسان اڪثر ڪري حساب ۽ انهن جي حل بابت سوچيندا آهيون.

مثال 01

ڪنهن ماڻهو جو وزن y ڪلوگرامن ۾، عمر x سالن ۾ مساوات $y = 2x + 3$ جي صورت ۾ بيان ڪيل آهي. عمر ۽ وزن جو مساوات مطابق گراف ناهيو.



عمر (x)	1	2	3	4	5	…
وزن (y)	5	7	9	11	13	…

مشق 7.2

.1 هيٺ ڏنل مساوات جي جدول ناهيو، جيڪا رقمن جي جوڙي $x + y = 6$ کي مطمئن ڪري.

.2 هيٺ مليل جدول مان مناسب پئمانو وٺي گراف ناهيو.

x	0	-1	4	-4
y	2	4	5	-5

.3 هيٺين جو گراف ناهيو.

i. $y=3$　　ii. $x=3$　　iii. $y=0$

iv. $y=2x+3$　　v. $x=3.5$　　vi. $-y=2x$

4 هيٺ ڏنل جدول مان غائب ٿيل محدد معلوم ڪريو

نمبر شمار	مساوات	$x-$ محدد	$y-$ محدد
(i)	$y=\frac{1}{2}x$		0
		4	
(ii)	$x=\frac{2}{3}y$	1	
			$\frac{3}{2}$
(iii)	$2x + 4y = 8$	0	
			$\frac{1}{4}$
(iv)	$2x + y = 6$	1	
			0
(v)	$x - y = 2$		0
		1	
(vi)	$x - 3y = 6$	3	
			-1

.5 هڪ ماڻهو جو وزن y ڪلوگرامن، عمر x سالن ۾ مساوات $y = 2x$ جي صورت ۾ ظاهر ڪئي وئي آهي ته هيٺين جدول مان عمر – وزن جو گراف ناهيو.

6. عائشہ ٻن ڦيٽن واري گاڏي لاڳيتو 20 ڪلوميٽر في ڪلاڪ سان هلائي سگهي ٿي. هن صورت جو مفاصلي ۽ وقت جو گراف ٺاهيو.

(a) 100 ڪلوميٽر سواري ڪرڻ لاءِ عائشہ کي گهربل وقت.

(b) ٽوٽل 3 ڪلاڪن ۾ عائشہ جو طئہ ڪيل مفاصلو.

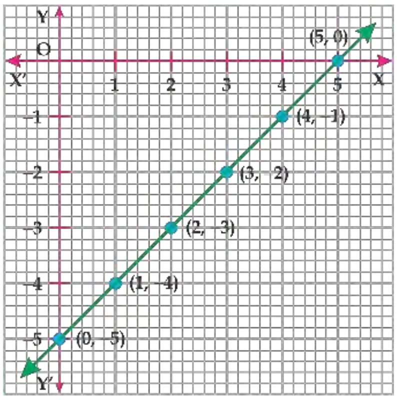
7.2 تبديل ڪرڻ جا گراف:

7.2.1 سڌي تناسب ۾ مليل ٻن مقدارن سان تبديل ٿيندڙ گراف، هڪ سڌي ليڪ جي گراف، هڪ سڌي ليڪ جي گراف طور سمجهائڻ.

هتي سڌي تناسب سان تعلق رکندڙ ٻن مقدارن جي تبديل ٿيڻ سان تبديل ٿيندڙ گراف کي سڌي ليڪ ۾ گراف طور فرض ڪنداسين . اسان ترتيب ڏنل جوڙن کي پيش ڪنداسين جيڪي $y = x - 5$ مساوات جي صورت ۾ گراف تي موجود آهن انهن جي رقم کي اسان هيٺ ڏنل جدول مطابق معلوم ڪنداسين.

x	0	1	2	3	4	5
y	-5	-4	-3	-2	-1	0
(x, y)	(0, -5)	(1,-4)	(2, -3)	(3, -2)	(4, -1)	(5, 0)

مليل هڪ درجي مساوات مطابق گراف جي ٽپڪن کي ظاهر ڪريو، جنهن ۾ هر x–محدد ۾ ايڪي جي تبديلي جو y–محدد جي رقم جي تبديلي سان تناسب آهي.



7.2.2 هڪ مقدار جو تعلق ٻي مقدار سان آهي مليل گراف کي پڙهي جاڻ حاصل ڪرڻ.

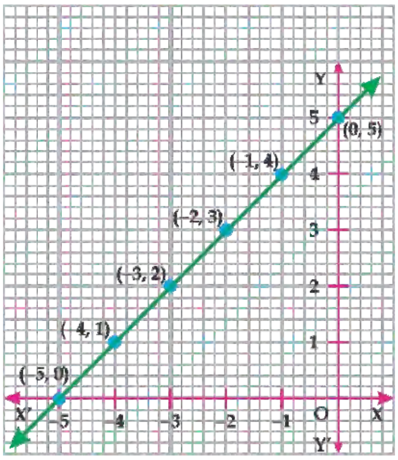
سمجهو تہ $y = x - 5$ هڪ درجي مساوات

$y = x - 5$ جي مدد سان اسان x جون رقمون ۽ y جون رقمون تناسب سان پڙهي سگهون ٿا.

y جي ڏنل رقم مان اسان x سان تعلق رکندڙ رقم پڙهي سگهون ٿا.
$y = x - 5$ کي $x = y - 5$ جي مساوات ۾ ۽ تعلق رکندڙ گراف پڻ ناهي سگهون ٿا.
تبديل ٿيل گراف ۾ اسان x کي y جي جز ۾ ظاهر ڪري سگهون ٿا. جيئن هيٺ ڏنل آهي $y = x - 5$

y	-5	-4	-3	-2	-1	0
x	0	1	2	3	4	5
(y, x)	(-5, 0)	(-4, 1)	(-3, 2)	(-2, 3)	(-1, 4)	(0, 5)

x جو تبديل ٿيل گراف y جي نسبت سان گراف پني تي ٺهيل آهي.



7.2.3 تبديل ڪرڻ جي نموني جا گراف پڙهو.

- ميل ۽ ڪلوميٽر
- ايڪٽر ۽ هيڪٽر
- سينٽي گريڊ ۽ فارنهائيٽ
- پاڪستاني سڪو ۽ ٻين ملڪن جا سڪا وغيره.

جيڪڏهن مقدارن ۾ وڌڻ يا گهٽ ٿيڻ جو تعلق آهي ته ان تعلق جو گراف سڌي ليڪ ۾ ٿيندو، جيڪو ٻنهي مقدارن جي حد کي ڏيڪاريندو ګڏيل محددي محور تي.

(i) ميل ۽ ڪلوميٽر جي تبديلي جو گراف پڙهڻ.

اچو ته ميل ۽ ڪلوميٽر جي گراف جو نموني بابت بحث ڪريون، ٻئي ايڪا مفاصلي جا هجن. جيڪڏهن ميل جو مفاصلو $x-$ محور تي آهي ته ڪلوميٽر جو مفاصلو $y-$ محور تي ٿيندو. اچو ته هينيون مثال ڏسون.

مثال

هينيان ميلن ۾ ڪلوميٽرن جي تبديلي جا گراف پڙهو.

(i) 2 ميل ڪلوميٽرن ۾

(ii) 5 ميل ڪوميٽرن ۾

(iii) 3 ميل ڪلوميٽرن ۾

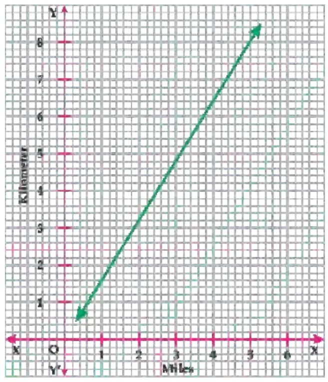
(iv) 7 ميل ڪلوميٽرن ۾

۽ ڏنل پئمانا استعمال ڪري تبديل ڪريو.

ميلن ۾ ڪلوميٽرن ۾ تبديلي جو گرا

پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ميل x محور تي

5 ننڍا چورس = 1 ڪلوميٽر y محور تي



حل: (i) 2 ميل ڪوميٽرن ۾

پڙهنداسين ته

2 ميل ≅ 3.20 ڪلوميٽرن جي

(ii) 5 ميل ڪلوميٽرن ۾

متئين گراف ڪي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

5 ميل ≅ 8 ڪلوميٽرن جي

(iii) 3 ڪلوميٽر ميلن ۾

متئين گراف جي مليل پئماني مطابصق پڙهنداسين ته

3 ڪلوميٽر ≅ 1.8 ميل

(iv) 7 ڪلوميٽر ميلن ۾

متئين گراف ڪي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

7 ڪلوميٽر ≅ 4.20 ميل

(ii) **هڪٽرن ايڪڙن ۾ تبديلي ڪي پڙهو.**

اچو تہ هيڪٽر ۾ ايڪڙن جي نموني جي گراف تي بحث ڪريون، ٻئي زمين جي ايراضي جا ايڪا آهن جيڪڏهن هيڪٽر جو مفاصلو x– محور تي ظاهر ڪجي ۽ ايڪڙن جو مفاصلو y– محور تي ، تہ اچو هينيان مثال ڏسون.

مثال: هينيان هيڪٽر ۾ ايڪڙن جي تبديلي جا گراف پڙهو.

(i) 2 هيڪٽرن ڪي ايڪڙن ۾

(ii) 6 هيڪٽرن ڪي ايڪڙن ۾

(iii) 10 ايڪڙن ڪي هيڪٽرن ۾

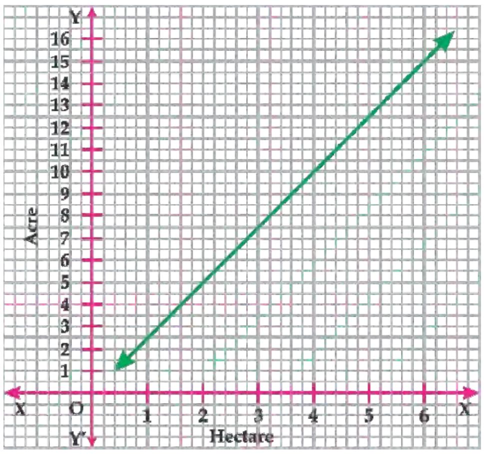
(iv) 8 ايڪڙن ڪي هيڪٽرن ۾

۽ ڏنل پيمانا استعمال ڪري تبديل ڪريو.

هيڪٽرن ۾ ايڪڙن ۾ تبديل ٿيندڙ گراف

پيمانو: 5 ننڍا چورس = 1 هيڪٽر x– محور تي

2 ننڍا چورس = 1 هيڪٽر y– محور تي



حل: (i) **2 هيڪٽرن ڪي ايڪڙن ۾**

مٿئين گراف ڪي مليل پيماني مطابق پڙهنداسين تہ

2 هيڪٽر ≅ 5 ايڪڙن ۾

(ii) **6 هيڪٽر، ايڪڙن ۾**

مٿئين گراف ڪي مليل پيماني مطابق پڙهنداسين تہ

6 هيڪٽر ≅ 5 ايڪڙ جي

(iii) **10 ايڪڙ، هيڪٽر ۾**

مٿئين گراف ڪي مليل پيماني مطابق پڙهنداسين تہ

10 ايڪڙ ≅ 4 هيڪٽر

(iv) 8 ايڪڙ، هيڪٽرن ۾

متئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڑهنداسين ته

8 ايڪڙ ≅ 3.20 هيڪٽر

(iii) سينٽي گريڊ جو فارنهائيٽ ۾ تبديلي جو گراف پرهو.

اچو ته سينٽي گريڊ ۽ فارنهائيٽ گراف جي نموني تي بحث ڪريون. ٻئي گرمي جي درجي جا ايڪا آهن. جيڪڏهن سينٽي گريڊ $x-$ محور تي ظاهر ڪجي ۽ فارنهائيٽ کي $y-$ محور تي ظاهر ڪجي، ته پوءِ اچو ته هينيان مثال ڏسون.

مثال: هينيان سينٽي گريڊ ۽ فارنهائيٽ جي تبديلي جا گراف پڑهو.

(i) 1^o سينٽي گريڊ کي فارنهائيٽ ۾

(ii) 3^o سينٽي گريڊ کي فارنهائيٽ ۾

(iii) 36^o فارنهائيٽ کي سينٽي گريڊ ۾

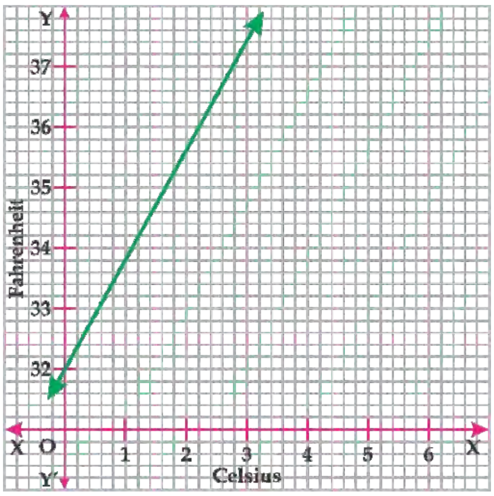
(iv) 37^o فارنهائيٽ کي سينٽي گريڊ ۾

۽ ڏنل پئمانا استعمال ڪري تبديل ڪريو.

سينٽي گريڊ ۽ فارنهائيٽ ۾ تبديل ٿيندڙ گراف

پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 سينٽي گريڊ $x-$ محور تي

5 ننڍا چورس = 1 فارنهائيٽ $y-$ محور تي



حل: (i) 1^o سينٽي گريڊ کي فارنهائيٽ ۾

متئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڑهنداسين ته

1^o سينٽي گريڊ ≅ 33.8^o کي فارنهائيٽ جي

(ii) 3^o سينٽي گريڊ کي فارنهائيٽ ۾

متئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

3^o سينٽي گريڊ $\cong 31.8^o$ کي فارنهائيٽ جي

(iii) 36^o فارنهائيٽ کي سينٽي گريڊ ۾

متئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

36^o فارنهائيٽ $\cong$ 2.2^o سينٽي گريڊ

(iv) 37^o فارنهائيٽ کي سينٽي گريڊ ۾

متئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

37^o فارنهائيٽ $\cong$ 2.8^o سينٽي گريڊ جي

(iv) سڪي جي تبديلي جو گراف پڙهو.

مثال 1: هيٺيان گراف، آمريڪي ڊالر ۽ پاڪستاني ربيو جي تبديلي جا پڙهو.

(i) 2 آمرڪي ڊالرن کي رپين ۾

(ii) 5 آمرڪي ڊالرن کي روپين ۾

(iii) 360 رپين کي آمرڪي ڊالرن ۾

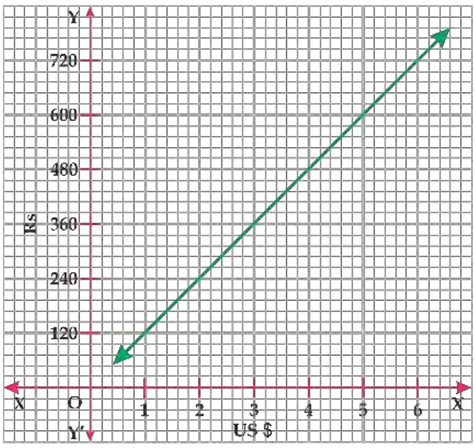
(iv) 720 رپين کي آمرڪي ڊالرن ۾

۾ ڏنل پئمانا استعمال ڪري تبديل ڪريو.

آمريڪي ڊالرن ۽ پاڪستاني رپين جي تبديلي جو گراف

پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 آمريڪي ڊالر $x-$ محور تي

5 ننڍا چورس = 120 پاڪستاني رپيہ $y-$ محور تي



حل: (i) 2 آمريڪي ڊالرن کي رپين ۾

متئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

2 آمريڪي ڊالر $\cong$ 240 رپين جي

(ii) 5 آمريڪي ڊالرن کي رپين ۾

متئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

5 آمريڪي ڊالر $\cong$ 600 رپين جي

(iii) 360 پاڪستاني رپين کي ڊالرن ۾

متئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

360 رپيو $\cong$ 3 ڊالر ۾

(iv) 720 پاڪستاني رپين کي ڊالرن ۾

متئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

720 پاڪستان رپيہ $\cong$ 6 ڊالرن جي

7.3 گرافي طريقي سان ٻن بدلجندڙ تي مشتمل مساوات جو حل:

7.3.1 ٻن بدلجندڙ واري همزاد هڪ درجي مساوات کي گرافي طريقي سان حل ڪريو.

اسان اڳ ۾ ئي ٻن هڪ درجي مساوات کي آلجبري طريقي سان حل ڪرڻ سکي آيا آهيون. هاڻ اسان هن حصي ۾ ٻن هڪ درجي مساواتن کي ٻن بدلجندڙن سان گرافي طريقي سان حل ڪرڻ سکنداسين. هتي ٻن ليڪن جي ڪپيندڙ ٽبڪو مساوات جو حل سيٽ هوندو آهي.

مثال 01 مليل مساواتن جو گرافي طريقي سان حل سيٽ معلوم ڪريو.

$x + y = 3$ ۽ $x - y = 5$

حل: مليل مساواتن هن طرح آهن.

$x+y = 3 \rightarrow (1)$

۽ $x\text{-}y = 5 \rightarrow (2)$

هنن مساواتن کي اسان y جي جزي لاءِ هن طرح لکنداسين

$y = 3 - x \rightarrow (3)$

$y = x - 5 \rightarrow (4)$

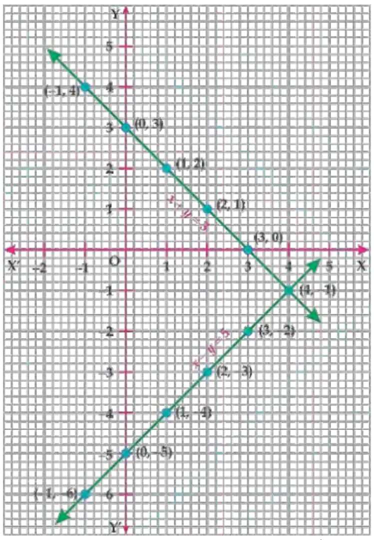
هاڻ هرهڪ، هڪ درجي مساوات لاءِ الڳ جدول ناهيو.

جدول مساوات (3) جي لاءِ هيٺ ڏنل آهي.

x	-1	0	1	2	3	4	...
y	4	3	2	1	0	-1	...

جدول مساوات (4) جي لاءِ هيٺ ڏنل آهي.

x	-1	0	1	2	3	4	…
y	-6	-5	-4	-3	-2	-1	…



هاڻي ٻنهي جدولن ۾ مليل ٽٻڪن کي استعمال ڪري سڌيون ليڪون ناهيو.

اسان ڏسنداسين ته مليل مساواتن جون سڌيون ليڪون l_1 ڪپي ٿي l کي ٽٻڪي $(4, -1)$ تي.

تنهنڪري حل سيٽ آهي $\{4, -1\}$.

مثال مليل مساوات $y = 2x + 4$ ۽ $y = 2x - 2$ جو گراف جي صورت ۾ حل سيٽ معلوم ڪريو.

حل: مليل مساواتون هن ريت آهن.

$$y = 2x + 4 \rightarrow (1)$$

ءِ $y = 2x - 2 \rightarrow (2)$

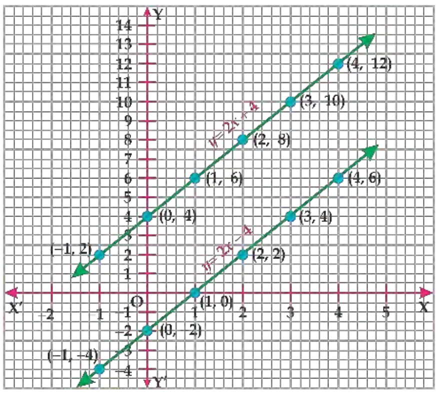
هن هرهڪ، هڪ درجي مساوات جي لاءِ الڳ جدول ناهيو.

مساوات (i) جي لاءِ جدول هيٺ ڏنل آهي.

x	-1	0	1	2	3	4
y	2	4	6	8	10	12

مساوات (ii) جي لاءِ جدول هيٺ ڏنل آهي.

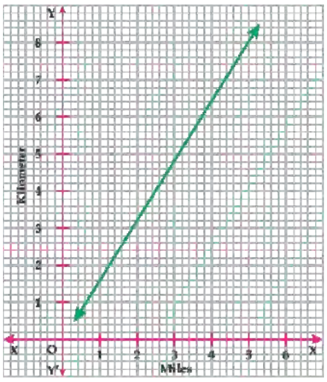
x	-1	0	1	2	3	4
y	-4	-2	0	2	4	6



هاڻي هنن ٽٻڪن کي ٻنهي مساواتن لاءِ ظاهر ڪريو. ۽ پوءِ هنن ٽٻڪن کي ملائي ٻه ليڪون ناهيو.

اسان ڏسي سگهون ٿا ته هنن مساواتن مان حاصل ٿيل ٻنهي سڌين ليڪن ۾ ڪابه مشترڪ ٽٻڪو نه آهي. ان جو مطلب ته هي ليڪون پاڻ ۾ ڪٿي ڪنهن به ٽٻڪي تي نه ٿيون ڪپن تنهنڪري ان جو حل سيٽ خالي سيٽ آهي. حل سيٽ { } آهي.

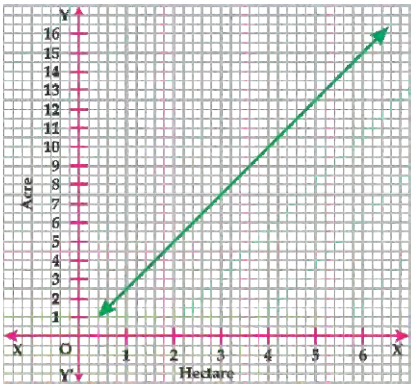
مشق 7.3



1. ميل ۽ ڪلوميٽر جا مليل تبديل ٿيل گراف پڙهو.
   (i) 1 ميل کي ڪلوميٽرن ۾
   (ii) 3 ميلن کي ڪلوميٽرن ۾
   (iii) 2 ڪلوميٽرن کي ميلن ۾
   (iv) 8 ڪلوميٽرن کي ميلن ۾
   ۽ مليل پئماني کي استعمال ڪري تبديل ڪريو.

ميلن ۽ ڪلوميٽرن جي وچ ۾ تبديل ٿيل گراف

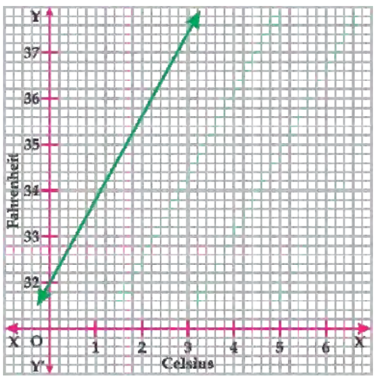
پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ميل x– محور سان
5 ننڍا چورس = 1 ميل y– محور سان



2. هيڪٽر ۽ ايڪڙن جا مليل تبديل ٿيل گراف پڙهو
   (i) 2 هيڪٽرن کي ايڪڙن ۾
   (ii) 5 هيڪٽرن کي ايڪڙن ۾
   (iii) 5 ايڪڙن کي هيڪٽرن ۾
   (iv) 15 ايڪڙن کي هيڪٽرن ۾
   ۽ مليل پئماني کي استعمال ڪري تبديل ڪريو.

هيڪٽرن ۽ ايڪڙن جي وچ ۾ تبديل ٿيل گراف

پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 هيڪٽر x– محور سان
2 ننڍا چورس = 1 ايڪڙ y– محور سان

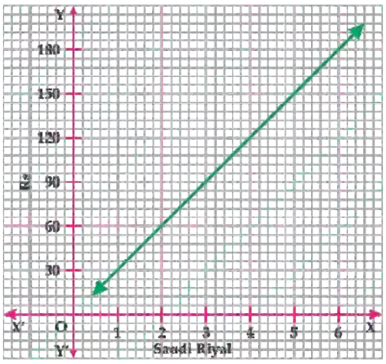


3. سينٽي گريڊ ۽ فارنهائيٽ جا مليل، تبديل ٿيل گراف پڙهو.
   (i) 2^o سينٽي گريڊ کي فارنهائيٽ ۾
   (ii) 80^o سينٽي گريڊ کي فارنهائيٽ ۾
   (iii) 32^o فارنهائيٽ کي سينٽي گريڊ ۾
   (iv) 36.4^o فارنهائيٽ کي سينٽي گريڊ ۾

سينٽي گريڊ فارنهائيٽ جي وچ ۾ تبديل ٿيل گراف

پئمانو: 5 ننڍا چورس =1 سينٽي گريڊ x– محور سان
5 ننڍا چورس =1 فارنهائيٽ y– محور سان

4. پاڪستاني رپين ۽ سعودي ريالن جا مليل، تبديل ٿيل گراف پڙهو.



(i) 3 سعودي ريال کي رپين ۾

(ii) 5.2 سعودي ريال کي رپين ۾

(iii) 150 رپين کي سعودي ريالن ۾

(iv) 78 رپين کي سعودي ريالن ۾

۾ مليل پئماني کي استعمال ڪري تبديل ڪريو.

پاڪستاني رپين ۾ سعودي ريالن ۾ تبديل ڪرڻ جو گراف.

پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 سعودي ريال x– محور سان

5 ننڍا چورس = 30 رپيہ y– محور سان

5. هيٺين همزاد مساواتن کي گراف جي طريقي سان حل ڪريو.

i. $3x - 11 = y;\ x\text{-}3y=9$

ii. $x + y = 4;\ 2x - 1=5y$

iii. $2x = y + 5;\ x=2y+1$

iv. $y=3x - 5;\ x+y=11$

v. $2x + y = 3;\ x - y=0$

vi. $2x+2=y;\ y=x - 1$

vii. $5 = x + 4y;\ 2x+3y=0$

viii. $3x = 5y\text{-}2;\ 3x+5y=8$

ix. $\dfrac{x+2}{5} + y= 6;\ y=2x - 12$

x. $3x\ \text{-}2y = 13;\ 2x+3y=13$

ورجايل مشق 7

.1 صحيح ۽ غلط جواب.

هينيان جملا غور سان پڙهو ۽ T يا F تي گول لڳايو جيڪو به هجي.

(i) ڪارتيسي متاچري ڪي xy متاچرو پڻ چئبو آهي.	T/F
(ii) ٻي چوٿائي ۾ ٻئي x ۽ y محدد مثبت هوندا آهن.	T/F
(iii) ٽپڪو $(1, -2)$ پهرئين چوٿائي ۾ هوندا آهن.	T/F
(iv) ٽپڪو $(-3, -4)$ چوٿين چوٿائي ۾ هوندا آهن.	T/F

.2 هينين مان صحيح جواب تي (√) ٽِل لڳايو.

(i) ٽپڪو $(-3, -4)$ ظاهر ٿيل هوندو آهي.

(a) پهرئين چوٿائي ۾ (b) ٻئي چوٿائي ۾

(c) ٽئين چوٿائي ۾ (d) چوٿين چوٿائي ۾

(ii) ٻہ محددي محور جي ڪنڊ تي ڪپيندا آهن.

(a) 45^{o} (b) 90^{o}

(c) 180^{o} (d) 270^{o}

(iii) ليڪ $y = 4$ پورروچوٽ آهي.

(a) $x-$ محور (b) $y-$ محور

(c) ٻنهي محورن تي (d) ڪوبہ نہ

(iv) ليڪ $x = 5$ پورروچوٽ آهي.

(a) $x-$ محور (b) $y-$ محور

(c) ٻنهي محورن تي (d) ڪوبہ نہ

(v) ليڪ $x = 5$ جي $x-$ محور تي ٽپڪو آهن.

(a) $(-5, 5)$ (b) $(0, -5)$

(c) $(-5, 0)$ (d) $(5, 0)$

(vi) ليڪ $x = 2$ جي $x = 5$ جو حل سيٽ آهي.

(a) $\{(2, 5)\}$ (b) $\{(2, 5)\}$

(c) $\{(0, 5)\}$ (d) $\{\ \}$

(vii) محددي محور پاڻ ۾ ______ آهن.

(a) عمود (b) پورروچوٽ

(c) 30^{o} تي ڪپيندڙ (d) 45^{o} تي ڪپيندڙ

خلاصو

- ترتيب ڏنل جوڙو، ڪارٽيسي متاچري تي ٽبڪي جي جڳهه کي ظاهر ڪندو آهي.
- ٻه طرفي ڪارٽيسي محددي نظام، ٻن عمودي ليڪن x– ۽ y– محور سان تعريف ڪيو ويندو آهي ٻئي محور هڪ ٻئي کي مخصوص ٽبڪي تي اڌو اڌ ڪندا جنهن کي اصل $(0, 0)$ چئبو آهي.
- متاچرو چئن چوٿاين ۾ محور سان ورهايل آهي.
- ڪارٽيسي متاچري کي xy متاچرو پڻ چئبو آهي.
- پهرين چوٿي I ۾ ٻئي x– محددي ۽ y– محددي واڌو آهن $x > 0$ ۽ $y > 0$.
- ٻئي چوٿي II ۾ x محددي ڪاٽو ۽ y– محددي واڌو آهي $x < 0$ ۽ $y > 0$.
- ٽئين چوٿي III ۾ x محددي ۽ y– محددي ڪاٽو آهن $x < 0$ ۽ $y < 0$.
- چوٿين چوٿي IV ۾ x محددي واڌو ۽ y– محددي ڪاٽو آهي $x > 0$ ۽ $y < 0$.
- اصل ٽبڪي تي $x = y = o$، تنهنڪري اصل نقطي جا محددي $(0, 0)$ آهن.
- عام طرح سان ڪارٽيسي متاچري ۾ ٽبڪن کي ترتيب ڏنل جوڙن (a, b) جي صورت ۾ ظاهر ڪبو آهي، جڏهن ته a، x– محددي (abscissa) ۽ b، y محددي (ordinate) آهي.
- $x = a$ جو گراف y– محور جي پورروچوٺ آهي.
- $y = c$ جو گراف x– محور جي پورروچوٺ آهي.
- $y = mx$ جو گراف هميشه اصل مان گذرندو آهي.
- $y = mx + c$ جو گراف y– محور کي $y = c$ ۾ ڪٽيندو آهي.

يونٽ 8

ٻه درجي مساوات

(Quadratic Equation)

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هي يونٽ مڪمل ڪرڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته:

- هڪ بدلجندڙ ۾ ٻه درجي مساوات حل ڪري سگهندا.
  - جزن وسيلي
  - مڪمل چورس بنائڻ
- مڪمل چورس بنائڻ جو طريقو استعمال ڪري ٻه درجي فارمولا حاصل ڪندا ٻه درجي فارمولو استعمال ڪري ٻه درجي مساوات حل ڪندا.
- $ax^4 + bx^2 + c = 0$ نموني مساوات کي ٻه درجي مساوات ۾ تبديل ڪري چوٿائي يا چوٿائي درجي جي مساوات.
- $ap(x) + \frac{c}{p(x)} = b,$ صورت واري مساوات کي حل ڪري سگهندا، جڏهن ته a ، b ۽ c عدد آهن.
- ٻنهي طرفن واري مساوات جي صورت $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0,$ کي حل ڪري سگهندا.جڏهن ته a ، b ۽ c عدد آهن.
- سگهن واريون مساواتون، جنهن جي بدلجندڙ تي سگهه نما هجن، حل ڪري سگهندا.
- مساوات جي صورت $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = k$ کي حل ڪري سگهندا جڏهن ته $a + b = c + d$ $k \neq 0$
- مساوات ڏنل صورت ۾ حل ڪندا.
  - $\sqrt{(ax+b)} = cx + d.$
  - $\sqrt{(x+a)} + \sqrt{(x+b)} = \sqrt{(x+c)}$
  - $\sqrt{(x^2 + px + m)} + \sqrt{(x^2 + px + n)} = q.$

8.1 ٻه درجي مساوات ۽ انهن جو حل

8.1.1 وضاحت ڪري پوءِ ٻه درجي مساوات جي معياري صورت جي تعريف ڪريو.

ٻه درجي گهڻ رقمي مساوات کي ٻه درجي مساوات چئبو آهي.
ٻه درجي مساوات جي معياري صورت $ax^2+bx+c=0$ آهي جڏهن ته $a \neq 0$ ۽ $a, b,$ $c \in \mathbb{R}$

هن صورت ۾ "a" عددي سرو آهي x^2 جو، b عددي سرو آهي. x جو ۽ c مستقل جزو آهي.

$ax^2+bx+c=0$ ۾ جيڪڏهن $a=0$ ته اها گهٽجي هڪ درجي مساوات $bx+c=0$ ٿيندي ۽ جيڪڏهن $b=0$ ته پوءِ اها خالص ٻه درجي صورت $ax^2+c=0$ ۾ ٿيندي.

هيٺيان مثال ٻه درجي مساوات جا آهن.

(i) $4x^2+4x+1=0$ (ٻه درجي مساوات جي معياري صورت)

(ii) $x^2-4=0$ (خالص ٻه درجي مساوات)

8.1.2: هڪ بدلجندڙ ۾ ٻه درجي مساوات جو حل ڪريو.

- جزن ذريعي
- مڪمل چورس ٺاهڻ ذريعي

هتي اسان ٻه درجي مساوات کي حل ڪرڻ لاءِ ٻن طريقن کي غور ڪريون ٿا.

(a) جزن ڪرڻ جو طريقو (b) مڪمل چورس ٺاهڻ جو طريقو

(a) جزن ڪرڻ جو طريقو

مثال 01 حل ڪريو.

(i) $x^2+2x-15=0$ (ii) $2x^2-5x=12$

حل (i): $x^2+2x-15=0$

$\Rightarrow \quad x^2+5x-3x-15=0$

$\Rightarrow \quad x(x+5)-3(x+5)=0$

$\Rightarrow \quad (x-3)(x+5)=0$

$\Rightarrow \quad x-3=0$ يا $x+5=0$

$\Rightarrow \quad x=3$ يا $x=-5$

تنهنڪري حل سيٽ آهي $\{-5,3\}$

حل (ii):

$$2x^2-5x=12$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2-5x-12=0$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2-8x+3x-12=0$$
$$\Rightarrow \quad 2x(x-4)+3(x-4)=0$$
$$\Rightarrow \quad (x-4)(2x+3)=0$$
$$\Rightarrow \quad x-4=0 \quad \text{or} \quad 2x+3=0$$
$$\Rightarrow \quad x=4 \quad \text{or} \quad x=\frac{-3}{2}$$

تنهنڪري حل سيٽ آهي $\left\{-\frac{3}{2}, 4\right\}$

مثال 02 خالص ٻه درجي مساوات $4m^2-1=0$، جزن واري طريقي سان حل ڪريو.

حل:

$$4m^2-1=0$$
$$\Rightarrow \quad (2m)^2-(1)^2=0$$
$$\Rightarrow \quad (2m-1)(2m-1)=0 \quad \left[\ a^2-b^2=(a-b)(a+b)\right]$$
$$\Rightarrow \quad 2m-1=0 \quad \text{or} \quad 2m+1=0$$
$$\Rightarrow \quad 2m=1 \quad \text{or} \quad 2m=-1$$
$$\Rightarrow \quad m=\frac{1}{2} \quad \text{or} \quad m=-\frac{1}{2}$$

تنهنڪري حل سيٽ آهي $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

(b) مڪمل چورس ٺاهڻ وارو طريقو

طريقي جي وضاحت هيٺ ڪجي ٿي.

(i) پهريائين مساوات کي معياري صورت $ax^2+bx+c=0$ ۾ لکو.

(ii) مساوات کي ٻنهي پاسن کان x^2 جي عددي منڍي، جيڪو 1 کان مختلف هجي، ان سان ونڊکريو.

(iii) مستقل رقم کي ساڄي پاسي ٽپايو.

(iv) ٻنهي طرف $(x$ جو عددي منڍيو $\times\frac{1}{2})^2$ جوڙ ڪريو.

(v) کاٻي طرف واري رقم کي چورس ۾ لکو ۽ ساڄي طرف واري رقم کي مختصر ڪيو.

(vi) مليل مساوات جي ٻنهي طرفن جو ٻيو مول وٺو، حاصل ٿيندڙ مساوات کي، حل ڪريو ۽ حل سيٽ لکو.

مثال 01 حل ڪريو $2x^2+8x-1=0$

حل:

$$2x^2+8x-1=0$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2+8x=1 \quad ...(i)$$

$$\Rightarrow \quad x^2+4x=\frac{1}{2} \quad ...(ii)$$

مساوات (i) کي 2 سان ونڊ ڪرڻ سان)

مساوات جي ٻنهي طرفن $4=\left[\frac{1}{2}\times 4\right]^2$ جوڙ ڪريو. تہ اسان کي ملندو

$$x^2+4x+4=\frac{1}{2}+4$$

$$\Rightarrow \quad x^2+2(2)x+(2)^2=\frac{1}{2}+(2)^2$$

$$\Rightarrow \quad (x+2)^2=\frac{1}{2}+4$$

$$\Rightarrow \quad (x+2)^2=\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x+2=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \quad x+2=\frac{3}{\sqrt{2}}$	$x+2=-\frac{3}{\sqrt{2}}$
$\Rightarrow \quad x+2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$x+2=\frac{-3\sqrt{2}}{2}$
$\Rightarrow \quad x=-2+\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$x=-2-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$\Rightarrow \quad x=\frac{-4+3\sqrt{2}}{2}$	$x=\frac{-4-3\sqrt{2}}{2}$

تہ حل سيٽ آهي $\left\{\frac{-4+3\sqrt{2}}{2}, \frac{-4-3\sqrt{2}}{2}\right\}$.

مشق 8.1

.1 هيٺين ٻه درجي مساواتون جزن ڪرڻ واري طريقي سان حل ڪريو.

(i) $x^2+5x+6=0$ (ii) $6x^2-x-1=0$ (iii) $x^2-11x+30=0$

(iv) $x^2-2x=0$ (v) $x^2-2x-15=0$ (vi) $12x^2-41x+24=0$

(vii) $(x-5)^2-9=0$ (viii) $(3x+4)^2-16=0$

.2 هيٺين مان هر هڪ مڪمل چورس ٺاهڻ واري طريقي سان حل ڪريو.

(i) $x^2+6x+1=0$ (ii) $(3x+2)(x+2)=6-2(x+1)$. (iii) $3x^2-8x=-1$

(iv) $24x^2=-10x+21$ (v) $2(x^2-3)-3x=2(x+3)$ (vi) $2x^2+4x-1=0$

.3 مساوات $\mathbf{3x^2+bx-8=0}$ ، انهن جي جزن مان 2 هڪ جز هجي.

(i) b جو ملهه ڇا آهي.

(ii) مساوات جو ٻيو جزو ڪهڙو آهي.

8.2 ٻه درجي فارمولا

مليل مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ کي حل ڪرڻ لاءِ اسان هيٺيون فارمولا $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ استعمال ڪنداسين. جنهن کي ٻه درجي فارمولا چئبو آهي.

8.2.1: مڪمل چورس ٺاهڻ وارو طريقو استعمال ڪري ٻه درجي فارمولا حاصل ڪريو.

ٻه درجي مساوات معياري صورت ۾ لکو.

$$ax^2+bx+c=0 \quad . . . \text{(i)}$$

مساوات (i)کي ٻنهي طرف a سان ونڊ ڪرڻ سان حاصل ٿيندو.

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a}$$

$$\therefore \quad x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$$

مستقل جزي $\frac{c}{a}$ کي ساڄي پاسي ٿپائڻ سان

$$\therefore \quad x^2+\frac{bx}{a}=-\frac{c}{a} \quad . . . \text{(ii)}$$

مساوات ۾ ٻنهي طرفن $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ جوڙ ڪرڻ سان

$$\therefore \quad x^2+\frac{bx}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

8.2.2: ٻہ درجي مساوات کر حل ڪرڻ لاءِ ٻہ درجي فارمولا جو استعمال

مثال 01 ٻہ درجي فارمولا استعمال ڪري حل ڪريو.

(i) $2x^2-5x-3=0$ (ii) $x^2+x+1=0$

حل (i): $2x^2-5x-3=0$

هتي $a=2, b=-5$ ۽ $c=-3$

ٻہ درجي فارمولا استعمال ڪرڻ سان

$$\because \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(2)(-3)}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{5\pm\sqrt{25-(-24)}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{5\pm\sqrt{49}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{5\pm7}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{5+7}{4} \qquad\qquad x=\frac{5-7}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{12}{4} \qquad\qquad x=\frac{-2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=3 \qquad\qquad x=-\frac{1}{2}$$

تہ جزا آهن 3 ۽ $-\frac{1}{2}$

تہ حل سيٽ آهي $\left\{3,-\frac{1}{2}\right\}$

حل (ii): $x^2+x+1=0$

هتي $a=1, b=1$ ۽ $c=1$ آهي.

ٻہ درجي فارمولا استعمال ڪرڻ سان

$$\because x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4(1)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},$$

تہ حل سيٽ آهي $\left\{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$

مشق 8.2

هيٺيون مساواتون ٻہ درجي فارمولا استعمال ڪري حل ڪريو.

(i) $x^2-2x=15$ (ii) $10x^2+19x-15=0$ (iii) $x^2=-x+1$

(iv) $2x=9-3x^2$ (v) $9x^2=12x-49$ (vi) $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-1=0$

(vii) $3x^2-2x+2=0$ (viii) $6x^2-x-1=0$ (ix) $4x^2-10x=0$

(x) $x^2-1=0$ (xi) $x^2-6x+9=0$ (xii) $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-4}=4$

8.3 ٻه درجي صورت ۾ گھٽجندڙ جھڙيون مساواتون

مساواتن جا ڪيترا ئي نمونا آهن جيڪي ٻه درجي نه آهن پر انهن کي ٻه درجي صورت ۾ ڪو مناسب نعمل بدل وٺي گھٽائي سگھجي ٿو.

8.3.1: $ax^4 + bx^2 + c = 0, a \neq 0$ نموني جي مساوات ٻه درجي صورت ۾ گھٽجڻ جھڙن مساواتن کي حل ڪريو. چوٿائي درجي جي مساوات

فرض ڪريو ته $ax^4 + bx^2 + c = 0$، چوٿائي يا چوٿائي درجي جي مساوات آهي ۽ ٻه درجي صورت $ay^2 + by + c = 0$ ۾ گھٽائي سگھجي ٿي. هي طريقو هيٺين مثال سان سمجھايو ويو آهي.

مثال چوٿائي درجي جي مساوات $4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$ کي حل ڪريو.

حل:

$$4x^4 - 25x^2 + 36 = 0 \quad . . . \text{(i)}$$

هن مساوات کي لکي سگھجي ٿو

$$(x^2)^2 - 25x^2 + 36 = 0 \quad . . . \text{(ii)}$$

$y = x^2$ مساوات (ii) ۾ لکڻ سان اسان کي ملندو

$$4y^2 - 25x^2 + 36 = 0$$

هتي $a = 4, b = -25$ ۽ $c = 36$ آهي.

$$\because \quad y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\therefore \quad y = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4(4)(36)}}{2(4)}$$

$$y = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2(4)} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{25 \pm 7}{8}$$

i.e., $y = \dfrac{25 + 7}{8}$ | $y = \dfrac{25 - 7}{8}$

$y = \dfrac{32}{8} = 4$ | $y = \dfrac{18}{8} = \dfrac{9}{4}$

but, $y = x^2$, then

$x^2 = 4$ | $x^2 = \dfrac{9}{4}$

$x = \pm\frac{3}{2}$ | $x = \pm 2$

تہ حل سيٽ آهي $\left\{\pm 2\,,\ \pm\frac{3}{2}\right\}$

8.3.2: $ap(x)+\dfrac{b}{p(x)} = c$ نموني جي مساوات حل ڪريو، جڏهن b, a ۽ c حقيقي آهن. a≠0 ۽ $p(x)$ هڪ آلجبري اظهار آهي.

مثال 01 حل ڪريو $8\sqrt{x+3}-\dfrac{1}{\sqrt{x+3}} = 2$

حل:

$$8\sqrt{x+3}-\frac{1}{\sqrt{x+3}} = 2 \quad . . . \text{(i)}$$

فرض ڪريو تہ $p(x) = y = \sqrt{x+3}$ تہ (i) ۾ رقم رکڻ سان

$$\Rightarrow \quad 8y-\frac{1}{y} = 2$$

$$\Rightarrow \quad 8y^2-1 = 2y$$

$$\Rightarrow \quad 8y^2-2y-1=0$$

$$\Rightarrow \quad 8y^2-4y+2y-1=0$$

$$\Rightarrow \quad 4y(2y-1)+1(2y-1)=0$$

$$\Rightarrow \quad (4y+1)(2y-1)=0$$

$$\Rightarrow \quad 4y+1=0 \qquad\qquad 2y-1=0$$

$$\Rightarrow \quad y=\frac{-1}{4} \qquad\qquad y=\frac{1}{2},$$

when $y=-\frac{1}{4}$, | $y=\frac{1}{2}$, then,

$$\sqrt{x+3}=-\frac{1}{4} \qquad\qquad \sqrt{x+3}=\frac{1}{2}$$

ٻنهي پاسي چورس وٺڻ سان | ٻنهي پاسي چورس وٺڻ سان

$$\Rightarrow \quad x+3=\frac{1}{16} \qquad\qquad x+3=\frac{1}{4}$$

$x = \frac{1}{4} - 3$	$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{16} - 3$
$x = \frac{1-12}{4}$	$\Rightarrow \quad x = \frac{1-48}{16}$
$x = -\frac{11}{4}$	$\Rightarrow \quad x = -\frac{47}{16}$

چڪاس

$$8\sqrt{x+3} - \frac{1}{\sqrt{x+3}} = 2$$

مٿين مساوات ۾ $x = -\frac{11}{4}$ وجهڻ سان

$$8\sqrt{\frac{-11}{4} + 3} - \frac{1}{\sqrt{\frac{-11}{4} + 3}} = 2$$

$$8\sqrt{\frac{-11+12}{4}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{-11+12}{4}}} = 2$$

$$8\sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 2$$

$$8\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$$

$$4 - 2 = 2$$

$$2 = 2$$

ثابت ٿي ويو. Verified

مٿين مساوات ۾ $x = -\frac{47}{16}$ وجهڻ سان

$$8\sqrt{\frac{-47}{16} + 3} - \frac{1}{\sqrt{\frac{-47}{16} + 3}} = 2$$

$$8\sqrt{\frac{-47+48}{16}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{-47+48}{16}}} = 2$$

$$8\sqrt{\frac{1}{16}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16}}} = 2$$

$$8\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)} = 2$$

$$2 - 4 = 2$$

$$-2 \neq 2$$

ثابت نہ ٿيو. Non verified

تہ حل سيٽ آهي = $\left\{-\frac{11}{4}\right\}$.

8.3.3: باهمي مساوات, $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$ حل ڪريو.جڏهن a, b ۽ c ناطق عدد آهن

هڪ گهڻ رقمي مساوات کي باهمي مساوات (Reciprocal Equation) چئبو جيڪڏهن اها تبديل نہ ٿئي جڏهن x کي تبديل ڪجي $\frac{1}{x}$ سان.

هن قسم جي باهمي مساوات, $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$ کي حل ڪرڻ جو طريقو هيٺين مثالن ۾ ڏجي ٿو، جڏهن a, b, c ناطق عدد هجن.

مثال 10 حل ڪريو $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$

حل:

جيڪڏهن $x+\frac{1}{x}=y$ ، تہ پوءِ, $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ ، تہ مساوات (i) ۾ رکڻ سان ملندو

$$2(y^2-2)-9y+14=0$$

$$\Rightarrow \quad 2y^2-9y+10=0$$

$$\Rightarrow \quad 2y^2-4y-5y+10=0$$

$$\Rightarrow \quad 2y(y-2)-5(y-2)=0$$

$$\Rightarrow \quad (y-2)(2y-5)=0$$

i.e. $y-2=0$

$\Rightarrow \quad y=2$

جڏهن $y=x+\frac{1}{x}$, تہ پوءِ

$$x+\frac{1}{x}=2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+1=2x$$

$$\Rightarrow \quad x^2-2x+1=0$$

$2y-5=0$

$y=\frac{5}{2}$

$y=x+\frac{1}{x}$, استعمال ڪرڻ سان ملندو

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2+1}{x}=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2+2=5x$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2-5x+2=0$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2-4x-x+2=0$$
$$\Rightarrow \quad 2x(x-2)-1(x-2)=0$$
$$\Rightarrow \quad (x-2)(2x-1)=0$$
$$\Rightarrow \quad x-2=0$$
$$\Rightarrow \quad x=2$$
$$\Rightarrow \quad 2x-1=0$$
$$\Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)^2=0$$
$$\Rightarrow \quad x-1=0$$
$$\Rightarrow \quad x=1$$

تہ حل سيٽ ٿيندو = $\left\{\frac{1}{2}, 2, 1\right\}$.

8.3.4: سگھن واريون حل ڪريو جنھن ۾ بدلجندڙ تي سگھ نما ھجن مساواتون جن ۾ بدلجندڙن تي سگھ نما مليل ھجن تہ انھن کي سگھن واري مساوات چئبو آھي. اهڙ مساواتن جو حل ھينين مثالن سان ظاهر ڪيو ويو آھي.

مثال 01 حل ڪريو $7^{1+x}+7^{1-x}=50$

حل:

$$7^{1+x}+7^{1-x}=50 \qquad . . . (i)$$

$7.7^x+7.7^{-x}-50=0$ (سگھن تي تقسيم ڪرڻ سان)

$$\Rightarrow \quad 7.7^x+\frac{7}{7^x}=50 \qquad . . . (ii)$$

فرض ڪريو تہ $y=7^x$

مساوات (ii) کي گھٽائڻ سان $\therefore$

$$7y+\frac{7}{y}-50=0,$$
$$\Rightarrow \quad 7y^2+7-50y=0$$
$$\Rightarrow \quad 7y^2-50y+7=0$$
$$\Rightarrow \quad 7y^2-49y-y+7=0 \qquad \text{(Factorizing)}$$
$$\Rightarrow \quad 7y(y-7)-1(y-7)=0$$
$$\Rightarrow \quad (7y-1)(y-7)=0$$

$y - 7 = 0$ | $\Rightarrow 7y - 1 = 0$

$\Rightarrow y = 7$ | $\Rightarrow y = \frac{1}{7}$

$y = 7$ then $7^x = 7^1$ | then $7^x = 7^{-1}$

$x = 1$ | $\Rightarrow x = -1$

$= \{-1, 1\}$ تہ حل سيٽ آهي

8.3.5: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=k$ نموني واريون مساواتون حل ڪريو.جڏهن تہ $a+b = c+d$ ۽ $k \neq 0$ مستقل آهي.

مثال 01 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 48$

حل: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 48$

ترتيب کي تبديل ڪرڻ سان

$$(x+4)(x+3)(x+2)(x+1) = 48$$
$$(x^2 + 4x + x + 4)(x^2 + 2x + 3x + 6) = 48$$
$$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 48 \ldots \text{(i)}$$

فرض ڪريو تہ $x^2 + 5x = t$

By substituting in equation (i)

$$\Rightarrow (t+4)(t+6) = 48$$
$$\Rightarrow t^2 + 4t + 6t + 24 = 48$$
$$\Rightarrow t^2 + 10t - 24 = 0$$
$$\Rightarrow t^2 + 12t - 2t - 24 = 0$$
$$\Rightarrow t(t+12) - 2(t+12) = 0$$
$$\Rightarrow (t+12)(t-2) = 0$$

ياوري

$t - 2 = 0$ | $\Rightarrow t + 12 = 0$

$t = 2$ | $\Rightarrow t = -12$

مساوات (ii) ۾ رقم تبديل ڪرڻ سان | مساوات (ii) ۾ رقم تبديل ڪرڻ سان

$x^2 + 5x = 2$ | $\Rightarrow x^2 + 5x = -12$

$x^2 + 5x - 2 = 0$ | $\Rightarrow x^2 + 5x + 12 = 0$

هتي $a=1$, $b=5$ and $c=-2$,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+8}}{2}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}$$

هتي $a=1$, $b=5$ and $c=12$,

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-5\pm\sqrt{25-48}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-5\pm\sqrt{-23}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-5\pm i\sqrt{23}}{2}$$

حل سيٽ آهي $\left\{\frac{-5\pm i\sqrt{23}}{2}, \frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}\right\}$

مشق 8.3

هيٺيون مساواتون حل ڪريو.

1. $x^4-8x^2-9=0$
2. $x^4-3x^2-4=0$
3. $12x^4-11x^2+2=0$
4. $\frac{2x+3}{x+1}+6\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)=7$
5. $\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2+1}}+6\sqrt{\frac{x^2+1}{2x^2+1}}=5$
6. $5^{x+1}+5^{2-x}=5^3+1$
7. $2^x+\frac{16}{2^x}=8$
8. $2\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x}{x+1}\right)+2=0$
9. $4\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-4\left(\frac{x}{x-1}\right)+4=0$
10. $9^{x+2}-6\cdot 3^{x+1}+1=0$
11. $2x+2^{-x+6}-20=0$
12. $(x-1)(x+5)(x+8)(x+2)=880$
13. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$
14. $(x-2)(x+1)(x+3)(x-4)=24$

8.4 مولي مساواتون

اهڙيون مساواتون جن جي بدلجندڙ اظهارن تي مول هجي ته انهن کي مولي مساواتون چئبو آهي. مولي مساواتن جو چڪاس ڪرڻ ضروري آهي.

8.4.1: مساواتن جي هيٺين نمونن جو حل

نمونو (i): $\sqrt{ax+b} = cx+d$ نمونو (ii): $\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{x+c}$

نمونو (iii): $\sqrt{x^2+px+m} + \sqrt{x^2+px+n} = q$

نمونو (i): $\sqrt{ax+b} = cx+d$

مثال حل ڪريو $\sqrt{217-x} = x-7$

حل: $\sqrt{217-x} = x-7$

ٻنهي پاسي چورس ڪرڻ سان

$$\left(\sqrt{217-x}\right)^2 = (x-7)^2$$

$$\Rightarrow \quad 217-x=(x-7)^2$$

$$\Rightarrow \quad 217-x=x^2-14x+49$$

$$\Rightarrow \quad x^2-13x-168=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-21x+8x-168=0$$

$$\Rightarrow \quad x(x-21)+8(x-21)=0$$

$$\Rightarrow \quad (x-21)(x+8)=0$$

$x=21$ يا $x=-8$

چڪاس: $x=21$

$$\sqrt{217-x} = x-7$$

$$\therefore \quad \sqrt{217-21} = 21-7$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{196} = 14$$

$$\Rightarrow \quad 14 = 14$$

verified ثابت ٿيو

چڪاس: $x=-8$

$$\sqrt{217-x} = x-7$$

$$\therefore \quad \sqrt{217-(-8)} = -8-7$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{225} = 15$$

$$\Rightarrow \quad 15 \neq -15$$

not verified ثابت نہ ٿيو

{21} حل سيٽ آهي

نمونو (ii): $\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{x+c}$

مثال حل ڪريو $\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$

حل: $\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$

ٻنهي پاسي چورس ڪرڻ سان

$$(\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2})^2 = (\sqrt{6x+13})^2$$

$$\Rightarrow \quad (\sqrt{x+7})^2 + 2(\sqrt{x+7})(\sqrt{x+2}) + ((\sqrt{x+2})^2 = 6x+13$$

$$\Rightarrow \quad x+7+2\sqrt{(x+7)(x+2x)} + x+2 = 6x+13,$$

$$\Rightarrow \quad 2x+7+2+2\sqrt{(x^2+7x+2x+14} = 6x+13$$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{x^2+9x+14} = 4x+4$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+9x+14} = 2x+2$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+9x+14} = 2(x+1)$$

وري ٻنهي پاسي چورس ڪرڻ سان

$$\left(\sqrt{x^2+9x+14}\right)^2 = [2(x+1)]^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+9x+14 = 4(x+1)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+9x+14 = 4(x^2+2x+1)$$

$$\Rightarrow \quad x^2+9x+14 = 4x^2+8x+4$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2-x-10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2+5x-6x-10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(3x+5)-2(3x+5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-2)(3x+5) = 0$$

يا وري

$x-2 = 0$ يا $3x+5 = 0$

$x = 2$ i.e. $x = -\frac{5}{3}$

چڪاس:

$x = 2$

$\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13},$

$x = -\frac{5}{3}$

$\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$

$$\sqrt{-\frac{5}{3}+7}+\sqrt{-\frac{5}{3}+2}=\sqrt{6\left(-\frac{5}{3}\right)+13}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{16}{3}}+\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{\sqrt{3}}\neq\sqrt{3}$$

Not verified. ثابت نہ ٿيو

$$\sqrt{2+7}+\sqrt{2+2}=\sqrt{6(2)+13},$$

$$\Rightarrow \sqrt{9}+\sqrt{4}=\sqrt{25}$$

$$\Rightarrow 3+2=5$$

$$\Rightarrow 5=5$$

Verified. ثابت ٿيو

جئين تہ $-\frac{5}{3}$ ٻاهرين جز آهي تنهن ڪري x=5 حل آهي{5}

نمونو(iii): $\sqrt{x^2+px+m}+\sqrt{x^2+px+n}=q$

مثال 01 حل ڪريو $\sqrt{x^2-3x+21}-\sqrt{x^2-3x+5}=2$

حل: مليل مساوات ۾ $y=x^2-3x$ رکڻ سان اسان کي ملندو

$$\sqrt{x^2-3x+21}-\sqrt{x^2-3x+5}=2$$

$$\sqrt{y+21}-\sqrt{y+5}=2$$

$$\sqrt{y+21}=2+\sqrt{y+5}$$

ٻنهي طرفن چورس ڪرڻ سان

$$y+21=(2)^2+4\sqrt{y+5}+(\sqrt{y+5})^2$$

$$\Rightarrow y+21=(2)^2+4\sqrt{y+5}+\left(\sqrt{y+5}\right)^2$$

$$\Rightarrow y+21=4+4\sqrt{y+5}+y+5$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{y+5}=\cancel{y}+21-4-\cancel{y}-5$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{y+5}=12$$

$$\Rightarrow \sqrt{y+5}=3$$

وري ٻنهي طرفن چورس ڪرڻ سان اسان کي ملندو.

$$\Rightarrow y+5=9$$

$$\Rightarrow y=4,$$

$y=4$ رکڻ، تبديل ڪيل $y=x^2-3x^2$ ۾ تہ اسان کي ملندو.

$$4=x^2-3x,$$
$$\Rightarrow \quad x^2-3x-4=0,$$
$$\Rightarrow \quad x^2-4x+x-4=0,$$
$$\Rightarrow \quad x(x-4)+1(x-4)=0,$$
$$\Rightarrow \quad (x-4)(x+1)=0,$$
i.e., $x-4=0$ $\qquad x+1=0$
$$\Rightarrow \quad x=4, \qquad x=-1,$$

چڪاس:

For $x=4$

$$\sqrt{x^2-3x+21}-\sqrt{x^2-3x+5}=2$$
$$\sqrt{(4)^2-3(4)+21}-\sqrt{(4)^2-3(4)+5}=2$$
$$\sqrt{16+12+21}-\sqrt{16-12+5}=2$$
$$\sqrt{25}-\sqrt{9}=2$$
$$5-3=2$$
$$2=2$$

$x=-1$ جي لاءِ

$$\sqrt{x^2-3x+21}-\sqrt{x^2-3x+5}=2$$
$$\sqrt{(-1)^2-3(-1)+21}-\sqrt{(-1)^2-3(-1)+5}=2$$
$$\sqrt{1+3+21}-\sqrt{1+3+5}=2$$
$$\sqrt{25}-\sqrt{9}=2$$
$$5-3=2$$
$$2=2$$

تنهنڪري ڏنل مساوات جو حصو آهن تنهنڪري حل سيٽ ٿيندو $\{-1,4\}$

مشق 8.4

هيٺين مساواتن کي حل ڪريو.

1. $x+\sqrt{x+5}=7$
2. $\sqrt{x-2}=8-x$
3. $\sqrt{7-5x}+\sqrt{13-5x}=3\sqrt{4-2x}$
4. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}=\sqrt{6x+13}$
5. $\sqrt{2x^2+3x+4}+\sqrt{2x^2+3x+9}=5$
6. $\sqrt{y^2-3y+9}-\sqrt{y^2-3y+36}=0$

ورجايل مشق 8.4

1. خال ڀريو.

(i) ڪُجهه رقمي مساوات جنهن ۾ بدلجندڙ جو درجو ________ هجي تہ ان کي ٻہ درجي مساوات چئبو آهي.

(ii) ٻہ درجي مساوات جي معياري آهي ________ .

(iii) $3^x + 3^{2x} = 1$ کي ________ مساوات چئبو.

(iv) $3^x = 9$ جو حل ٿيندو ________ .

(v) $ax^2 + bx + c = 0$ جو حل ٿيندو ________ .

2. درست جواب تي (√) ڪريو.

(i) ٻہ درجي مساوات جو درجو آهي.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(ii) ٻہ درجي مساوات جي معياري صورت آهي.

(a) $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ (b) $ax^2 + c = 0, a \neq 0$

(c) $ax^2 + bx = 0, a \neq 0$ (d) $ax^3 + bx^2 + c = 0, a \neq 0$

(iii) $ax^2 + bx + c = 0$ جي لاءِ ٻہ درجي فارمولا آهي.

(a) $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$ (b) $\dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(c) $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (d) $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$

(iv) $x^2 + 10x + 24 = 0$ جو حل سيٽ آهي.

(a) $\{-6, -4\}$ (b) $\{-6, 4\}$

(c) $\{6, 4\}$ (d) $\{6, -4\}$

(v) ٻہ درجي مساوات جا وڌ ۾ وڌ جزا آهن

(a) 2 (b) 3 (c) 1 (d) 4

(vi) $x^2-15x + 56$ جا هڪ درجي جزا آهن.

(a) $(x-7)$ ۽ $(x + 8)$ (b) $(x+7)$ ۽ $(x-8)$

(c) $(x-7)$ ۽ $(x-8)$ (d) $(x+7)$ ۽ $(x + 8)$

(vii) ڪُجهه رقمي مساوات جيڪا تبديل نہ ٿي سگهي جڏهن x کي $\frac{1}{x}$ سان تبديل ڪجهي ان کي چئبو ________ .

(a) سگهن واري مساوات (b) باهمي مساوات (Reciprocal)

(c) مولي مساوات (d) هن مان ڪوبہ نہ

(viii) $3^x + 3^{2-x} + 6 = 0$ مساوات جو ________ نمونو آهي.

(a) سگهن واري مساوات (b) مولي مساوات

(c) باهمي مساوات (Reciprocal) (d) هن مان ڪوبه نه

(ix) $4x^2 - 16 = 0$ جو حل سيٽ آهي.

(c) $\{\pm 2\}$ (b) $\{4\}$ (a) $\{\pm 4\}$ هنن مان ڪوبه نه

(x) $2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 3x + 2 = 0$ مساوات ________ نموني جي چئبي.

(a) باهمي مساوات (Reciprocal) (b) مولي مساوات

(c) سگهن واري مساوات (d) هن مان ڪوبه نه

3. غلط ۽ صحيح جواب

هيٺيان جملا غور پڙهو ۽ صحيح بيان لاءِ "T" ۽ "F" تي گولن پايو.

(i)	هر ٻه درجي مساوات جزن وسيلي حل ڪري سگهجي ٿي.	T/F
(ii)	هر ٻه درجي مساوات کي ٻه جزا هوندا آهن.	T/F
(iii)	ٻه درجي مساوات کي ڪوبه حل نا هوندوآهي.	T/F
(iv)	$ax^2 + bx + c = 0$ کي ٻه درجي مساوات x واري آهي. جيڪڏهن $b,$ ۽ a=0 حقيقي عدد آهن.	T/F
(v)	پاهر يان جزا مساوات کي مطمئن ڪن ٿا.	T/F
(vi)	پاهر يان جزا مساوات کي مطمئن نٿا ڪن.	T/F
(vii)	ٻه درجي مساوات ۾ بدلجندڙ جو وڏي ۾ وڏو سگهه نما 2 آهي.	T/F

خلاصو

- گهڻ رقمي مساوات جنهن ۾ بدلجندڙ جو درجو ٻه هجي ان کي ٻه درجي مساوات چئبو آهي.
- $ax^2 + bx + c = 0$، $a \neq 0$ ۽ c, b, a حقيقي عدد هنن ته ان کي ٻه درجي مساوات جي معياري صورت چئبو آهي.
- ٻه درجي مساوات، $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ جو ٻه درجي فارمولا $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- سگهن واري مساواتن ۾ بدلجندڙ تي سگهه نما هوندا آهن.
- هڪ مساوات جيڪا مول جي نشاني هيٺ اظهار هجي ته ان کي مولي مساوات چئبو آهي.

يونٽ 9

يڪسان ٽڪندا

Congruent Triangles

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

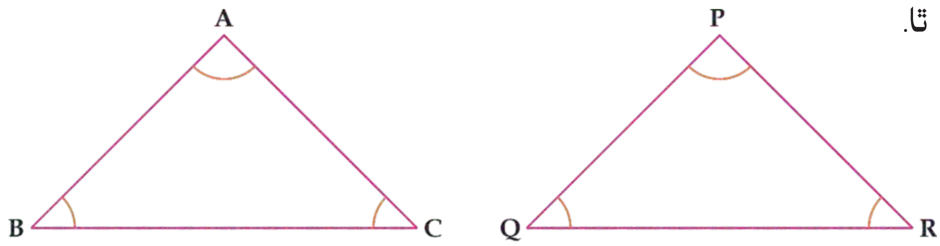
هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

هيٺين سڌيانن کي شامل نتيجن سان گڏ سمجهي سگهندا ۽ انهن کي استعمال ڪري لاڳاپيل حساب حل ڪندا.

- جيڪڏهن ڪن بہ ڏنل مطابقت ۾ هڪ ٽڪنڊي جون بہ ڪنڊون ۽ ڪو بہ هڪ پاسو ٻي ٽڪنڊي جي واسطيدارڪنڊن ۽ پاسي سان يڪسان هجن تہ ٻئي ٽڪندا يڪسان ٿيندا.
- جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جون بہ ڪنڊون يڪسان هجن تہ سندس سامهون وارا پاسا بہ يڪسان هوندا.
- جيڪڏهن ٻن ٽڪنڊي جي ڏنل موافقت ۾ هڪ ٽڪنڊي جا ٽئي پاسا، ٻئي ٽڪنڊي جي واسطيدار ٽنهي پاسن سان يڪسان هجن تہ، ٻئي ٽڪندا پاڻ ۾ يڪسان يا ساڳيا هوندا.
- جيڪڏهن ٻن ڪوني ڪند ٽڪنڊن جي موافقت ۾ هڪ ٽڪنڊي جو هئپاٽينيوز ۽ هڪ پاسي، ٻي ٽڪنڊي جي واسطيدار هئپاٽينيوز ۽ ٻي پاسي سان يڪسان آهي تہ ٽڪندا پاڻ ۾ يڪسان هوندا.

تعارف

هڪ ٽڪنڊي جا ڇهه حصا هوندا آهن، ٽي پاسا ۽ ٽي ڪنڊون. جيڪڏهن اسان ڪي ٻه ٽڪنڊا ABC ۽ PQR مليل هجن، اسان انهن جي چوٽين کي ملائي، هنن ٽڪنڊن جي ڪنڊن ۽ پاسن ۾ (1-1) موافقت يا مطابقت کي ڇهن مختلف طريقن سان قائم ڪري سگهون ٿا.



ٽڪنڊن $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ ۾ مطابقت جو مطلب

(i) $\angle A \leftrightarrow \angle P$ ($\angle A$ جي مطابقت $\angle P$ سان)

(ii) $\angle B \leftrightarrow \angle Q$ ($\angle B$ جي مطابقت $\angle Q$ سان)

(iii) $\angle C \leftrightarrow \angle R$ ($\angle C$ جي مطابقت $\angle R$ سان)

(iv) $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{PQ}$ ($\overline{AB}$ جي مطابقت $\overline{PQ}$ سان)

(v) $\overline{BC} \leftrightarrow \overline{QR}$ ($\overline{BC}$ جي مطابقت $\overline{QR}$ سان)

(vi) $\overline{CA} \leftrightarrow \overline{RP}$ ($\overline{CA}$ جي مطابقت $\overline{RP}$ سان)

9.1 يڪسان ٽڪنڊا

جسامت (Size) ۽ شڪل (Shape) جي هڪ جهڙائي کي رياضي ۾ يڪسان چئبو آهي.

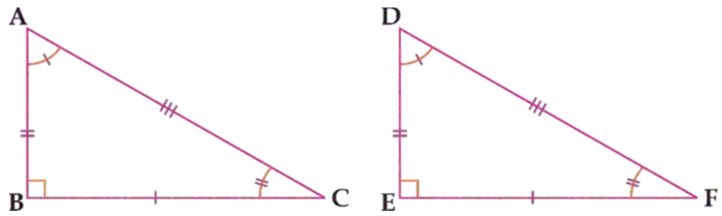
مليل تصوير ۾ ٻن ڪارين جا مختلف رنگ ۽ بيهڪون (Position) آهن. پرانهن جي جسامت ۽ شڪل هڪ جهڙي آهي. هن ٻن ڪارن کي يڪسان چئبو آهي. جيڪڏهن اسان هڪ ڪارجي تصوير ٻي جي مٿان رکنداسين ته اها هڪ ٻئي کي اورليپ(هڪ جهڙائي ڪري) ڪنديون

سرگرمي

تلاش ڪرڻ

ڇا توهان ڪي ٻه يڪسان تصويرون يا شيون پنهنجي ڪلاس يا اسڪول ۾ سڃاڻپ ڪري سگهو ٿا. انهن يڪسان تصويرن جي فهرست ٺاهي تصوير ٺاهيو يا تصوير ڪڍو.

ٻن ٽڪنڊن کي يڪسان چئبو جيڪڏهن سندن موافق (واسطيدار) ڪندون ۽ پاسا يڪسان آهن.



هي ٻه ٽڪنڊا ABC ۽ DEF يڪسان آهن جن کي هن طرح لکو

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

ٽڪنڊن ΔABC ۽ ΔDEF جون موافق پاسا ۽ ڪندون ماپ ۾ برابر آهن.

نوٽ: هينيان نتيجا ڪارآمد آهن.

(i) پنهنجو پاڻ سان يڪسان (Identity Congruance) جيڪو $\Delta ABC \cong \Delta ABC$

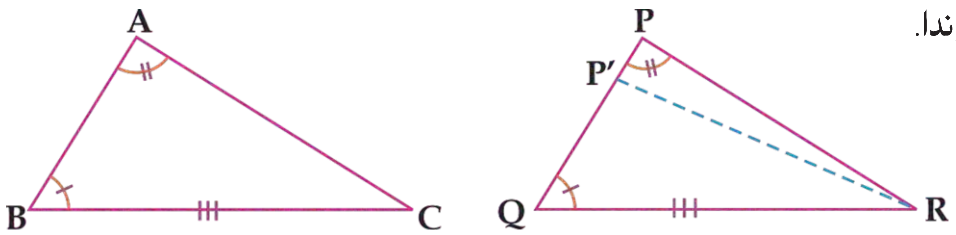
(ii) مطابقت جي خاصيت (Symmetric Property) جيڪڏهن $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ ته پوءِ $\Delta PQR \cong \Delta ABC$

(iii) يڪسانيت جي متعدي خاصيت (Transitive Property of Congruence)

جيڪڏهن $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ته پوءِ $\Delta PQR \cong \Delta DEF$, ۽ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

9.1.1 سڌيان

جيڪڏهن ڪن ٻن ٽڪنڊن جي ڏنل مطابقت ۾ هڪ ٽڪنڊي جون ٻه ڪندون ۽ هڪ پاسو، ٻي ٽڪنڊي جي واسطيدار ڪندن ۽ پاسي سان يڪسان هجن ته ٻئي ٽڪنڊا يڪسان هوندا.



مليل: $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ ۾

$\angle A \cong \angle P$ ۽ $\angle B \cong \angle Q$, $m\overline{BC} \cong m\overline{QR}$

گهربل: $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

جوڙجڪ: فرض ڪريو ته $\overline{PQ} \ncong \overline{AB}$ ته پوءِ $\overline{PQ}$ تي هڪ ٽپڪو P' وٺو ته جيئن $\overline{AB} \cong \overline{P'Q}$

ثابتي

بيان	دليل / سبب
$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ جي مطابقت ۾	
i. $\angle A \cong \angle P$	i. مليل
ii. $\angle B \cong \angle Q$	ii. مليل
$\therefore \angle C \cong \angle R$	
جيڪڏهن $\overline{QP} \ncong \overline{BA}$ ته $\overline{QP}$ کي وڌائي	مفروضو
يا $\overline{QP}$ تي ٽپڪو P' اهڙي طرح وٺو ته $\overline{QP'} \cong \overline{BA}$	ٻه ڪندون ٻنهي ٽڪندن جو برابر آهن
$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta P'QR$	
$\overline{BC} \cong \overline{QR}$	i. مليل
$\angle B \cong \angle Q$	ii. مليل
$\overline{BA} \cong \overline{QP'}$	iii. مفروضي طور
تنهنڪري $\therefore \Delta ABC \cong \Delta P'QR$	S.A.S مفروضو
$\therefore \angle C \cong \angle QRP'$	
پر $\angle C \cong \angle QRP$	ثابت ڪيل (2) ۾
$\therefore \angle QRP' \cong \angle QRP$	يڪسانيت جي متعدي خاصيت
اهو صرف تڏهن ممڪن آهي جڏهن P ۽ P' ٽپڪا هڪ ٻي تي نهڪي اچن ۽	ڪنڊ جي بناوت جو موضوع
$\overline{RP'} \cong \overline{RP}$	
تنهنڪري $\overline{BA} \cong \overline{QP}$	P ۽ P' جو هڪ ٻئي تي نهڪي اچڻ
ΔABC ۽ ΔPQR جي مطابقت ۾	
i. $\overline{BC} \cong \overline{QR}$	i. مليل
ii. $\angle B \cong \angle Q$	ii. مليل
iii. $\overline{BA} \cong \overline{QP}$	iii. ثابت ڪيل
تنهنڪري $\Delta ABC \cong \Delta PQR$	S.A.S موضوع

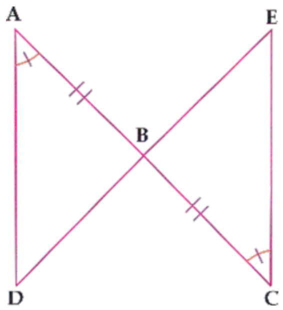
Q.E.D.

مشق 9.1

.1 مليل شکل ۾

$m\overline{AB} = m\overline{CB}$ ۽ $\angle A \cong \angle C$

ته ثابت ڪريو ته $\Delta ABD \cong \Delta CBE$

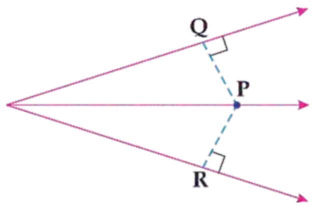


.2 ڪنڊ کي اڌ ڪندڙ واري ليڪ تي ڪنهن

ٽِڪي کان، ڪنڊ جي ٻا نهن تي

عمود نهيل آهن. ثابت ڪريو ته هي

عمود ماپ ۾ برابر آهن



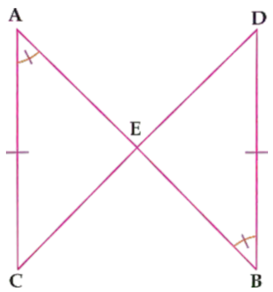
.3 مليل شکل ۾ اسان کي $\Delta ACE \cong \Delta BDE$

مليل آهن جيئن $m\overline{AC} = m\overline{BD} = 3\ cm$

$\angle A = (3x+1)^\circ$, $m\angle E = (3y-2)^\circ$

۽ $m\angle B = (x+35)^\circ$

ته y ۽ x جون قيمتون معلوم ڪريو.



.4 مليل شکل ۾ $\Delta DEF \cong \Delta PQR$

تنهنڪري

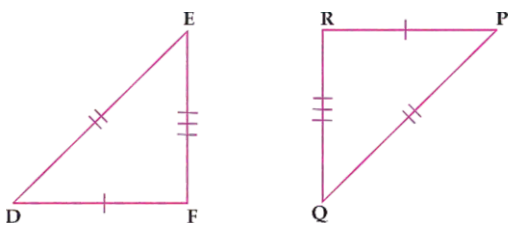
س. م $m\overline{DE} = (6x+1)$

س. م $m\overline{EF} = 8$

س. م $m\,\overline{RQ} = (5y-7)$ ۽

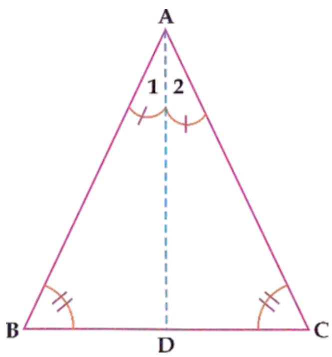
س. م $m\overline{PQ} = (10x-19)$

ته x ۽ y جون قيمتون معلوم ڪريو.



9.1.2 سڌيان

جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جون ٻه ڪنڊون يڪسان هجن ته انهن ڪندن جي سامهون وارا پاسا ٻه يڪسان ٿيندا.



مليل: ΔABC ۾

$m\angle B \cong m\angle C$

گهربل: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

جوڙجڪ: $\angle A$ کي اڌ ڪندڙ $\overline{AD}$ ڪيو.

جيڪو $\overline{BC}$ کي ٽپڪي D تي ملي.

ثابتي

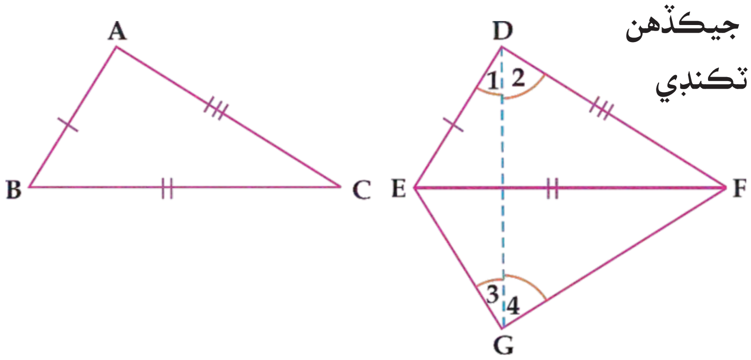
بيان	دليل / سبب
موافقت $\Delta ADB \leftrightarrow \Delta ADC$	
.i $\angle B \cong \angle C$	.i مليل
.ii $\angle 1 \cong \angle 2$	.ii جوڙجڪ
.iii $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	.iii مشترڪ (پنهنجو پاڻ سان يڪسان
تنهنڪري $\Delta ABD \cong \Delta ADC$	S.A.S موضوع
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$	ٽڪنڊن جي يڪسانيت جي لحاظ کان

Q.E.D

مشق 9.2

1. ABC هڪ ٽڪنڊو آهي، جنهن ۾ $m\angle A=35^\circ$ ۽ $m\angle B=100^\circ$ ، $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ آهي. ثابت ڪريو ته ΔBDC ٻيور پاسو ٽڪنڊو آهي.
2. ٽڪنڊي جي ڪنهن ڪند جو اڌڪندڙ سامهون واري پاسي تي عمود آهي ته اهو ٽڪنڊو هڪ ٻيور پاسو ٽڪنڊو آهي.
3. ABC هڪ ٽڪنڊو آهي. جنهن ۾ $m\angle B = 45^\circ$ ۽ $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ مليل آهي. ثابت ڪريو ته ΔDBC هڪ ٻيور پاسو ٽڪنڊو آهي.

سڌيان 9.1.3



ٻن ٽڪنڊن جي موافقت ۾ جيڪڏهن هڪ ٽڪنڊي جا ٽئي پاسا ٻئي ٽڪنڊي جي واسطيدار ٽنهي پاسن سان يڪسان هجن ته ٻئي ٽڪنڊا يڪسان ٿيندا.

مليل: $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ ۾

$\overline{CA} \cong \overline{FD}$ ۽ $\overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{AB} \cong \overline{DE}$

گهربل: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

جوڙجڪ: فرض ڪريو ته پاسو $\overline{BC}$ سيني پاسن کان وڏو آهي ΔABC ته ΔGEF ناهيو اهڙي طرح جيئن

(i) ٿبڪو G (ii) $\angle FEG \cong \angle B$ (iii) $\overline{EG} \cong \overline{BA}$

D کي G سان ملايو.

ثابتي

بيان	دليل / سبب
مطابقت $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta GEF$ ۾	
i. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$	i. مليل
ii. $\angle B \cong \angle GEF$	ii. جوڙجڪ
iii. $\overline{BA} \cong \overline{GE}$	iii. جوڙجڪ
$\therefore$ تنهنڪري $\Delta ABC \cong \Delta GEF$	S.A.S. موضوع
$\therefore$ $\overline{AC} \cong \overline{GF}$ ۽ $\angle A \cong \angle G$	ٽڪنڊن جي يڪسانيت
پر $\overline{DF} \cong \overline{AC}$	مليل
$\therefore$ $\overline{GF} \cong \overline{DF}$	متعدي خاصيت
$\therefore$ $\Delta DEG, m\angle 1 = m\angle 3$	سامهون وارا پاسا يڪسان آهن $\overline{EG} \cong \overline{BA} \cong \overline{ED}$

ساڳيءَ طرح ΔGFE ۾ $m\angle 2 = m\angle 4$	$\overline{DF} \cong \overline{GF}$
انهي ڪري $\therefore\ m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 + m\angle 4$	مساوات جي جوڙ جي خاصيت
يا $m\angle D = m\angle G$	$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle D$ $m\angle 3 + m\angle 4 = m\angle G$
پر $m\angle G = m\angle A$	مٿي ثابت ٿيل
$\therefore\ m\angle A = m\angle D$	متعدي خاصيت
مطابقت $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ ۾	
.i $\overline{AB} \cong \overline{DE}$	.i مليل
.ii $\angle A \cong \angle D$	.ii مٿي ثابت ٿيل
.iii $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	.iii مليل
$\therefore\ \Delta ABC \cong \Delta DEF$ ته پوءِ	موضوع S.A.S

Q.E.D

شامل نتيجو:

ٽپور پاسي ٽڪنڊي جون ڪندون ماپ ۾ برابر هونديون آهن.

مشق 9.3

.1 ABC هڪ ٻپور پاسو ٽڪنڊو آهي. D ان جي بنياد $\overline{BC}$ جي وچ وارو ٽپڪو آهي، ثابت ڪريو ته $\overline{AD}$، $\angle A$ جو اڌڪندڙ ۽ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

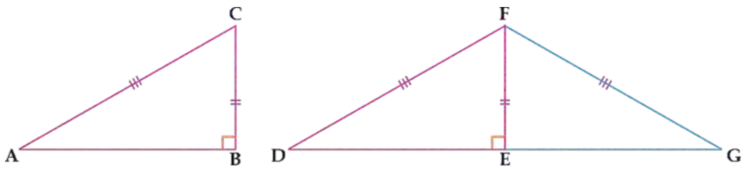
.2 ΔABC ۽ ΔDBC ٻپور پاسي وارا ٽڪنڊا مشترڪ بنياد $\overline{BC}$ تي ٺهيل آهن ثابت ڪريو ته $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ آهي.

.3 PQRS هڪ چورس آهي. جنهن ۾ ترتيبوار $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ ۽ $\overline{RS}$ پاسن جا وچيان ٽپڪا X,Y ۽ Z آهن ثابت ڪريو ته $\Delta PXY \cong \Delta SZY$

.4 ثابت ڪريو ته ٽپور پاسي ٽڪنڊي جا مٽيان يڪسان ٽيندا آهن.

9.1.4 سڌيان

جيڪڏهن ٻن گوني ڪند ٽڪنڊن جي موافقت ۾ هڪ ٽڪنڊي جو هئپاٽينيوز ۽ هڪ پاسو، ٻئي ٽڪنڊي جي هئپاٽينيوز ۽ واسطيدار ٻي پاسي سان يڪسان آهي ته ٽڪنڊا پاڻ ۾ يڪسان ٿيندا.



مليل: گوني ڪند ٽڪنڊن ΔDEF ۽ ΔABC جي مطابقت ۾

(گوني ڪند) $\angle B \cong \angle E$، (هئپاٽينيوز) $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ۽ $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ پاسو.

گهربل: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

جوڙجڪ: $\overline{DE}$ کي ٿيڪي G تائين وڌايو، ته جيئن $\overline{EG} \cong \overline{AB}$. ٿيڪن F ۽ G کي پاڻ ۾ملايو

ثابتي:

بيان	دليل / سبب
$m\angle DEF + m\angle GEF = 180^o$	سپليمنٽري ڪندن جو موضوع
پر $m\angle DEF = 90^o$	مليل
ته پوءِ $\therefore\ m\angle GEF = 90^o$	$\therefore\ 180^o - 90^o = 90^o$
۾ $\Delta GEF \leftrightarrow \Delta ABC$	
.i $\overline{GE} \cong \overline{AB}$	(i) جوڙجڪ
.ii $\angle GEF \cong \angle ABC$	(ii) هر هڪ گوني ڪند آهي
.iii $\overline{EF} \cong \overline{BC}$	(iii) مليل
$\therefore\ \Delta GEF \cong \Delta ABC$	S.A.S. ≅ S.A.S.
انڪري $\angle G \cong \angle A$ ۽ $\overline{FG} \cong \overline{AC}$ $\therefore$	يڪسان پاسن جون مخالف ڪندون
$\therefore\ \overline{FG} \cong \overline{DF}$	هرهڪ ΔG جي يڪسان آهي.
ٽڪنڊي ۾ $\Delta DFG,\ \angle D \cong \angle G$	
$\therefore\ \angle D \cong \angle A$	
۾ $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$	مطابقت
.i $\angle A \cong \angle D$	(i) ثابت ٿيل
.ii $\angle ABC \cong \angle DEF$	(ii) گوني ڪند
.iii $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	(iii) مليل
تنهنڪري $\therefore\ \Delta ABC \cong \Delta DEF$	A.A.S ≅ A.A.S

Q.E.D

مشق 9.4

.1 ثابت ڪريو ته
ٻيور پاسي ٽڪنڊي جي بنياد جي چوٽين ڪان نڪتل سامهون واري پاسي بئي عمود پاڻ ۾ پاسي تي يڪسان هوندا آهن.

.2 ثابت ڪريو ته جيڪڏهن ٽڪنڊي جي ڪنڊ جو عمودي اڌڪندڙ، ان جي سامهون واري پاسي کي ته اهو ٽڪنڊو ٻيور پاسو ٽڪنڊو ٿيندو.

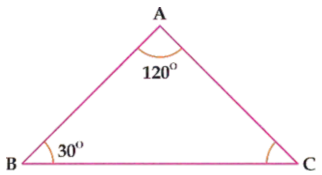
.3 ثابت ڪريو ته ٻيور پاسي ٽڪنڊي جي بنياد کي اڌواڌ ڪندڙ مٿيان، ٽڪنڊي جي چوٽي واري ڪنڊ کي اڌواڌ ڪندا ۽ بنياد جي عمود هوندا.

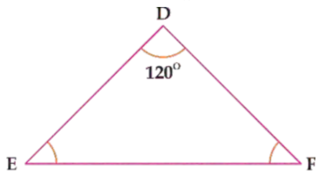
.4 ثابت ڪريو ته جيڪڏهن ٽڪنڊي جا ٽي عمود يڪسان آهن ته ٽڪنڊو ٽيور پاسو آهي.

مشق ورجايو 9

.1 جيڪڏهن $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ،$m\angle F$ برابر آهي.

A. $90°$
B. $60°$
C. $30°$
D. $20°$





.2 هينين مان صحيح ۽ غلط بيانن جي سڃاڻپ ڪريو.

(i) چوڪنڊي ۾ سيني ڪندن جي ماپ جو جوڙ 360° آهي.
(ii) ٽڪنڊي ۾ سيني ڪندن جي ماپ جو جوڙ 270° آهي.
(iii) ٽيور پاسي ٽڪنڊي ۾ ڪندون ساڳي ماپ جون هونديون آهن.
(iv) ٽڪنڊي ۾ ٻه گوني ڪندون هونديون.
(v) ٻيور پاسي ٽڪندن ۾ موافقت ۾ ڪندون ۽ موافقت ۾ پاسان ماپ ۾ برابر هوندا آهن.

.3 جملي درست ڪرڻ لاءِ خال ڀريو.

(i) $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ ته پوءِ $\overline{AC}$ جي موافقت آهي ________.
(ii) $\Delta KLM \leftrightarrow \Delta PQR$ ته پوءِ $\angle MKL$ جي موافقت آهي ________.
(iii) ٽيور پاسي ٽڪنڊي ۾ بنيادي ڪندون ________ آهن.
(iv) جيڪڏهن ٽڪنڊي جي هر هڪ ڪند جي ماپ 60° آهي ته ٽڪنڊو ________ آهي.
(v) گوني ڪند ٽڪنڊي ۾، گوني ڪند جي سامهون وارو پاسو ________ چئبو آهي.
(vi) گوني ڪند ٽڪنڊي جي، سوڙ هين ڪندن جي ماپ جو جوڙ ________ آهي.

4. درست جواب جي واسطيدار کي a, b,c ۽ d گول پايو.

(i) هيٺين مان ڪهڙي ٻن ٽڪنڊن جي يڪسانيت لاءِ مناسب صورت نه آهي.

(a) A.S.A ≅A.S.A (b) H.S ≅ H.S

(c) S.A.A≅ S. A. A (d) A.A.A≅ A. A. A

(ii) ٽڪنڊي ΔABC ۾ جيڪڏهن ∠B ≅ ∠A ته ________ ڪنڊ جو اڌواڌ ڪندڙ ٽڪنڊي کي ٻن يڪسان ٽڪنڊن ۾ تقسيم ڪندو.

(a) ∠A (b) ∠B (c) ∠C (d) هنن مان ڪوبه نه

(iii) ________ جي اريب، ان کي ٻن يڪسان ٽڪنڊن ۾ تقسيم نه ڪندي آهي.

(a) مستطيل (b) ٽرئپيزيم

(c) پورو چوٽ چوڪندو (d) چورس

(iv) سوڙهي ڪنڊ ٽڪنڊي ۾، ڪيترين ڪندون سوڙهيون هونديون آهن.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) ٻن کان وڌيڪ

خلاصو

هن يونٽ ۾ اسان هيٺيان سڌيان بيان ڪري ثابت ڪيا آهن.

- جيڪڏهن ڪن به ڏنل مطابقت ۾ هڪ ٽڪنڊي جون ٻه ڪندون ۽ ڪو به هڪ پاسو ٻي ٽڪنڊي جي واسطيدارڪندن ۽ پاسي سان يڪسان هجن ته ٻئي ٽڪنڊا يڪسان ٿيندا. (A.S.A. ≅ A.S.A)
- جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جون ٻه ڪندون يڪسان هجن ته سندس سامهون وارا پاسا به يڪسان هوندا.
- جيڪڏهن ٻن ٽڪنڊي ڏنل موافقت ۾ هڪ ٽڪنڊي جاٽئي پاسا، ٻئي ٽڪنڊي جي واسطيدار ٽنهي پاسن سان يڪسان هجن ته، ٻئي ٽڪنڊا پاڻ ۾ يڪسان يا ساڳيا هوندا. (S.S.S ≅ S.S.S)
- جيڪڏهن ٻن گوني ڪنڊ ٽڪنڊن جي موافقت ۾ هڪ ٽڪنڊي جو هئپاٽينيوز ۽ هڪ پاسو، ٻي ٽڪنڊي جي واسطيدار هئپاٽينيوز ۽ ٻي پاسي سان يڪسان آهن. ته ٽڪنڊا پاڻ ۾ يڪسان هوندا.
- ٻن ٽڪنڊن کي يڪسان چئبو آهي، جيڪڏهن انهن ۾ مطابقت موجود هجي اهڙي طرح ته سڀ مطابقت رکندڙ پاسا ۽ ڪندون يڪسان آهن. (S.S.S)

يونٽ 10

پوروچوٽ چوڪندا ۽ ٽڪندا

(Parellelogram And Triangles)

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته:

- هينين سڌيانن کي شامل نتيجن سان گڏ سمجهي سگهندا ۽ انهن کي استعمال ڪري لا ڳاپيل حساب حل ڪندا.

(a) هڪ پورو چوٽ چوڪندي ۾

- آمهون سامهون وارا پاسا يڪسان آهن.
- آمهون سامهون واريون ڪندون يڪسان آهن.
- اريب هڪ ٻئي کي اڌواڌ ڪندا آهن.

(b) جيڪڏهن ڪنهن چوڪندي جا ٻہ آمهون سامهون وارا پاسا يڪسان ۽ پورو چوٽ آهن تہ اهو چوڪندو پورو چوٽ چوڪندو آهي.

(c) جيڪڏهن ڪوليڪٽر، ڪنهن ٽڪندي جي ٻن پاسن جي وچين ٽبڪن کي پاڻ ۾ ملائي تو تہ اهو ٽڪندي جي ٽئين پاسي جي پورو چوٽ هوندو ۽ ماپ ۾ انهي جي اڌ جيترو هوندو.

(d) ٽڪندي جا مڌيان هڪ ٽبڪي تي ملن ٿا ۽ اهو ٽبڪو هر مڌيان کي پورن ٽن حصن ۾ ورهائي ٿو.

(e) جيڪڏهن ٽي يا ٽن کان وڌيڪ پورو چوٽ ليڪون هڪ ڪيپنڊڙ ليڪ کي يڪسان ٽڪرن ۾ ورهائن تہ ، اهي ليڪون ڪنهن بي ڪيپنڊڙ ليڪ کي پڻ يڪسان ٽڪرن ۾ ورهائينديون.

تعارف:

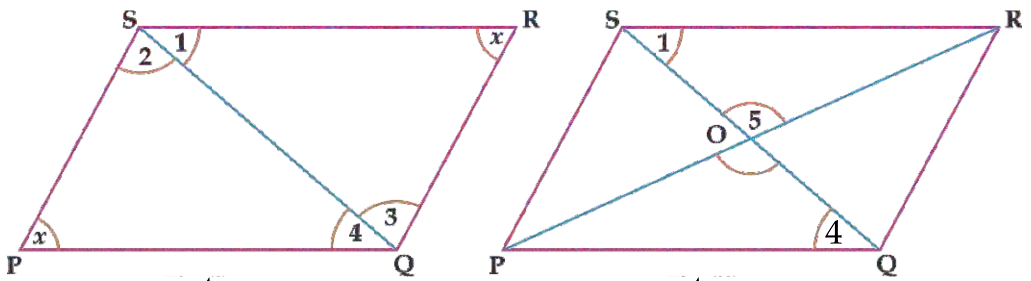
گذريل ڪلاس ۾ شاگردن ڪيترن ئي قسمن جي گهڻ پاسن واريون شڪلون جهڙوڪ ٽڪنڊا، پورو چوٽ چوڪندو، چورس، مستطيل، رامبس ۽ ٽر پئيزيم وغيره بابت سکيو ۽ ڻاهيون آهن ۽ انهن جي پاسن ۽ ڪنڊن جي يڪسانيت بابت پڻ سکيو آهي. هن يونٽ ۾ اسان پورو چوٽ چوڪندي ۽ ٽڪنڊن سان تعلق رکندڙ ستيان بابت سکنداسين.

10.1: پورو چوٽ چوڪندا ۽ ٽڪنڊا:

10.1.1: ستيان

پورو چوٽ چوڪندي ۾

- آمهون سامهون پاسا يڪسان آهن.
- آمهون سامهون واريون ڪنڊون يڪسان آهن.
- اريب هڪ ٻئي کي اڌواڌ ڪن ٿا.



شڪل (i)

شڪل (ii)

مليل: $^{m}\|PQRS$

گهربل: (1) $\overline{PS} \cong \overline{QR}$ $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$;

(2) $\angle S \cong \angle Q$ $\angle P \cong \angle R$;

(3) اريب $\overline{PR}$ ۽ $\overline{SQ}$ هڪٻئي کي ٽبڪي O تي اڌواڌ ڪن ٿيون .

جوڙجڪ:

مليل شڪل (i) ۾ Q ۽ S کي ملايو.

ثابتي

سبب / دليل	بيان
متبادل ڪندون	شڪل (i) ۾
$\overline{SR} \parallel \overline{PQ}$	(1) $\overline{SR} \parallel \overline{PQ}, \overline{SQ}$
	$m\angle 1 = m\angle 4$
جوڙ جي خاصيت جو موضوع	ساڳي طرح تنهنڪري $m\angle 2 = m\angle 3$
ڪندن جو جوڙ جو موضوع	$\therefore \quad m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 + m\angle 4$
ساڳيو طريقو متي ڏنل	$\angle S \cong \angle Q$ يا
	ساڳي طرح تنهنڪري $\angle P \cong \angle R$
	ته آمهون سامهون ڪندون يڪسان آهن
(1) ۾ ثابت ٿيل	(2) $\Delta SPQ \leftrightarrow \Delta QRS$
ٻنهي ۾ مشترڪ	$\angle 1 \cong \angle 4$ and $\angle 2 \cong \angle 3$
$A.S.A \cong A.S.A$	$\overline{SQ} \cong \overline{SQ}$
	$\therefore \quad \Delta SPQ \cong \Delta QRS$
	$\therefore \quad \overline{PQ} \cong \overline{RS}$ and $\overline{PS} \cong \overline{QR}$
	ته آمهون سامهون پاسا يڪسان آهن شڪل
(1) ۾ ثابت ٿيل	(3) $\Delta POQ \leftrightarrow \Delta ROS$
چوٽي واريون مخالف ڪندون .	$\angle 1 \cong \angle 4$
(2) ۾ متي ثابت ٿيل	$\angle POQ \cong \angle SOR$
$A.S.A \cong A.S.A$	$\overline{PQ} \cong \overline{SR}$
ٽڪندن جي يڪسانيت سان	$\therefore \quad \Delta POQ \cong \Delta ROS$
	$\therefore \quad \overline{PO} \cong \overline{OR}$ and $\overline{OQ} \cong \overline{OS}$
	$\therefore$ $\overline{PR}$ ۽ $\overline{RS}$ اربيون هڪ ٻئي کي اڌوڌ ڪن ٿيون

Q.E.D

مشق 10.1

.1 پورو چوٽ چوڪندي جي ڪن ـہ ٻن آمهون سامهون وارن پاسن جي وچين ٽبڪن کي ملائيندڙ ليڪ انهيءَ جي ٻين پاسن سان پورو چوٽ هوندي آهي.

.2 پورو چوٽ چوڪندي جي ڪنهن ـہ پاسي تـہ ٺهندڙ اندريون ڪندون سپليمنٽري هونديون آهن.

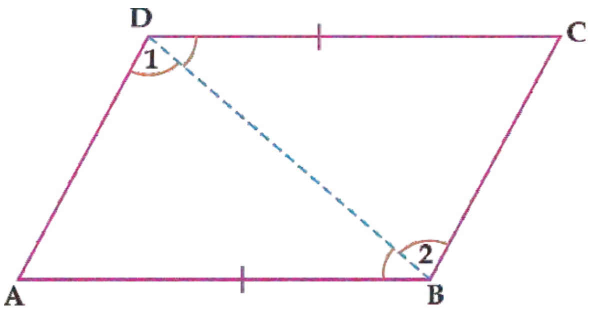
.3 ثابت ڪريو تـہ پورو چوٽ چوڪندي جي ساڳي پاسي وارين ٻن ڪندن جا اڌواڌ ڪندڙ، هڪ ٻئي کي گوني ڪند تي ڪپيندا.

.4 جيڪڏهن چوڪندي جون اريبون هڪ ٻئي کي اڌواڌ ڪن تـہ ، اهو پورو چوٽ چوڪندو آهي.

.5 پورو چوٽ چوڪندي جي ڪنهن ـہ ٻن پاسن جون مخالف ڪندون برابر آهن.

ستديان 10.1.2

جيڪڏهن ڪنهن چوڪندي جا ـہ آمهون سامهون وارا پاسا يڪسان ۽ پورو چوٽ آهن تـہ اهو چوڪندو پورو چوٽ چوڪندو آهي.



مليل: چوڪندي ,ABCD ۾

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

گهربل: ,ABCD هڪ چوڪندو آهي

جوڙجڪ: ٽبڪا B ۽ D ملايو.

ثابتي

بيان	سبب / دليل
$\overline{BD}$ ، $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$ ڪيپيندڙ آهي	متبادل ڪندون
$\therefore$ ۽ $\angle ABD \cong \angle CBD$	
$\Delta ADB \leftrightarrow \Delta CBD$	
(i) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	(i) مليل
(ii) $\angle ABD \cong \angle CDB$	(ii) متي ثابت ٿيل
(iii) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	(iii) مشترڪ
$\therefore$ $\Delta ADB \cong \Delta CBD$	
$\therefore$ $\angle 1 \cong \angle 2$	S.A.S≅S.A.S
پَر هي متبادل ٽڪندا هن	مليل متبادل ڪندون
$\overline{AD}$ $\overline{BC}$	
$\overline{AB}$ $\overline{CD}$	
ABCD is a $\parallel^m$	

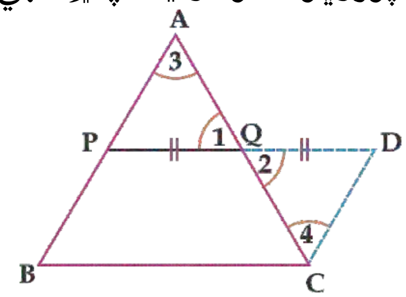
Q.E.D

مشق 10.2

1. ثابت ڪريو تہ هڪ چوڪندو، پورو چوٽ چوڪندو هوندو، جيڪڏهن ان جون آمهون سامهون واريون ڪندون يڪسان آهن.
2. ثابت ڪريو تہ هڪ چوڪندو، پورو چوٽ چوڪندوهوندو، جيڪڏهن ان جون اريبون هڪ ٻئي کي اڌواڌ ڪن ٿيون.
3. جيڪڏهن هڪ چوڪندو پورو چوٽ چوڪندو آهي، تہ ان جون اريبون بہ يڪسان ٽڪندا ناهيندييون.
4. جيڪڏهن ڪنهن چوڪندي جي هر پاسي ڪان نهندڙ ڪندون سپليمينٽري آهن تہ اهو پورو چوٽ چوڪندو هوندو.

سڌيان 10.1.3

جيڪڏهن ڪو ليڪ ٽڪر ڪنهن چوڪندي جي ٻن پاسن جي وچين ٽٻڪن کي پاڻ ۾ ملائي ته اهو ٽڪنڊو جي ٽئين پاسي جي پورروچوٽ هوندو ۽ ماپ ۾ انهيءَ جي اڌ جيترو هوندو.



مليل: ٽڪنڊي ABC ۾ پاسن $\overline{AB}$ ۽ $\overline{AC}$ جا وچيان ٽٻڪا ترتيبوار Q ۽ P آهن، ته $\Delta ABC, \overline{PQ}$ ليڪ ٽڪر انهن کي ملائي ٿو.

گهربل: $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ۽ $m\overline{PQ} = \frac{1}{2} m\overline{BC}$

جوڙجڪ: $\overline{PQ}$ تي ٽٻڪو D اهڙي طرح ڪٽو جو $\overline{QD} \cong \overline{PQ}$. ٽٻڪن C ۽ D کي ملائي.

ثابتي

بيان	سبب / دليل
$\Delta APQ \leftrightarrow \Delta CDQ$	
(i) $\overline{PQ} \cong \overline{QD}$	(i) جوڙجڪ
(ii) $\angle 1 \cong \angle 2$	(ii) چوٽي واريون ڪنڊون
(iii) $\overline{AQ} \cong \overline{QC}$	(iii) مليل
$\therefore \Delta APQ \cong \Delta CDQ$	Δs ٽڪنڊن جي يڪسانيت سان
$\therefore \angle 3 \cong \angle 4$ ۽ $\overline{AP} \cong \overline{CD}$	مليل
پر $\overline{PB} \cong \overline{AP}$	
$\therefore \overline{PB} \cong \overline{CD}$	هرهڪ $\overline{AP}$ جي يڪسان آهي.
$\angle s$ متبادل آهن $\angle 4$ جي $\angle 3$	متبادل ڪنڊن جي وصف مطابق
$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ i.e. $\overline{PB} \parallel \overline{CD}$	متبادل ڪنڊون يڪسان آهن
$\therefore$ PBCD آهي $\parallel^m$	
$\therefore \overline{PD} \cong \overline{BC}$ ۽ $\overline{PD} \parallel \overline{BC}$	S جي سامهون پاسا پورو چوٽ ۽ يڪسان آهن
$\therefore \overline{PQ} \parallel \cong \overline{BC}$ ۽ $m\overline{PQ} = \frac{1}{2} m\overline{BC}$	$\overline{PD}$ ۽ $\overline{PQ}$ ساڳي ليڪ تي آهن ۽ $m\overline{PQ} = m\overline{QD} = \frac{1}{2} m\overline{PD}$

Q.E.D

مشق 10.3

.1 جيڪڏهن ڪوليڪ ٽڪرڪنهن ٽڪنڊي جي ٻن پاسن جي وچين ٽپڪن کي پاڻ ۾ ملائي ٿو، ته اهو ٽئي پاسي جي پورو چوٿ هوندو ۽ ان جي ڊيگهه 4 س. م آهي ته ٽي پاسي جي ڊيگهه ڪيتري ٿيندي.

.2 ثابت ڪريو ته چوڪندي جي آمهون سامهون وارن پاسن جا اڏڪندڙ ليڪ ٽڪر هڪ ٻئي کي اڌواڌ ڪن ٿا.

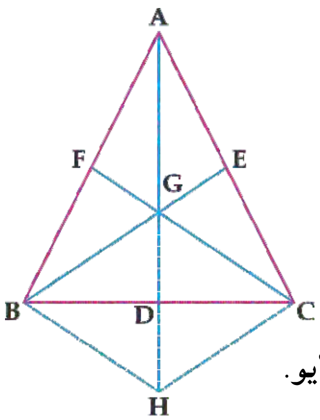
.3 چوڪندي جي چئني پاسن جي وچين ٽبڪن کي ترتيبوار هڪ ٻئي سان ملائڻ جيڪو ننڍو چوڪندو ٺهندو سو پورو چوٽ هوندو.

.4 ثابت ڪريو ته ڪوليڪ ٽڪرٽڪندي جي هڪ پاسي جي وچئين ٽبڪي مان گذري ٻي پاسي جو پورو چوٽ ٿئي ته اهو ٽيئن پاسي کي پڻ اڌواڌ ڪندو.

.5 ثابت ڪريو ته ٽڪندي جي ٽنهي پاسن جي وچين ٽبڪن کي پاڻ ۾ ملائڻ سان جيڪي چار ننڍا ٽڪندا ٺهن ٿا. اهي پاڻ ۾ يڪسان هوندا.

10.1.4 سڌيان

ٽڪندي جا مڌيان هڪ ٽبڪي تي ملن ٿا ۽ اهو ٽبڪو هر مڌيان کي پورن ٽن حصن ۾ ورهائي ٿو.



مليل: ΔABC, جنهن ۾ ٻه مڌيان $\overline{BE}$ ۽ $\overline{CF}$ ٽبڪي G تي ملن ٿا.

گهربل: (i) $\overline{AG}$ وڌائڻ سان $\overline{BC}$ کي D وٽ ڪٽي.

(ii) ٽبڪو G هر مڌيان کي پورن ٽن حصن ۾ ودهائي ٿو

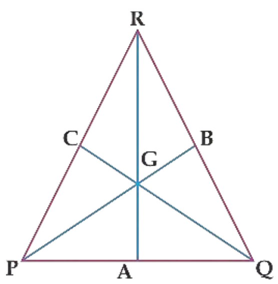
جوڙجڪ: $\overline{EB} \parallel \overline{CH}$ ناهيو، جيڪو $\overline{AD}$ سان پورو چوٽ هجي ۽ وڌايل کي H ٽبڪي تي ملي ٽبڪن B ۽ H کي ملايو.

جيڪڏهن تڪنڊي جا ٽئي مڏيان $\overline{PB}, \overline{QC}$ ۽ $\overline{RA}$ ٻئڪي G تي ملن تہ ثابت ڪريو تہ ستئراڪ بہ آهي ثابتي

بيان	سبب / دليل
تڪنڊي ۾ $\Delta ACH, \overline{AE} \cong \overline{EC}$	ملليل
۽ $\overline{EG} \parallel \overline{CH}$	جوڙجڪ
$\therefore$ $\overline{AG} \cong \overline{GH}$	سڏيان 10.1.3 جو عڪس
وري تڪنڊي ΔABH ۾	
$\overline{AG} \cong \overline{GH}$	متي ثابل ٿيل
$\overline{AF} \cong \overline{FB}$	ملليل
$\overline{FG} \parallel \overline{BH}$	سڏيان 10.1.3 جو عڪس
تنهنڪري BGCH هڪ پورو جوت چوڪندو آهي. جنهن جون اريبون $\overline{BC}$ ۽ $\overline{GH}$ هڪ ٻئي کي اڌواڌ ڪن ٿيون	سڏيان 10.1.1 مطابق
تہ پوءِ $\overline{GD} \cong \overline{DH}, \ \overline{BD} \cong \overline{DC}$	متي ثابت ٿيل آهي $\overline{BD} \cong \overline{DC}$ $\overline{GD} \cong \overline{DH} \Rightarrow m\overline{GH} = 2m\overline{GD}$
$\overline{AD}$ ΔABC مڏيان آهي	
۽ $m\overline{AG} = m\overline{GH} = 2m\overline{GD}$	جيئن تہ $\overline{AG}$ ٻيڻو آهي $\overline{GD}$ جو متيئن طريقي مطابق
G ٽپڪو $\overline{AD}$ کي ٽن حصن ۾ ورهائيندڙ آهي ساڳي طرح اسان G کي $\overline{BE}$ ۽ $\overline{CF}$ کي ٽن حصن ۾ ورهائڻ وارو ٽپڪو پڻ ثابت ڪري سگهون ٿا.	

Q.E.D

مشق 10.4



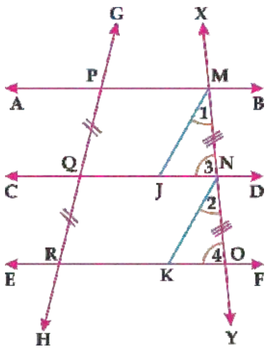
.1 جيڪڏهن تڪندي جا ٽيئي مڏيان يڪسان هجن تہ ثابت ڪريو تہ اهو ٽيور پاسو تڪندو آهي.

.2 جيڪڏهن تڪنڊي PQR جا ٽيئي مڏيان $\overline{PB}$، $\overline{QC}$ ۽ $\overline{RA}$ ٽپڪي G تي ملن تہ ثابت ڪريو تہ G سينٽرائڊ آهي

.3 ملليل شڪل ۾ $\overline{GR}$ جي ڊيگھ 2 س. م آهي تہ پوءِ $\overline{AG}$. جي ڊيگھ معلوم ڪريو.

ستديان 10.1.5

جيڪڏهن ٽي يا ٽن کان وڌيڪ پورو چوٽ ليڪون، هڪ ڪپيندڙ ليڪ کي يڪسان ٽڪرن ۾ ورهائن تہ اهي ليڪون ڪنهن بي ڪپيندڙ ليڪ کي پڻ يڪسان ٽڪرن ۾ ورهائينديون.



مليل: $\overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{AB}$ ۽ $\overleftrightarrow{EF}$ ، پورو چوٽ ليڪون آهن

$\overleftrightarrow{GH}$ ليڪ اهڙي طرح ٽيڪن P , Q ۽ R تي

ڪپي ٿي جو $\overline{PQ} \cong \overline{QR}$

$\overleftrightarrow{XY}$ بي ڪپيندڙ ليڪ آهي جيڪا $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{CD}$ ۽

$\overleftrightarrow{EF}$ ٽيڪن M , N , O تي ڪپي ٿي.

گهربل: $\overline{NM} \cong \overline{NO}$

جوڙجڪ: $\overline{MJ}$ ۽ $\overline{NK}$ ليڪون $\overleftrightarrow{GH}$ جي پوروچوٽ ڪڍو. جيڪي $\overleftrightarrow{CD}$ ۽ $\overleftrightarrow{EF}$ کي ٽيڪن J ۽ K تي ملن.

ثابتي

بيان	سبب / دليل
چوڪنڊي $\overline{PM} \parallel \overline{QJ}$	$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ مليل
۽ $\overline{PQ}$ $\overline{MJ}$	جوڙجڪ
∴ PMJQ is a $\parallel^{m}$	آمهون سامهون وارا پاسا پورو چوٽ آهن
∴ $\overline{PQ} \cong \overline{MJ}$	$\overline{QR} \parallel \overline{NK}$ and $\overline{QN} \parallel \overline{RK}$
PQJM هڪ پورو چوٽ چوڪنڊو آهي	
ساڳي طرح QRKN بہ هڪ پورو چوٽ چوڪنڊو آهي.	مليل
∴ $\overline{QR} \cong \overline{NK}$	مساوات جي عبوري خاصيت
پر $\overline{PQ} \cong \overline{QR}$	هر هڪ $\overline{GH}$ جي پورو چوٽ آهي
∴ $\overline{MJ} \cong \overline{NK}$	نسبتي ڪندون
تنهنڪري $\overline{MJ} \parallel \overline{NK}$	
∴ $\angle 1 \cong \angle 2$	(i) متي ثابت ٿيل
هاڻ $\Delta MNJ \leftrightarrow \Delta NOK$	(ii) نسبتي ڪندون ‖ ليڪن جون
(i) $\angle 1 \cong \angle 2$	(iii) متي ثابت ٿيل
(ii) $\angle 3 \cong \angle 4$	A.A.S≅A.S.A
(iii) $\overline{MJ} \cong \overline{NK}$	ٽڪندن جي يڪسانيت مطابق
∴ $\Delta MNJ \cong \Delta NOK$	
∴ $\overline{MN} \cong \overline{NO}$	

Q.E.D

مشق 10.5

.1 ثابت ڪريو ته
ڪنهن ٽڪنڊي جي پاسن جي وچين ٽپڪن کي ملائڻ سان ٺهندڙ نئين ٽڪنڊي جون ڪنڊون، اصلوڪي ٽڪنڊي جي مساوي هونديون آهن.
ٽرئپيزيم جي ٻنهي غير پورو چوٽ پاسن جي وچين ٽپڪن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر ٻين ٻنهي پاسن سان پورو چوٽ به آهي ۽ ماپ ۾ انهن جي جوڙ جي اڌ جيترو آهي.
ڪنهن ٽڪنڊي جي چوٽيءَ ڪان، پاپي تي نڪتل هر ليڪ ٽڪرڪي ٻين پاسن جي وچين ٽپڪن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪرڪي پورا به ٽڪر ڪري ٿي.

ورجايل مشق 10

.1 خال ڀريو.

(i) پوروچوٽ چوڪنڊي ۾ آمهون سامهون وارا پاسا ________ آهن
(ii) پوروچوٽ چوڪنڊي ۾ آمهون سامهون واريون ڪنڊون ________ آهن
(iii) ٽڪنڊي ۾ مڏيان ________ آهن
(iv) پوروچوٽ چوڪنڊي جو اريبون هڪ ٻئي کي ________ڪن ٿيون
(v) پوروچوٽ چوڪنڊي جو نسبتي ڪندون ________ آهن
(vi) ٽڪنڊي جا مڏيان ________ آهن
(vii) چوڪنڊي جي اندرين ڪندن جي ماپ جو جوڙ برابر ________ آهي

.2 صحيح جواب تي ٽڪ لڳايو.

(i) چورس جون اريبون پاڻ ۾ هڪ ٻي سان ________ آهن
(a) عمود (b) غير يڪسان
(c) يڪسان (d) ٻئي (a) ۽ (c)

(ii) چوڪنڊي جي اندرين ڪندن جي ماپن جو جوڙ________ آهي
(a) 2 گوني ڪندون (b) 4 گوني ڪندون
(c) 3 گوني ڪندون (d) ڪو به نه

(iii) ٽڪنڊي ABC ۾ $\overline{AB}$ ۽ $\overline{AC}$ جي وچين ٽپڪن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر برابر آهي 3.5 س.م جي ته $m\overline{BC}$ __________

(a) 4.5 س . م (b) 5.5 س . م

(c) 6 س . م (d) 7 س . م

(iv) جا ۾ مڏيان $\overline{AB}$ ۽ $\overline{BE}$ پاڻ ۾ ٽپڪي G تي ڪپين ٿا. جيڪڏهن س.م 1.7 $= m\overline{GD}$ ته پوءِ $mAG =$ __________

(a) 2.7 س . م (b) 8.85 س . م

(c) 3.4 س . م (d) 5.1 س . م

(v) پوروچوٽ چوڪندي ABCD جون ڪندون $\angle A$ ۽ $\angle C$ جي ماپن جو جوڙ 130 آهي ته پوءِ $m\angle C$ __________

(a) 25^0 (b) 115^0 (c) 65^0 (d) ڪابہ نہ

(vi) جيڪڏهن چوڪندي جي آمهون سامهون ڪندن جي ماپ برابر آهي ۽ انهن مان ڪابہ گوني ڪندن آهي تہ چوڪندو __________ آهي

(a) چورس (b) پورو چوٽ چوڪندو

(c) ٽرئيپيريم (d) مستطيل

(vii) سينٽرائڊ هڪ مشترڪ ٽپڪو آهي __________ کي ڪاٽ جو

(a) ٽڪندي جا مڏيان (b) پورو چوٽ چوڪندي جون اريبون

(c) ٽڪندي جي ڪند جا اڌڪندڙ (d) ٽڪندي جو عمودي اڌڪندڙ

(viii) ڪنهن ٽڪندي جي مڏيان __________ ٽپڪو آهي

(a) چوٽيءَ کان هڪ جيتري مفاصلي تي

(b) پاسي جي وچ واري نقطي کان هڪ جيتري مفاصلي تي

(c) عمود کان هڪ جيتري مفاصلي تي

(d) ڪو بہ نہ

خلاصو

- پورو چوٽ چوڪنڊي جا آمهون سامهون وارا پاسا يڪسان هوندا آهن.
- پورو چوٽ چوڪنڊي جون آمهون سامهون واريون ڪنڊون يڪسان هونديون آهن.
- سپليمينٽري ڪنڊون لاڳيتين ڪنڊن جي خاصيت رکن ٿيون.
- پورو چوٽ چوڪنڊي جون اريبون هڪ ٻئي کي اڌواڌ ڪن ٿيون ۽ هر هڪ اريب ان کي ٻن يڪسان ٽڪنڊن ۾ ورهائي ٿي.
- جيڪڏهن پوروچوٽ چوڪنڊي جون گوني ڪندون هجن ته هي سڀ ڪندون گوني ٿينديون.
- پورو چوٽ چوڪنڊي جون اريبون، ان کي چئن يڪسان ٽڪنڊن ۾ تقسيم ڪن ٿيون.
- پورو چوٽ چوڪنڊي جي ڪنڊن جو جوڙ 360° آهي.
- ٽڪنڊي جي ٻاهرين ڪنڊن جو جوڙ 180° آهي.
- ٽڪنڊي جي ٻاهرين ڪنڊن جو جوڙ 360° آهي.
- جيڪڏهن ٽي يا ٽن کان وڌيڪ پورو چوٽ ليڪون هڪ ڪپيندڙ ليڪ کي يڪسان ٽڪرن ۾ ورهائن ته ، اهي ليڪون ڪنهن ٻي ڪپيندڙ ليڪ کي پڻ يڪسان ٽڪرن ڪرن ۾ ورهائينديون.
- ٽڪنڊي جا مٿيان هڪ ٽٻڪي تي ملن ٿا ۽ اهو ٽٻڪو هر مٿيان کي پورن ٽن حصن ۾ ورهائي ٿو.
- جيڪڏهن ڪوليڪ ٽڪر، ڪنهن ٽڪنڊي جي ٻن پاسن جي وچين ٽٻڪن کي پاڻ ۾ ملائي ٿو ته اهو ٽڪنڊي جي ٽئين پاسي جي پورو چوٽ هوندو ۽ ماپ ۾ انهي جي اڌ جيترو هوندو.

يونٽ 11

ليڪ جا اڌ ڪندڙ ۽ ڪنڊ جا اڌ ڪندڙ

Line Bisectors and Angle Bisectors

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته:

- هينين سٽيانن کي شامل نتيجن سان گڏ سمجهي سگهندا ۽ انهن کي استعمال ڪري لاڳاپيل حساب حل ڪندا.
- ڪنهن ليڪ ٽڪر جي عمودي اڌڪندڙ تي موجود ٽِبڪو انهيءَ ليڪ ٽڪر جي بنهي چيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي هوندو آهي.
- ليڪ ٽڪر تي ڪو به ٽبڪو جيڪو ان جي بنهي چيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي، اهو ان جو عمودي اڌڪندڙ تي هوندو آهي.
- ٽڪنڊي جي پاسن جا عمودي اڌڪندڙ ساڳئي ٽبڪي مان گذرندا آهن
- ڪنهن به ڪند کي اڌواڌ ڪندڙ ليڪ تي موجود ٽبڪو انهيءَ ڪند جي ٻانهن کان هڪ جيتري مفاصلي تي هوند آهي.
- ڪنهن به ڪند ۾ موجود اندر ٽبڪو ان جي ٻانهن کان هڪ جيتري مفاصلي تي هجي ته اهو ان جي اڌڪندڙ تي هوندو آهي.
- ٽڪنڊي جي ڪندن کي اڌ ڪندڙ ساڳي ٽبڪي گذرندا آهن.

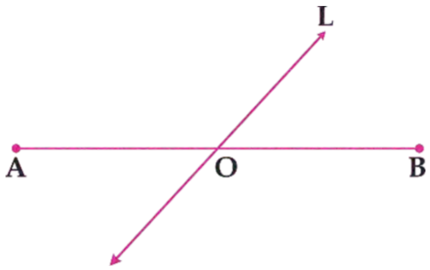
تعارف

اسان هتي ليڪ ٽڪر ۽ ڪنڊ جي اڌ ڪندڙ سان تعلق رکندڙ سڌيان ۽ حساب جي مطالعو ڪنداسين.

وصول:

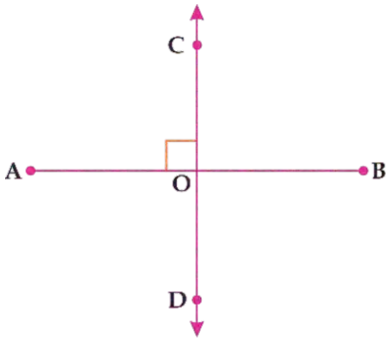
(i) ليڪ ٽڪر جا اڌ ڪندڙ

هڪ ليڪ، شعاع يا ٽڪرو، ٻي ليڪ ٽڪر کي ٻن برابر حصن ۾ ورهائي ته ان کي اڌ ڪندڙ چئبو آهي.



مثال طور: مليل شڪل ۾ ليڪ 'L'، $\overline{AB}$ ليڪ ٽڪري جو اڌ ڪندڙ آهي جيڪو $\overline{AB}$ جي وچ واري ٽٻڪي 'O' مان گذري ٿو.

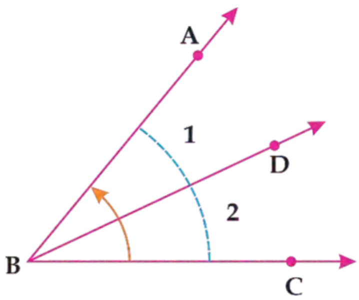
(ii) ليڪ ٽڪر جو عمودي اڌ ڪندڙ



هڪ ليڪ جيڪا ليڪ ٽڪر کي 90 درجن تي ٻن حصن ۾ اڌ ڪري ته ان کي ليڪ ٽڪر جو عمودي اڌ ڪندڙ چئبو آهي.

مثال طور: ڏنل شڪل ۾ $\overleftrightarrow{CD}$ ليڪ ٽڪر AB جو عمود آهي جيڪو وچين ٽٻڪي'O' مان گذري ٿو. ته پوءِ $\overleftrightarrow{CD}$ کي $\overline{AB}$ جوعمودي اڌ ڪندڙ چئبو آهي. مليل شڪل ۾ ليڪ $\overleftrightarrow{CD}$ ليڪ ٽڪر $\overline{AB}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ آهي.

(iii) ڪنڊ جو اڌ ڪندڙ

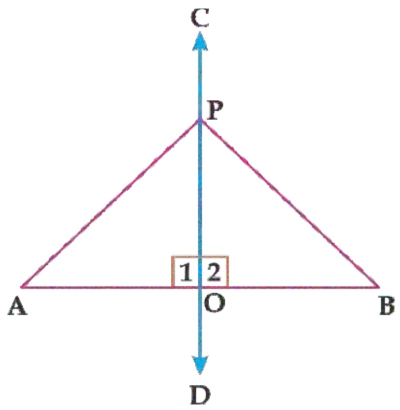


هڪ ليڪ، شعاع يا ليڪ ٽڪر جڏهن ڪنهن ڪنڊکي ٻن برابر ڪنڊن ۾ ورهائي ته ان کي ڪنڊ جو اڌ ڪندڙ چئبو آهي.
ڏنل شڪل ۾ $\angle CBA$ ڪنڊ جو اڌ ڪندڙ $\overrightarrow{BD}$ آهي، جيڪو ان ڪنڊ کي ٻن پورن ڪنڊن $\angle 1$ ۽ $\angle 2$ ۾ ورهائي ٿو. جيئن $\angle 2 \cong \angle 1$

سڌيان 11.1.1

ثابت ڪريو ته:

ڪنهن ليڪ ٽڪر جي عمودي اڌڪندڙ تي موجود ٽپڪو انهيءَ ليڪ ٽڪر جي ٻنهي چيڙن ڪان هڪ جيتري مفاصلي تي هوندو آهي.



مليل: $\overleftrightarrow{CD}$ عمودي اڌڪندڙ آهي $\overline{AB}$ جو جيڪو ان کي پوري وچ "O" تي ڪپي ٿو P ڪو به ٽپڪو $\overleftrightarrow{CD}$ تي آهي.

گهربل: $\overline{AP} \cong \overline{BP}$، يعني ٽپڪو P ٽپڪو A ۽ B ڪان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي.

ثابتي:

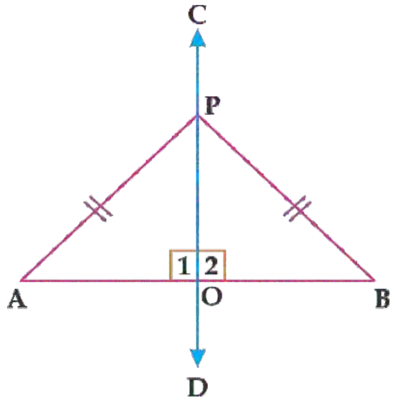
بيان	سبب / دليل
$\Delta AOP \leftrightarrow \Delta BOP$ ۾	
(i) $\overline{AO} \cong \overline{OB}$	(i) مليل ("O" وچ وارو ٽپڪو آهي)
(ii) $\angle 1 \cong \angle 2$	(ii) مليل ($\overline{CD} \perp \overline{AB}$) "O" ٽپڪي وٽ
(iii) $\overline{PO} \cong \overline{PO}$	(iii) مشترڪ
$\therefore$ $\Delta AOP \leftrightarrow \Delta BOP$	S.A.S موضوع
$\therefore$ $\overline{AP} \cong \overline{BP}$	$\overline{AP} \cong \overline{BP}$ ٽڪندن جي يڪسانيت مطابق Δs.
مگر ٽپڪو P ليڪ $\overleftrightarrow{CD}$ تي ڪو به ٽپڪو آهي ساڳي طرح $\overleftrightarrow{CD}$ تي ورتل ڪو به ٽپڪو ٻن ٽپڪن A ۽ B ڪان هڪ جيترو پري هوندو تنهنڪري ليڪ ٽڪر جي عمودي اڌڪندڙ تي موجود هر هڪ ٽپڪو انهيءَ جي چيڙن ڪان هڪ جيتري مفاصلي تي هوندو.	فرضي ورتل متيا قدم ورجائڻ سان

Q.E.D

ستڏيان 11.1.2

ثابت ڪريو ته:

ليڪ ٽڪر تي ڪو به ٽپڪو جيڪو ان جي ٻنهي ڇيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي ته اهو ان جو عمودي اڌڪندڙ هوندو آهي.



مليل: A ۽ B ٻه مشتمل ٽپڪا آهن ۽ P حرڪت ڪندڙ ٽپڪو آهي جيئن $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

گهربل: P عمودي اڌڪندڙ آهي $\overline{AB}$ جو

جوڙجڪ: $\overline{AB}$ کي "O" تي ٻن برابر حصن ۾ ڪپيو ۽ P ۽ O کي پاڻ ۾ ملايو.

ثابتي:

بيان	Reasons
$\Delta POA \leftrightarrow \Delta POB$ ۾	
(i) $\overline{AO} \cong \overline{OB}$	(i) جوڙجڪ
(ii) $\overline{PA} \cong \overline{PB}$	(ii) مليل
(iii) $\overline{PO} \cong \overline{PO}$	(iii) مشترڪ
$\Delta POA \cong \Delta BOP$	پ . ڪ . پ موضوع
$\angle 1 \cong \angle 2$	ٽڪنڊن جي يڪسانيت مطابق
پر $\angle 1$ ۽ $\angle 2$ سپليمنٽري ڪندون آهن هر هڪ $\angle 2$ ۽ $\angle 1$ گوني ڪند آهي	Δs هڪ ليڪ آهي (سپليمنٽ جو موضوع) جيڪڏهن ٻه سپليمنٽري ڪندون ماپ ۾ برابر آهن ته هر هڪ گوني ڪند آهي.
تنهنڪري $\overline{PO}$ عمودي اڌڪندڙ آهي $\overline{AB}$ جو ته پوءِ هر ٽپڪو جيڪو A ۽ B کان هڪ جيتري مفاصلي تي هوندو اهو $\overline{AB}$ جو عمودي اڌڪندڙ ٽيندو.	$\overline{AO} \cong \overline{BO}$ ۽ $\overline{PO} \perp \overline{AB}$ اسان متيان قدم ورجائڻ سان ان کي ثابت ڪري سگهون ٿا.

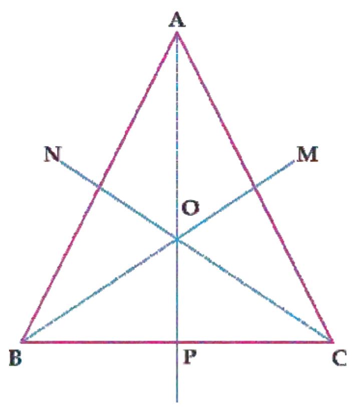
Q.E.D

مشق 11.1

1. ثابت ڪريو تہ ڪنهن ٽڪنڊي جي ڪن بہ ٻن پاسن جا عمودي اڌ ڪندڙ هڪ اهڙي ٽٻڪي تي ملن ٿا جيڪو سندس ٽنهي چيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي.
2. ثابت ڪريو تہ گول جو مرڪز، زهہ جي عمودي اڌڪندڙن تي آهي.
3. ٽن غير هم ليڪ ٽٻڪن مان گذرندڙ گول جو مرڪز ڪٿي ٿيندو ۽ ڇو.
4. جيڪڏهن بہ گول پاڻ ۾ A ۽ B ٽٻڪن تي ڪپين، پوءِ ثابت ڪريو تہ انهن جي مرڪز مان گذرندڙ ليڪ جو عمودي اڌڪندڙ ٿيندي.
5. ٽي مارڪيٽون A, B ۽ C هڪ ليڪ تي نہ آهن. ڪاروباري شخص اهڙي جڳهہ تي مسجد ناهڻ چاهي ٿو، جيڪا هنن مارڪيٽن کان هڪ جيتري مفاصلي تي هجي، مسجد جي جڳهہ طئہ ڪرڻ کان پوءِ ثابت ڪريو تہ هئي جڳهہ ٽنهي مارڪيٽن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي.

سڌيان 11.1.3:

ثابت ڪريو: ٽڪنڊي جي پاسن جا عمودي ساڳئي ٽٻڪيمان گزرندڙ آهن



مليل: ٽڪنڊو ABC

گهربل: ٽڪنڊي جي پاسن جا عمودي اڌڪندڙ

ٽٻڪيمان گزرندڙ آهن

جوڙجڪ: $\overline{AC}$ ۽ $\overline{AB}$ جا عمودي اڌڪندڙ $\overline{MO}$ ۽ $\overline{NO}$

ناهيو جيڪي ٽٻڪي "O" تي ملن ٿا.

ڪي ٽٻڪي P اڌ ڪريو.

$\overline{OP}, \overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ ۽ ڪڍيو.

ثابتي:

بيان	سبب / دليل
$\overline{NO}$، $\overline{AB}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ آهي.	جوڙجڪ
∴ $\overline{AO} \cong \overline{OB}$	
ساڳئيطرح سان $\overline{AO} \cong \overline{OC}$	$\overline{MO}$ عمودي اڌ ڪندڙ آهي $\overline{AC}$ جو
∴ $\overline{OB} \cong \overline{OC}$	هر هڪ يڪسان آهي $\overline{AO}$ جي.
P ليڪ ٽڪر $\overline{BC}$ جي وچ وارو ٽپڪو آهي.	جوڙجڪ
تنهنڪري $\overline{OP}$ عمودي اڌ ڪندڙ آهي $\overline{BC}$ جو.	سڊيان 11.1.2 مطابق
هتي ٽڪندي جي پاسن جا عمودي اڌ ڪندڙ ساڳي ٽپڪي مان گذرن ٿا.	انهن مان هرهڪ ساڳئي ٽپڪي تي ملن ٿا.

Q.E.D

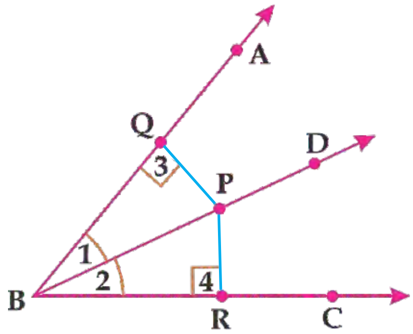
مشق 11.2

1. ثابت ڪريو ته سوڙهيٽڪنديجو گهيريندڙ مرڪز ٽڪندي جي اندرين ۾ هوندو.
2. ثابت ڪريو ته ٻيور پاسي ٽرئيپزيم جي چئني پاسن جا عمودي اڌ ڪندڙ هم ٽپڪي تي ملندا
3. ثابت ڪريو ته ٽڪندي جا عمود هم ٽپڪي تي ملندا

سڊيان 11.1.4

ثابت ڪريو ته

ڪنهن بہ ڪنڊ ڪي اڌواڌ ڪندڙ ليڪ تي موجود ٽپڪو، انهي ڪنڊ جي ٻانهن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي.



مليل: $\overline{BD}$ ڪنڊ $\angle ABC$ جو اڌواڌ ڪندڙ آهي.

P، $\overline{BD}$ تي ڪنيل ڪوبہ ٽپڪو آهي ۽

$\overline{PQ}$ ۽ $\overline{PR}$ ترتيبوار، پانهن $\overline{BA}$ ۽ $\overline{BC}$

تي عمود آهن.

گهربل:

$\overline{PR} = \overline{PQ}$ (يعني ٽپڪو P, BA ۽ BC کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي)

ثابتي:

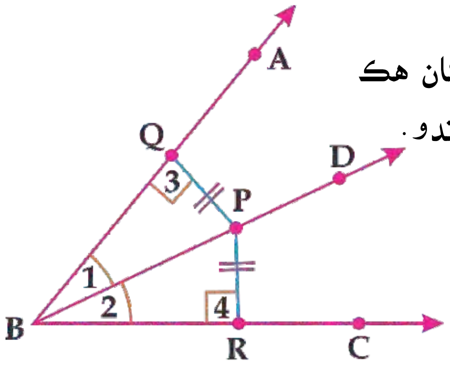
بيان	Reasons
۾ $\Delta PQB \leftrightarrow \Delta PRB$	
(i) $\angle 3 \cong \angle 4$	(i) هرهڪ گوني ڪند آهي.
(ii) $\angle 1 \cong \angle 2$	(ii) مليل ($\overline{BD}$ اڌ ڪندڙ آهي)
(iii) $\overline{BP} \cong \overline{BP}$	(iii) مشترڪ
$\Delta PQB \cong \Delta PRB$	A.A.S≅A.A.S
$\overline{PQ} \cong \overline{PR}$	
يعني P ٽپڪو، BA ۽ BC کان هڪجيتري مفاصلي تي آهي.	تڪندن جي يڪسانيت مطابق Δs

Q.E.D

11.1.5 سڌيان

ثابت ڪريو تہ

ڪنهن بہ ڪنڊ ۾ موجود اندر ٽپڪو، ان جي پانهن کان هڪ جيتري مفاصلي تي هجي تہ اهو ان جو اڌ ڪندڙ تي هوندو.



مليل: $\overline{BD}$ تي موجود ٽپڪو P، ڪنڊ ABC

جي پانهن $\overrightarrow{AB}$ ۽ $\overrightarrow{BC}$ کان هڪ جيتري

مفاصلي تي آهي.

$\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ ۽ $\overline{PQ} \perp \overline{BA}$ ۽ $\overline{PR} \perp \overline{BC}$.

گهربل: يعني $\overrightarrow{BD}$ ڪنڊ $\angle ABC$ جو اڌواڌ ڪندڙ آهي.

ثابتي:

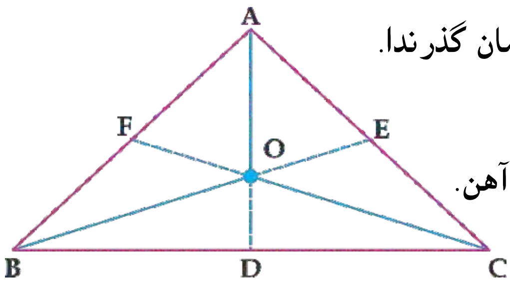
Reasons	بيان
گوني ڪنڊ جي ٽڪنڊن نسبت Δs	$\Delta PQB \leftrightarrow \Delta PRB$ ۾
(i) هرهڪ گوني ڪنڊ آهي.	(i) $\angle 3 \cong \angle 4$
(ii) مليل	(ii) $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$
(iii) مشترڪ هيپاٽينيوز	(iii) $\overline{BP} \cong \overline{BP}$
گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾	$\Delta PQB \cong \Delta PRB$ H.S≅ H.S
	$\angle 1 \cong \angle 2$, ٽڪنڊن جي يڪسانيت سان
	يعني $\overrightarrow{BD}$، $\angle ABC$ ڪنڊ جو اڌواڌ ڪندڙ آهي.

Q.E.D

11.1.6 سڌيان

ثابت ڪريو ته

ٽڪنڊي جي ڪندن ڪي اڌ ڪندڙ ساڳي ٽبڪي مان گذرندا.



مليل: ٽڪندي ΔABC ۾

$\overline{BE}$ ۽ $\overline{BF}$ ڪندن $\angle C$ ۽ $\angle B$ جا اڌ ڪندڙ آهن.

جيڪي هڪ ٻئي کي O ٽبڪي تي ملن ٿا.

گهربل: $\angle A, \angle B$ ۽ $\angle C$ جا اڌ ڪندڙ هم ٽبڪي تي ملندا.

جوڙجڪ: $\overline{OD} \perp \overline{BC}$. ۽ $\overline{OF} \perp \overline{AB}$ تي ناهيو.

ثابتي:

سبب / دليل	بيان
	مطابقت ۾
ڪند تي اڏ ڪندڙ ٽِپڪو، ان جي ٻانهن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي.	(i) $\overline{OD} \cong \overline{OF}$
	(ii) $\overline{OD} \cong \overline{OE}$
(i) ۽ (ii) مان	(iii) $\overline{OE} \cong \overline{OF}$
سنديان 11.5	تنهنڪري ٽپڪو O $\angle A$ اڏ ڪندڙ تي آهي.
مليل	ٽپڪو O $\angle B$ ۽ $\angle C$ جي اڏ ڪندڙ تي پڻ آهي.
	تنهنڪري $\angle A$، $\angle B$ ۽ $\angle C$ جا اڏ ڪندڙ هڪ ٽپڪي تي هوندا آهن.

Q.E.D

مشق 11.3

1. ٻٽ ٻيور پاسي ٽڪنڊن جا بنياد مشترڪ آهن، ثابت ڪريو ته انهن جي چوٽين کي ملائيندڙ ليڪ، مشترڪ بنياد کي گوني ڪند تي اڏواڏ ڪندي.
2. ٽڪنڊي جي ڪندن جا اڏواڏ ڪندڙ آمهون سامهون وارن پاسن کي ٻه اڏواڏ ڪنڌا ته. ثابت ڪريو ته ٽڪنڊو ٻيور پاسوٽڪنڊو آهي.
3. ٻيور پاسي ٽڪنڊي ABC ۾ $\Delta ABC, m\overline{AB} = m\overline{AC}$ آهي. ثابت ڪريو ته B ۽ C چوٽين کان سامهون پاسن سان نهندڙ عمود برابر آهن.

ورجايل مشق 11

.1 ثابت ڪريو تہ جيڪڏهن ٽڪنڊي جا ٻہ عمود يڪسان آهن تہ ٽڪنڊو ٻيور پاسو آهي.

.2 ثابت ڪريو تہ ٽڪنڊي جو اندرپو ٽبڪو ٽنهي پاسن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي، اهو ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪندن جي اڌڪنڊز تيهوندو.

.3 هيٺين بيانن جي سامهون درست لاءِ (T) ۽ غلط لاءِ (F) لکو.

(i) پاسن جو اڌواڌ ڪرڻ جو مطلب آهي تي اسان ڏنل پاسي کي ٻن حصن ۾ تقسيم ڪيو.

(ii) ٻيور پاسي گوني ڪند ٽڪنڊي جي بنياد جي هرهڪ ڪند 45 جي آهي.

(iii) يڪسان پاسن وارن ٽڪنڊن جون ڪندون پڻ يڪسان هونديون.

.4 صحيح جواب جي چونڊ ڪريو.

(i) سوڙهي ڪند ٽڪنڊي ۾ ________ سوڙهيون ڪندون آهن.

(a) هڪ (b) ٻہ (c) ٽي (d) ڪا بہ نہ

(ii) ليڪ ٽڪر تي هڪ ٽبڪو جيڪو ان جي ٻنهي چيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي اهو ان جو ________ آهي.

(a) عمودي اڌ ڪنڊز (b) عمودي

(c) مرڪز (d) وچ وارو ٽبڪو

(iii) ڪنهن سوڙهي ڪند ٽڪنڊي جي پاسن جو ________ ٽڪنڊي جي اندر هڪ ٻئي کي ڪپيندو.

(a) عمود (b) عمودي اڌ ڪنڊز

(c) ويڪري (d) سوڙهي

(iv) ٽڪنڊي جي ڪندن جا اڌ ڪنڊز آهن ________.

(a) هم ٽبڪيتي (b) همورا

(c) ڪو نہ ڪپيندا (d) اڻ برابر

خلاصو

- ليڪ ٽڪر جو اڌواڌ ڪندڙ، ليڪ ٽڪر کي ٻن برابر حصن ۾ تقسيم ڪندو آهي.
- عمودي اڌ ڪندڙ ليڪ ٽڪر کي 90 تي ٻن برابر حصن ۾ ڪپين ٿا.
- ڪنهن ليڪ جي عمودي اڌ ڪندڙ تي موجود ٽپڪو، انهيءَ ليڪ ٽڪر جي ٻنهي چيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي هوندو آهي.
- ليڪ ٽڪر تي ڪو به ٽپڪو جيڪو ان جي ٻنهي چيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي، اهو ان جو عمودي اڌ ڪندڙ تي هوندو .
- ٽڪنڊي جي پاسن جا عمودي اڌ ڪندڙ هم ٽپڪن تي ملن ٿا.
- ڪنهن به ڪنڊ کي اڌ و اڌ ڪندڙ ليڪ تي موجود ٽپڪو انهيءَ ڪنڊ جي ٻانهن تي هڪ جيتري مفاصلي تي آهي.
- ڪنهن به ڪنڊ ۾ موجود اندريون ٽپڪو، ان جي ٻانهن کي هڪ جيتري مفاصلي تي هجي ته اهو ان جو اڌ ڪندڙ تي آهي.
- ٽڪنڊي جي ڪندن کي اڌ ڪندڙ ساڳي ٽپڪي مان گذرندا آهن.

يونٽ 12

ٽڪنڊن جا پاساءِ ڪنڊون

SIDES AND ANGLES OF A TRAINGLE

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي مطالعي کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته:

- جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جا ٻه پاسا ڊيگهه ۾ برابر نہ هجن تہ وڏيڪ پاسي جي سامهون واري ڪنڊ جو مقدار وڏيڪ هوندو.
- جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جون ٻه ڪنڊون ماپ ۾ برابر نہ هجن تہ وڏي ڪنڊ جي سا مهون وارو پاسو، ننڍي ڪنڊ جي سامهون واري پاسي کان وڏو ٿيندو.
- ٽڪنڊي جي ڪن بہ ٻن پاسن جي ڊيگهه جي ماپ،جوجور ٽئين پاسي جي ڊيگهه کان وڏيڪ هوندو آهي.
- ڪنهن ٽڪپي جو گهٽ ۾ گهٽ فاصلو ڪنهن ليڪ کان عمود هوندو آهي.

تعارف:

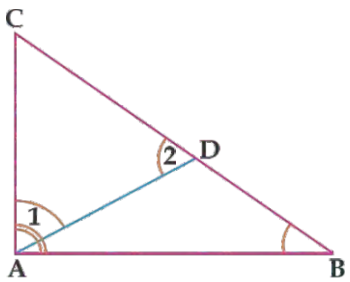
هن يونٽ ۾ اسان ٽڪنڊي جي پاسن ۽ ڪندن سان تعلق رکندڙ سڌيان، انهن جا شامل نتيجن بابت پڙهندا سين ۽ انهن سان تعلق رکندڙ حساب پڻ حل ڪنداسين.

12.1 ٽڪنڊي جا پاسا ۽ ڪندون

سڌيان 12.1.1

ثابت ڪريو ته:

جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جا ٻه پاسا ڊيگهه ۾ برابر نه هجن، ته وڏيڪ ڊيگهه واري پاسي جي سامهون واري ڪند جو مقدار وڏيڪ هوندو.



مليل: ΔABC ۾ $m\overline{BC} > m\overline{AC}$

گهربل: $m\angle A > m\angle B$

جوڙ جڪ: $\overline{BC}$ کي ٽپڪي D تي اهڙي طرح ڪٽيو جو $\overline{AC} \cong \overline{CD}$ ڪٽيو ۽ ٽپڪي A کي D سان ملايو.

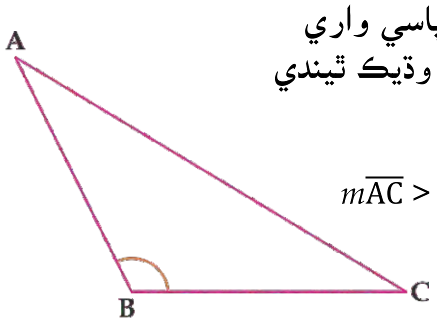
ثابتي:

بيان	سبب / دليل
(i) ΔACD ۾ $\overline{AC} \cong \overline{CD}$	(i) جوڙجڪ
(ii) $\therefore m\angle CAD = m\angle CDA$	(ii) يڪسان پاسا.
(iii) پر $\angle CDA$ ٽڪنڊي ABD جي ٻاهرين ڪند آهي	(iii) ٻاهرين ڪندن جي وصف مطابق
(iv) $\therefore m\angle CDA > m\angle B$	(iv) ٻاهرين ڪند ٽڪنڊي جي اڻ پرواري ڪندن ڪان وڏي ٿيندي آهي.
(v) پر $m\angle A > m\angle CAD$	(v) $\therefore m\angle A = m\angle CAD + m\angle DAB$
(vi) $m\angle A > m\angle CDA$	(vi) $m\angle CDA = m\angle CAD$
(vii) $\therefore m\angle A > m\angle B$	(vii) مٿيان (iv) ۽ (vi) ۾ نا برابري واري متعدي خاصيت

Q.E.D

هينيان مثال متئين سڌيان کي سمجهڻ ۾ مدد ڪندا.

ثابت ڪريو   تہ اٽپور پاسي تڪندي ۾ وڏي پاسي واري سامهون ڪند جي ماپ 60° کان وڌيڪ ٿيندي



مليل: تڪندو ABC ۾ $m\overline{AC} > m\overline{AB}$ ۽ $m\overline{AC} > m\overline{BC}$.:

گهربل $m\angle B > 60^0$

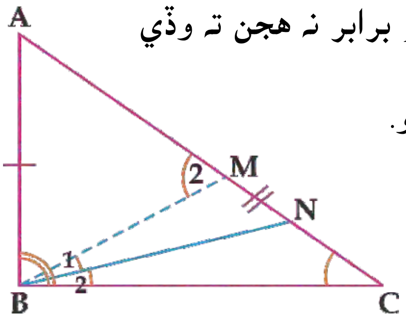
ثابتي:

بيان	سبب / دليل
تڪندي ABC ۾	
اسان کي $m\angle B > m\angle C$	مليل $m\overline{AC} > m\overline{BC}$, $m\overline{AC} > m\overline{AB}$
۽ $m\angle B > m\angle A$	تڪندي ABC جون ڪندون $\angle A, \angle B$ ۽ $\angle C$ آهن
پَر $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$	
∴ $m\angle B + m\angle B + m\angle B > 180^0$	$m\angle B > m\angle C$ and $m\angle B > m\angle A$ جوڙ ڪرڻ سان
$3\,m\angle B > 180^0$	3 سان ونڊ ڪرڻ سان
= $m\angle B > \frac{180^0}{3}$	
تہ پوءِ $m\angle B > 60^0$	

Q.E.D

ستديان 12.1.2

ثابت ڪريو تہ جيڪڏهن ٽڪنڊي جون ٻہ ڪندون ماپ ۾ برابر نہ هجن تہ وڏي ڪند جي سامهون وارو پاسو، ننڍي ڪند جي سامهون واري پاسي کان وڏو ٿيندو.



مليل: ٽڪنڊي ABC ۾ $m\angle B > m\angle C$

گهربل: $m\overline{AC} > m\overline{AB}$

جوڙجڪ: $\angle ABM$ کي $\angle C$ جي يڪسان ڪري ناهيو $\angle MBC$,

جواڙ ڪنڊ $\overline{BN}$, ناهو تہ جيئن $m\angle 1 = m\angle 2$

ثابتي:

بيان	سبب / دليل
$\angle ANB$ ٻاهرين ڪند آهي ΔCBN ∴ تہ پوءِ	ٻاهرين ڪند جي وصف مطابق $\angle ANB$ ٻاهريت ڪندا آهي
$m\angle ANB = m\angle C + m\angle 2$	
$= m\angle C + m\angle 1$	$\therefore m\angle 2 = m\angle 1$ جوڙجڪ
$= m\angle ABM + m\angle 1$	$\therefore m\angle C = m\angle ABM$ جوڙجڪ
$= m\angle ABN$	ڪندن کي جوڙ جو موضوع
$\therefore \overline{AB} \cong \overline{AN}$	$\therefore m\angle ANB = m\angle ABN$ متي ثابت ٿيل
$\therefore m\overline{AC} > m\overline{AB}$	$\therefore m\overline{AC} > m\overline{AN}$

Q.E.D

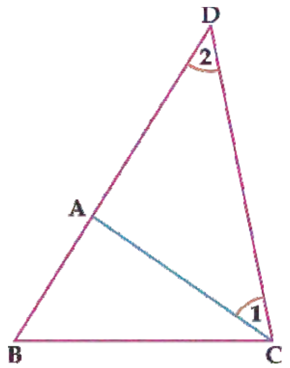
شامل نتيجا:

(1) گوني ڪند ٽڪنڊي جو هيُٺا ٽينيوز باقي ٻين هر هڪ پاسن کان وڏو هوندو آهي.

(2) ويڪري ڪند ٽڪنڊي ۾، ويڪري ڪند جي سامهون وارو پاسو ٻين پاسن مان هر هڪ کان وڏو هوندو آهي.

سديان 12.1.3

تڪندي جي ڪن بہ ٻن پاسن جي ڊيگهہ جي ماپ جوجوڙاتئين پاسي جي ڊيگهہ کان وڌيڪ هوندي آهي.



مليل: تڪندو ABC

گهربل:

i) $m\overline{AB}+m\overline{AC}>m\overline{BC}$

ii) $m\overline{AB}+m\overline{BC}>m\overline{CA}$

iii) $m\overline{AC}+m\overline{BC}>m\overline{AB}$

جوڙجڪ: BA کي D تائين اهڙي طرح وڌايو جو

$\overline{AC}\cong\overline{AD}$ ۽ $\overline{DC}$ ناهيو

ثابتي:

بيان	سبب / دليل
تڪندي ADC ۾ $\overline{AD}\cong\overline{AC}$	جوڙجڪ
$\therefore m\angle1=m\angle2$	يڪسان پاسن جي سامهون واريون ڪندو
پر $m\angle BCD>m\angle1$	$m\angle BCD=m\angle BCA+m\angle1$
$\therefore m\angle BCD>m\angle2$	نا برابري واري متعدي خاصيت
تنهنڪري ΔBDC ۾ $m\overline{BD}>m\overline{BC}$	وڏي ڪند جي سامهون وارو پاسو وڏو ٿيندو
پر $m\overline{BD}=m\overline{AB}+m\overline{AD}$	جوڙجڪ مطابق =
$=m\overline{AB}+m\overline{AC}$	$m\overline{AD}=m\overline{AC}$
$\therefore m\overline{AB}=m\overline{AC}>m\overline{BC}$	$\overline{BD}$ جي قيمت رکڻ سان
ساڳي طرح اسان ثابت ڪري سگهان ٿا تہ	
$m\overline{AB}+m\overline{BC}>m\overline{AC}$	متئين طريقي ڪار مطابق
۽ $m\overline{BC}+m\overline{AC}>m\overline{AB}$	

Q.E.D

هيٺيان مثال متي ڏنل سديان کي سمجهڻ ۾ مدد ڪندو.

مثال 1: هيٺين مان، ڪهڙا ڊيگهن جا ڏنل سيٽ تڪندو ناهيندا:

(i) 3 س. م، 4 س. م ۽ 5 س. م　　(ii) 4س. م، 5 س. م ۽ 4.5 س. م

(iii) 60 م. م، 80 م. م ۽ 10 س. م　　(iv) 3 س. م، 4 س. م ۽ 10 س. م

حل: (i) 3 س. م ، 4 س.م ۽ 5 س.م

جيئن تہ $3 + 4 > 5$, $3 + 5 > 4$ ۽ $4 + 5 > 3$ تہ پوءِ

ان پاسن جو جوڙ ٽي پاسي جي جوڙ کان وڏيڪ آهي.

ڏنل ڊيگهہ جو سيٽ هڪ ٽڪنڊو ناهيندو

(ii) 4 س.م ، 5 س.م ۽ 4.5 س.م

جيئن تہ $4 + 5 > 4.5$, $5 + 4.5 > 4$ ۽ $4.5 + 3 > 4$ تہ پوءِ

ڏنل ڊيگهہ جو سيٽ هڪ ٽڪنڊو ناهيندو.

(iii) 60 م.م، 80 م.م ۽ 10 س.م

جيئن تہ 10 =1 س.م تنهنڪري 60 م م= 6 س.م ۽ 80 م م = 8 س.م

هاڻ $6 + 8 > 10$, $6 + 10 > 8$ ۽ $8 + 10 > 6$ تہ پوءِ

ڏنل ڊيگهہ جو سيٽ هڪ ٽڪنڊو ناهيندو.

مثال 2: متين سڌيان کي ذهن ۾ رکي فيصلو ڪريو تہ ڪهڙا ڊيگهن جا سيٽ ٽڪنڊو ناهيندا.

(i) 2 س. م ، 4 س.م ۽ 7 س.م (ii) 5.5 س.م ، 5 س.م ۽ 9.5 س.م

حل: (i) 2 س. م ، 4 س.م ۽ 7 س.م

جيئن تہ $2 + 4 < 7$, $2 + 7 > 4$ ۽ $4 + 7 > 2$

هن قسم جي ڊيگهہ جو سيٽ ٽڪنڊو تتو ناهي سگهي.

(ii) 5.5 س.م ، 5 س.م ۽ 9.5 س.م

جيئن تہ $5.5 + 5 > 9.5$, $5.5 + 9.5 > 5$ ۽ $5 + 5.5 > 9.5$ تہ پوءِ

ڏنل ڊيگهہ وارو سيٽ ٽڪنڊو ناهي سگهي تو

سرگرمي

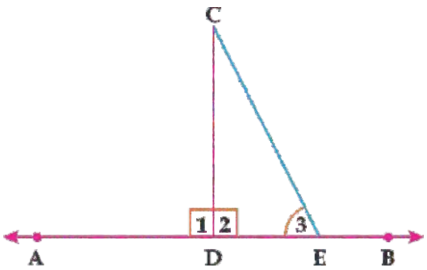
جيڪڏهن $a = 3$ cm

$b = 4$ cm

$c = 5$ cm

تہ پوءِ ΔABC ناهي سگهبو يا نہ

سڌيان 12.1.4 ڪنهن ٽپڪي کان جيڪو ليڪ کان ٻاهر هجي، ليڪ تائين عمود سڀ کان گهٽ مفاصلو ٿيندو.



مليل: ٽپڪي C کان $\overline{CD}$ ، ليڪ AB تي هڪ عمود ڪڍيو ويو آهي. جيڪو D ٽپڪي تي ملي ٿو. ۽ $\overline{CE}$ هڪ ٻيو ليڪ ٽڪر $\overline{AB}$ کي ٽپڪي E تي ملي ٿو

گهربل: $m\overline{CD} < m\overline{CE}$

ثابتي:

بيان	سبب / دليل
$\angle 1$, ΔCDE جي ٻاهرين ڪنڊ آهي	ٻاهرين ڪنڊ جي وصف مطابق.
$\therefore m\angle 1 > m\angle 3$	ٽڪنڊي جي ٻاهرين ڪنڊ، سامهون واري اندرين ڪنڊ کان وڏي هوندي آهي.
$\therefore m\angle 2 > m\angle 3$	$m\angle 1 = m\angle 2$ (هرهڪ گوني ڪند آهي)
$\therefore m\overline{CE} > m\overline{CD}$	وڏي ڪند جي سامهون وارو پاسو وڏو ٿيندو آهي.
ساڳي طرح اهو ثابت ڪري سگهجي ٿو ته $m\overline{CD}$ جي ڊيگهه ننڍي ٿيندي ڪنهن به ٻي ليڪ ٽڪر کان، جيڪو C کان $\overleftrightarrow{AB}$ تائين ڪڍيو ويندو.	مٿين طريقي ڪار سان

Q.E.D

شامل نتيجو:

1. ڪنهن ليڪ تي ٽپڪي ۽ ليڪ وچ ۾ مفاصلو ٻڙي آهي.

مشق 12.1

.1 ٽڪنڊي ABC جو اندريون ٽپڪو O آهي.

ثابت ڪريو ته $m\overline{OA}+m\overline{OB}+m\overline{OC}>\frac{1}{2}(m\overline{AB}+m\overline{BC}+m\overline{CA})$

.2 ٽڪنڊي ABC ۾ $m<B=70^0$ ۽ $m<C=45^0$ آهي. ٽڪنڊي جو ڪهڙو پاسو وڏي ۾ وڏو ٿيندو؟

.3 ٽڪنڊي ABC ۾ $m<A=58^0$ ۽ $m<B=65^0$ ٽڪنڊي جو ڪهڙو پاسو ننڍي ۾ ننڍو ٿيندو.

ورجايل مشق 12

.1 صحيح ۽ غلط بيانن تي (✓) ٽڪ ڪريو.

(i) ٽڪنڊي جي ٻن پاسن جو جوڙ ٽي پاسي کان وڏو ٿيندو آهي. T/F

(ii) ٽڪنڊي جي ٻن پاسن جي ڪٽ، ٽي پاسي کان وڌيڪ ٿيندي آهي. T/F

(iii) عمودي مفاصلو ڪنهن ٽپڪي کان ليڪ تائين ننڍي ۾ ننڍو فاصلو آهي. T/F

(iv) گوني ڪند ٽڪنڊي جي وڏي ۾ وڏي ڪند 100^o جي آهي. T/F

(v) ڪنهن ليڪ تي عمود هميشه 90^o جي ڪند ناهيندو. T/F

.2 خال پري جملن کي درست ڪريو.

(i) ڪنهن گوني ڪند ٽڪنڊي جي ________ وڏو پاسو آهي.

(ii) ڪنهن ڪند ٽڪنڊي ۾ گوني ڪند واري پاسن جو جوڙ ______ آهي. هئپا ٽينيوز جي ماپ کان.

(iii) ٽڪنڊي ABC ۾ $m\angle A = 50^o$ ۽ $m\angle B = 30^o$ ته __________ پاسو وڏو ٿيندو باقي جيٻين پاسن کان.

(iv) چوڪندي جي اريب جي ڊيگهه ________ آهي. ان جي پرواري پاسن جي جوڙ کان.

.3 صحيح جواب تي (✓) ڪريو.

(i) ٽيور پاسي ٽڪنڊي جي هڪ پاسي جي ماپ 6 س م آهي ته پوءِ ان جي مٽيان جي ماپ _____ ٿيندي 9 س م کان:

(a) گهٽ (b) وڌيڪ (c) برابر (d) ڪو به نه

(ii) مستطيل جي گهيري جي ماپ 22 س م آهي ته ان جي اريب جي ڊيگهه _______ ٿيندي 11 س م کان.

(a) برابر (b) وڌيڪ (c) گهٽ (d) ڪو به نه

اختصار Summary

- جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جا ٻه پاسا ڊيگهه ۾ برابر نه هجن ته وڌيڪ پاسي جي سامهون واري ڪنڊ جو مقدار وڌيڪ هوندو.
- جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جون ٻه ڪنڊون ماپ ۾ برابر نه هجن ته وڏي ڪنڊ جي سامهون واروپاسو، ننڍي ڪنڊ جي سامهون واري پاسي کان وڏو ٿيندو.
- ٽڪنڊي جي ڪنڊ ٻن پاسن جي ڊيگهه جي ماپ ٽئين پاسي جي ڊيگهه کان وڌيڪ هوندي آهي.
- ڪنهن ٽٻڪي کي جيڪو ليڪ کان ٻاهر هجي، ليڪ تائين عمود جو سڀ کان گهٽ مفاصلو ٿيندو.

يونٽ 13

عملي جاميٽري (ٽڪنڊن) جي

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي مطالعي کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- ٽڪنڊو ٺاهيندا جن ۾ مليل هجن
  - ٻہ پاسا ۽ وچ واري ڪنڊ
  - هڪ پاسو ۽ ٻہ ڪنڊون
  - ٻہ پاسا ۽ ڪنڊ، ڪنهن ٻہ هڪ پاسي جي سامهون واري (سيني، تنهي ممڪن ماپن سان)ٺاهيو:
  - ڪنڊ جو اڌ ڪندڙ
  - عمود
  - عمودي اڌ ڪندڙ
  - ٽڪنڊي جا مڌيان ۽ انهن جي ساڳئي نقطي تي ملڻ جي چڪاس
- ڏنل چوڪندي جي ايراضي جي برابر ٽڪنڊو ٺاهيو
- مليل ٽڪنڊي جي ايراضي جي برابر مستطيل ٺاهيو
- مليل مستطيل جي ايراضي جي برابر چورس ٺاهيو
- مساوي ايراضي جو ٽڪنڊو ڏنل ڊيگھ واري بنياد تي ٺاهيو

13.1 ٽڪنڊي جي بناوت

13.1.1هڪ ٽڪنڊو ڏاهيو جنهن ۾ مليل هجي

- ٻه پاسا ۽ وچ واري ڪنڊ
- هڪ پاسو ۽ ٻه ڪنڊون
- ٻه پاسا ۽ ڪنهن ٻه هڪ پاسي جي سامهون واري ڪنڊ. سيني ممڪن (ٽنهي) صورتن سان

جڏهن ٻه پاسا ۽ وچ واري ڪند مليل هجن.

مثال ٽڪنڊو ABC ڏاهيو جنهن ۾

$m\overline{AB}=4.8$ س م، $m\overline{AC}=3.2$ ۽ $m\angle B=75^\circ$

جوڙجڪ:

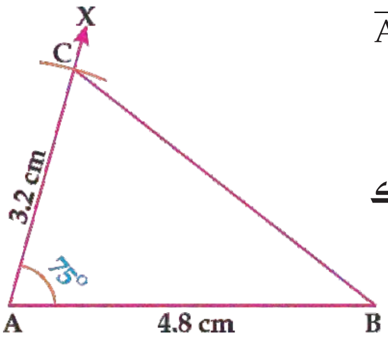
(i) 4.8 سينٽي ميٽر ڊگهو ليڪ ٽڪر $\overline{AB}$ کڍيو

(ii) ٽبڪي A کي چوٽي طور وٺي 75° ماپ واري ڪند XAB ڏاهيو.

(iii) $\overline{AX}$ مان 3.2 سينٽي ميٽر ڊگهو ليڪ ٽڪر $\overline{AC}$ کڍيو.

(iv) $\overline{BC}$ ڏاهيو.

گهربل ٽڪنڊو ΔABC ٺهي پيو.



. جڏهن هڪ پاسو ۽ ٻه ڪندون مليل هجن

مثال 01 ٽڪنڊو ΔABC ڏاهيو جنهن ۾

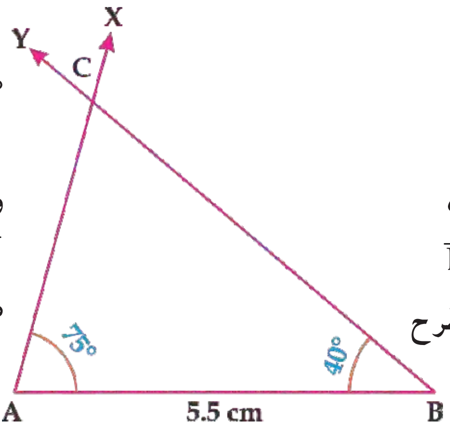
$m\overline{AB}=5.5$ س م، $m\angle A=75^\circ$ ۽ $m\angle B=40^\circ$

جوڙجڪ:

(i) 5.5 س م ڊگهو ليڪ ٽڪر کڍيو

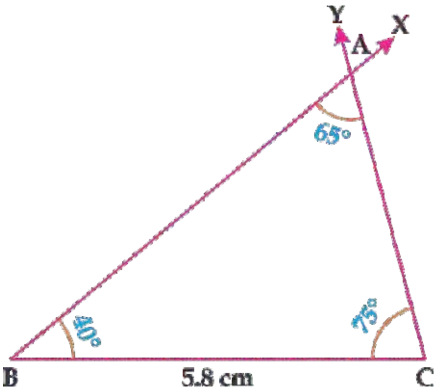
(ii) ٽبڪي A کي چوٽي طور وٺي 75°ماپ واري ڪند XAB ڏاهيو

(iii) ٽبڪي B کي چوٽي وٺي 40° ماپ جي ڪند YBA اهڙي طرح ڏاهيو جو $\overline{BY}$ ۽ $\overline{AX}$ کي ٽبڪي C تي ڪاٽي اهڙي طرح کپين ABC گهربل ٽڪندو آهي.



مثال 02 تڪندو ABC ناهيو جنهن ۾

$m\overline{BC} = 5.8$ س م ۽ $m\angle B = 40^\circ$ ، $m\angle A = 65^\circ$



جوڙجڪ: اسان کي خبر آهي تہ ٽڪنڊي ABC ۾

$m\angle A + m\angle B + m\angle B = 180^\circ$

هتي $m\angle A = 65^\circ$ and $m\angle B = 40^\circ$ تہ پوءِ

$$
\begin{aligned}
m\angle C &= 180^\circ - (m\angle A + m\angle B) \\
&= 180^\circ - (65^\circ + 40^\circ) \\
&= 180^\circ - 105^\circ \\
&= 75^\circ
\end{aligned}
$$

هاڻ اسان اهڙو ٽڪندو ناهينداسين جنهن ۾

$m\overline{BC} = 5.8$ س م , $m\angle B = 40^\circ$ ۽ $m\angle C = 75^\circ$ آهي.

(i) 5.8 س م ڊگهو ليڪ ٽڪر $\overline{BC}$ ڪيو

(ii) ٽپڪي B کي چوٽي طور وٺي 40° ماپ واري ڪنڊ XBC ناهيو.

(iii) ٽپڪي C کي چوٽي طور وٺي ڪنڊ $m\angle YCB = 75^\circ$ ناهيو.

(iv) $\overline{BX}$ ۽ $\overline{CY}$ شعاع هڪبئي کي A وٽ ڪپين ٿا. اهڙي ريت ABC گهربل ٽڪندو آهي.

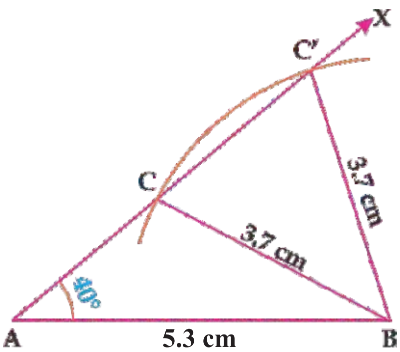
بہ پاسا ۽ ڪنهن بہ هڪ پاسي جي سامهون واري ڪنڊ (سيني ٿنهي صورتن ۾)

صورت I:

مثال 01 ٽڪندو ABC ناهيو جنهن ۾

$m\overline{BC} = 3.7$ س م $m\overline{AB} = 5.3$ س م , $m\angle A = 40^\circ$ ۽

جوڙجڪ:



(i) 5.3 س م ڊگهو ليڪ ٽڪر $\overline{AB}$ ڪيو

(ii) ٽپڪي A کي چوٽي طور وٺي $\angle BAX$ ناهيو جنهن جي ماپ 40° هجي.

(iii) ٽپڪي B کي مرڪز وٺي 3.7 س م جيترو هڪ قوس ڪيو. جيڪو $\overline{AX}$ کي C ۽ C′ ٽپڪن تي ڪٽي.

(iv) $\overline{BC}$ ۽ $\overline{BC'}$ ناهيو.

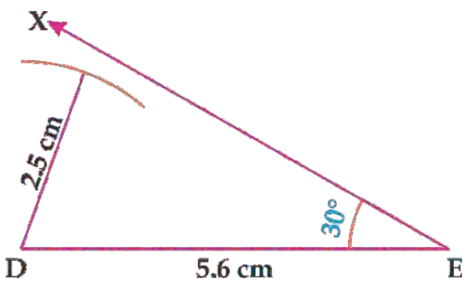
بہ ٽڪندا ABC′ ۽ ABC گهربل ٽڪند آهن.

صورت II:

مثال 02 تڪندو DEF ناهيو جنهن ۾

س م $m\overline{DE} = 5.6$ س م $m\overline{DF} = 2.5$, ۽ $m\angle E = 30°$

جوڙجڪ:



(i) 5.6 س م ڊگهو ليڪ ٽڪر $\overline{DE}$ ناهيو.

(ii) 30° ماپ واري ڪنڊ DEX ڪيو.

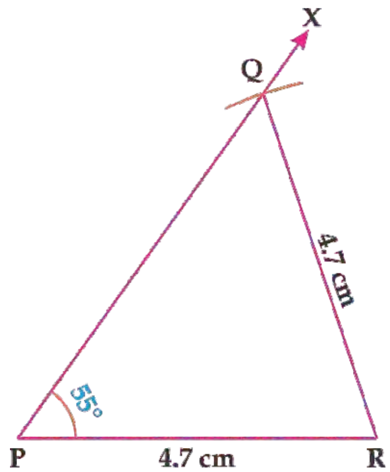
(iii) ٽپڪي D کي چوٽي طور وٺي 2.5 س.م رداس جيترو قوس ڪيو. جيڪو $\overline{EX}$ کي ڪنهن به ٽپڪي تي نه ٽوڪيپي. هن صورت ۾ ڏنل ماپن وارو ڪوبه ٽڪندو نه ٿو ناهي سگهجي

صورت III:

مثال 03 تڪندو PQR ناهيو جنهن ۾

$m\angle P = 55°$، ۽ $m\overline{PR} = m\overline{QR} = 4.7$ س.م

جوڙجڪ:



(i) 4.7 س.م ڊگهو ليڪ ٽڪر $\overline{PR}$ ناهيو.

(ii) 55° ماپ واري ڪنڊ XPR ناهيو.

(iii) ٽپڪي R کي چوٽي طور وٺي 4.7 س.م رداس جيترو هڪ قوس ڪيو، جيڪو $\overline{PX}$ کي ٽپڪي Q وٽ ڪٽي

(iv) ٽپڪن Q ۽ R کي ملايو.

ΔPQR گهربل ٽڪندو آهي.

نوٽ: مٿيون صورتون I ، II ۽ III مبهم صورتون آهن

مشق 13.1

1. تڪندو .PQR ناهيو جنهن ۾ $m\angle Q = 35°$ ۽ س.م $m\overline{PQ} = m\overline{QR} = 4.6$
2. تڪندو ABC ناهيو جنهن ۾ $m\angle A = 65°$ ۽ س.م $m\overline{AB} = m\overline{AC} = 5.1$
3. تڪندو LMN ناهيو جنهن ۾ $\angle M = 50°$ ۽ س.م $m\overline{MN} = 2.5$ س.م $m\overline{LM} = 3.7$
4. تڪندو ABC ناهيو جنهن ۾ $\angle B = 110°$ ۽ س.م $m\overline{BC} = 2.7$ س.م $m\overline{AB} = 3.5$
5. تڪندو XYZ ناهيو جنهن ۾ $\angle Z = 80°$ ۽ س.م $m\overline{YZ} = 5$ س.م $m\overline{XY} = 4.1$

6. هيٺيان ٽڪنڊا ΔABC ۽ ΔDEF, ΔLMN ناهيو.

(i) $m\overline{DE} = 5$ س م , $m\angle D = 45°$ and , $m\angle E = 60°$

(ii) $m\overline{LM} = 6$ س م , $m\angle L = 75°$ and , $m\angle M = 45°$

$m\overline{BC} = 5.8$ س م , $m\angle A = 30°$ and , $m\angle B = 45°$

7. ٽڪنڊو ABC ناهيو جڏهن ان جي ٻن پاسن جي ماپ ۽ هڪ پاسي جي سامهون واري ڪند جي ماپ مليل هجي.

(i) $m\overline{AC} = 4.5$ س م $m\overline{BC} = 4.1$ س م and $m\angle B = 75°$

(ii) $m\overline{BC} = 5$ س م, $m\overline{AB} = 5.5$ س م and $m\angle C = 70°$

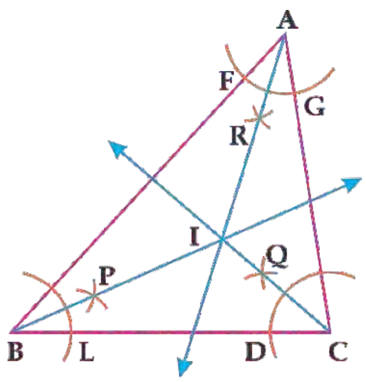
(iii) $mAB = 5$ س م, $m\overline{BC} = 5.5$ س م and $m\angle A = 45°$

13.1.2: ناهيو

- ڪند جا اڌ ڪندڙ
- عمود
- عمودي اڌ ڪندڙ
- مڊيان

(i) ڏنل ٽڪنڊي جي ڪند جا اڌ ڪندڙ ناهيو.

مثال ٽڪنڊي ΔABC جي ڪندن جا اڌڪندڙ ڪيو.



مليل: ABC هڪ ٽڪنڊو آهي ۽ ∠A, ∠B , ∠C ان جون ڪندون آهن.

گهربل: ∠A, ∠B ۽ ∠C جا اڌ ڪندڙ ڪيڻ.

جوڙجڪ:

(i) ٽڪنڊو ABC ناهيو.

(ii) ٽپڪي B کي مرڪز وٺي مناسب رداس وارو قوس ڪيو، جيڪو $\overline{BC}$ ۽ $\overline{BA}$ کي ٽپڪن L ۽ M تي ڪپي.

(iii) ٽپڪي L کي مرڪز وٺي مناسب رداس جو قوس ڪيو.

(iv) هان ٽپڪي M کي مرڪز وٺي مناسب رداس جو قوس ڪيو جيڪو قوس کي P ٽپڪي تي ڪپي.

(v) P ۽ B کي ملائي $\overline{BP}$ ناهيو.

(vi) قدم (ii) کان (v) تائين ورجائي، $\overline{AR}$ ۽ $\overline{CQ}$ ناهيو جيڪي ترتيبوار ∠A ۽ ∠C جا اڌ ڪندڙ آهن.

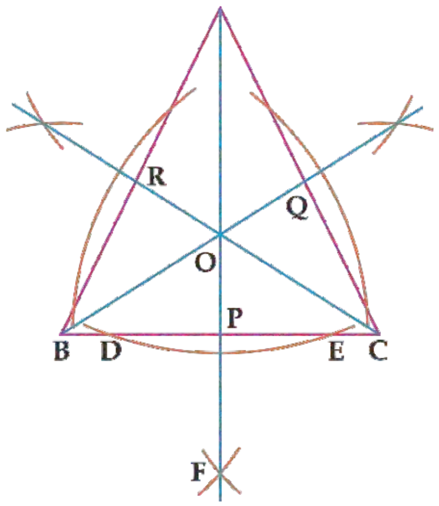
(ii) ڏنل ٽڪنڊي جا عمودي ڳاهيو.

مثال ڪوبہ ٽڪنڊو ABC ونو ۽ ان جا عمود ڳاهيو.

مليل: ٽڪنڊو ABC

گهربل: ٽڪنڊي ABC جا عمود ڪيڻ

جوڙجڪ:



(i) ٽڪنڊو ABC ڪيو.

(ii) ٽپڪي A کي مرڪز وٺي مناسب رداس سان قوس ڪيو. جيڪو $\overline{BC}$ کي ٽپڪن D ۽ E وٽ ڪپي.

(iii) ٽپڪي D کي مرڪز وٺي $\overline{DE}$ جي ماپ جي اڌ کان وڌيڪ جيتري رداس جو قوس ڪيو.

(iv) وري ٽپڪيE کي مرڪز وٺي $\overline{BC}$ جي ٻاهرين پاسي رداس سان هڪ ٻيو قوس ڪيو جيڪو پهرين قوس کي ٽپڪي F تي ڪپي.

(v) ٽپڪن A ۽ F کي ملايو. اهڙي طرح $\overline{AF}$ ۽ $\overline{BC}$ کي ٽپڪ P وٽ ڪپي تہ $\overline{AP}$ ٽڪنڊي ABC جي چوٽي A کان هڪ عمود ٿيي پيو.

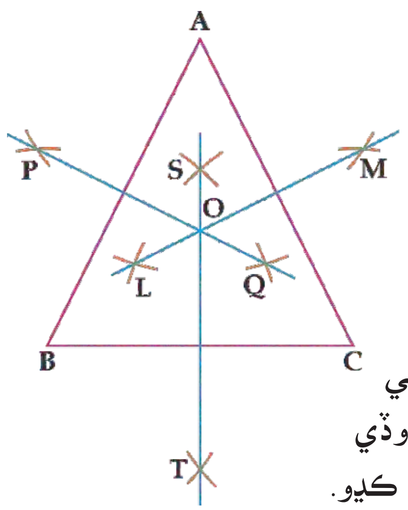
(vi) ساڳي طرح قدم (ii) کان (v) دهرايو $\overline{BQ}$ ۽ $\overline{CR}$, ڳاهيو جيڪي چوٽين B ۽ C کان ٽڪنڊي ABC جي رهيل پاسن تي عمود آهن.

(iii) ڏنل ٽڪنڊي جي عمود جا اڌ ڪنڊڙ ڳاهيو.

مثال ٽڪنڊي ABC جا عمودي اڌ ڪنڊڙ ڪيو.

مليل: هڪ ٽڪنڊو ABC

گهربل: ٽڪنڊي جي پاسن $\overline{BC}$,$\overline{AB}$ ۽ $\overline{CA}$ جا عمودي اڌ ڪنڊڙ ڪيڻ.



جوڙجڪ: (i) ٽڪنڊو ABC ڳاهيو

(ii) پاسي $\overline{AB}$ جو عمودي اڌ ڪنڊڙ ڪيڻ لاءِ ٽپڪي B کي مرڪز وٺي $\overline{AB}$ جي ماپ جي اڌ کان وڌي رداس سان $\overline{AB}$ جي ٻنهي طرفن ڏانهن قوس ڪيو.

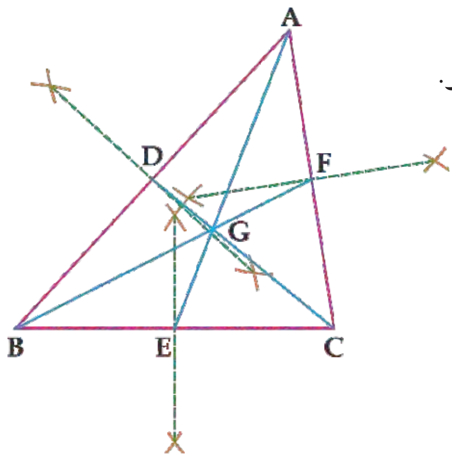
(iii) هاڻ ٽپڪي A کي مرڪز وٺي ساڳي رداس سان $\overline{AB}$ جي ٻنهي طرفن ڏانهن قوس ڪيو، جيڪي اڳ ۾ ڪڍيل قوسن کي ٽپڪن P ۽ Q تي ڪٽين ٿا.

(iv) P ۽ Q کي ملايو. $\overline{PQ}$ جيڪو $\overline{AB}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ آهي.

(v) قدم (ii) کان (iv) کي $\overline{BC}$ ۽ $\overline{AC}$ لاءِ ورجايو ته $\overline{ST}$ ۽ $\overline{LM}$, ٻہ ٽڪرا ملندا جيڪي $\overline{BC}$ ۽ $\overline{AC}$, جا ترتيبوار عمودي اڌ ڪندڙ آهن.
اهڙي طرح $\overline{PQ}, \overline{ST}$ ۽ $\overline{LM}$ گهربل عمودي اڌ ڪندڙ آهن.

(iv) ٽڪنڊي جا مڌيان ڪيو.

مثال



مثال ڪو بہ ٽڪنڊو وٺي، ان ٽڪنڊي جا مڌيان ٺاهيو.

مليل: ٽڪنڊو ABC

گهربل: ٽڪنڊي ABC جا مڌيان ڪڍڻ.

جوڙجڪ:

(i) ٽڪنڊو ABC ٺاهيو.

(ii) پاسن $\overline{AB}, \overline{BC}$ ۽ $\overline{AC}$ جا وچيان ٽپڪا D,E ۽ F تي ترتيبوار لکو.

(iii) A کي E سان، B کي F سان ۽ C کي D سان ملايو.
تہ جيئن $\overline{AE}, \overline{BF}$ ۽ $\overline{CD}$ مليل ٽڪنڊي ABCجا مڌيان آهن جيڪي هڪ ٻئي کي ٽپڪي G تي ڪپين ٿا.
اهو معلوم ٿيو تہ هر ٽڪنڊي جا مڌيان ساڳي ٽپڪي تي ملن ٿا ۽ انهن جي ملاپ جي ٽپڪي کي (Centroid) چئبو آهي. يعني هر مڌيان 2:1 ۾ ورهائجي وڃي ٿو. اصل ماپ سان اهو ثابت ڪري سگهجي ٿو تہ

$$\frac{m\overline{AG}}{m\overline{GE}} = \frac{m\overline{BG}}{m\overline{GF}} = \frac{m\overline{CG}}{m\overline{GD}} = \frac{2}{1}$$

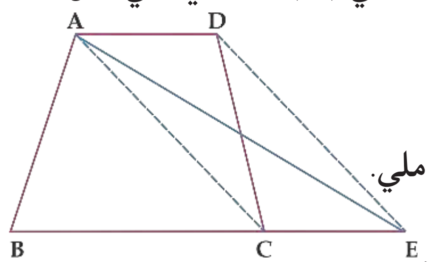
مشق 13.2

1. هڪ ٽڪنڊو ڪڍو ۽ ان جا مڌيان ناهيو. ثابت ڪريو تہ اهي ساڳي ٽبڪي تي ملن ٿا.
2. هڪ ٽڪنڊو ڪڍو ۽ ان جا عمود ناهيو. ثابت ڪريو تہ اهي ساڳي ٽبڪي تي ملن ٿا.
3. هڪ ٽڪنڊو ڪڍو ۽ ان جا اندرين ڪندن جا اڌڪندڙ ناهيو ۽ ثابت ڪريو تہ اهي ساڳي ٽبڪي تي ملن ٿا.
4. ٽڪنڊو ABC ناهيو جنهن ۾ $m\overline{BC}=6$ س.م، $m\overline{CA}=4$ س.م، $m\overline{AB}=5$ س م ان جي ڪندن A ۽ B جا اڌڪندڙ ناهيو.
5. ٽڪنڊو PQR ناهيو جنهن ۾ $m\overline{PQ}=5.7$ س.م $m\overline{QR}=6.4$ س.م ۽ $m\overline{PR}=4.4$ س.م آهي، ان جي چوٽي R ۽ Q کان عمود ناهيو.
6. ٽڪنڊو $m\overline{TU}=7$ ناهيو جنهن ۾ $\angle U=30°$ $\angle T=60°$ ۽ ABC تہ ٽڪنڊي جي پاسن جا عمودي اڌ ڪندڙ ناهيو ۽ ثابت ڪريو تہ اهي ساڳي ٽبڪي تي ملن ٿا.
7. گوني ڪند ٽڪنڊو $\angle B = 45°$ ناهيو، جنهن ۾ $\angle C = 90°$ س م $m\overline{CB}=5$ ۽ ان جا مڌيان ناهيو.
8. ٽڪنڊو ΔXYZ ناهيو، ان جا ٽيئي مڌيان ناهي ثابت ڪريو تہ اهي هم ٽبڪا آهن.
   (i) $m\overline{YZ}=4.4$ س م , $m\angle Y = 45°$ and $m\angle Z = 75°$
   (ii) $m\overline{XY}=4.6$ س م , $m\ m\overline{XZ} = 4.6$ س م and $m\angle Y = 60°$
9. ٽڪنڊو ΔKLM ناهيو، جنهن ۾ $\overline{KL}=4.8$ س م، $\overline{LM}=5.2$ س م ۽ $m\overline{MK}=4.5$ ان جا عمود ناهي انهن جو هم ٽبڪي تي ملڻ جي چڪاس ڪريو.

13.2 برابر ايراضي واريون شڪليون

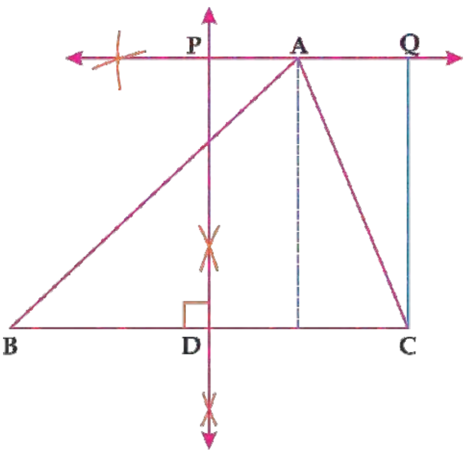
13.2.1 ٽڪنڊو ناهيو جيڪو ڏنل چوڪنڊي جي ايراضي جي برابر هجي.

مثال: ڏنل چوڪنڊي ABCD ۾ مليل ايراضي جي برابر هڪ ٽڪنڊو ناهيو. اسان کي خبر آهي تہ ساڳي بنياد وارن سيني ٽڪنڊن جي ايراضي برابر هوندي آهي. جن جو چوٽيون عمود کان بنياد تي هونديون آهن.



1. ABCD مليل چوڪندو آهي.
2. A ۽ C کي ملايو.
3. $\overline{AC}$ جي $\overline{DE}$ پوروچوٽ $\overline{DE}$ ناهيو جيڪو $\overline{BC}$ سان ملي. ۽ ان کي E تائين وڌايو.
4. A ۽ E کي ملايو تہ ABE گهربل ٽڪنڊو آهي.

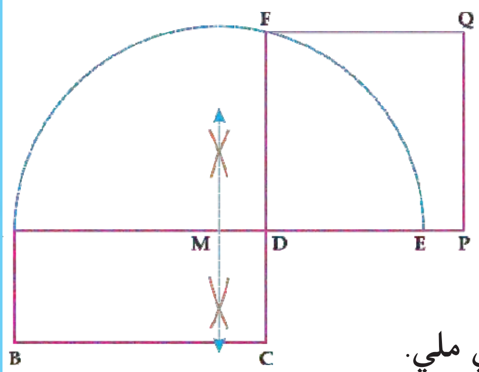
13.2.2 ڏنل ٽڪنڊي ۾ مليل ايراضي جي برابر مستطيل ٺاهيو.



مثال ڏنل ٽڪنڊي ۾ مليل ايراضي جي برابر هڪ مستطيل ٺاهيو.

1. هڪ ٽڪنڊو ABC ٺاهيو.
2. $\overline{BC}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{PD}$ ٺاهيو.
3. $\overline{BC}$. جي پورروچوت. $\overline{PQ}$ تي، A ڪان هڪ ليڪ ٺاهيو.
4. $m\overline{PQ} = m\overline{DC}$. جي وٺو.
5. ته پوءِ CDPQ گهربل مستطيل آهي.

13.2.3 ڏنل مستطيل ۾ مليل ايراضي جي برابر چورس ٺاهيو.



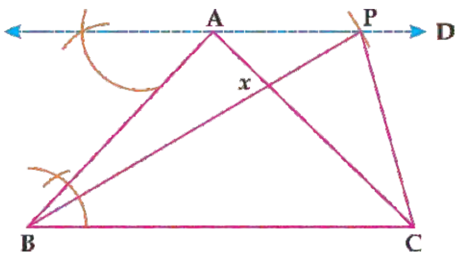
مثال: مليل مستطيل ABCD ۾ ايراضي جي برابر هڪ چورس ٺاهيو.

جوڙجڪ لاءِ هيٺيان قدم آهن.

1. ABCD هڪ مليل مستطيل آهي.
2. $\overline{AD}$ پاسي کي E تائين وڌايو ته جيئن $m\overline{DE} = m\overline{CD}$ ٿئي
3. $\overline{AE}$ کي M تبڪي تي اڌ ڪريو.
4. M مرڪز وٺي $\overline{AM}$ رداس سان اڌ گول ٺاهيو.
5. $\overline{CD}$ کي وڌايو ته جيئن اهو اڌگول کي F تي ملي.
6. هڪ پاسي $\overline{DF}$ تان هڪ چورس DFQP ٺاهيو جيڪو گهربل چورس هوندو.

13.2.4 مليل ماپ جي بنياد تي مساوي ايراضي جو ٽڪنڊو ٺاهيو.

جوڙجڪ لاءِ هيٺيان قدم آهن



1. ABC مليل ٽڪنڊو آهي.
2. $\overline{AD}$ کي $\overline{BC}$ جي پورو چوٽ ٺاهيو.
3. B مرڪز وٺي x رداس سان هڪ قوس ٺاهيو جيڪو $\overline{AD}$ کي P تي ڪپي.
4. $\overline{BP}$ ۽ $\overline{CP}$ کي پاڻ ۾ ملايو.
5. تہ پوءِ BCP گھربل ٽڪنڊو آهي.

برابر بنياد $BP = x$ جو ٽڪنڊو ۽ مساوي ايراضي ٽڪنڊي جي آهي.

مشق 13.3

1. هڪ مستطيل ٺاهيو جنهن جو پروارا پاسا ترتيبوار 2.5س.م آهن. هڪ چورس ٺاهيو جنهن جي ايراضي ڏنل مستطيل جي برابر آهي.
2. مستطيل جي ايراضي جي برابر چورس ٺاهيو جنهن جا پروارا پاسا ترتيبوار 4.5 س.م ۽ 2.2 س.م آهن، چورس جي پاسن جي ماپ ڪريو ۽ ان جي ايراضي معلوم ڪري مستطيل جي ايراضي سان ڀيٽ ڪريو ۽ چڪاس ڪريو چورس جو گھيرا مستطيل جي گھيري کان ماپ ۾ گھٽ آهي.
3. ٽڪنڊو ٺاهيو، جنهن جو بنياد 4 س.م ۽ ٻيا ٻہ پاسا هر هڪ 3.6 س.م ۽ 3.8 س.م آهن ان کي برابر ايراضي سان مستطيل ۾ تبديل ڪريو.
4. ٽڪنڊو ٺاهيو جنهن جو بنياد، 6 س.م ۽ ٻيا پاسا هر هڪ 5 س.م ۽ 6 س.م آهن ڏنل ٽڪنڊي جي ايراضي برابر هڪ مستطيل ٺاهيو.

ورجايل مشق 13

1. خال پريو.

(i) ٽڪنڊي جو وڏي ڪنڊ جي سامهون وارو پاسو ________ آهي.

(ii) هڪ ليڪ ٽڪر جيڪو ٽڪنڊي جي چوٽي سان ملي ۽ مخالف پاسي تي عمود هجي تہ ان کي ________ چئبو آهي.

(iii) هڪ ليڪ ٽڪر جيڪو ٽڪنڊي جي چوٽي کان ناهي، سامهون واري پاسي جي وچين ٽپڪي سان ملي تہ ان کي ________ چئبو آهي.

(iv) ٽڪنڊي جي پاسن جا عمودي اڌ ڪندڙ آهن ____________

(v) ٻہ يا ٻن کان وڌيڪ ٽڪنڊن کي يڪسا ن چئبو جيڪڏهن انهن جو ڪنڊون برابر آهن ۽ انهن جي پاسن جون ماپون ________ آهن.

2. صحيح جوا ب (✓) تڪ ڪريو.

(i) ٽڪنڊو جنهن جا ٽيئي پاسا يڪسا ن آهن چئبو آهي ________.

(a) اٽيور (b) گوني ڪند

(c) ٽيور پاسو (d) ٻيور پاسو

(ii) هڪ چوڪنڊو جنهن جي هر هڪند 90° جي برابر هجي ۽ سيئي پاسا يڪسا ن آهن. ان کي چئبو ________

(a) پورو چوٽ (b) مستطيل

(c) ٽريئيزيم (d) چورس

(iii) ٽڪنڊي جا مڌيان ________ آهن.

(a) هم ليڪ (b) يڪسان

(c) هم ٽبڪو (d) پورو چوٽ

(iv) ٽيورپاسي ٽڪنڊي جا ________ عمود پاڻ ۾ يڪسان آهن.

(a) ٻہ (b) ٽي

(c) چار (d) ڪو ٻہ نہ

(v) مستطيل جون اريبون هڪ ٻي سان ________ آهن.

(a) اڌواڌ (b) ٽن حصن ۾ ورهايل

(c) گوني ڪند تي ڪپيل (d) ڪو ٻہ نہ

(vi) ٽڪنڊي جا ______ هڪ ٻئي کي 2:1 جي نسبت ۾ ڪپين ٿا.

(a) عمود (b) ڪنڊن جا اڌ ڪندڙ

(c) عمودي اڌ ڪندڙ (d) مڌيان

(vii) جيڪڏهن ٻيور پاسي ٽڪنڊي جي بنياد جي هر هڪ ڪند 45 آهي تہ ٽي ڪند جي ماپ ______ آهي.

(a) 30° (b) 60°

(c) 90° (d) 120°

(viii) جيڪڏهن ٽڪنڊي جا ٽيئي مڌيان يڪسان آهن تہ ٽڪنڊو ________ آهي.

(a) گوني ڪند (b) ٽيورپاسو

(c) ٻيور پاسو (d) سوڙهي ڪند

(ix) جيڪڏهن ٽڪنڊي جا ٻہ ____ يڪسان آهن تہ اهو ٽڪنڊو ٻيور پاسو ٿيندو.

(a) عمود (b) مڌيان

(c) عمودي اڌ ڪندڙ (d) پاسا

خلاصو

- هن يونٽ ۾ اسان هينئين شڪلين ۾ تعلق رکندڙ تصورن جي جوڙجڪ بابت سکيو آهي.
- ٽڪندو ناهيوويوجنهن جا ٻہ پاسا ۾ وچ واري ڪنڊ مليل هجي.
- ٽڪندو ناهيوويوجنهن جو هڪ پاسو ۾ ٻہ ڪندون مليل هجن.
- ٽڪندو ناهيو ويو جنهن جا ٻہ پاسا ۾ ڪنهن هڪ پاسي جي سامهون واري ڪند مليل آهي.
- ٽڪنڊي جي ڪندن جا اڌ ڪندڙ ناهي انهن جي هم ٽبڪي جي چڪاس ڪرڻ.
- مليل ٽڪنڊي جا عمود ناهي انهن جي هم ٽبڪي جي چڪاس ڪرڻ.
- مليل ٽڪنڊي جا عمودي اڌ ڪندڙ ناهيو، انهن جي هم ٽبڪي جي چڪاس ڪريو.
- ٽڪنڊي جا مڌيان ناهڻ ۾ انهن جي هم ٽبڪي جي چڪاس ڪرڻ.
- ڏنل چوڪندي جي ايراضي برابر ٽڪنڊي ڪي ناهڻ.
- ڏنل ٽڪنڊي جي ايراضي جي برابر مستطيل جي جوڙجڪ ڪرڻ.
- ڏنل مستطيل جي ايراضي جي برابر چورس جي جوڙجڪ ڪرڻ.
- ڏنل ماپ جي بنياد تي مساوي ايراضي جو ٽڪندو ناهڻ.
- ٻہ يا ٽن کان وڌيڪ ليڪون هم ٽبڪي چئبيون، جيڪڏهن اهي مشترڪ ٽبڪي مان گذري ۾ ان ٽبڪي کي هم مرڪز ٽبڪو چئبو آهي.
- ٽڪنڊي جي ڪنهن جو اندريون اڌواڌ ڪندڙ ٽبڪي کي، ٽڪنڊي جو اندريون مرڪز (In centre) چئبو آهي.
- ٽڪنڊي جي پاسن جي عمودي اڌ ڪندڙ جي هم ٽبڪي کي احاطي جو مرڪز (Circum centre) چئبو آهي.
- مڌيان جو مطلب آهي تہ اهڙي ليڪ جيڪي ٽڪنڊي جي چوٽين کي مخالف پاسي جي وچين ٽبڪن سان ملائين.
- ٽڪنڊي جي عمودي مرڪز (Ortho centre) جو مطلب آهي ٽڪنڊي جي ٽن عمودن جو هم ٽبڪو.

یونٽ 14

ايراضي سان تعلق رکندڙ سڌيان
(Theorem Related with Area)

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي مطالعي کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- هيٺين سڌيان کي شامل نتيجن سان گڏ سمجهي سگهندا ۽ انهن کي استعمال ڪري لاڳاپيل حساب حل ڪندا.
- ساڳي بنياد ۽ ٻن پورو چوٽ ليڪن جي وچ ۾ لهندڙ پوروچوٽ چوڪندا ايراضي ۾ برابر آهن.
- برابر بنياد ۽ هڪ جهڙي عمود سان لهندڙ پوروچوٽ چوڪندا ايراضي ۾ برابر آهن.
- هڪ جهڙي بنياد ۽ هڪ جهڙي عمود سان لهندڙ ٽڪنڊا ايراضي ۾ برابر آهن.
- برابر بنياد ۽ هڪ جهڙي عمود سان لهندڙ ٽڪنڊا ايراضي ۾ برابر آهن.

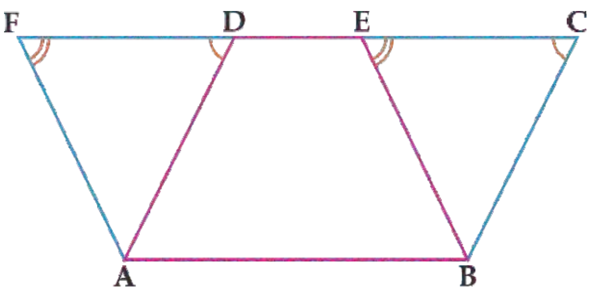
تعارف

اسان ايراضي سان تعلق رکندڙ سڌيا پڙهنداسين.

14.1 ايراضي سان تعلق رکندڙ سڌيان

سڌيان 14.1.1

ساڳي بنياد ۽ بن هڪ جهڙين پورو چوٽ ليڪن جي وچ ۾ نهندڙ پورو چوٽ چوڪندا ايراضي ۾ برابر آهن.



مليل: ABCD ۽ ABEF ٻه پورو چوٽ چوڪندا آهن جن جو بنياد $\overline{AB}$ هڪ جهڙو آهي ۽ پورو چوٽ ليڪون $\overline{AB}$ ۽ $\overline{DE}$ ٻه ساڳيون آهن.

گهربل: پورو چوٽ چوڪندا ABCD ۽ ABEF ايراضي ۾ برابر آهن يعني ▰ABCD=▰ABEF

ثابتي:

بيان	دليل
مطابقت ۾ ΔADF↔ΔBCE	
$m\overline{BC} = m\overline{AD}$ … (i)	ABCDجا سامهون پاسا برابر آهن.
$m\angle BCE = m\angle ADF$ … (ii)	ABCDجون نسبتي ڪندون
$\angle E \cong \angle F$ … (iii)	ABEFجون نسبتي ڪندون
	S.A.S≅S.A.S
ΔBCE ≅ΔADE ▲ADF ≅▲BCE	
▲ADF+▰ABED =▲BCE + ▰ABED	يڪسان شڪليون ايراضي ۾ برابر آهن. ساڳي ايراضي بنهي پاسي جوڙ ڪرڻ.
تنهنڪري ▰ABEF = ▰ABCD	▰ABCD = ▰ABED+ ▲BCE ▰ABEF = ▲ADF+▰ABED

Q.E.D.

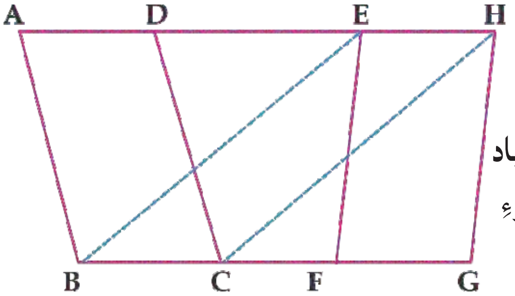
شامل نتيجو:

(i) پورو چوٽ چوڪندي جي ايراضي مستطيل جي ايراضي جي برابر آهي جيڪو ساڳي بنياد ۽ ساڳي عمود سان آهي.

سڌيان 14.1.2

برابر بنياد ۽ هڪ جهڙي عمود سان نهندڙ پورو چوٽ چوڪنڊا ايراضي ۾ برابر آهن.

مليل: ABCD ۽ EFGH بہ پورو چوٽ چوڪنڊا آهن. جن جا بنياد $\overline{BC}$ ۽ $\overline{FG}$ برابر آهن ۽ عمود پڻ برابر آهن.



گهربل: ▱ABCD = ▱EFGH

جوڙجڪ: ABCD ۽ EFGH پورو چوٽ چوڪنڊا اهڙي طرح ناهيو تہ جيئن سندن برابر بنياد $\overline{BC}$ ۽ $\overline{FG}$ ساڳي سڌي ليڪ تي هجن پوءِ B کي E سان ۽ C کي H سان ملايو.

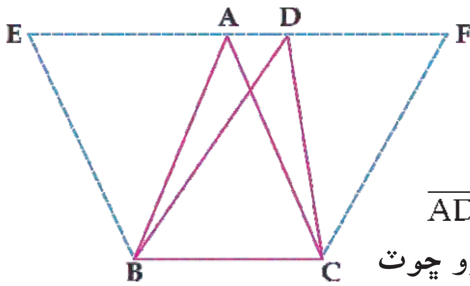
ثابتي:

بيان	دليل
پورو چوٽ چوڪنڊا ABCD ۽ EFGH پورو چوٽ ٽڪرن جي وچ ۾ آهن. تہ پوءِ A,D,E ۽ H ٽيڪا سڌي ليڪ تي آهن جيڪا $\overline{BC}$. جي پورو چوٽ آهي.	هنن جا عمود برابر آهن.
$m\overline{BC} = m\overline{FG}$	مليل
$m\overline{BC} = m\overline{EH}$	EFGHهڪ پورو چوٽ چوڪنڊو آهي ۽ $m\overline{BC} = m\overline{FG}$
$m\overline{BC} = m\overline{EH}$ پوروچوٽ آهن.	پوروچوٽ ليڪن جا ٽڪرا بہ پوروچوٽ هوندا آهن
تنهنڪري EBCH هڪ پورو چوٽ چوڪنڊو آهي.	هڪ چوڪنڊو، ٻن پورو چوٽ پاسن سان پورو چوٽ چوڪنڊو آهي.
هاڻ	
▱ABCD =▱EBCH … (i)	سڌيان14.1.1
پَر ▱EFGH=▱EBCH… (ii)	سڌيان14.1.1
تہ پوءِ ▱EFGH = ▱ABCD	(i) ۽ (ii) مان

Q.E.D

سڌيان 14.1.3

ساڳي بنياد ۽ ساڳي عمود سان ٺهندڙ ٽڪنڊا ايراضي ۾ برابر آهن.



مليل: ٽڪنڊا ABC ۽ DBC، ساڳي بنياد $\overline{BC}$ ۽ پورو چوٽ ليڪن $\overline{BC}$ ۽ $\overline{AD}$. تي آهن.

گهربل:

$\blacktriangle ABC = \blacktriangle DBC$

جوڙجڪ: $\overline{BE}$ پورو چوٽ $\overline{CE}$ جي ناهيو، جيڪي $\overline{AD}$ تي ملن ۽ انهن کي وڌايو E تائين. $\overline{CF}$ پورو چوٽ

ثابتي: $\overline{BD}$ جي ناهيو جيڪو $\overline{AD}$ تي ملي ۽ F تائين وڌايو.

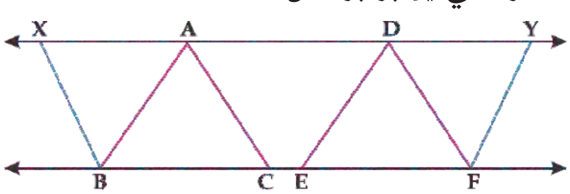
بيان	دليل
BCAE پورو چوٽ چوڪندو	جوڙجڪ
$\blacktriangle ABC = \frac{1}{2}$ (▰BCAE) … (i)	اريب $\overline{AD}$ پورو چوٽ چوڪندي کي تقسيم ڪري ٿي. BCAE ۾ ٽڪنڊن جي ايراضي جي برابر آهي.
ساڳي طرح BCFD بو هڪ پورو چوٽ چوڪندو آهي.	جوڙجڪ
$\blacktriangle DBC = \frac{1}{2}$ (▰BCFD) … (ii)	اريب CD پورو چوٽ چوڪندي کي تقسيم ڪري ٿي. BCFD ۾ ٽڪندي جي ايراضي جي برابر آهي.
$\blacktriangle DBC = \frac{1}{2}$ (▰BCFD) … (ii)	سڌيان 14.1.1
تہ پوءِ ▰BCAE = ▰BCFD … (iii)	
$\blacktriangle ABC = \blacktriangle DBC$	(i)، (ii) ۽ (iii) مان

Q.E.D

سڌيان 14.1.4

برابر بنياد ۽ برابر سان ٺهندڙ ٽڪنڊا ايراضي ۾ برابر آهن.

مليل: ٽڪنڊا ABC ۽ DEF، جيڪي ترتيبوار $\overline{BC}$ ۽ $\overline{EF}$ برابر بنياد ۽ عمود تي آهن.



ڳھربل:

▲ABC = ▲DEF

جوڙجڪ: $\overleftrightarrow{AD}$ ۽ $\overleftrightarrow{BF}$ ناھيو جنھن ۾ B, C, E, F ٽپڪا ھجن.
ٽڪنڊا ABC ۽ DEF برابر بنياد $\overline{BC}$ ۽ $\overline{EF}$ سان سڌي ليڪ تي آھن. $\overline{BX} \parallel \overline{CA}$ ۽ $\overline{FY} \parallel \overline{ED}$. ناھيو تہ جيئن ٽپڪا X ۽ $Y, \overleftrightarrow{AD}$ تي ھجن.

ثابتي:

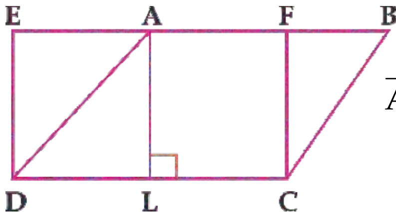
بيان	دليل/سبب
ٽڪنڊا ABC ۽ DEF ساڳين پورو چوت ليڪن تي آھن.	مليل (عمود برابر آھن)
BF XY	
∴▰BCAX =▰EFYD ... (i)	ستيان 14.1.2.
$\blacktriangle ABC = \frac{1}{2}$(▰BCAX) ... (ii)	پورو چوت چوڪندي جي اريب ٻن برابر ٽڪنڊن ۾ ورھائي تي
$\blacktriangle DEF = \frac{1}{2}$ (▰EFYD) ... (iii)	ساڳيو سبب
تنھنڪري ▲DEF = ▲ABC	(i), (ii) ۽ (iii) مان

Q.E.D

شامل نتيجو:

ساڳي سڌي ليڪ تي نھنڊڙ ٽڪندا جن جون ساڳيو چوٽيون ۽ برابر بنياد ھجن تہ ايراضي ۾ برابر ٿيندا.

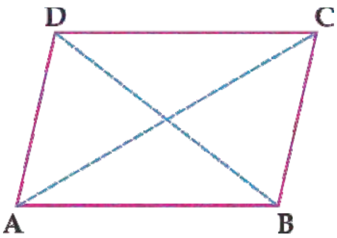
مشق 14.1



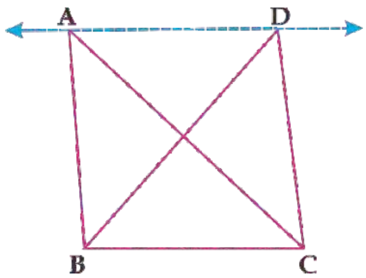
1. مليل شڪل، ABCD هڪ پورو چوٽ چوڪندو ۽ EFCD هڪ مستطيل آهي جنهن ۾ $\overline{AL} \perp \overline{DC}$ ثابت ڪريو تہ

(i) $\blacksquare ABCD = \blacksquare EFCD$

(ii) $\blacksquare ABCD = m\overline{DC} \times m\overline{AL}$



2. مليل شڪل ۾، جيڪڏهن چوڪندي جي اريبون ان کي چئن برابر ٽڪندن ۾ ورهائين تہ ٻڌايو تہ اهو پورو چوٽ چوڪندو آهي.



3. مليل شڪل ۾ $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ هڪ ABC گوني ڪند ٽڪندو آهي B، چوٽي ڪان، جنهن ۾ س م $m\overline{BC} = 7$ آهي. $m\overline{AC} = 11$ ۽ ΔABC جي ايراضي معلوم ڪريو.

4. ثابت ڪريو تو ٽڪندي جا مڌيان، ان کي ٻن برابر ايراضي وارن ٽڪندن ۾ ورهائن ٿا.

5. ثابت ڪريو تہ مستطيل جي آمهون سامهون وارن پاسن جي وچين ٽپڪن سان ملائيندڙ ليڪ ٽڪر ان کي ٻن برابر مستطيلن ۾ تقسيم ڪندو.

6. جيڪڏهن ٻہ برابر ايراضي وارا پورو چوٽ چوڪندا جن جو ساڳيو ۽ برابر بنياد هجي تہ انهن جا عمود ٻہ برابر ٿيندا.

7. ثابت ڪريو تہ ٽپور پاسي ٽڪندي جي ڪند جو اڌ ڪندڙ ان کي ٻن برابر ايراضي وارن ٽڪندن ۾ تقسيم ڪندو.

8. ثابت ڪريو تہ رامبس، ان جي اريبن سان چئن برابر ايراضي وارن ٽڪندن ۾ تقسيم ٿيندو.

ورجايل مشق

.1 هيٺ مليل لاءِ صحيح جي لاءِ T ۽ غلط لاءِ F ان جي سامهون ٽڪ ڪريو.

(i) بند شڪل جي ايراضي مطلب، اهو حصو جيڪو ليڪن سان شڪل کي بند ڪري. T/F

(ii) مستطيل جي اريب، ان کي ٻن يڪسان ٽڪنڊن ۾ ورهائي ٿي. T/F

(iii) يڪسان شڪلين کي مختلف ايراضي هوندي آهي. T/F

(iv) پورو چوٽ چوڪنڊي جي ايراضي بنياد ۽ اوچائي جي ضرب اپت برابر آهي. T/F

(v) ٽڪنڊي جي مڏيان جو مطلب انهن جي چوٽي کان، سامهون وري پاسي تي عمود آهي. T/F

(vi) ٻن پورو چوٽ ليڪن جو عمودي مفاصلو ڪنهن وقت مختلف به ٿي سگهي ٿو. T/F

(vii) چوٽي واري ٽبڪي کان ناهيل عمود هميشه سامهون پاسي کي اڏو اڏ ڪندو. T/F

(viii) ٻہ ٽڪنڊا ايراضي ۾ برابر ٿيندا، جيڪڏهن انهن جو ساڳيو بنياد ۽ برابر عمود هجن. T/F

.2 صحيح جواب کي (✓) ٽڪ ڪريو.

(i) جيڪڏهن ٻن ليڪن جي وچ جو عمودي مفاصلو ساڳيو آهي ته اهي ليڪون _________ آهن.

(a) هڪ ٻئي تي عمود (b) هڪ ٻئي سان پورو چوٽ

(c) هڪ ٻئي کي ڪپيندڙ (d) ڪو به نہ

(ii) جيڪڏهن ٻن ٽڪنڊن جي ايراضي برابر آهي ته پوءِ _________ يڪسان پڻ ٿيندا.

(a) ضروري نہ آهي. (b) ضروري آهي ته

(c) بلڪل (d) ڪو به نہ

(iii) ٽڪنڊي جي چوٽيءَ واري ٽبڪي کان، سامهون پاسي تي ٺهندڙ عمود کي _________ چئبو آهي.

(a) مڏيان (b) عمودي اڏ ڪندڙ

(c) عمود (d) ڪنڊ جو اڏ ڪندڙ

(iv) پورو چوٽ چوڪندا جن جو ساڳيو بنياد ۽ ساڳيو عمود هجي ______ آهن.

(a) يڪسان (b) ايراضي ۾ برابر

(c) هڪ جھڙا (d) هي سڀ

(v) پورو چوٽ چوڪندن جا برابر بنياد هجن ته انهن جي ساڳي ايراضي ٿيندي جيڪڏهن:

(a) انهن جو عمود برابر آهن (b) انهن جو عمود ساڳيو آهي

(c) اهي ساڳي پورو چوٽ ليڪن جي وچ ۾ هوندا

(d) هي سڀ

(vi) ΔABC ۽ ΔDEF جا برابر بنياد ۽ برابر عمود هجن ته پوءِ اهي ٽڪندا ______ آهن.

(a) ايراضي ۾ برابر (b) يڪسان

(c) هڪ جھڙا (d) هن مان ڪو به نه

خلاصو

- هن يونٽ ۾ اسان ڪجھ ضروري عملن کي ظاهر ۽ بيان ڪيو آهي ۽ هيٺيان سٽيان انهن جي شامل نتيجن سان گڏ ثابت ڪيا آهن.
- ساڳي بنياد ۽ ٻن پورو چوٽ ليڪن جي وچ ۾ لهندڙ پورو چوٽ چوڪندا ايراضي ۾ برابر آهن.
- برابر بنياد ۽ هڪ جھڙي عمود سان لهندڙ پورو چوٽ چوڪندا ايراضي ۾ برابر آهن.
- هڪ جھڙي بنياد ۽ هڪ جھڙي عمود سان لهندڙ ٽڪندا ايراضي ۾ برابر آهن.
- برابر بنياد ۽ هڪ جھڙي عمود سان لهندڙ ٽڪندا ايراضي ۾ برابر آهن.
- شڪل جي ايراضي جو مطلب، بند شڪل جو اهو حصو جيڪو حد جي ليڪن سان بند ٿيل هجي.
- مستطيلي حد جو مطلب ٽڪندن ۽ انهن جي اندرين جو ميلاپ.
- ٽڪندي جي ايراضي جو مطلب، اها ايراضي جيڪا ٽڪندي جي حدن تي هجي.
- ٽڪندي جي اوچائي يا عمود جو مطلب ته عمودي مفاصلو جيڪو بنياد کان ان جي سامهون واري چوٽي تائين هجي.

15 يونٽ

ٽڪنڊي جي پاسي جو واڌارو

(Projection of a Side of a Triangle)

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

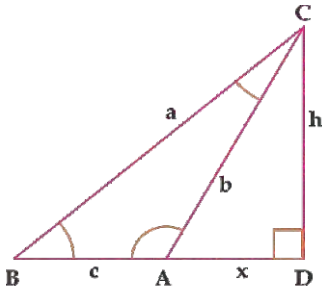
- ڪنھن ويڪري ڪند ٽڪنڊي ۾ ويڪري ڪنڊ جي سامھون واري پاسي جي ماپ جو چورس، ٻنھي سوڙهين ڪنڊن وارن پاسن جي چورس جي جوڙ سان گڏ مستطيل تي مشتمل هڪ پاسي ۽ ان واڌاري جي ٻيڻ جي برابر آهي.
- ڪنھن ٽڪنڊي ۾ سوڙهي ڪنڊ جي سامھون واري پاسي جو چورس، سوڙهي ڪند جي انھن گھٽيل پاسن جي چورس جي ڪٽ سان گڏ مستطيل جي هڪ پاسي ۽ ان جي واڌاري جي ٻيڻ جي برابر آهي.
- ڪنھن ٽڪنڊي ۾ ڪن بہ ٻن پاسن جي چورس جو جوڙ، ٽئي پاسي جي اڌ جي چورس سان گڏ، ان پاسي ڪي اڌواڌ ڪندڙ مڌيان جي چورس جي ٻيڻ جي برابر آهي.

15.1 تڪنڊي جي پاسي جو واڌارو

هينيان سڌيان، شامل ننڍن سان ڳنڍ سمجهي انهن جي استعمال سان لاڳاپيل حساب ڪريو.

سڌيان 15.1.1

ڪنهن ويڪري ڪنڊ ٽنڊي ۾ ويڪري ڪنڊ جي سامهون واري پاسي جو چورس، ٻنهي سوڙهين ڪنڊن وارن پاسن جي چورس جي جوڙ سان ڳنڍ مستطيل تي مشتمل هڪ پاسي ۽ ان جي واڌاري جو ٻيل جي برابر آهي.



مليل: ٽنڪنڊو ΔABC، جنهن جي ويڪري ڪنڊ A چوٽي آهي.

گهربل: $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$

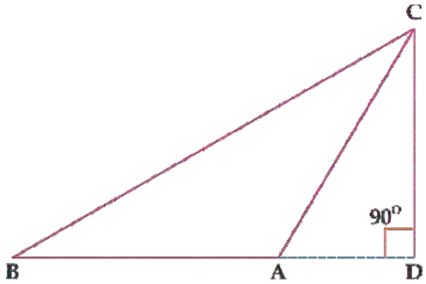
جوڙجڪ: $\overline{BA}$ تي هڪ عمود $\overline{CD}$ ناهيو جنهن ۾ $\overline{AD}$ وڌارو آهي $\overline{BA}$ جو ۽ ان کي $\overline{AC}$ سان ملايو جيئن $m\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, ۽ $m\overline{AB} = c$,$m\overline{AD} = x$ ۽ $m\overline{CD} = h$.

ثابتي

بيان	سبب / دليل
گوني ڪنڊ ٽڪنڊي CDA ۾ $m\angle CDA = 90^0$	جوڙجڪ
تنهنڪري $(m\overline{AC})^2 = (m\overline{AD})^2 + (m\overline{DC})^2$	پيٿاگورس سڌيان مطابق
جيئڪو $b^2 = x^2 + h^2$ ... (i) ,	مفروضي طور
گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ΔCDB ۾ $m\angle CDB = 90^0$	جوڙجڪ
تنهنڪري $(m\overline{BC})^2 = (m\overline{BD})^2 + (m\overline{CD})^2$	پيٿاگورس سڌيان مطابق
جيئڪو $a^2 = (c + x)^2 + h^2$ ... (i)	
يا $a^2 = c^2 + 2cx + x^2 + h^2$ ... (ii)	$m\overline{BD} = m\overline{BA} + m\overline{AD}$
$a^2 = c^2 + 2cx + b^2$	$b^2 = x^2 + h^2$
ته پوءِ $(m\overline{BC})^2 = (m\overline{AB})^2 + 2(m\overline{AB})(m\overline{AD}) + (m\overline{AC})^2$	

Q.E.D

مثال: تکندو ΔABC جنهن جي ويڪري ڪند A چوٽي تي آهي. جيڪڏهن $\overline{CD}$ ، D تيڪي تائين وڌيل پاسي $\overline{BA}$ تي عمود هجي ۽ $m\overline{AC}=m\overline{AB}$ آهي تہ پوءِ $(m\overline{BC})^2=2(m\overline{AB})(m\overline{BD})$ ثابت ڪريو. تيندو.



مليل: تکندو ΔABC جنهن ۾ ڪند $m\angle A$ هڪ ويڪري ڪند آهي ۽ $m\overline{AC}=m\overline{AB}$. $\overline{CD}$ عمود آهي $\overline{BA}$ تي جنهن کي D تائين وڌايو.

گهربل:

$$(m\overline{BC})^2=2(m\overline{AB})(m\overline{BD})$$

ثابتي.

بيان	Reasons
تکندي ΔABC ۾	
$(m\overline{BC})^2=(m\overline{AB})^2+2(m\overline{AB})(m\overline{AD})+(m\overline{AC})^2$	سڌيان 15.1.1
$(m\overline{BC})^2=(m\overline{AB})^2+2(m\overline{AB})(m\overline{AD})+(m\overline{AB})^2$	مليل $m\overline{AC}=m\overline{AB}$
$(m\overline{BC})^2=2(m\overline{AB})^2+2(m\overline{AB})(m\overline{AD})$	$2m\overline{AB}$ کي مشترڪ ڪرڻ سان
$(m\overline{BC})^2=2m\overline{AB}(m\overline{AB}+m\overline{AD})$	$m\overline{BD}=m\overline{AD}+m\overline{AB}$
$(m\overline{BC})^2=2(m\overline{AB})(m\overline{BD})$	

Q.E.D

مشق 15.1

.1 $\overline{AB}$ جي ڊيگهہ ۽ تکندي ABC جي ايراضي معلوم ڪريو جڏهن

(i) $m\overline{AC}=3cm,\ m\overline{BC}=6cm$ and $m\angle C=120^0$

(ii) $m\overline{CD}=m\overline{BC}\ \cos(180^0-m\angle C)$

$$(m\overline{BC})^2=(m\overline{AC})^2+(m\overline{AB})^2+2(m\overline{AB})(m\overline{AD})$$

.2 تڪنڊي ΔABC ۾ $m\overline{AC}$ جي ڊيگهه معلوم ڪريو، جڏهن $m\overline{BC}=6cm$, س.م ۽ $m\overline{AB}=4\sqrt{2}\ cm$ آهي. $m\angle ABC=135^0$ جيڪڏهن ممڪن هجي ته تڪنڊي ΔABC جي ايراضي معلوم ڪريو.

.3 تڪنڊي ΔABC ۾ $m\overline{AC}$ جي ڊيگهه معلوم ڪريو جڏهن ممڪن هجي ته تڪنڊي ABC جي, $m\overline{BC}=6\sqrt{2}\ cm$ ايراضي معلوم ڪريو.

سڌيان 15.1.2

ڪنهن تڪنڊي ۾ سوڙهي ڪنڊ جي سامهون واري پاسي جو چورس سوڙهي ڪنڊ جي، انهن

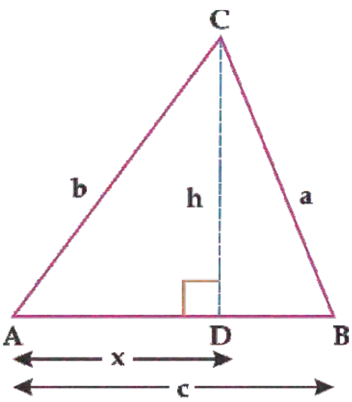
گهٽيل

پاس جي چورس جي ڪٽ سان گڏ مستطيل جي هڪ پاسي ان جي واڌاري جي ٻيڻ جي برابر آهي،

مليل: تڪنڊو ABC

$\angle CAB$ سوڙهي ڪنڊ آهي A چوٽي تي ΔABC

جنهن ۾ $m\overline{AB}=c$ ۽ $m\overline{BC}=a,\ m\overline{AC}=b$



گهربل:

$$(m\overline{BC})^2=(m\overline{AC})^2+(m\overline{AB})^2-2(m\overline{AB})(m\overline{AD})$$

جيڪو $\text{i.e. } a^2=b^2+c^2-2cx$

جوڙجڪ: $\overline{AC}$ تي عمود $\overline{CD}$ ناهيو، ته جيئن $\overline{AD}$ واڌارو آهي $\overline{AC}$ جو $\overline{AB}$ تي،

۽ $m\overline{AD}=x$ $m\overline{CD}=h$

ثابتي:

سبب / دليل	بيان
جوڙجڪ	گوني ڪند ٽڪنڊي ΔCDA ۾ $m\angle CDA = 90^0$,
پيٿاگورس ٿيوريم مطابق	تنهنڪري $\left(m\overline{AC}\right)^2 = \left(m\overline{AD}\right)^2 + \left(m\overline{CD}\right)^2$
مفروضي طور	جيڪو $b^2 = x^2 + h^2 \quad \ldots$ (i)
جوڙجڪ	گوني ڪند ٽڪنڊي ΔCDA ۾ $m\angle CDB = 90^0$
پيٿاگورس ٿيوريم مطابق شڪل مان	$\left(m\overline{BC}\right)^2 = \left(m\overline{BD}\right)^2 + \left(m\overline{CD}\right)^2$
$\therefore\ m\overline{BD} = m\overline{AB} - m\overline{AD}$	جيڪو $a^2 = \left(c - x\right)^2 + h^2$
	$a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2$
مساوات استعمال ڪرڻ سان	يا $a^2 = c^2 - 2cx + b^2$
	$a^2 = c^2 + b^2 - 2cx$
	تنهنڪري $\left(m\overline{BC}\right)^2 = \left(m\overline{AC}\right)^2 + \left(m\overline{AB}\right)^2 - 2\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{AD}\right)$

Q.E.D

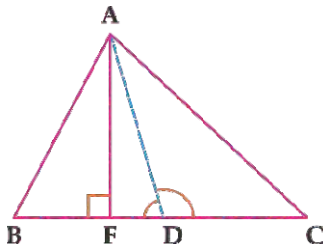
اپولونيس ۽ اپولونيس جا ٿيوريم

اپولونيس هڪ عظيم جاميٽري ۽ فلڪيات جو ماهر هو.

اسان هن جو مشهور ٿيوريم بيان ڪري ثابت ڪريون ٿا.

ٿيوريم 15.1.3 (اپولونيس ٿيوريم)

ڪنهن ٽڪنڊي ۾ ڪن ٻه پاسن جي چورس جو جوڙ، ٽئي پاسي جي اڌ جي چورس سان گڏ ان پاسي کي اڌوڙ ڪندڙ مڊيان جي چورس جي ٻيڻ جي برابر آهي.



مليل: تڪندو ΔABC جنهن ۾ $\overline{AD}$ سڌيان $\overline{BC}$ کي D ٽپڪي تي اڌواڌ ڪري ٿو.

اهڙي طرح جو . $m\overline{BD} = m\overline{CD}$

گهربل:

$$\left(m\overline{AB}\right)^2 + \left(m\overline{AC}\right)^2 = 2\left(m\overline{BD}\right)^2 + 2\left(m\overline{AD}\right)^2$$

جوڙجڪ: ناهيو $\overline{AF} \perp \overline{BC}$

ثابتي:

بيان	سبب / دليل
تڪنڊي ΔADB ۾ جڏهن $\angle ADB$ سوڙهي آهي. تنهنڪري $\left(m\overline{AB}\right)^2 = \left(m\overline{BD}\right)^2 + \left(m\overline{AD}\right)^2 - 2\left(m\overline{BD}\right)\left(m\overline{FD}\right)$...(i)	ΔADF گوني ڪند تڪندو آهي جنهن جي F گوني ڪند آهي. جوڙجڪ. سڌيان 15.1.2 کي استعمال ڪري.
هان تڪنڊي ΔADC ۾ جنهن ۾ $\angle ADC$ ويڪري ڪند آهي D تي تنهنڪري	سپليمينٽ $\angle ADB$ جي
$\left(m\overline{AC}\right)^2 = \left(m\overline{CD}\right)^2 + \left(m\overline{AD}\right)^2 + 2\left(m\overline{CD}\right)\left(m\overline{FD}\right)$ $\left(m\overline{AC}\right)^2 = \left(m\overline{BD}\right)^2 + \left(m\overline{AD}\right)^2 + 2\left(m\overline{BD}\right)\left(m\overline{FD}\right)$...(ii)	سڌيان 15.1.1 $m\overline{CD} = m\overline{BD}$
تنهنڪري	(i) ۽ (ii) کي جوڙ ڪرڻ سان
$\left(m\overline{AB}\right)^2 + \left(m\overline{AC}\right)^2 = 2\left(m\overline{BD}\right)^2 + 2\left(m\overline{AD}\right)^2$	eqs. (i) and (ii)

Q.E.D

مشق 15.2

1. تڪنڊي ΔABC ۾ $m\angle A=30^0$ m, ته ثابت ڪريو ته

$$\left(m\overline{BC}\right)^2=\left(m\overline{AC}\right)^2+\left(m\overline{AB}\right)^2-\sqrt{3}\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{AC}\right).$$

2. تڪنڊي ΔABC ۾ حل ڪريو جڏهن س.م $m\overline{BC}=\quad cm$ ، س.م $m\overline{AC}=5cm$ ۽ $m\angle A=60^0$

3. تڪنڊي جي مليل پاسن 3 س.م، 4. س.م ۽ 5 س.م سان ٺڪنڊو سوڙهي ڪنڊ، ويڪري ڪنڊ يا ڳوني ڪنڊ ٽيندو معلوم ڪريو.

4. تڪنڊي جي مليل پاسن 4 س.م، 7 س.م ۽ 8 س.م سان ٺڪنڊو ويڪري ڪنڊ، سوڙهي ڪنڊ يا ڳوني ڪنڊ ٽيندو معلوم ڪريو.

ورجايل مشق 15

1. خال ڀريو.

(i) ڳوني ڪنڊ ٽڪنڊي ΔABC ۾ $\left(m\overline{AC}\right)^2$ _________ $+\left(m\overline{AB}\right)^2$

(ii) تڪنڊي ΔABC ۾، ٻه پاسا 4 س.م جي برابر آهي ان کي چئبو _______ ٽڪنڊو.

(iii) تڪنڊي ΔABC ۾ $m\angle B=90^0 m\angle B=90^0$ ته _________ $=\left(m\overline{AB}\right)^2+\left(m\overline{BC}\right)^2$

(iv) 8 س.م، 15 س.م ۽ 17 س.م _________ جا پاسا آهن.

2. تڪنڊي ΔABC ۾ $\overline{AC}=3$ س.م $\overline{BC}=6$ س.م ۽ $\angle C=120^0$ ته معلوم ڪريو.

خلاصو

- ڪنهن ويڪري ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ ويڪري ڪنڊ جي سامهون واري پاسي جو چورس، ٻنهي سوڙهين ڪنڊن وارن پاسن جي چورس جي جوڙ سان گڏ مستطيل تي مشتمل هڪ پاسي ۽ ان واڌاري جي ضرب جي برابر آهي.
- ڪنهن ٽڪنڊي ۾ سوڙهي ڪنڊ جي سامعون واري پاسي جو چورس، سوڙهي ڪنڊ جي انهن گهٽيل پاسن جي چورس جي ڪٽ سان گڏ مستطيل جي هڪ پاسي ۽ ان جي واڌاري جي ضرب جي برابر آهي.
- ڪنهن ٽڪنڊي ۾ ڪن ٻه ٻن پاسن جي چورس جو جوڙ، ٽئي پاسي جي اڌ جي چورس سان گڏ، ان پاسي کي اڌواڌ ڪندڙ مڌيان جي چورس جي ضرب جي برابر آهي.

یونٽ 16

تجزياتي / محددي، جاميٽري جو تعارف

Introduction to Coordinate Geometry / Analytical Geometry

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- تجزياتي جاميٽري جي تعرف ۽ وضاحت ڪرڻ.
- مفاصلي جي فارمولا کي حلڪري، ڪارتيسي متاچري ۾ مليل ٻن ٽپڪن جي وچ ۾ مفاصلو معلوم ڪندا.
- فاصلي جو فارمولا استعمال ڪري ٻن ٽپڪن جي وچ ۾ مفاصلو معلوم ڪري سگهن.
- هم ليڪ ٽپڪن جي تعريف ڪري، هم ليڪ ۽ غير هم ليڪ ٽپڪن ۾ فرق ڪري سگهن.
- مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري ٿي يا وڌيڪ ٽپڪا هم ليڪ ٽپڪا آهن.
- مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري ثابت ڪن تہ ٿي غير هم ليڪ ٽپڪا ٺاهين ٿا.
  - ٽپور پاسو ٽڪندو
  - ٻپور پاسو ٽڪندو
  - ڳوني ڪند ٽڪندو
  - اٽپور پاسو ٽڪندو
- مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري ثابت ڪندا تہ، چار غير هم ليڪ ٽپڪا ٺاهين ٿا.
  - هڪ چورس
  - مستطيل
  - پوروچوٽ چوڪندو
- ٻن قليل ٽپڪن کي ملائيندڙ جو وچ وارو ٽپڪو معلوم ڪرڻ لاءِ فارمولا جي سجاڻپ ڪري سگهندا.
- مفاصلي جو فارمولا ۽ وچ واري ٽپڪي معلوم ڪرڻ جو فارمولا استعمال ڪري جاميٽري سان تعلق رکندڙ مختلف نتيجن کي حل ڪري چڪاس ڪندا.

تعارف

ڪارٽيسي محدد (Coordenate) 17 صدي ۾ (بيني ديڪارٽ لاطينگي نالو ڪارٽيسيوس) ايجاد ڪيو هن آلجبرا جي وچ ۾ پهريون پيرو منظم ڳانڍاپو مهيا ڪيو، جنهن رياضي جي ميدان ۾ انقلاب آڻي ڇڏيو ڪارٽيسي محددي نظام استعمال ڪري اسان جاميٽري جون شڪليون (جهڙوڪ ليڪون ۽ موڙ) مساواتن سان بيان ڪري سگهون ٿا.

16.1 مفاصلي جو فارمولا

16.1.1 محددي جاميٽري جي وصف ۽ وضاحت ڪريو.

محددي جاميٽري رياضي جي اهم ۽ دلچسپ شاخن مان هڪ آهي. خاص طور تي اسڪول ۾ رياضي جي لاءِ ان جي مرڪزي حيثيت آهي اها آلجبرا ۽ جاميٽري ۾ گراف، ليڪن ۽ موڙن تعلق ڪي مهيا ڪري ٿي.

محددي نظام جي مدد سان، جاميٽري جي آلجبري مطالعي کي محددي جاميٽري / تجرباني جاميٽري چئبو آهي.

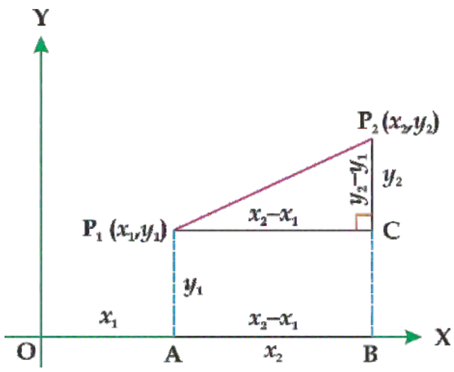
هي جاميٽري جي حسابن کي آلجبري صورت ۾ حل ڪرڻ ۾ مدد ڏي ٿو ۽ آلجبرا ۾ جاميٽري جو سجاڳپ ڏي ٿو. اهو جاميٽري جو حصو آهي جنهن ۾ عددن جا ترتيب ڏنل جوڙا متاچري تي ٽٻڪي کي جڳهه کي بيان ڪن ٿا. هتي محددي جاميٽري جو تصور (ڪارٽيسي جاميٽري) ۽ ان جون مساواتون، فارمولا واضح ڪيا ويندا.

16.1.2 ڪارٽيسي متاچري ۾ ٻن ٽٻڪن جي وچ ۾ مفاصلو ڪڍڻ لاءِ مفاصلي جو فارمولا حاصل ڪريو.

بيان:

ٻن ٽٻڪن جي وچ ۾ مفاصلو $P_1(x_1, y_1)$ ۽ $P_2(x_2, y_2)$ کي $|\overline{P_1P_2}|$ سان ظاهر ڪيو ويندو آهي جنهن جي هن طرح تعريف آهي.

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



مفاصلي جي فارمولا جو حل:

فرض ڪريو تہ $P_1(x_1, y_1)$ ۽ $P_2(x_2, y_2)$

۽ متاچري تي ٽيڪا آهن.

P_1 ۽ P_2 وٽان، $x-$ محور تي $\overline{P_1A}$ ۽ $\overline{P_2A}$ عمود ناهيو ۽ $x-$ محور جي پوروچوٽ $\overline{P_1C}$ پڻ ناهيو.

$$|\overline{P_1C}| = |\overline{AB}| = |\overline{OB}| - |\overline{OA}| = |x_2 - x_1|$$

$$|\overline{P_2C}| = |\overline{P_2B}| - |\overline{BC}| = |y_2 - y_1| \text{ ۽}$$

ΔP_1CP_2 کي گوني ڪند ٽڪندو سمجهيو. ۽ پيٿاگورس سڏيان استعمال ڪريو.

$$\therefore \quad |\overline{P_1P_2}|^2 = |\overline{P_1C}|^2 + |\overline{P_2C}|^2$$

$$\Rightarrow \quad |\overline{P_1P_2}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2$$

$$\Rightarrow \quad |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2}$$

نوٽ: مفاصلي جو فارمولا اصل نقطي $P(x, y)$ جو آهي

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

16.1.3 ٻن مليل ٽيڪن جو مفاصلو معلوم ڪرڻ لاءِ مفاصلي وارو فارمولا استعمال ڪريو.

هيٺيان مثال مفاصلي واري فارمولا جي استعمال ڪرڻ کي سمجهڻ ۾ مدد ڪندا.

مثال 01 ٻن ٽيڪن $P(2,3)$ ۽ $Q(-4,5)$ جي وچ ۾ مفاصلو معلوم ڪريو.

حل: مفاصلي وارو فارمولا استعمال ڪري $|\overline{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ هتي

$$(x_1, y_1) = (2,3), (x_2, y_2) = (-4,5)$$

$$\therefore \quad |\overline{PQ}| = \sqrt{(-4-2)^2 + (5-3)^2}$$

$$\Rightarrow \quad |\overline{PQ}| = \sqrt{(-6)^2 + (2)^2} = \sqrt{36+4}$$

$$\Rightarrow \quad |\overline{PQ}| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

مثال 02 هڪ گول 5 ايڪي رداس جو مرڪز $C(3,2)$ سان ناهيو ويو جنهن تي $L(6,6)$، $M(0,-1)$ ۽ $N(-2,-3)$ ٽپڪا مليل آهن معلوم ڪريو ته ڪهڙو ٽپڪو گول تي نہ آهي (سبب ڏيو).

حل: $C(3,2)$ گول جو مرڪز 5 ايڪا رداس سان آهي
۽ $L(6,6)$، $M(0,-1)$ ۽ $N(-2,-3)$ تي مليل ٽپڪا آهن
اسان کي خبر آهي ته
اسان کي C کان L، M ۽ N تائين ترتيبوار مفاصلو معلوم ڪرڻو آهي، جنهن لاءِ مفاصلي جو فرمولا استعمال ڪريو.

$$\therefore \quad \left|\overline{CL}\right| = \sqrt{(6-3)^2+(6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ units},$$

$$\left|\overline{CM}\right| = \sqrt{(0-3)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ units},$$

$$\left|\overline{CN}\right| = \sqrt{(-2-3)^2+(-3-2)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ units},$$

$$\left|\overline{CL}\right| = 5 \text{ units i.e, radius of the circle}$$

$$\left|\overline{CM}\right| = 3\sqrt{2} \text{ units} < 5 \text{ units}$$

$$\left|\overline{CN}\right| = 5\sqrt{2} \text{ units} > 5 \text{ units}$$

تنهنڪري $N(-2,-3)$ ٽپڪو گول تي نہ آهي.

مشق 16.1

1. مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري هيٺين ٽپڪن جي جوڙن جي وچ ۾ مفاصلو معلوم ڪريو.

(i) $(-4,5)$ ۽ $(6,6)$ (ii) $(2,2)$ ۽ $(2,3)$
(iii) $(0,1)$ ۽ $(2,3)$ (iv) $(0,1)$ ۽ $(2,3)$

2. $A(a,0)$ ۽ $B(0,b)$ ٽپڪا $x-$ محور تي آهن، A ۽ B جي وچ ۾ مفاصلو معلوم ڪريو جڏهن

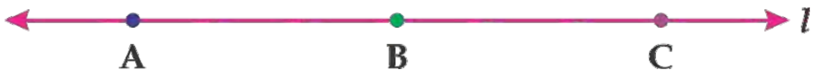
(i) $a=-3,\ b=-4$ (ii) $a=-9,\ b=6$
(iii) $a=3,\ b=4$ (iv) $a=\sqrt{2},\ b=-2\sqrt{2}$

3. تڪنڊي جو گهيراءُ معلوم ڪريو جيڪو ٽپڪن A(0,0)، B(4,0) ۽ $C(2,2\sqrt{3})$. جو ٺهيل آهي.

16.2 هم ليڪ ٽپڪا

16.2.1 هم ليڪ ٽپڪن جي وصف ڏيو. هم ليڪ ٽپڪن ۽ غير هم ليڪ ٽپڪن ۾ فرق معلوم ڪريو.

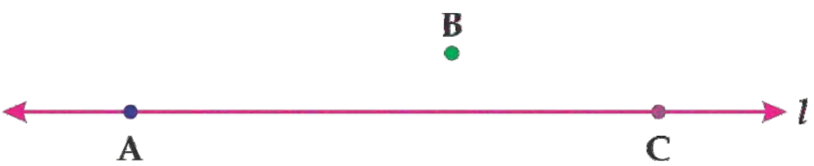
اهڙا ٽپڪا جيڪي هڪ ئي ليڪ تي هجن تن کي هم ليڪ (Collinear Point) چئبو آهي. هيٺ شڪل ۾



A، B ۽ C هم ليڪ ٽپڪا آهن جيئن $|\overline{AC}| = |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$

غير هم ليڪ ٽپڪا

ٽي يا وڌيڪ ٽپڪا غير هم ليڪ ٽپڪا چئبا جيڪڏهن اهي ساڳيءَ ليڪ تي نہ هجي. شڪل ۾



A، B ۽ C غير هم ليڪ ٽپڪا آهن.

نوٽ: ٽي غير هم ليڪ ٽپڪا ٽڪنڊو ٺاهيندا، چار غير هم ليڪ ٽپڪا چؤڪنڊو ٺاهيندا.

16.2.2 مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري ثابت ڪريو تہ ٽي (يا وڌيڪ) مليل ٽپڪا هم ليڪ آهن.

مثال 01 واضح ڪريو تہ $A(3,-2)$، $B(1,4)$ ۽ $C(-3,16)$ هم ليڪ ٽپڪا آهن.

حل: $A(3,-2)$، $B(1,4)$ ۽ $C(-3,16)$ ٽي مليل ٽپڪا آهن.

هاڻ اسان $|\overline{AB}|$، $|\overline{BC}|$ ۽ $|\overline{AC}|$ جو مفاصلو، مفاصلي وارو فارمولا استعمال ڪري معلوم ڪنداسين.

$$\therefore \quad |\overline{AB}| = \sqrt{(1-3)^2+(4+2)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ units,}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-3-1)^2+(16-4)^2} = \sqrt{16+144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \text{ units,}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-3-3)^2+(16+2)^2} = \sqrt{36+324} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10} \text{ units,}$$

هتي $|\overline{AB}|+|\overline{BC}| = 2\sqrt{10}+4\sqrt{10} = 6\sqrt{10} = |\overline{AC}| = d_3,$

تنهنڪري A، B ۽ C هم ليڪ ٽپڪا آهن. (واضح ٿيو)

مثال 02 مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري ظاهر ڪريو ته A(−2, −3)، B(4, 7) ۽ C(9, −5)

حل: A(−2, −3)، B(4, 7) ۽ C(9, −5) تي مليل ٽپڪا آهن.

هاڻ اسان $|\overline{AB}|$، $|\overline{BC}|$ ۽ $|\overline{AC}|$ جو مفاصلو، مفاصلي وارو فارمولا استعمال ڪري معلوم ڪنداسين.

$$\therefore \quad |\overline{AB}| = \sqrt{(4+2)^2+(7+3)^2} = \sqrt{36+100} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34} \text{ units,}$$

$$\Rightarrow \quad |\overline{BC}| = \sqrt{(9-4)^2+(-5-7)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13 \text{ units,}$$

$$\Rightarrow \quad |\overline{AC}| = \sqrt{(9+2)^2+(-5+3)^2} = \sqrt{121+4} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \text{ units,}$$

تنهنڪري $|\overline{AC}| \neq |\overline{AB}|+|\overline{AC}|$

ته پوءِ مليل ٽپڪا A، B ۽ C غير هم ليڪ ٽپڪا آهن.

16.2.3 مفاصلي وارو فارمولا استعمال ڪري ثابت ڪريو ته ڏنل تي غير هم ليڪ ٽپڪا ناهين ٿا.

(i) ٽپور پاسو ٽڪنڊو

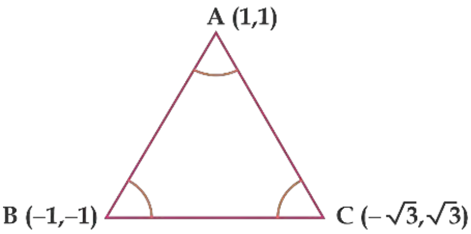
(ii) ٻيور پاسو ٽڪنڊو

(iii) گوني ڪند ٽڪنڊو

(iv) اڻپور پاسو ٽنڪنڊو

مثال 01 ظاهر ڪريو ته تي ٽپڪا A(1, 1)، B(−1, −1) ۽ $C(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$، ٽپور پاسو ٽڪنڊو ناهين ٿا.

حل: $A(1, 1)$، $B(-1, -1)$ ۽
$C(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$، مليل ٽپڪا آهن.
هاڻ اسان $|AB|$، $|BC|$ ۽ $|AC|$
ٽڪنڊي جي پاسن جو مفاصلو معلوم
ڪنداسين.
مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري



$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \text{ units,}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}+1\right)^2 + \left(\sqrt{3}+1\right)^2} = \sqrt{3-2\sqrt{3}+1+3+2\sqrt{3}+1} = \sqrt{8} \text{ units,}$$

and $|\overline{AC}| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}-1\right)^2 + \left(\sqrt{3}-1\right)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ units,

Since, $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{AC}| = 2\sqrt{2}$ units, and the points are non-collinear.

ThereforeABCis an equilateral triangle.

جيئن ته $|\overline{AC}| = |\overline{BC}| = |\overline{AB}| = 2\sqrt{2}$ ايڪا آهن ۽ ٽپڪا غير هم ليڪ ٽنهنڪري
ABC هڪ ٽپور پاسو ٽڪنڊو آهي.

مثال 02 ظاهر ڪريو ته ٽپڪا $A(3, 2)$، $B(9, 10)$ ۽ $C(1, 16)$ ٻپور پاسو ٽڪنڊو
ناهين ٿا.

حل: فرض ڪريو ته $A(3, 2)$، $B(9, 10)$ ۽ $C(1, 16)$ مليل ٽپڪا هن مفاصلي جو
فارمولا استعمال ڪري.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(9-3)^2+(10-2)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10 \text{ units},$$

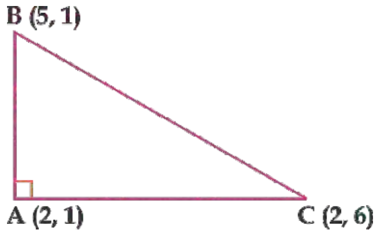
$$|\overline{AC}| = \sqrt{(1-3)^2+(16-2)^2} = \sqrt{4+196} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \text{ units},$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(1-9)^2+(16-10)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \text{ units},$$

جيئن ته $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = 10$ ايڪا ۽ ٽپڪا غير هم ليڪ آهن

مثال 03 جيئن ته ٻه پاسا ڊيگهه ۾ برابر آهن تنهنڪري ABC هڪ ٻيور پاسو ٽڪنڊو آهي.

حل: سمجهو ته $A(2, 1)$، $B(5, 1)$ ۽ $C(2, 6)$، ٽنڪڊي ABC جون چوٽيون آهن ته پوءِ مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري.



$$|\overline{AB}|^2 = (5-2)^2+(1-1)^2 = 9+0 = 9$$

$$|\overline{BC}|^2 = (2-5)^2+(6-1)^2 = 9+25 = 34$$

and $$|\overline{AC}|^2 = (2-2)^2+(6-1)^2 = 0+25 = 25$$

هتي

$$|\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 = 9+25 = 34$$

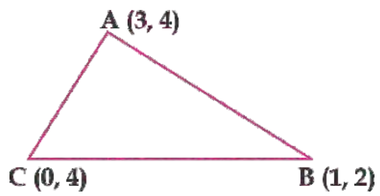
$$\Rightarrow \quad |\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 = |\overline{BC}|^2$$

پيٿاگورس سٿيان مطابق مليل چوٽيون گوني ڪند ٽڪنڊي مان آهن.

مثال 04 ظاهر ڪريو ته ٽپڪا $A(3, 4)$، $B(1, 2)$ ۽ $C(0, 4)$ اٽپور پاسو ٽڪنڊو ناهيندا.

حل: فرض ڪريو ته ٽپڪا $A(3, 4)$، $B(1, 2)$ ۽ $C(0, 4)$ مليل ٽپڪا آهن.

هاڻ هرهڪ پاسي جو مفاصلو معلوم



ڪرڻ لاءِ مفاصلي وارو فارمولا
استعمال ڪريو.

$$\therefore \quad |\overline{AB}| = \sqrt{(1-3)^2+(2-5)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \text{ units,}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(0-3)^2+(4-5)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \text{ units,}$$

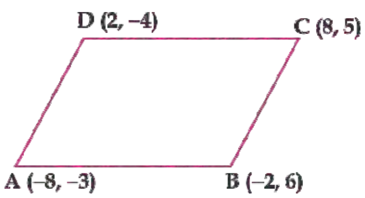
$$\text{and} \quad |\overline{AC}| = \sqrt{(0-1)^2+(4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \text{ units,}$$

جيئن ته $|\overline{AB}| \neq |\overline{BC}| \neq |\overline{AB}|$ ۽ ٽپڪا غير هم ليڪ آهن.
جيئن ته ٽنهي پاسن جي ديگهه پاڻ ۾ برابر نه آهي ان ڪري ABC اٽپور پاسو
ٽڪنڊو آهي.

16.4.6 مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري ظاهر ڪريو ته چار غير هم ليڪ ٽپڪا ناهين ٿا.

(i) پوروچوٽ چوڪندو
(ii) مستطيل
(iii) چورس

مثال 01 ظاهر ڪريو ته $A(-8, -3)$، $B(-2, 6)$ ۽ $C(8, 5)$ ۽ $D(2, -4)$ ٽپڪا لاڳيتون، پوروچوٽ چوڪندي جون چوٽيون آهن.



حل: فرض ڪريو ته $A(-8, -3)$، $B(-2,6)$
$C(8, 5)$ ۽ $D(2, -4)$،
پوروچوٽ چوڪندي جون لاڳيتون
چوٽيون آهن.
مفاصلي جو فارمولا استعملا ڪري.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-2+8)^2+(6+3)^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117} \text{ units,}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(8+2)^2+(5-6)^2} = \sqrt{100+1} = \sqrt{111} \text{ units,}$$

$$|\overline{DC}| = \sqrt{(2-8)^2+(-4-5)^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117} \text{ units,}$$

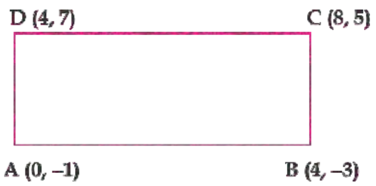
and $$|\overline{AD}| = \sqrt{(2+8)^2+(-4+3)^2} = \sqrt{100+1} = \sqrt{101} \text{ units,}$$

هاڻ $$|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = \sqrt{117}$$

۽ $$|\overline{BC}| = |\overline{AD}| = \sqrt{101}$$

A، B، C ۽ D پوروچوٽ چوڪنڊي جو چوٽيون آهن.

مثال 02 ظاهر ڪريو ته $A(0, -1)$، $B(4, -3)$ ۽ $C(8, 5)$ ۽ $D(4, 7)$ مستطيل جون لاڳيتيون چوٽيون آهن.



حل: فرض ڪريو ته (.) $B(4, -3)$ ۽ $C(8, 5)$ ۽ $D(4, 7)$ چوڪنڊي جا لاڳيتا ٽيڪا آهن.

مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري

$$d = |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \text{ unit}$$

هاڻ اسين

$$\therefore \quad |\overline{AB}| = \sqrt{(4-0)^2+(-3+1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \text{ units,}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(8-4)^2+(5+3)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} \text{ units,}$$

$$|\overline{DC}| = \sqrt{(4-8)^2+(7-5)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \text{ units,}$$

$$|\overline{AD}| = \sqrt{(4-0)^2+(7+1)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} \text{ units,}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(8-0)^2+(5+1)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} \text{ units,}$$

$$|\overline{BD}| = \sqrt{(4-4)^2+(7+3)^2} = \sqrt{0+100} = \sqrt{100} \text{ units,}$$

$$\therefore \quad |\overline{AB}| = |\overline{CD}| = \sqrt{20}$$

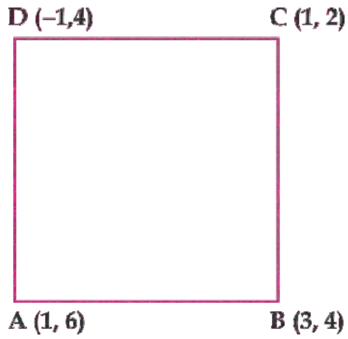
$$|\overline{BC}| = |\overline{AD}| = \sqrt{80}$$

$$|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$$

اريبون برابر آهن

A، B، C، D چارئي مستطيل جون ڪندون آهن.

مثال 03 ظاهر ڪريو ته لاڳيتا چار ٽپڪا A(3, 4)، B(1, 2)، C(0, 4) ۽ D(−1, 4) چورس ناهين ٿا.



حل: مليل A(3, 4)، B(1, 2)، C(0, 4) ۽ D(−1, 4)، چار لاڳيتا چوڪنڊي ABCD جا ٽپڪا آهن.
مفاصلي وارو فارمولا استعمال ڪري

$$\therefore \quad |\overline{AB}| = \sqrt{(3-1)^2+(4-6)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ units,}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(1-3)^2+(2-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ units,}$$

$$|\overline{DC}| = \sqrt{(1+1)^2+(2-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ units,}$$

$$\text{and} \quad |\overline{AD}| = \sqrt{(-1-1)^2+(4-6)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ units,}$$

جيئن ته $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{DC}| = |\overline{AD}| = 2\sqrt{2}$
چار پاسا ڊيگهه ۾ برابر آهن.

هاڻ اريبن جي ڊيگهه معلوم ڪرڻ سان

$$\therefore |\overline{AC}| = \sqrt{(1\text{-}1)^2+(2\text{-}6)^2} \quad = \sqrt{0+16} = 4 \text{ units,}$$

$$\text{۽} \quad |\overline{BD}| = \sqrt{(\text{-}1\text{-}3)^2+(4\text{-}4)^2} = \sqrt{16\text{-}0} = 4 \text{ units,}$$

جيئن ته $|\overline{AB}| = |\overline{BD}| = 4$ ته اريبن جي ڊيگهه ۾
پاڻ ۾ برابر آهن، تنهنڪري ABCD هڪ چورس آهي.

مشق 16.2

.1 ظاهر ڪريو ته (-3, -4) P ، (2, 6) Q ۽ R (0, 2) ٽپڪا هم ليڪ آهن.

.2 ظاهر ڪريو ته (-1, 0) A ، B (1, 0 ، $C\ (0, \sqrt{3})$ ٽپڪا غير هم ليڪ آهن.

.3 ظاهر ڪريو ته $L\ (0, \sqrt{3})$ ، (-1, 0) ، N (1, 0) هڪ ٽپور پاسو ٽڪنڊو ٺاهين ٿا.

.4 ظاهر ڪريو ته A(2, 3) ، B(8, 11) ۽ C(0, 17) ٽپڪا ٻپور پاسو ٽڪنڊو ٺاهين ٿا يا نه.

.5 ڇا ٽپڪا A(−1, 2) ، B(7, 5) ۽ C(2, −6) ڳوني ڪند ٽڪنڊو ٺاهين ٿا.

.6 جيڪڏهن A(3, 1) ، B(9, 1) ۽ C(6, k)، ڪي هڪ ٽپور پاسو ٽڪنڊو ظاهر ڪرڻ لاءِ k جو ملهه معلوم ڪريو.

.7 ظاهر ڪريو ته P(1, 2) ، Q(3, 4)، R(0, −1) اٽپور پاسي ٽڪنڊي جون چوٽيون آهن.

.8 ظاهر ڪريوته A(2, 3) ، B(8, 11) ، C(0, 17) ۽ D(−6, 9)، چوس جو چوٽيون آهن.

.9 ظاهر ڪريوته A(-2, 0) ، B(0, 3) ، C(2, 0) ۽ D(0, 3)، هڪ چورسي معلوم ڪنديون.

.10 ظاهر ڪريوته A(3, 2) ، B(4, 1) ، C(5, 4) ۽ D(6, 3)، هڪ مستطيل جون چوٽيون آهن.

.11 مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري ظاهري ڪريو ته O(0, 0) ، A(3, 0) ، B(5, 2) ۽ C(2, 2) پوروچوٽ چوڪندي جون چوٽيون ناهين ٿيون.

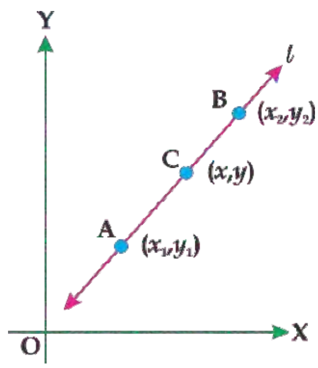
16.3 وچين ٽپڪي جو فارمولا

16.3.1 ٻن مليل ٽپڪن کي ملائيندڙ ليڪ جي وچ وارو ٽپڪو معلوم ڪرڻ لاءِ فارمولا جي سڃاڻپ ڪرڻ.

فرض ڪريو $A(x_1, y_1)$ ۽ $B(x_2, y_2)$ متاچري تي مليل ليڪ $\overline{AB}$ جا ٻه ٽپڪا آهن ۽ $C(x, y)$، $\overline{AB}$ جو گڇ ۾ وارو ٽپڪو آهي ته پوءِ

$C(x,y)=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ کي $\overline{AB}$

جو وچ وارو ٽپڪو چئبو آهي.



مثال 01 ٽپڪن $A(2, 1)$ ، $B(3, 4)$ کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر جو گڇ ۾ وارو ٽپڪو معلوم ڪريو.

حل: $A\ (2, 1)$ ۽ $B\ (3, 4$ ، ليڪ ٽڪر جا ٽپڪا آهن.

وچ وارو ٽپڪو = ؟

وچين ٽپڪي کي معلوم ڪرڻ جا فارمولا استعمال ڪري

$\overline{AB} = \left(\dfrac{2+3}{2}, \dfrac{1+4}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$ جو وچ وارو نڪتو

مثال 02 جيڪڏهن $A(2, 1)$ ، $B(5, 2)$ ، $C(3, 4)$ ، ΔABC جون چوٽيون آهن ته ترتيبوار پاسن $\overline{AC}$ ، $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ جي وچ وارا ٽپڪا P، Q ۽ R معلوم ڪريو.

حل:

$C(x,y) = \left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

$\therefore$ وچ وارو ٽپڪو $\overline{AC} = P = \left(\dfrac{2+3}{2}, \dfrac{1+4}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$,

وچ وارو ٽپڪو $\overline{AB} = Q = \left(\dfrac{2+5}{2}, \dfrac{1+2}{2}\right) = \left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$,

وچ وارو ٽپڪو $\overline{BC} = R = \left(\dfrac{5+3}{2}, \dfrac{2+4}{2}\right) = (4, 3)$,

ته ٽڪنڊي ΔABC جي پاسن جا گهريل وچ وارا ٽپڪا آهن.

$\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right), \left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ ۽ $(4, 3)$.

16.4 مفاصلي معلوم ڪرڻ جو فارمولا ۽ وچين ٽٻڪن جو فارمولا استعمال ڪري جاميٽري مان تعلق رکندڙ مختلف نتيجن کي حل ڪري چڪاس ڪريو.

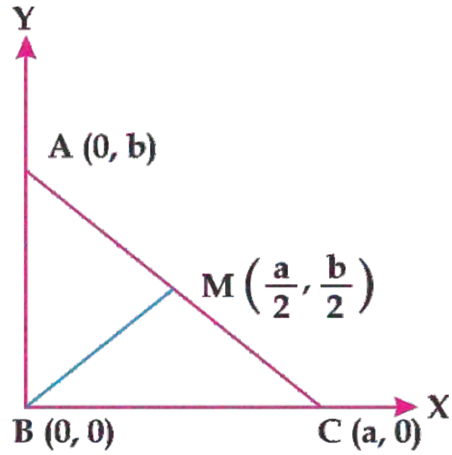
مثال 01 تجزياتي طريقي سان ثابت ڪريو ته گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي هئپاٽينيوز ڪان مڏيان جي ڊيگهه هئپاٽينيوز جي ڊيگهه جي اڌ برابر آهي.

حل: فرض ڪري ته ABC ٽڪنڊي جي B ٽٻڪي تي گوني ڪنڊ آهي. B کي $\overline{BC}$ جو اصل ٽٻڪو ڪٽي، جيئن $x-$ محور ۽ $y-$ محور ترتيبوار شڪل ۾ ڏنل آهي.

فرض ڪريو ته $|\overline{AB}| = c$ ۽ $|\overline{AB}| = b$ ته پوءِ $B(0, 0)$ ، $(a, 0)$ ۽ $(0, b)$ آهن

تنهنڪري $\overline{AC}$ جو وچ وارو ٽٻڪو ٿيندو $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{b+0}{2}\right)$ ، $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

هاڻ



Now $|\overline{AM}| = |\overline{CM}| = \frac{1}{2}|\overline{AC}|$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|}^{\;2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\left|\quad\right| \quad \sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{b}{2}-0\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

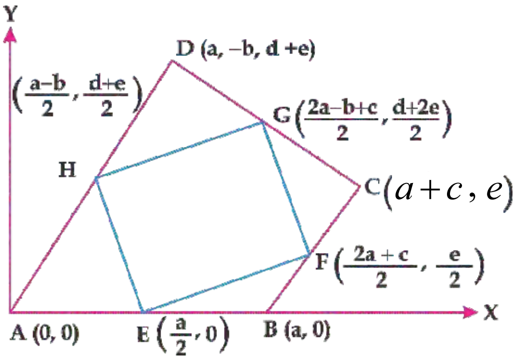
Therefore

هاڻ تنهنڪري ۽

$$|\overline{BM}| = \frac{1}{2}|\overline{AC}|$$

ته پوءِ مڏيان $|\overline{BM}|$ جي ڊيگهه هئپاٽينيوز $|\overline{AC}|$ جي ڊيگهه جي اڌ برابر آهي.

مثال 02 ڪنهن چوڪندي جي پاسن جي وچين ٽٻڪن کي ترتيبوار هلائڻ سان حاصل ٿيندڙ شڪل پوروچوٽ چؤڪندو آهي ثابت ڪريو.



حل: فرض ڪريو ته ABCD هڪ چؤڪندو ء E، F، G، H ترتيبوار پاسن $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$ ء $\overline{DA}$ جا وچ وارا ٽپڪا آهن.

جيڪڏهن A کي اصل ٽپڪو تصور ڪجي ته A ٽيندو (0, 0)، B ٽيندو $(a, 0)$، C ٽيندو $(a + c, e)$ ء D ٽيندو $(a - b, d + e)$

هاڻ وچ وارا ٽپڪا E، F، G ء H ترتيبوار ٽيندا.

$$\left(\frac{a}{2},0\right),\left(\frac{2a+c}{2},\frac{e}{2}\right),\left(\frac{2a-b+c}{2},\frac{d+2e}{2}\right) \text{ and } \left(\frac{a-b}{2},\frac{d+e}{2}\right).$$

تنهنڪري مفاصلي واري فارمولا سان

$$\left|\overline{EF}\right|^2 = \left(\frac{2a+c}{2}-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}-0\right)^2$$

$$= \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left\{(a+c)^2 + e^2\right\} \qquad \text{(i)}$$

$$\left|\overline{GH}\right|^2 = \left(\frac{2a-b+c}{2}-\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{d+2e}{2}-\frac{d+e}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left\{(a+c)^2 + e^2\right\} \qquad \text{(ii)}$$

From (i) and (ii) , we have

$\left|\overline{EF}\right| = \left|\overline{GH}\right|$

ساڳي طرح $\left|\overline{GF}\right| = \left|\overline{EH}\right|$

جيئن ته سامهون وارا پاسا برابر آهن ته پوءِ EFGH هڪ پوروچوت چؤڪندو آهي.

مشق 16.3

1. هيٺ ڏنل نقطن جي جوڙي جو وچ وارو نقطو معلوم ڪريو.

(i) $B(4,8)$ ۽ $A(2,6)$ (ii) $P(-3,-1)$ ۽ $Q(5,2)$

(iii) $L(0,6)$ ۽ $M(-8,0)$ (iv) $C(0,0)$ ۽ $D\left(2\sqrt{3},4\sqrt{3}\right)$

2. گول جو وچ وارو نقطو معلوم ڪريو جڏهن ته قطر جا آخري نقطا $A(-5,6)$ ۽ $B(3,-4)$ آهن.

3. گول جو وچ وارو نقطو $(3,4)$آهي ۽ قطر جا آخري نقطن مان هڪ نقطو $(4,6)$ آهي، ٻيو نقطومعلوم ڪريو.

4. گول جي قطر جا آخري نقطا $A(-3,4)$ ۽ $B(11,6)$آهي.گول جو وچ وارو نقطو ۽ نيم قطر معلوم ڪريو.

5. ثابت ڪريو ته ڪو ٽڪنڊو ٻيور ٽڪنڊو آهي جيڪڏهن ان وٽ ٻه برابر ميڊيان هجن.

6. ثابت ڪريو ته پورو چوٽ چوڪنڊي جا اڌيب هميشه هڪٻئي کي اڌ ڪن ٿا.

ورجايل مشق

.1 هيٺين جملن کي غور سان پڙهو، صحيح بيان لاءِ "T" ۽ غلط بيان جي لاءِ "F" تي گولو لڳايو.

(i) R ٽپڪو $\overline{PQ}$ وچيون ٽپڪو آهي، جيڪڏهن R موجود آهي. P ۽ Q جي وچ ۾. T/F

(ii) اٽپور پاسي ٽڪنڊي ۾ سڀ پاسا برابر آهن. T/F

(iii) عمودي ليڪون 135° جي ڪند تي ملنديون آهن. T/F

(iv) هم ليڪ ٽپڪا ٽڪنڊو ناهي سگهن ٿا. T/F

(v) غير هم ليڪ ٽپڪا ٽڪنڊو ناهيندا آهن. T/F

(vi) ٻيور پاسي ٽڪنڊي ۾ ٻه پاسا، ڪندون برابر آهن. T/F

(vii) سيئي ٽپڪا جيڪي y- محور تي هجن، هم ليڪ هوندا آهن. T/F

(viii) x- محور ۽ y- محور تي ڪاٽ (0, 0) آهي. T/F

(ix) اصل نقطي کان (6, 0) جو مفاصلو 36 ايڪا آهن. T/F

.2 خال پريو.

(i) جيڪڏهن $A(x_1, y_1$ ۽ $B(x_2, y_2$ هڪ ليڪ جا ٻه ٽپڪا آهن ته پوءِ $|\overline{A}B| =$ __________

(ii) هم ليڪ ٽپڪا هوندا ساڳي ____________ تي.

(iii) چوٿين چوٿي (quadrant) ۾ $x>0$ ۽ y ____________.

.3 صحيح جواب تي (✓) ٹک لڳايو.

(i) ٻه عمودي ليڪون پاڻ ۾ ____________ ڪند تي ملنديون.

(a) 45° (b) 60° (c) 90° (d) 180°

(ii) $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ڪي چئبو آهي.

(a) وچين ٽپڪن جو فارمولا (b) مفاصلي وارو فارمولا (c) ورهاست وارو فارمولا (d) نسبت وارو فارمولا

(iii) متاچري تي A (3, 0) ۽ B (0, 3)، ڪي ٻه ٽپڪا آهن ته پوءِ |AB| = ____________

(a) 6 ايڪا (b) $6\sqrt{2}$

(c) $3\sqrt{2}$ (d) $3\sqrt{2}$

(iv) ٽي نڪتا هم ليڪ ٽپڪا تڏهن ٿيندا جڏهن

(a) $(m\mathrm{AB})^2 \neq (m\mathrm{BC})^2 + (m\mathrm{AC})^2$ (b) $(m\mathrm{AB})^2 = (m\mathrm{BC})^2 + (m\mathrm{AC})^2$

(c) **Both** (d) $m\overline{\mathrm{AB}} = m\overline{\mathrm{BC}} + m\overline{\mathrm{AC}}$

خلاصو

- ٻن ٽپڪن $\mathrm{P}_1(x_1, y_1)$ ۽ $\mathrm{P}_2(x_2, y_2)$ جي وچ وارو مفاصلو مليل هوندو آهي (يونٽ) ايڪا. $d = \left|\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$
- $\overline{\mathrm{AB}}$ليڪ ٽڪر جو وچيون ٽپڪو مليل آهي، $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$
- هم ليڪ ٽپڪا سڌي ليڪ ناهيندا آهن.
- ٽن ٽپڪن A, B ۽ C جي جي هم ليڪ لاءِ $\left|\overline{\mathrm{AC}}\right| = \left|\overline{\mathrm{AB}}\right| + \left|\overline{\mathrm{BC}}\right|$ آهي.
- ٽي غير هم ليڪ ٽپڪا A, B ۽ C ٽڪنڊو ناهيندا، جيڪڏهن ٻن پاسن جي ماپ جو جوڙ ٽين پاسي جي ماپ کان وڌيڪ هجي.
- جيڪڏهن $\left|\overline{\mathrm{AB}}\right| = \left|\overline{\mathrm{BC}}\right| < \left|\overline{\mathrm{AC}}\right|$، ته پوءِ A, B ۽ C ٽپڪن سان کو ٻه ٽڪنڊو نٽو ناهي سگهجي.

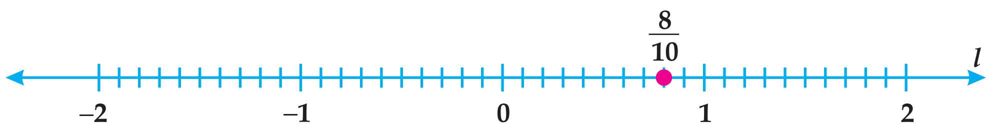
جوابات

Exercise 1.1

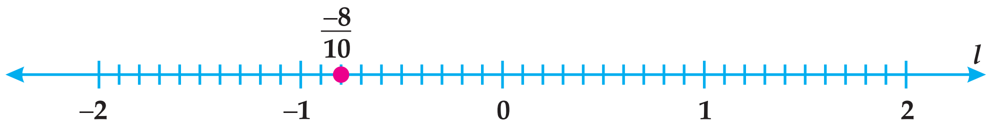
.1 i. ناطق عدد ii. غیر ناطق عدد
iii. غیر ناطق عدد iv. ناطق عدد
v. غیر ناطق عدد vi. غیر ناطق عدد
vii. ناطق عدد viii. غیر ناطق عدد
ix. غیر ناطق عدد x. ناطق عدد
xi. غیر ناطق عدد xii. ناطق عدد

.2 i. ختم تیندڑ ii. نہ ختم تیندڑ
iii. نہ ختم تیندڑ iv. ختم تیندڑ
v. ختم تیندڑ vi. نہ ختم تیندڑ

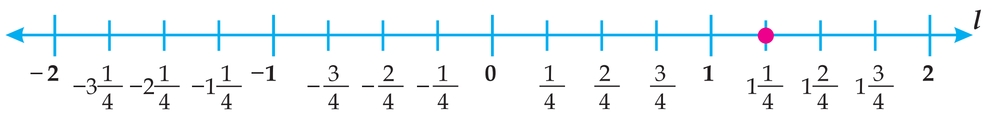
.3 i.



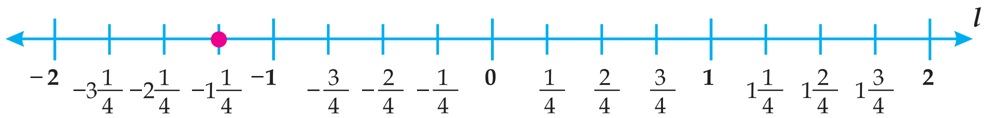
ii.



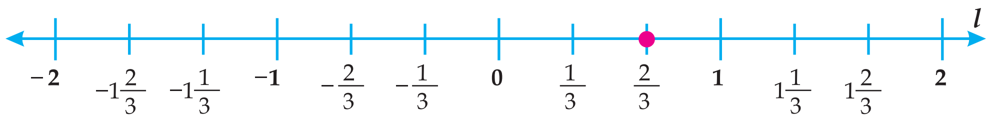
iii.



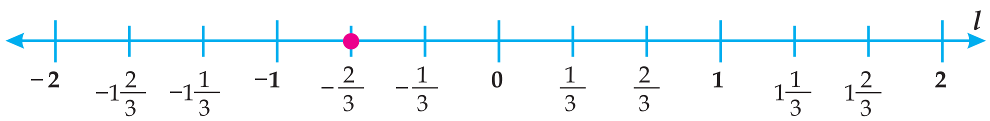
iv.



v.



vi.



.4 $\frac{3}{2},\frac{5}{4},\frac{9}{8},\frac{7}{4}$ اسان 2 ۽ 1 جي وچم سيني حقيقي عددن جي فهرست نہ ٿا ناهي سگهون

.5 π هڪ غير ناطق عدد آهي، ڇاڪاڻ تہ اهو نہ ختم ٿيندڙ نہ ورجندڙهائي اٽپور آهي

.6 i. F ii. T iii. T iv. T v. T vi. F

Exercise 1.2

.1
i. جوڙ جي مٽا واري خاصيت
ii. جوڙ جي سنگت واري خاصيت
iii. کابي کان ضرب جي جوڙ تي ورهائجڻ واري خاصيت
iv. ساڄي کان ضرب جي جوڙ تي ورهائجڻ واري خاصيت
v. ساڄي کان ضرب جي جوڙ تي ورهائجڻ واري خاصيت
vi. جوڙ جي مٽا واري خاصيت
vii. جوڙ جي سنگت واري خاصيت
viii. ضربي ابتڙ
ix. جمعي ابتڙ
x. ضربي ابتڙ
xi. کابي کان ضرب جي ڪٽ تي ورهائجڻ واري خاصيت
xii. ضربي ابتڙ

.2
i. $\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\boxed{3}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{2}}{\boxed{5}}$

ii. $\frac{7}{10}+\left(\frac{70}{\boxed{10}}+\frac{16}{33}\right)=\frac{7}{\boxed{10}}+\left(\frac{\boxed{70}}{10}+\frac{16}{\boxed{33}}\right)$

iii. $\frac{99}{50}\times\frac{50}{99}=\boxed{1}$

iv. $\frac{59}{95}\times\frac{95}{59}=\boxed{1}$

v. $(-21)+\left(\boxed{21}\right)=0$

vi. $\frac{5}{8}\times\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{7}\right)=\left(\frac{\boxed{5}}{\boxed{8}}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{5}{8}\times\frac{\boxed{5}}{\boxed{7}}\right)$

.3
i. $5<10$ ii. $10>5$ iii. $<6+9$
iv. $6+8$ v. $6+6$

.4
i. 7×12 ii. 5×12 iii. $<$ iv. $>$

5.	جمعي ابتڙ	ضربي ابتڙ
i.	-3	$\frac{1}{3}$
ii.	7	$-\frac{1}{7}$
iii.	-0.3	$\frac{1}{0.3}$
iv.	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{-\sqrt{5}}{5}$
v.	$\frac{-9}{\sqrt{12}}$	$\sqrt{\frac{12}{9}}$
vi.	0	موجود نہ آهي

Exercise 1.3

1. i. مول جي ڏسٽي $= 3$, مول جو پايو $= 5$

ii. مول جي ڏسٽي $= 4$, مول جو پايو $= \frac{x}{y}$

iii. مول جي ڏسٽي $= 5$, مول جو پايو x^2yz

2. i. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ ii. $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{5}{2}}$ iii. $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{5}{3}}$ iv. $(yz)^{\frac{7}{3}}$ v. $(27)^{\frac{1}{9}}$

vi. $(-64)^{\frac{2}{3}}$ vii. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{3}}$ viii. $(xy)^{\frac{3}{5}}$ ix. $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{6}}$

3. i. $\sqrt[7]{(5)^3}$ ii. $\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}$ iii. $\sqrt[7]{\left(\frac{5}{7}\right)^{15}}$ iv. $\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$ v. $\sqrt[5]{\left(\frac{11}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right)}$

Exercise 1.4

1. i. 27 ii. 20 iii. $(a+b)(c+d)$

2. i. $\left(\frac{1}{3}\right)^9$ ii. $\left(\frac{3}{4}\right)^7$ iii. $\left(-\frac{4}{5}\right)^8$ iv. $-3^3\times 5^6$ v. $3^3\times 4^6$

vi. $\frac{-a^9}{b^9c^9}$ vii. $\frac{c^{10}}{d^{10}}$ viii. $m^6n^5t^{11}$ ix. $a^9b^6c^8$

3. i. 5^6 ii. $x^{15}y^{15}$ iii. 4^{10} iv. $-3^9\times 4^6$ v. $\frac{b^6}{5^3}$

vi. $\frac{(4)^6}{9^6}$ vii. z^{24} viii. m^{100} ix. $-(0.1)^{18}$

Exercise 1.5

1. i. $1+2i$ ii. $2+2i$ iii. $3+4i$
iv. $-1+i$ v. $-2+2i$ vi. $-3+4i$

2. **i.** $\operatorname{Re}(z)=1, \operatorname{Im}(z)=2$ **ii.** $\operatorname{Re}(z)=4, \operatorname{Im}(z)=9$

iii. $\operatorname{Re}(z)=-5, \operatorname{Im}(z)=6$ **iv.** $\operatorname{Re}(z)=-1, \operatorname{Im}(z)=-1$

v. $\operatorname{Re}(z)=\frac{-3}{4}, \operatorname{Im}(z)=\frac{4}{5}$ **vi.** $\operatorname{Re}(z)=-1 \;\; \operatorname{Im}(z)=2$

3. **i.** $\bar{z}=3-2i$ **ii.** $\bar{z}=(4,-9)$ **iii.** $\bar{z}=(-1,-1)$

iv. $\bar{z}=1+i$ **v.** $\bar{z}=\frac{-3}{4}+\frac{4}{5}i$ **vi.** $\bar{z}=1-3i$

5. **i.** $x=-5, y=5$ **ii.** $x=\pm\frac{4}{3}$, $y=\pm\frac{3}{5}$

iii. $x=\frac{-27}{5}, y\pm 11$ **iv.** $x=\frac{9\sqrt{30}}{5}, y=\frac{-4}{27}$

Exercise 1.6

1. **i.** $(12,5)$ **ii.** $\left(\frac{13}{6},\frac{13}{6}\right)$ **iii.** $(5,21)$

iv. $\left(0,-\frac{1}{15}\right)$ **v.** $(5,0)$ **vi.** $(0,-41)$

vii. $\left(\frac{3-6\sqrt{2}}{4},\frac{3+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)$ **viii.** $\left(\frac{-5}{13},\frac{-27}{13}\right)$

2. **i.** $\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}i$ **ii.** -4 **iii.** $\frac{-i}{2}$ **iv.** $\frac{-1}{16}-\frac{5}{26}i$

Review Exercise 1

1. i. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ii. حقيقي عدد iii. 0
   iv. 7 v. 0 vi. غير ناطق عدد
   vii. ناطق عدد viii. $-3-5i$ ix. 2
   x. $(ac-bd, ab+bc)$

2. i. T ii. T iii. T iv. T v. T

3. i. a ii. b iii. c iv. b

Exercise 2.1

1. i. 9.7×10^3 ii. 4.98×10^6 iii. 9.6×10^7 iv. 4.169×10^3
   v. 8.4×10^4 vi. 7.18×10^{-1} vii. 6.43×10^{-3} viii. 7.4×10^{-3}
   ix. $2.1005\text{x}10^{-1}$

2. i. 70000 ii. 0.0000000008072 iii. 6018000 iv. 786500000
   v. 0.000205 vi. 72500000000 vii. 4502000 viii. 0.00000002865
   ix. 3056000

Exercise 2.2

1. i. $\log_7 343 = 3$ ii. $\log_3 \frac{1}{81} = -4$ iii. $\log_{10}(0.001) = -3$ iv. $\log_8 4 = \frac{2}{3}$

2. i. $(27)^{\frac{4}{3}} = 81$ ii. $(2)^{-3} = \frac{1}{8}$ iii. $10^{\circ} = 1$ iv. $(10)^{-2} = 0.01$

3. i. $x = 4\sqrt{2}$ ii. $a = 9$ iii. $y = 4$ iv. $x = 8$
   v. $y = 2$ vi. $a = 4$ vii. $a>0$ يا a ڪوبہ مثبت حقيقي عدد آهي viii. $y = 1$
   ix. $x = 1$

Exercise 2.3

1. i. گڑ : 0, مئنٹیسا : 0.9031 ii. گڑ : 3, مئنٹیسا : 0.7036 iii. گڑ : 0, مئنٹیسا : 0.9997

iv. گڑ : 2, مئنٹیسا : 0.8839 v. گڑ : −3, مئنٹیسا : 0.5172 vi. گڑ : −5, مئنٹیسا : 0.4771

2. i. 0.9542 ii. 1.7448 iii. 1.4711 iv. 2.6078

v. 3.6712 vi. 5.8808

3. i. 0.4926 ii. 2.4926 iii. $\bar{3}.4926$ iv. 3.4926

v. 1.4926 vi. 4.4926

Exercise 2.4

1. i. 3692 ii. 0.5530 iii. 2.278

2. i. 2.954242509 ii. 1.658393026 iii. 4.563267445

iv. 2.917137753 v. −2.07007044 vi. −4.013228266

3. i. 56.2989 ii. 4.5803 iii. 0.024367

iv. 3019.95 v. 0.0000000991 vi. 1.8471

Exercise 2.5

1. i. $3\log_a x+\log_a y-2\log_a z$ ii. $\frac{1}{2}\log_a x+\log_a y+\frac{1}{2}\log_a z$

iii. $-\frac{7}{12}\log_a(x)-\log_a y$ iv. $\frac{2}{3}\log_a x+\frac{3}{2}\log_a y-\frac{2}{7}\log_a z$

2. i. $\log_a(2\sqrt{2})$ ii. $\log_a(x^2-1)$

iii. $\log\frac{(x+1)^2}{x(x-1)}$

3. i. 1.1761 ii. 1.8062 iii. 0.5 iv. 1.6812
v. 0.6276 vi. 1.4771 vii. 0.4260 viii. 0.4604

Exercise 2.6

1. i. 253.688 ii. 6750 iii. 3147 iv. 930.80
v. $x = 15.20$ vi. 1.2585 vii. 410130
viii. $x = 1.84077 \times 10^{13}$
2. i. 8 ii. 22 iii. 15 iv. 14 v. 29

Review Exercise 2

1. i. F ii. F iii. T iv. F v. T
2. i. عام لاگرتم ii. 0 iii. مئنتيسا
iv. 9 v. $\log_a n$ vi. $a^x = y$
vii. $\log_a y = 10$ viii. 1 ix. $\log m - \log n$
x. $\log 10 + \log 10$ or 2
3. i. d ii. b iii. b iv. b v. a
vi. c vii. c viii. b ix. b

Exercise 3.1

1. i. گھڻ رقمی آهي ii. گھڻ رقمي نہ آهي iii. گھڻ رقمي آهي
iv. گھڻ رقمي نہ آهي v. گھڻ رقمي نہ آهي vi. گھڻ رقمي نہ آهي
2. i. ناطق ii. ناطق نہ آهي iii. ناطق آهي
iv. ناطق نہ آهي v. ناطق vi. ناطق نہ آهي
3. i. P − 10 ii. $\dfrac{a}{a+b}$ iii. $\dfrac{a}{2(a+b)}$
iv. $x + y - z$ v. $\dfrac{3m(m+5)}{2}$ vi. $\dfrac{x-3}{x-2}$

4. i. $\dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$ ii. $\dfrac{3x+7}{(x+2)(x+3)}$ iii. $\dfrac{2(xy)^2+xy+1}{(xy+1)(xy-1)}$

iv. $\dfrac{-15}{(x+3)\,(x+6)}$ v. $\dfrac{-2b}{a^2-b^2}$ vi. $\dfrac{-(y-1)}{(y+1)}$

5. i. $\dfrac{8y^3}{(2y-x)^2\,(2y+x)}$ ii. $-\dfrac{2x+3y}{y}$ iii. 1

iv. $\dfrac{5}{3}$ v. $\dfrac{(q-5)(q+3)}{q^2}$ vi. $\dfrac{8(z-1)}{z-5}$

6. i. $\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2-y^2\right)}$

7. i. $\dfrac{1}{6}$ ii. $9\dfrac{9}{55}$ iii. $-\dfrac{17}{73}$

iv. $-\dfrac{40}{9}=-4\dfrac{4}{9}$ v. $\dfrac{12}{11}=1\dfrac{1}{11}$

Exercise 3.2

1. $a^2+b^2=50,\ ab=7$
2. $a^2+b^2=17,\ ab=4$
3. $a^2+b^2+c^2=55$
4. $a^2+b^2+c^2=\dfrac{5}{9}$
5. $a+b+c=\pm\,7$
6. $a+b+c=+\sqrt{2.5}$
7. $ab+bc+ca=40$
8. $a^3+b^3=28$
9. $ab=-8$
10. $ab=-4$
11. $a^3+b^3=230$
12. $125x^3+y^3=247$
13. $216a^3-343\,b^3=12419$
14. $x^3+\dfrac{1}{x^3}=322$
15. $x^3-\dfrac{1}{x^3}=1364$

16. i. $\frac{27b^3}{8}+\frac{8}{27b^3}$ ii. $\frac{343y^6}{729}+\frac{729}{343y^6}$

iii. $\frac{x^{12}}{1728}-\frac{1728}{x^{12}}$ iv. $c^6-\frac{1}{c^6}$

17. i. $8x^6+27y^6$ ii. x^8-y^8

iii. $x^{12}-y^{12}$ iv. $256x^8-6561y^8$

Exercise 3.3

1. i. $\frac{3z}{x^2}$ ii. $4\sqrt[3]{4a^2b^4c^3}$ iii. 2 iv. $36\sqrt{6}$

v. $\frac{25}{32}$ vi. $\frac{14\sqrt{3}}{11}$ vii. 6 viii. 2

2. i. $8+4\sqrt{3}$ ii. $6\sqrt{6}-2\sqrt{3}$ iii. $8\sqrt{12}-\sqrt{8}$ iv. $2+\sqrt{3}$

3. i. $66\sqrt{2}$ ii. $13\sqrt{5}$ iii. $20+9\sqrt{3}$ iv. $15\sqrt{10}$

v. $4\sqrt{5}+25$ vi. $\sqrt{11}$ vii. 136 viii. $3\sqrt{2}$

ix. $\frac{1}{3}$ x. 2 xi. $134-24\sqrt{30}$ xii. $30+12\sqrt{6}$

Exercise 3.4

1. i. $2-\sqrt{3}$ ii. $3-2\sqrt{2}$ iii. $-\left(\frac{5\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{2}\right)$ iv. $16\left(2\sqrt{3}-11\right)$

v. $\frac{83-18\sqrt{2}}{79}$ vi. $\frac{11+3\sqrt{3}}{2}$

2. **i.** $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=256$ **ii.** $x=-\left(\dfrac{4\sqrt{7}+11}{9}\right)$

iii. $x+\dfrac{1}{x}=6, x-\dfrac{1}{x}=-4\sqrt{2}, x^2+\dfrac{1}{x^2}=34, x^2-\dfrac{1}{x^2}=-24\sqrt{2}, x^4+\dfrac{1}{x^4}=1154$

Review Exercise 3

1. **i.** b **ii.** b **iii.** a **iv.** a **v.** a **vi.** a
vii. b **viii.** a **ix.** a **x.** a **xi.** a **xii.** b

2. **i.** وڏي ۾ وڏي سگھه نما **ii.** $2+\sqrt{3}$ **iii.** 4
iv. غيرناطق **v.** x^4-y^4

Exercise 4.1

1. **i.** $4(x+4y+6z)$ **ii.** $x^2(1+3y+4y^2z)$

iii. $3pq(r+2t+s)$ **iv.** $9qr(s^2+t^2)(1+2qr)$

v. $\dfrac{xz^2}{4}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{xz}{3}\right)$ **vi.** $a(x-y)(1-ab+ab^2)$

2. **i.** $(7+z)(x+z)$ **ii.** $3(3ab-2c)(a+2b)$

iii. $2(t-2p)(3+2q)$ **iv.** $(r+9s)(r-7s)$

v. $(1-z)\left(\frac{y^2}{4}-\frac{z^2t}{9}\right)$ vi. $\frac{1}{11}(2y+z)(5x-7y)$

3. i. $(2a+3b)^2$ ii. $(6x^2+1)^2$

iii. $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^2$ iv. $(9y+8z)^2$

v. $(25+a^2b)^2$ vi. $(a+0.2)^2$

4. i. $(b^2-2c^2)^2$ ii. $\left(\frac{3x^2}{2}+\frac{2}{3x^2}\right)^2$

iii. $2ab^3(a-4b)^2$ iv. $(3p+3q-r^2)$

v. $(xy-0.05)^2$ vi. $(a-b-9)^2$

5. i. $(2a-3b)(2a+3b)$ ii. $(4x-5y)(4x+5y)$

iii. $(10xz-y^2)(10xz+y^2)$ iv. $\left(\frac{x^2}{10}-10y^2\right)\left(\frac{x^2}{10}+10y^2\right)$

v. $\left(\frac{8f}{9}-\frac{9g^2}{8}\right)\left(\frac{8f}{9}\times\frac{9g^2}{8}\right)$ vi. $\left(\frac{x^2}{11}-11y\right)\left(\frac{x^2}{11}+11y\right)$

6. i. $8xz$

ii. $(6a-4b)\ (2a-14b)$

iii. $(13x^2-3t-4)\ (13x^2+3t+4)$

iv. $(13x^2-5y^2)\ (5x^2-3y^2)$

v. $\left(a+\frac{1}{a}+b-\frac{1}{b}\right)\ \left(a+\frac{1}{a}-b+\frac{1}{b}\right)$

vi. $\left(3x+\frac{1}{3x}+2y-\frac{1}{2y}\right)\ \left(3x+\frac{1}{3x}-2y+\frac{1}{2y}\right)$

7. i. $((x+y)+3z^2)((x+y)-3z^2)$ ii. $((2a+2b^2)+3c)((2a+2b^2)-3c)$

iii. $(4d^2+(c^2-d))(4d^2-(c^2-d))$ iv. $(2(x+y^2)+3y^3)(2(x+y^2)-3y^3)$

v. $(x+y-1)(x-y-3)$ vi. $(2x+y+1)(2x-y-1)$

8. i. $\left(\sqrt{ab}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{ab}+\sqrt{c}\right)$ ii. $\left(2\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)\left(2\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right)$

iii. $\left(\sqrt{yz}-\frac{1}{\sqrt{yz}}\right)\left(\sqrt{yz}+\frac{1}{\sqrt{yz}}\right)$ iv. $\left(\sqrt{xzt}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\left(\sqrt{xzt}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

Exercise 4.2

1. i. $(a^2+x^2+ax)(a^2+x^2-ax)$ ii. $(b^2-b+1)(b^2+b+1)$

iii. $(a^2+x^2-ax)(a^2+x^2+ax)(a^4+x^4-a^2x^2)$ iv. $(z^2+z+1)(z^2-z+1)(z^4-z^2+1)$

2. i. $(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$ ii. $9(2x^2z^2+2xyz+y^2)(2x^2z^2-2xyz+y^2)$

iii. $(2t^2+10t+25)(2t^2-10t+25)$ iv. $(2t^2+2t+1)(2t^2-2t+1)$

3. i. $(x-2)(x+5)$ ii. $(ab+2)(ab-5)$

iii. $(y-7)(y+14)$ iv. $(xyz-4)(xyz+6)$

4. i. $(3y+8z)(3y-z)$ ii. $2(7x+1)(3x-1)$

iii. $(2x+1)(2x+5)$ iv. $(3x+y)(x-13y)$

Exercise 4.3

1. i. $(x-2)^2(x-7)(x+3)$ ii. $(x^2+5x+3)(x^2+5x+7)$

iii. $(x-3)(x+1)(x^2-2x+10)$ iv. $(x^2-8x+1)(x^2-8x-1)$

v. $(x^2+9x-2)(x^2+9x+6)$ vi. $(x-6)(x+1)(x^2-5x+16)$

2. i. $\left(x^2+5x-2\right)\left(x^2+5x+12\right)$ ii. $\left(x^2+7x+16\right)\left(x+6\right)\left(x+1\right)$

iii. $\left(x^2-5x+15\right)\left(x^2-5x-5\right)$ iv. $\left(x^2-12x+30\right)\left(x^2-12x+32\right)$

v. $\left(x^2-5x-10\right)\left(x^2-5x+20\right)$ vi. $\left(x^2-7x+27\right)\left(x^2-7x-5\right)$

3. i. $\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+2\sqrt{3}\right)\left(x-2\sqrt{3}\right)$

ii. $(x+1)(x-1)\left(x+\sqrt{14}\right)\left(x-\sqrt{14}\right)$ iii. $\left(x^2-3\right)^2$

iv. $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+4\sqrt{2}\right)\left(x-4\sqrt{2}\right)$

v. $\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+2\sqrt{5}\right)\left(x-2\sqrt{5}\right)$ vi. $\left(x^2-12\right)\left(x^2-2x-12\right)$

Exercise 4.4

1. i. $(b+c)^3$ ii. $(2x+y)^3$ iii. $\left(4x+\frac{1}{4}\right)^3$

iv. $(2x+3)^3$ v. $\left(\frac{1}{3}+y^2\right)^3$ vi. $\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y\right)^3$

vii. $\left(\frac{4}{3}+x\right)^3$ viii. $\left(\frac{z}{2}+\frac{y}{3}\right)^3$

2. i. $(d-2c)^3$ ii. $\left(x^2-\frac{4}{3}\right)^3$ iii. $\left(\frac{x}{5}-y\right)^3$

iv. $\left(5z-y^2\right)^3$ v. $\left(\frac{z}{3}-6y\right)^3$ vi. $\left(\frac{b^2}{3}-\frac{c^2}{2}\right)^3$

vii. $\left(6-\frac{z}{2}\right)^3$ viii. $\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}y\right)^3$

Exercise 4.5

1. i. $(x+2y)\left(x^2-2xy+4y^2\right)$ ii. $a^2(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)\left(a^6-a^3b^3+b\right)$

iii. $\left(a^2+1\right)\left(a^4-a^2+1\right)$ iv. $(ab+8)\left(a^2b^2-8ab+64\right)$

v. $b^3(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$ vi. $\left(\frac{x}{5}+\frac{5}{x}\right)\left(\frac{x^2}{25}+\frac{25}{x^2}-1\right)$

vii. $x^3(x^2+y^2z^2)(x^4-x^2y^2z^3+y^4z^6)$

viii. $\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{x}\right)\left(\frac{x^4}{9}-\frac{2x}{3}+\frac{4}{x^2}\right)$

2. i. $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$ ii. $(x^3-2y^3)(x^6+2x^3y^3+4y^6)$

iii. $\left(10-\frac{xy}{5}\right)\left(100+2xy+\frac{x^2y^2}{25}\right)$

iv. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

v. $\left(\frac{x^2}{4}-\frac{4}{x^4}\right)\left(\frac{x^4}{16}+\frac{1}{x^2}+\frac{16}{x^8}\right)$ vi. $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4-x^2y^2)$ $(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$

vii. $\left(\frac{3}{x}-2y^2\right)\left(\frac{9}{x^2}+\frac{6y^2}{x}+4y^4\right)$ viii. $\left(2x^2-\frac{1}{9}\right)\left(4x^4+\frac{2x^2}{9}+\frac{1}{81}\right)$

Exercise 4.6

1. i. $R=-2$ ii. $R=2$ iii. $R=18$ iv. $R=-42$ v. $R=-11$

vi. $R=\frac{3}{2}$ vii. $R=-8$ viii. $R=3y^4$

2. $m=-1$ 3. $k=-24$ 4. $r=-1, r=3$

Exercise 4.7

1. i. $R=0,\ q(x)=x^2+1$ ii. $R=-2,\ q(x)=x^2-2x+1$

iii. $R=-60,\ q(x)=x^2-8x+27$ iv. $R=4,\ q(x)=x^2+8x+5$

v. $R=-291,\ q(x)=x^3-3x^2+7x-15$ vi. $R=1,\ q(x)=x^3+2x^2+x+2$

vii. $R=291,\ q(x)=x^4-3x^3+10x^2-32x+96$

viii. $R=174,\ q(x)=x^4+2x^3+7x^2+18x+60$

ix. $R=175,\ q(x)=2x^3+2x^2+104x+40$

x. $R = -300,\ q(x) = 6x^3 - 42x^2 + 90x - 114$

2. $k = 24$ 3. $m = 4$ 4. $m = -24$ 5. $m = -1$

Exercise 4.8

1. i. $(x-1)(x^2+1)$ ii. $(x+1)(x+1)(x-1)$

iii. $(x-1)(x-2)(x-3)$ iv. $(x+2)(x-2)(x+5)$

v. $(x-2)(x+3)(x-3)$ vi. $(x+1)(2x-1)(3x+2)$

vii. $(x+1)(x+3)(x+4)$ viii. $(x+1)(2x-1)(x+3)$

ix. $(x+2)(x+4)(x+6)$

Review Exercise 4

1. i. صحیح ii. صحیح iii. صحیح iv. غلط

v. غلط vi. غلط

2. i. $4x + y^2$ ii. $x^2 + 4xy + 16y^2$ iii. $x + 3$

iv. $-2xy$ v. $a^2 - 3ab + 9b^2$

3. i. b ii. c iii. d iv. a v. b vi. c

Exercise 5.1

1. i. و.ع.پ.و $= 24x^3y^5z^2$ ii. و.ع.پ.و $= 6r^3s^3t^3$

iii. و.ع.پ.و $= (x+3)$ iv. و.ع.پ.و $= (2x-3)$

v. و.ع.پ.و $= 2(a+2b)$ vi. و.ع.پ.و $= (x+1)^2$

2. i. و.ع.پ.و $= (x+1)$ ii. و.ع.پ.و $= (x^2+7x+12)$

iii. و.ع.پ.و $= (x-2)$ iv. $x^2 + 3x + 1$

3. i. ن.ع.پ.ا $= 81a^4b^5c^8$ ii. $600p^5q^4r^8$

iii. $7x(x-1)(3x-2)$ iv. $(x+4)(x+7)(x-3)$

v. $(3x+1)(x-1)(2x+3)(x-4)$

vi. $\left(x^3+y^3\right)(x-y)\left(x^4+x^2y^2+y^4\right)$ or $\left(x^3+y^3\right)(x^3-y^3)\left(x^2+y^2-xy\right)$

4. i. $(x-20)(x-5)(x+4)$ ii. $(3x+2)(x+4)(2x-1)$

iii. $(x+y+z)(x-y-z)(y-z-x)$ iv. $12x^2(x-4)(x+7)(x-2)$

5. $(x-8)\left(x^2-6x+6\right)$ 6. x^2+2x-3

7. $9x^4+15x^3-12x-14x^2+8$ 8.

9. 6 س.م 10. 11:54 am

Exercise 5.2

1. i. $\dfrac{7x+3}{(x+1)^2}$ ii. $\dfrac{12x^2+29x+16}{3x(2x+1)(x+1)}$

iii. $\dfrac{-4x^3-x^2-9x+4}{(x+1)^2(x-3)}$ iv. $\dfrac{2\left(x^2+3x+3\right)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

v. $2x+6$ vi. $\dfrac{x+3}{x+9}$

vii. $\dfrac{-(x+3)(4x+7)}{(x+1)^2(x+2)}$ viii. $\dfrac{-2x+7}{(x-2)(x-3)}$

ix. $\dfrac{x^2-5x-42}{\left(x^2-9\right)(x+4)(x+5)}$ x. $\dfrac{2\left(x^2+5\right)}{4x^2+x+2}$

Exercise 5.3

1. i. $6x-5y$ ii. $3x+\dfrac{1}{x}$ iii. $2x^2y^2-\dfrac{3xy}{z^2}$

iv. $18-2x-4y$ v. $\left(x+\dfrac{1}{x}+1\right)^2$

vi. $3(2x-1)(x-3)$ vii. $(x-1)(x-3)$ viii. $(x+3)(x+5)(x+2)$

2. i. x^2+x+1 ii. $(x-1)(x-3)$ iii. $2x^2+2x+4$

iv. $\left(\frac{x}{y}+7-\frac{y}{x}\right)$ v. $x-1+\frac{1}{x}$ vi. $x+\frac{y}{3}+3z$

vii. $x^2-4+\frac{1}{x^2}$ viii. $x^3-2+\frac{1}{x^3}$

3. 7 4. $-\left(24x^2-9\right)$ 5. $m=20$ 6. $p=$ 56, $q=$ 49

Review Exercise 5

1. i. True ii. False iii. True iv. False v. True
2. i. 2 ii. $p(x)$ $q(x)$ iii. 1

   iv. $(y+1)(y+2)(y+3)$ v. $y+\frac{1}{y}$
3. i. *d* ii. *d* iii. *b* iv. *c* v. *b* vi. *d*

   vii. *c* viii. *b* ix. *b* x. *c*

Exercise 6.1

1. i. $x=20$ ii. $x=-12$ iii. $x=30$ iv. $x=40$

   v. $y=\frac{1}{15}$ vi. $y=\frac{11}{20}$ vii. $x=\frac{44}{17}$ viii. $x=105$

   ix. $\frac{105}{13}$ x. $x=1$ xi. $x=-\frac{20}{7}$ xii. $x=12$

   xiii. $x=-\frac{5}{4}$ xiv. $x=-4$ xv. $m=\frac{-11}{6}$
2. $x=$ 5
3. $x=7$
4. سال 18 = بلال

   سال 12 = علي
5. i. $\{\ 1\ \}$ ii. $\{10\}$ iii. $\{100\}$

   iv. $\{-12\}$ v. $\{143\}$ vi. $\{\ \ \}$

   vii. $\{-\frac{14}{3}\}$ viii. $\{\ 81\}$ ix. $\{80\}$

Exercise 6.2

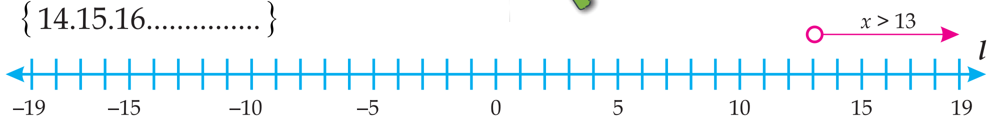
1. **i.** $\left\{-\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right\}$ **ii.** $\{1\}$ **iii.** $\{-42,42\}$ **iv.** $\left\{-\frac{25}{2},\frac{23}{2}\right\}$

v. $\{3\}$ **vi.** $\left\{-\frac{78}{5},\frac{76}{5}\right\}$ **vii.** $\left\{-\frac{23}{2},\frac{17}{2}\right\}$ **viii.** $\{-10,6\}$

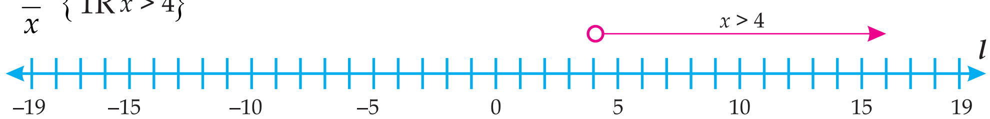
ix. $\left\{\frac{-19}{14},\frac{-13}{14}\right\}$ **x.** $\{-41,44\}$

Exercise 6.3

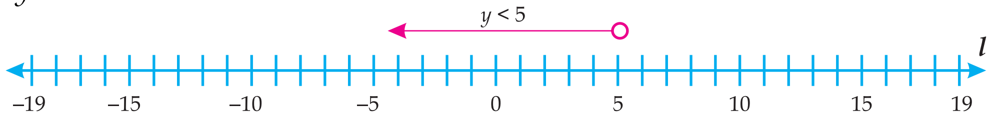
1. **i.** $\{14.15.16..............\}$



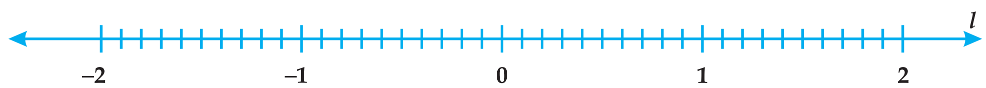
ii. $\frac{x}{x}$ $\{1R\, x > 4\}$



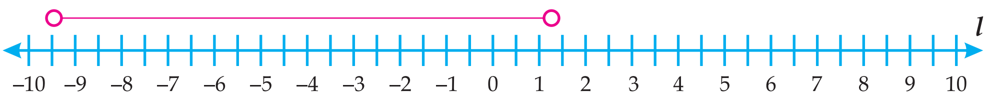
iii. $y < 5$ $\{1,2,3,4\}$



iv. $\left\{-\frac{5}{3} < x \right.$ ء $\left. x < -1 \right\}$



v. $\frac{y}{y}\left\{1R\wedge -\frac{19}{12}\ 2yz\ \frac{3}{2}\right\}$



2 4 کان وڏا سپ عدد

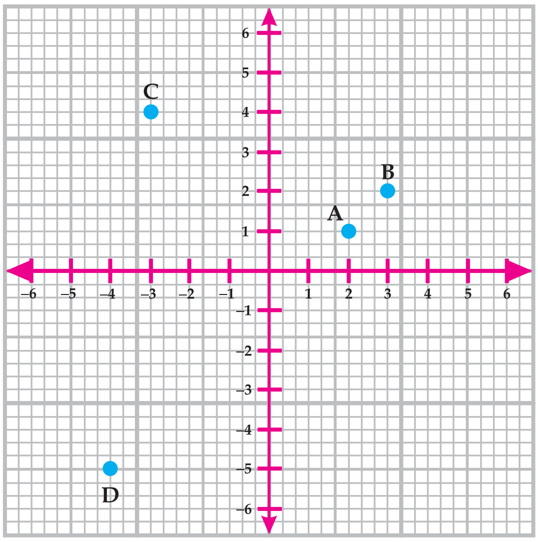
3 علي کي گهٽ ۾ گهٽ 87 اسڪور ڪرڻو پوندو بونس انعام ڪٽڻ لاءِ

Review Exercise 6

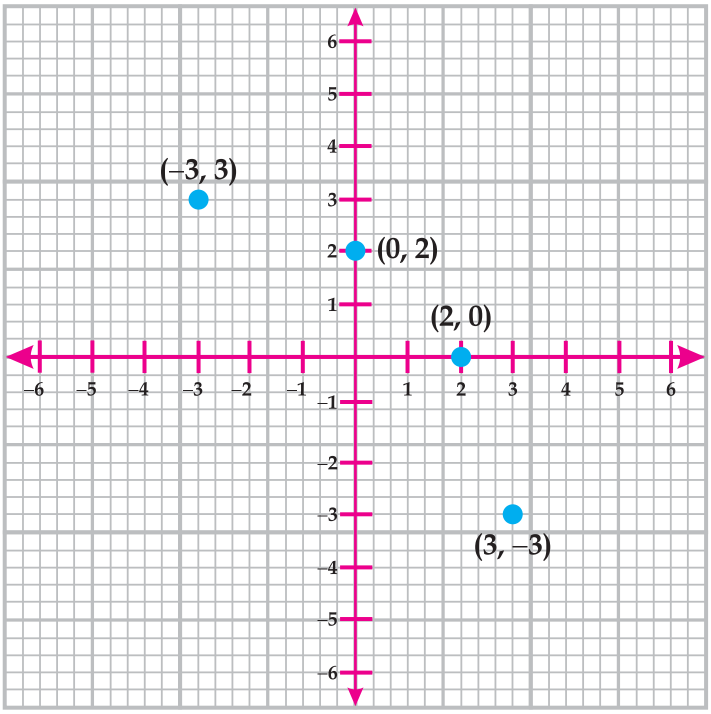
1. i. F ii. F iii. T iv. T v. F
2. i. $\{0\}$ ii. $\{20\}$ iii. $\{\pm 4\}$
   iv. $\{-1\}$ v. $\{y/y \in R^{\wedge} -2 < y < 3\}$
3. i. *b* ii. *a* iii. *c* iv. *a* v. *b* vi. *c*
   vii. *c* viii. *c* ix. *c* x. *c*

Exercise 7.1

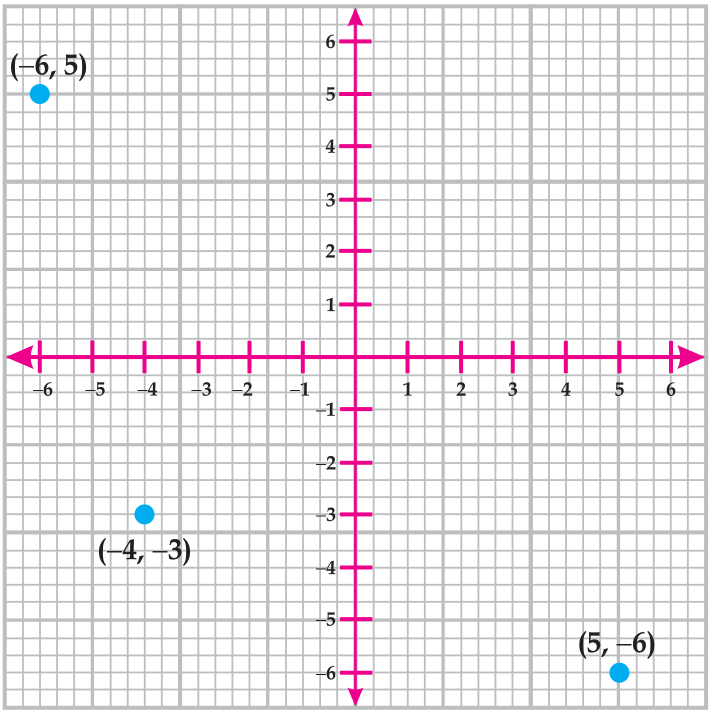
1. i. $x=-2,\ y=2$ ii. $x=5,\ y=-1$ iii. $x=4,\ y=0$
   iv. $x=-5,\ y=6$ v. $x=3,\ y=4$ vi. $x=-\sqrt{8},\ y=\sqrt{8}$
2. i. چوٿائي ۾ موجود آهي - IV ii. چوٿائي ۾ موجود آهي - II
   iii. چوٿائي ۾ موجود آهي - IV iv. چوٿائي ۾ موجود آهي - III
   v. چوٿائي ۾ موجود آهي - I vi. چوٿائي ۾ موجود آهي - I
3. i.



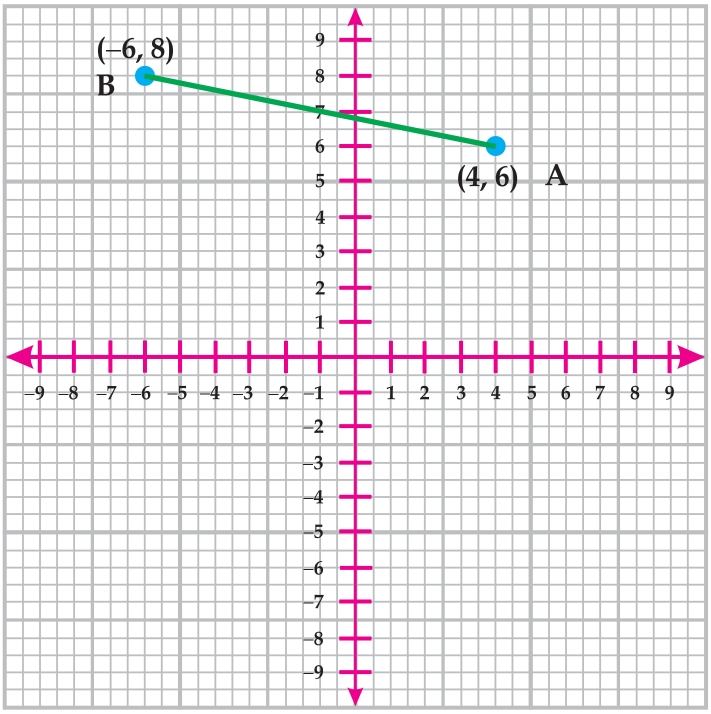
ii.



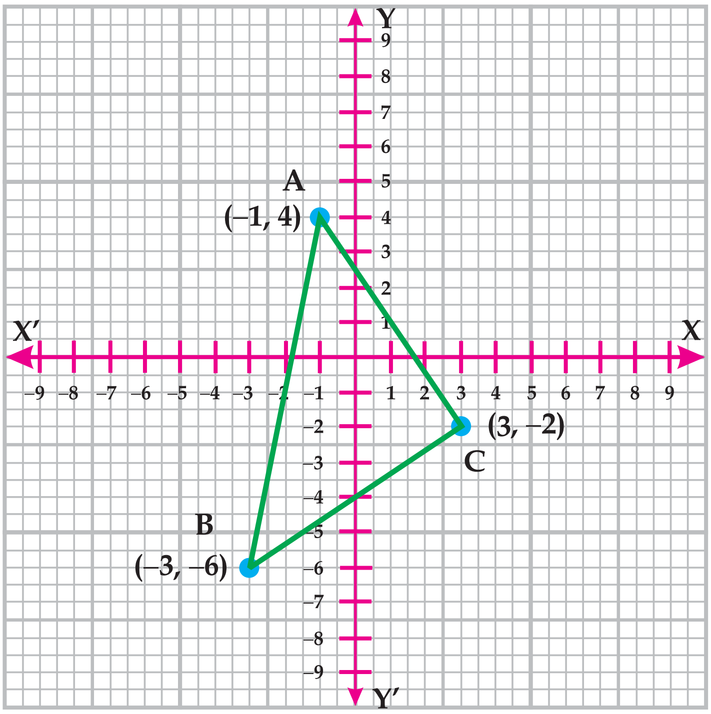
iii.



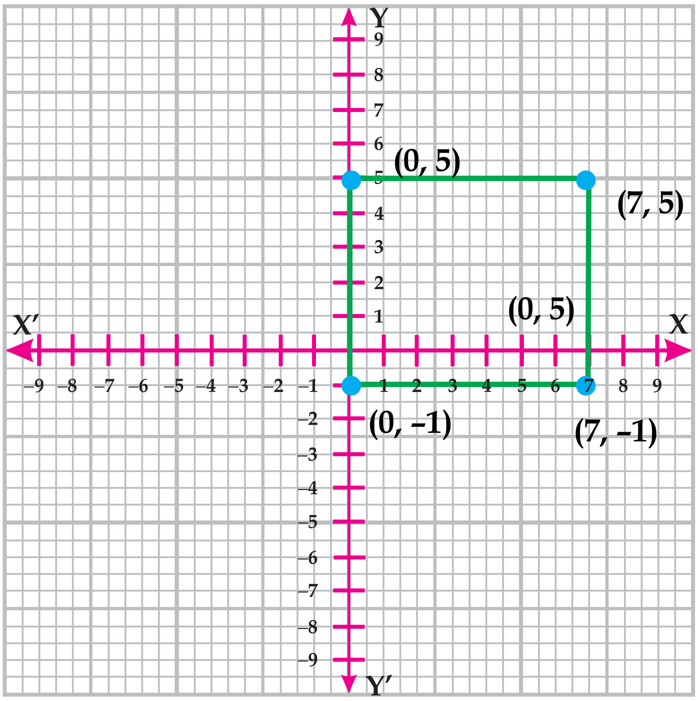
4.



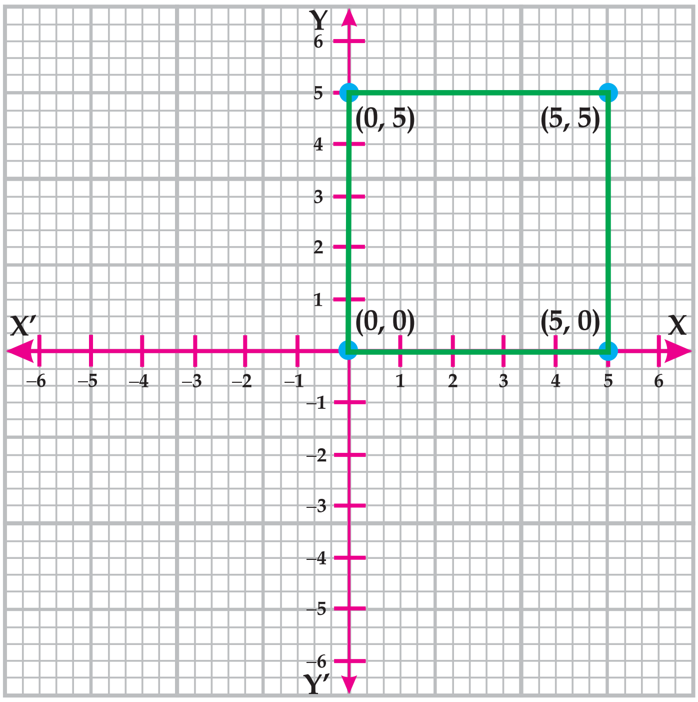
5.



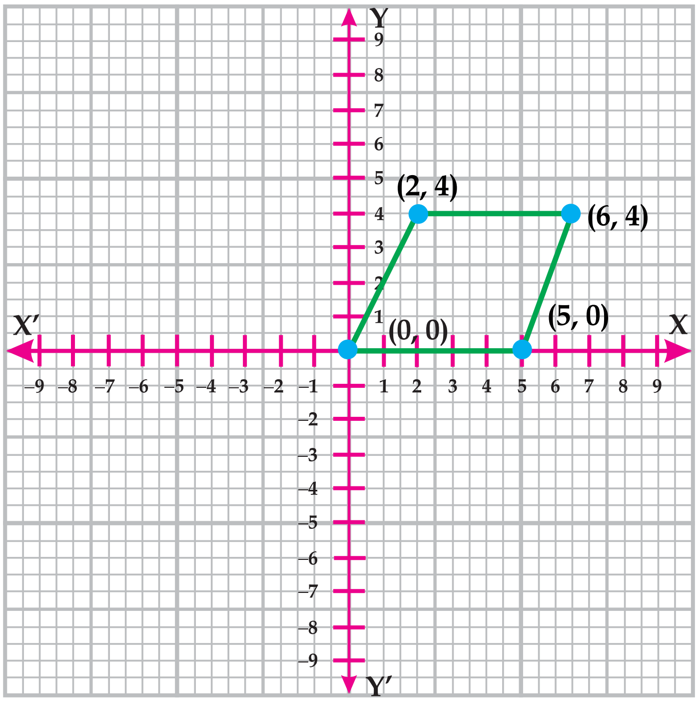
6.



7.



8.



9. i. $y = 2 - x$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	5	4	3	2	1	0	–1

ii. $y = 2x - 6$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–12	–10	–8	–6	–4	–2	0

iii. $x = 12 - 2y$

y	–3	–2	–1	0	1	2	3
x	18	16	14	12	10	8	6

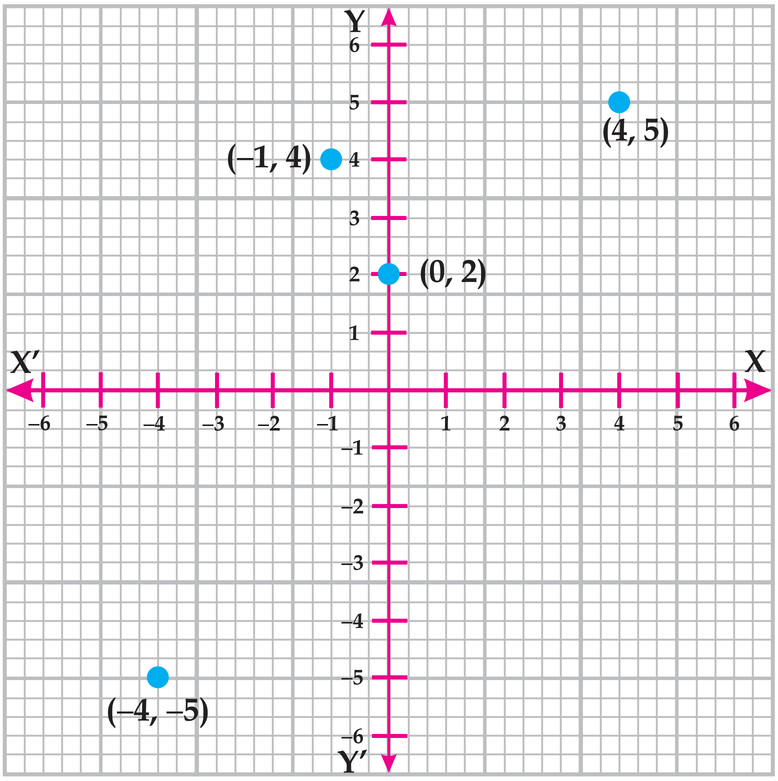
iv. $x = 2y - 3$

y	–3	–2	–1	0	1	2	3
x	–9	–7	–5	–3	–1	1	3

Exercise 7.2

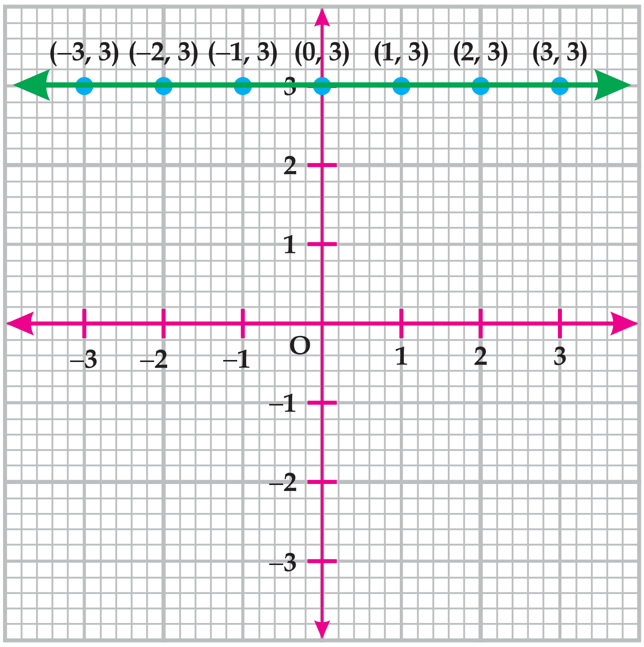
1. $y = 6 - x$

y	–3	–2	–1	0	1	2	3
x	9	8	7	6	5	4	3



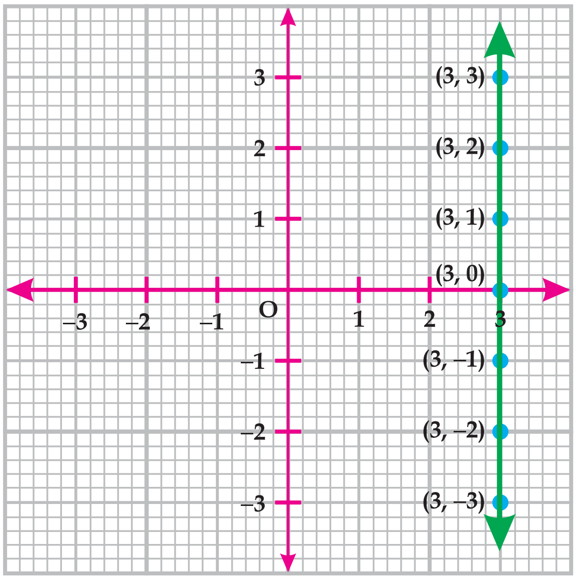
3. i.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	3	3	3	3	3	3	3



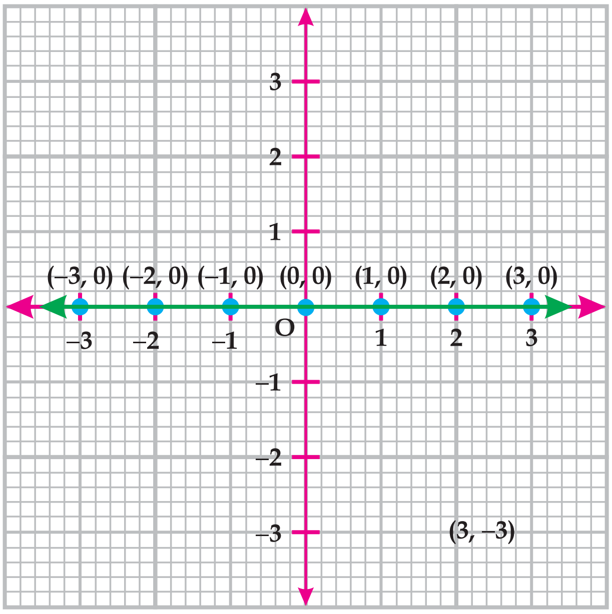
ii.

x	3	3	3	3	3	3	3
y	–3	–2	–1	0	1	2	3



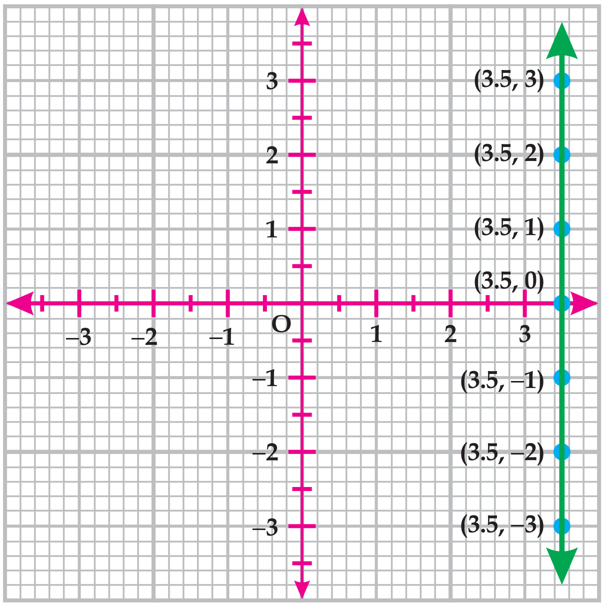
iii.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0	0	0	0	0	0	0



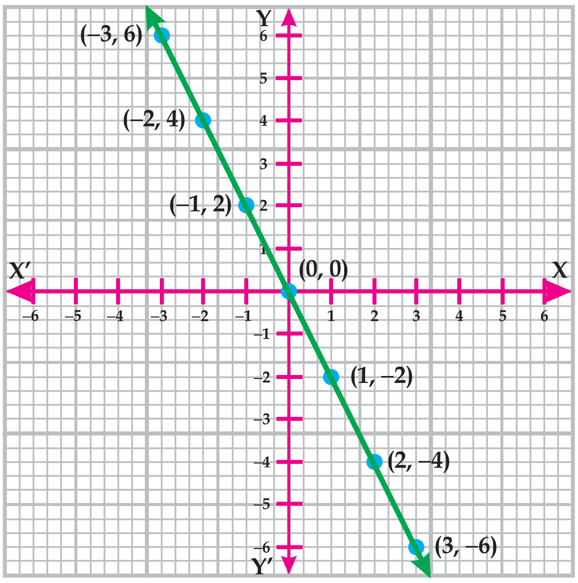
v.

x	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5
y	–3	–2	–1	0	1	2	3



vi.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	6	4	2	0	–2	–4	–6



4. i.

مساوات	x - محدد	y - محدد
$y=\frac{1}{2}x$	0	0
	4	2

ii.

مساوات	x - محدد	y - محدد
$y=\frac{2}{3}y$	1	$\frac{3}{2}$
	1	$\frac{3}{2}$

iii.

مساوات	x - محدد	y - محدد
$2x+4y=8$	0	2
	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{4}$

iv.

مساوات	x - محدد	y - محدد
$2x+y=6$	1	4
	3	0

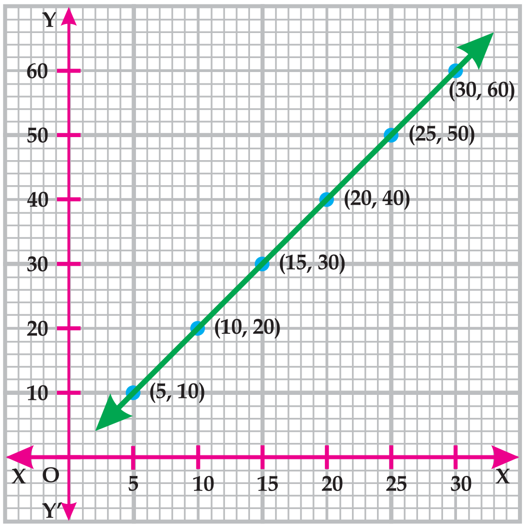
v.

مساوات	محدد - x	محدد - y
$x-y=2$	2	0
	1	–1

vi.

مساوات	محدد - x	محدد - y
$x-3y=6$	3	–1
	3	–1

5.



6. a. 100كلوميٽرسواري ڪرڻ لاءِ عائشه کي گهربل وقت 5 ڪلاڪ آهي
b. ٽوٽل3 ڪلاڪن ۾عائشه جو طئه ڪيل مفاصلو60 ڪلوميٽرآهي

ڪلوميٽر

Exercise 7.3

1. i. 1.6ڪلوميٽر ii. 4.8ڪلوميٽر iii. 1.2 ميل iv. 4.9ميل ۽ 5 ميل
2. i. 5 acres ii. 12 acres iii. 2 hectares iv. 6 hectares
3. i. 35.6°F ii. 35.4°F iii. 0°C iv. 2.4°C
4. i. 9° رپيو ii. 156 رپيو iii. 5 ريال iv. 2.6 ريال
5. i. $\{3,-2\}$ ii. $\{3,1\}$ iii. $\{3,1\}$ iv. $\{4,7\}$ v. $\{1,1\}$
vi. $\{-3,-4\}$ vii. $\{-3,2\}$ viii. $\{1,1\}$ ix. $\{8,4\}$ x. $\{5,1\}$

Review Exercise 7

1. i. T ii. F iii. F iv. F
3. i. *c* ii. *b* iii. *a* iv. *b* v. *c* vi. *d* vii. *a*

Exercise 8.1

1. i. $\{-2,-3\}$ ii. $\left\{\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right\}$ iii. $\{6,5\}$ iv. $\{2,0\}$

v. $\{5,-3\}$ vi. $\left\{\frac{8}{3},\frac{3}{4}\right\}$ vii. $\{8,2\}$ viii. $\left\{0,-\frac{8}{3}\right\}$

2. i. $\left\{-3+2\sqrt{2}\ \ -3-2\sqrt{2}\right\}$ ii. $\}\left\{0,-\frac{10}{3}\right\}$ iii. $\left\{\frac{4+\sqrt{13}}{3},\frac{4-\sqrt{13}}{3}\right\}$

iv. $\left\{\frac{3}{4},-\frac{7}{6}\right\}$ v. $\left\{4,-\frac{3}{2}\right\}$ vi. $\left\{\frac{-2+\sqrt{6}}{2},\frac{-2-\sqrt{6}}{2}\right\}$

3. i. $b=-2$ ii. $\frac{-4}{3}$

Exercise 8.2

1. i. $\{5,-3\}$ ii. $\left\{\frac{3}{5},\frac{-5}{2}\right\}$

iii. $\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$ iv. $\left\{\frac{-1+2\sqrt{7}}{3},\frac{-1-2\sqrt{7}}{3}\right\}$

v. $\left\{\frac{2+3i\sqrt{5}}{3},\frac{2-3i\sqrt{5}}{3}\right\}$ vi. $\left\{\frac{-3+\sqrt{41}}{4},\frac{-3-\sqrt{41}}{4}\right\}$

vii. $\left\{\frac{1+i\sqrt{5}}{3},\frac{1-i\sqrt{5}}{3}\right\}$ viii. $\left\{\frac{1}{2},\frac{-1}{3}\right\}$

ix. $\left\{\frac{5}{2},0\right\}$ x. $\{1,-1\}$

xi. $\{3\}$ xii. $\left\{\sqrt{14},-\sqrt{14}\right\}$

Exercise 8.3

1. **i.** $\{\pm 3, \pm i\}$ **ii.** $\{\pm 2, \pm i\}$

iii. $\left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$ **iv.** $\left\{-\frac{3}{4}, -2\right\}$

v. $\left\{-\frac{\sqrt{6}}{2}i, \pm\frac{2}{7}\sqrt{14}i\right\}$ **vi.** $\{-1, 2\}$

vii. $\{2\}$ **viii.** $\{1\}$

ix. $\{-i\}$ **x.** $\{-2\}$

xi. $\{2.4\}$ **xii.** $\left\{3, -10, \frac{-7\pm\sqrt{79}\,i}{2}\right\}$

xiii. $\{-6.1\}$ **xiv.** $\left\{0, 1, \frac{1\pm\sqrt{57}}{2}\right\}$

Exercise 8.4

2. **i.** $x = 4$ **ii.** $x = 6$ **iii.** $\{1, 3\}$

iv. $x = 2$ **v.** $\left\{0, -\frac{3}{2}\right\}$ **vi.** $\{0, 3\}$

1. **i.** 2 **ii.** $ax^2 + bx + c = 0$ **iii.** سگهہ واري صورت

iv. $x = 2$ **v.** $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2. **i.** b **ii.** a **iii.** c **iv.** a **v.** a

vi. c **vii.** b **viii.** a **ix.** c **x.** a

3. **i.** F **ii.** F **iii.** F **iv.** F

v. F **vi.** T **vii.** T

Review Exercise 9

1. 30°

2. i. T ii. F iii. T iv. F v. F

3. i. $\overline{DF}$ ii. $\angle RPQ$ iii. يڪسان
   iv. ٽيور پاسو v. هئپاٽينيوز vi. 90°

4. i. *b* ii. *c* iii. *b* iv. *c*

Exercise 10.3

1. 8 س. م

Exercise 10.4

1. 3 س. م

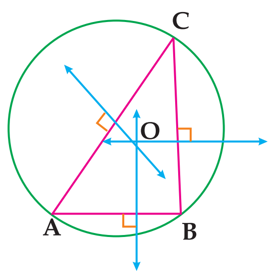
Review Exercise 10

1. i. يڪسان ii. يڪسان iii. يڪسان iv. اڌڪندڙ
   v. برابر vi. يڪسان vii. 360°

2. i. *d* ii. *b* iii. *d* iv. *c* v. *b*
   vi. *b* vii. *a* viii. *a*

Exercise 11.1

3. گول جو مرڪز ليڪ جي عمودي اڌڪندڙ جي ميلاپ سان حاصل ٿيندو آهي ڇاڪاڻ ته هي ڪپندڙ ٽيڪو هر هڪ ليڪ کان هڪ جيتري مفاصلي تي هوندو آهي



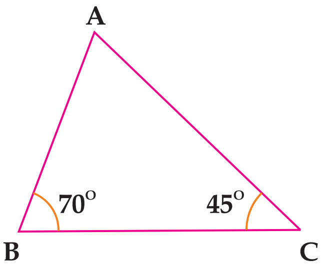
Review Exercise 11

3. i. T ii. T iii. T

4. i. *a* ii. *c* iii. *b* iv. *a*

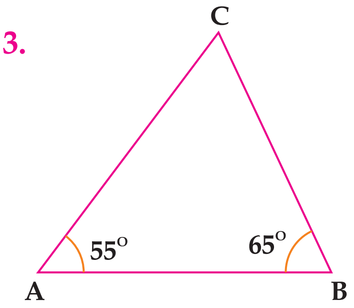
Exercise 12.1

2.



AC پاسو وڏي ۾ وڏو آهي

3.



BC پاسو ننڍي ۾ ننڍو آهي

Review Exercise 12

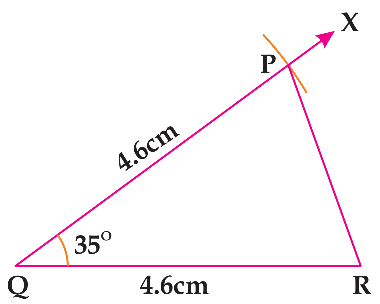
1. **i.** T **ii.** F **iii.** F **iv.** F **v.** True

2. **i.** عمود **ii.** وڏو آهي **iv.** $m\mathrm{AB}$ وڏو آهي

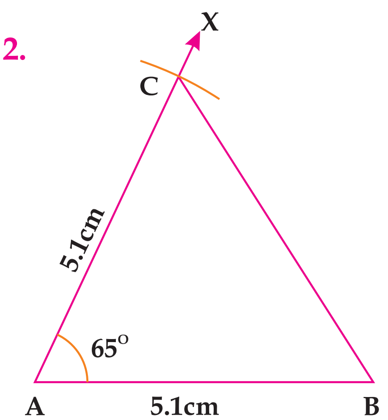
3. **i.** a **ii.** b

Exercise 13.1

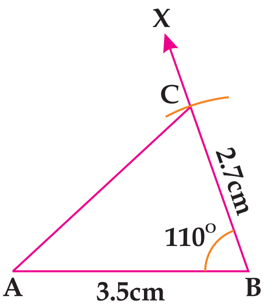
1.



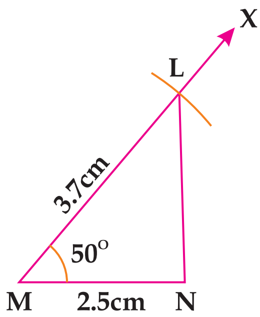
2.



3.

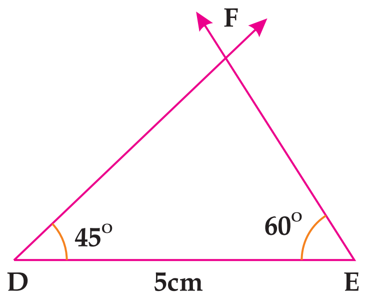

X
C
2.7cm
110°
A
3.5cm
B

4.

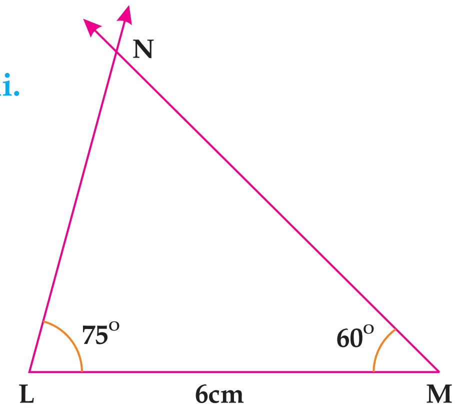

X
L
3.7cm
50°
M
2.5cm
N

6.

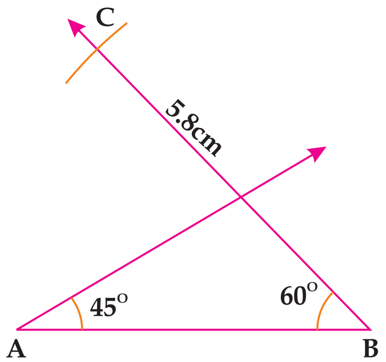
i.


F
45°
60°
D
5cm
E

ii.

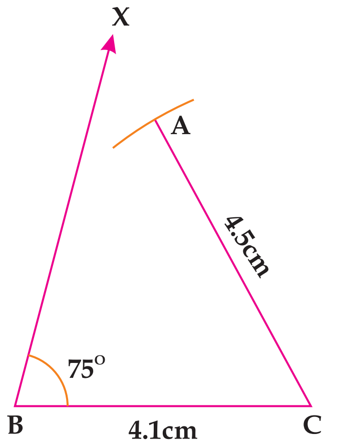

N
75°
60°
L
6cm
M

iii.

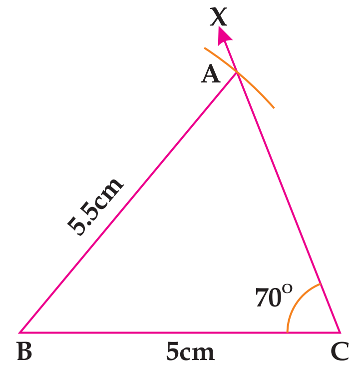

C
5.8cm
45°
60°
A
B

7.

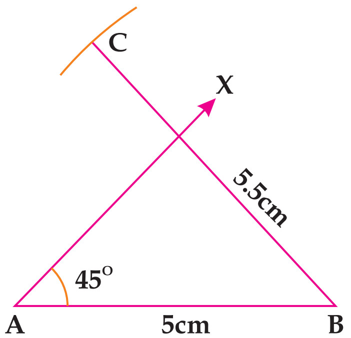
i.



ii.

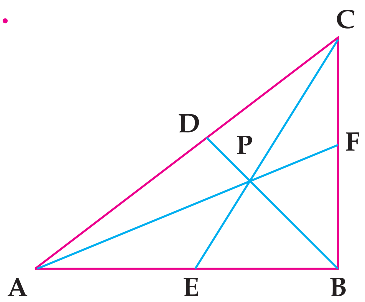


iii.

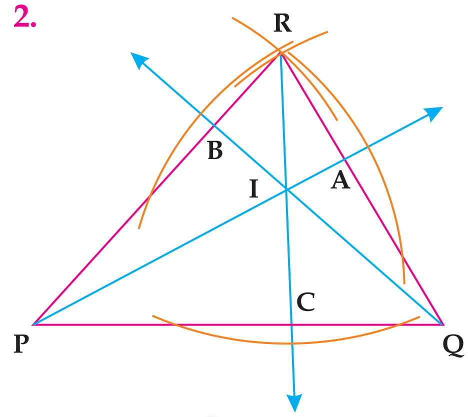


Exercise 13.2

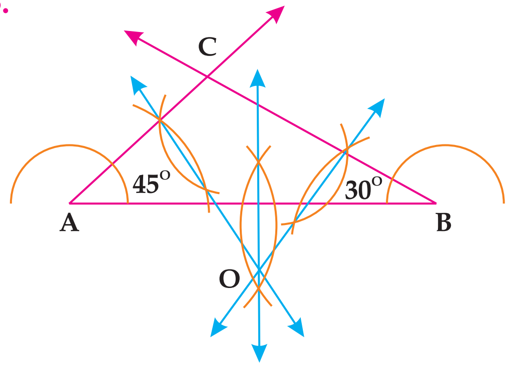
1.



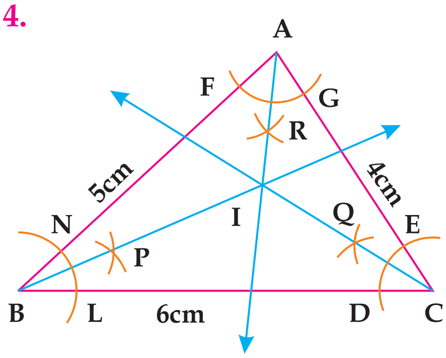
2.



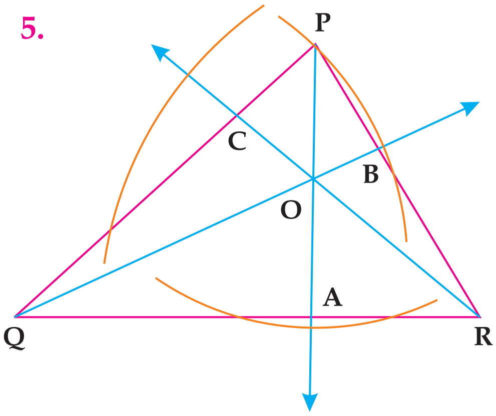
3.


C
45°
30°
A
B
O

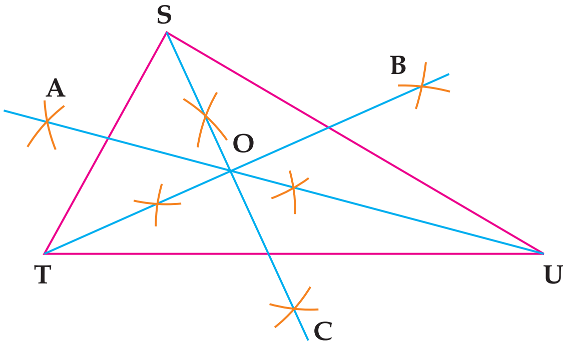
4.


A
F
G
R
5cm
4cm
N
P
I
Q
E
B
L
6cm
D
C

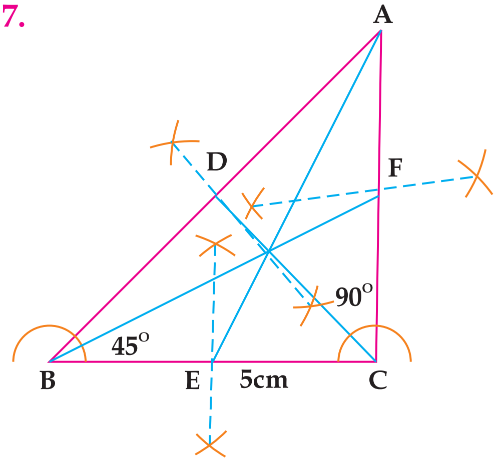
5.


P
C
B
O
A
Q
R

6.

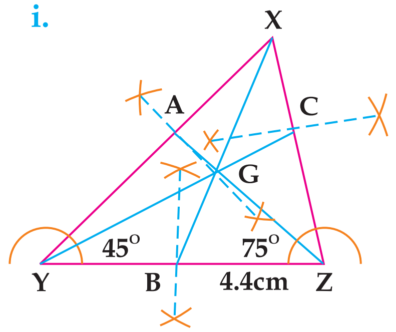

S
A
B
O
T
U
C

7.

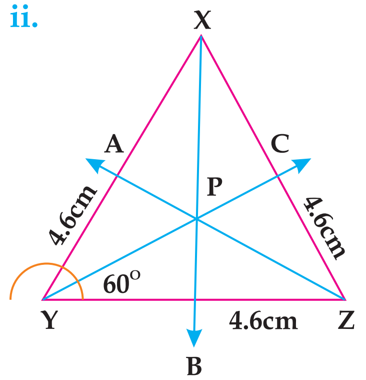

A
D
F
90°
45°
B
E
5cm
C

8.

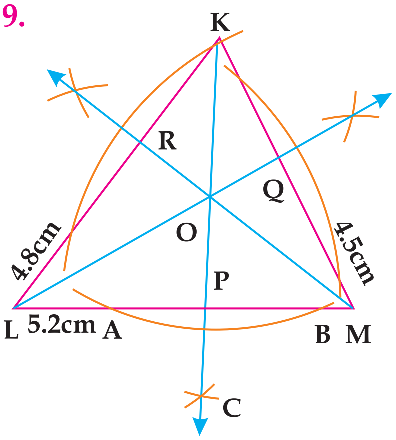
i.



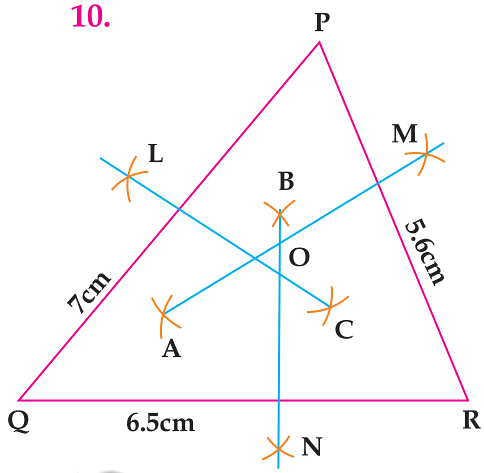
ii.



9.

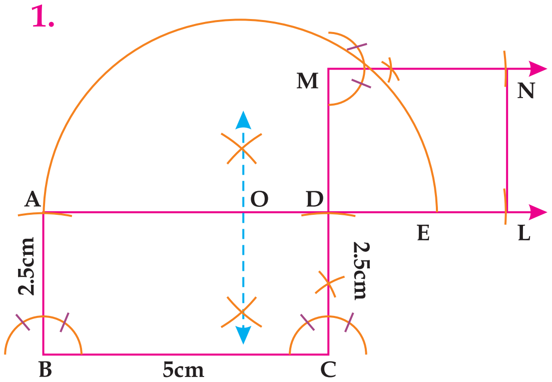


10.

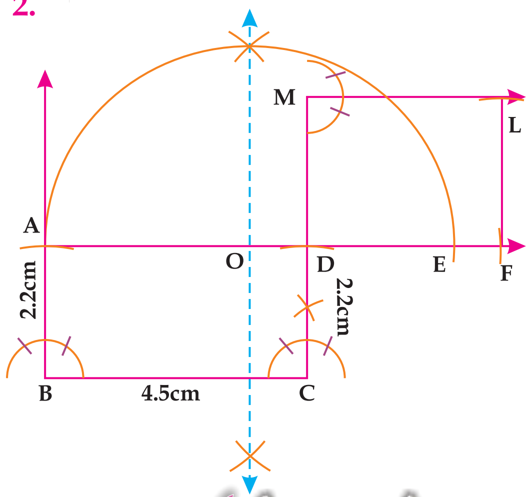


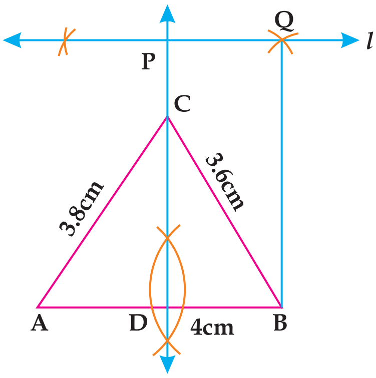
Exercise 13.3

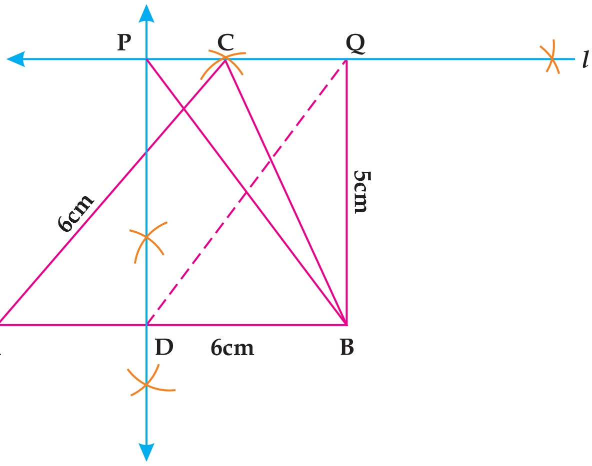
1.



2.



3.


4.


Review Exercise 13

1. i. هئپاٽينيوز ii. ٽڪنڊي جوعمود iii. Median
   iv. هڪ جيتري مفاصلي تي v. برابر

2. i. *c* ii. *d* iii. *c* iv. *b* v. *a*
   vi. *d* vii. *c* viii. *b* ix. *d*

Exercise 14.1

3. $\Delta\ BCD = 21\sqrt{2}\ cm$

Review Exercise 14

1. i. T ii. T iii. F iv. T v. F
   vi. F vii. F viii. T

2. i. *b* ii. *b* iii. *c* iv. *d* v. *d* vi. *b*

Exercise 15.1

1. i. پاسو $AB = 3\sqrt{7}cm$, ايراضي $= \frac{9\sqrt{3}}{2}\ cm^2$
   ii. پاسي جي ڊيگهه $\overline{AB} = 4\sqrt{7}cm$, ايراضي $= 8\sqrt{3}\ cm^2$
2. پاسي جي ڊيگهه $\overline{AC} = \sqrt{232}\ cm$, ايراضي $= 12\ cm^2$
3. پاسي جي ڊيگهه $\overline{AC} = \sqrt{116}\ cm$, ايراضي $= 24\ cm^2$

Exercise 15.2

1. i. $m\overline{AB} = 10cm$ ii. $x = 6$ iii. $x = 1$
   iv. $x = 2$ v. $\{3, 0\}$ vi. $\{1, -4\}$
2. $m\overline{AB} = 10cm$ 3. اٽپور پاسو گوني ڪند ٽڪندو
4. اٽپور پاسو سوڙهي ڪند ٽڪندو

Review Exercise 15

1. i. $(mBC)^2$ ii. پيور iii. $(m\overline{AC})^2$ iv. ٽڪندو
2. $m\overline{AB} = 8cm$

Exercise 16.1

1. i. $\sqrt{101}$ ii. 1 iii. $2\sqrt{2}$ iv. $2\sqrt{2}$
2. i. 5 ii. $\sqrt{117}$ iii. 5 iv. $\sqrt{10}$
3. $P = 12$

Exercise 16.2

4. ٽپڪا A, B ۽ C پيورپاسو ٽڪندو ناهيندا
5. ٽپڪا A, B ۽ C گوني ڪندٽڪندوناهيندا
6. $K = 1 \pm 3\sqrt{3}$
9. چا ڪاڻ تہ چورسن جا پاسا برابر هوندو آهن ۽ هي ٽپڪاچورس کيظاهرڪن ٿا

Exercise 16.3

1. i. $(-1,7)$ ii. $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ iii. $(-4,3)$ iv. $\left(\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$

2. $(-1,1)$ 3. $B=(2,2)$ 4. نیم قطر $= 5\sqrt{2}$

وچ $= (4,5)$

Review Exercise 16

1. i. T ii. F iii. F iv. F v. T
vi. T vii. T viii. T ix. F

2. i. $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ii. لیک iii. $y<0$

3. i. c ii. a iii. d iv. d