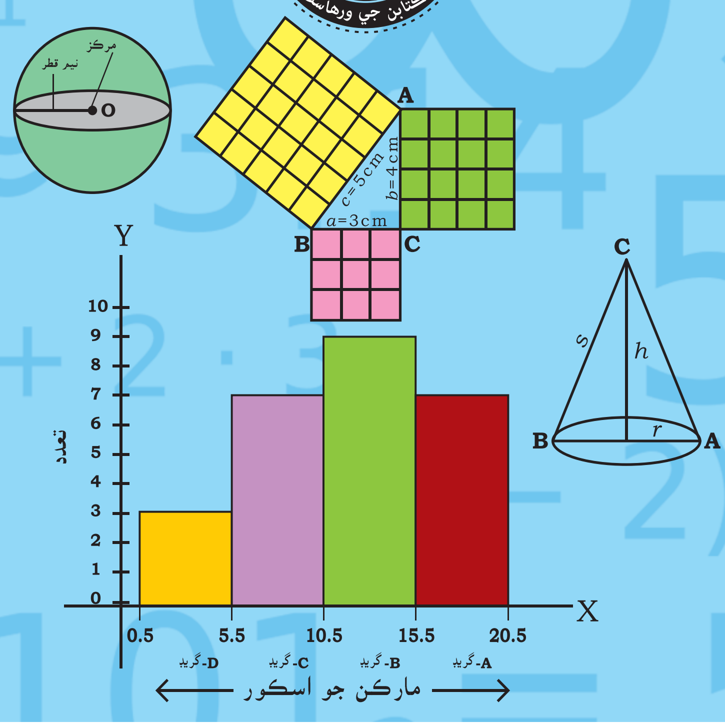
رياضي

8

اٺين ڪلاس لاءِ

شهيد بينظير ڀٽو
SHAHEED BENAZIR BHUTTO
FREE TEXTBOOK SERIES
مفت نصابي ڪتابن جي ورهاست جو سلسلو



سِنڌ ٽيڪسٽ بُڪ بورڊ، ڄام شورو

ڇپيندڙ

اقبال پبلشنگ ڪمپني، حيدرآباد

سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ، ڄامشورو جو تيار ڪيل ۽ ڇپائي بڌر ڪيل
ڪتابن جي نصاب جي جائزي واري صوبائي ريويو ڪاميٽي بيورو آف ڪريڪيولم
۽ ايڪسٽينشن ونگ سنڌ ڄامشورو جو سڌاريل
تعليم ۽ لٽريسي کاتو، حڪومت سنڌ طرفان سنڌ صوبي اسڪولن
لاءِ واحد درسي ڪتاب طور منظور ٿيل.
حوالو نمبر SO(G-I)E&L/CURRICULUM-2014 تاريخ 08-12-2016

نگران اعلي

عبد العليم لاشاري

چيئرمين سنڌ ٽيڪسٽ بُڪ بورڊ

ليکڪ:
- پروفيسر ڊاڪٽر نور محمد مصطفيٰ شيخ
- محمد صغير شيخ
- پروفيسر اعجاز علي صبحپوٽو
- محب الله شيخ
- اسماء پٽي
- سُمترا راٺي

نظرثاني صوبائي ريويو ڪميٽي (PRC):
- محمد صغير شيخ
- آفتاب علي
- محمد شفيق ميمڻ
- محمد وسيم
- عطيه تبسم پٽو
- ارجن لعل-ايس- سڌريا

رضاڪارانه نظرثاني ڪندڙ • علي ڏنو پيپو

ايڊيٽر:
- پروفيسر ڊاڪٽر محمد ذڪاءُ الله خان
- سُمترا راٺي

ٽيڪنيڪل ايڊيٽر: • ارجن لعل-ايس- سڌريا

مترجم: • سُمترا راٺي   پروفيسر ڊاڪٽر نور مصطفيٰ شيخ

ڪنسلٽنٽ:
- ڪامران لطيف.اي ايس ايس
- ميرسرفراز خليل ساند. جي ايس ايس

لي آئوٽ ۽ ڪمپوزنگ • فرحان علي پٽي (حاشر پرنٽرز ائنڊ پبلشرز، حيدرآباد)
ماجد علي ڪاڪا (ايڊوانس پرنٽنگ ايجنسي. حيدرآباد)

ڇپيندڙ: هي ڪتاب اقبال پبلشنگ ڪمپني، حيدرآباد ۾ ڇپيو.

فهرست

پيش لفظ

سنڌ ٽيڪسٽ بُڪ بورڊ هڪ اهڙو تعليمي ادارو آهي، جنهن جو ڪم درسي ڪتابن جي تياري ۽ اشاعت ڪرڻ آهي. ان جو اهم مقصد اهڙن درسي ڪتابن جي تياري ۽ فراهمي آهي، جيڪي نئين نسل کي علم ۽ شعور سان گڏوگڏ منجهن اهڙي صلاحيت پيدا ڪن، جنهن جي ذريعي اُهي اسلام جي آفاقي نظرين، ڀائيچاري، بزرگن جي ڪارنامن، پنهنجي ثقافتي ورثي ۽ روايت جي حفاظت ڪندي نئين دور جي سائنسي، ٽيڪنيڪي ۽ سماجي تقاضائن کي پورو ڪري ڪامياب زندگي گذاري سگهن.

هن اعليٰ مقصد کي پورو ڪرڻ خاطر اهل علم، ماهرن، استاد صاحبن ۽ مخلص دوستن جي هڪ ٽيم گُڏجي ڪري ڪان حاصل ٿيندڙ معلومات جي روشنيءَ ۾، ڪتابن جي درستگيءَ جي معيار، جائزي ۽ اُنهن جي سُڌاري جي عمل ۾ اسان سان گڏ لڳاتار مصروف آهي.

اسان جا ماهر ۽ اشاعتي عملو، اُن صورت ۾ ئي ڀرپور مقصدن ۾ ڪامياب ٿيندو، جڏهن انهن ڪتابن مان استاد صاحب، شاگرد ۽ شاگرديائون پورو پورو لاڀ ماڻين. ان لاءِ سندن تجويزون ۽ رايا انهن ڪتابن کي بهتر بڻائڻ ۾ ڪار آمد ٿيندا.

چيئرمين

سنڌ ٽيڪسٽ بُڪ بورڊ

بِسمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيّمِ

باب 1

سيٽن تي عمل

1.1 سيٽ

سيٽ واضح بيان ڪيل، مختلف شين جو ميڙ آهي ۽ أنهن شين کي اسين سيٽ جا ڙڪن چوندا آهيون. سيٽن کي عام طرح انگريزيءَ جي وڏي اي- بي- سي جي اکرن سان ۽ أنهن جي ڙڪنن کي ننڍي اي- بي- سي جي اکرن سان ظاهر ڪبو آهي.

سيٽن جا ڪجهه مثال:

(1) A = پهرين ڇهن مفرد عددن جو سيٽ (بياني صورت)

(2) $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (جدولي صورت)

(3) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -5 < x < 5\}$ (علامتي صورت)

دؤر جي مشق I

1. هيٺ ڏنل سيٽن کي جدولي صورت ۽ علامتي صورت ۾ لکو:

(i) A = پهرين پنجن قدرتي عددن جو سيٽ

(ii) B = -2 ۽ 3 جي وچ ۾ موجود سجن عددن جو سيٽ

(iii) C = 10 ۽ 30 جي وچ ۾ موجود مفرد عددن جو سيٽ

2. هينين سيٽن مان ڪهڙا محدود ۽ ڪهڙا لا محدود سيٽ آهن؟

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، $B = \{1, 3, 5, 7, ...\}$

C = 10 ۽ 30 جي وچ ۾ موجود ٻڏي عددن جو سيٽ

D = 10 جي سمورين ضرب أپتن جو سيٽ ، $E = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x < 0\}$

3. هيٺيان وصفون مثالن سان سمجهايو.

(i) منفرد سيٽ (ii) لاڳاپيل سيٽ (iii) سيٽ جو ڪامپليمينٽ

4. مثال ڏئي ثابت ڪريو.

(i) $A \cup A' = U$ (ii) $A \cap A' = \varnothing$ (iii) $(A')' = A$

1.1.1 ڪجهه مکيه سيٽ

عددن سان نهندڙ ڪجهه مکيه سيٽ ۽ أنهن کي ظاهر ڪرڻ جون نشانيون هيٺ ڏجن ٿيون:

- قدرتي عددن جو سيٽ $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ ● مکمل يا پورن عددن جو سيٽ $\mathbb{W} = \{0,1,2,3,...\}$
- سجن عددن جو سيٽ $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ يا $\mathbb{Z} = \{...-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$
- ناطق عددن جو سيٽ $\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q} \wedge p, q \in Z, q \neq 0\}$
- ٻڏي سجن عددن جو سيٽ $E = \{0, \pm 2, \pm 4, ...\}$ يا $\mathbb{E} = \{...,-6,-4,-2,0,2,4,6,...\}$
- اِڪي عددن جو سيٽ $\mathbb{O} = \{...,-5,-3,-1,1,3,5,...\}$ يا $\mathbb{O} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, ...\}$ ● مفرد عددن جو سيٽ $P = \{2,3,5,7,...\}$

1.1.2 مليل سيٽ جا ماتحت سيٽ لهڻ

ماتحت سيٽ: سيٽ X کي سيٽ Y جو ماتحت سيٽ تڏهن چئبو، جڏهن سيٽ X جو هرهڪ رڪن سيٽ Y جو به رڪن هجي. نشانيءَ ۾ $X \subseteq Y$ لکبو.

مثال. $X = \{1, 2, 3\}$ ۽ $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ته $X \subseteq Y$

نوٽ: (i) خالي سيٽ، هرهڪ سيٽ جو ماتحت سيٽ آهي.
(ii) هر ڪوئي سيٽ، پنهنجو ماتحت سيٽ آهي.

1.1.3 واجب ماتحت سيٽ ۽ غير واجب ماتحت سيٽ جي وصف

1. واجب ماتحت سيٽ

سيٽ A جو اهڙو ماتحت سيٽ جيڪو A جي برابر نه هجي، اُن کي A جو واجب سيٽ چئبو. جيڪڏهن سيٽ B، سيٽ A جو واجب ماتحت سيٽ آهي ته اُن کي $B \subset A$ لکبو.

مثال 1. $A = \{1, 2, 3\}$ ۽ $B = \{1, 2\}$ ته $B \subset A$

2. غير واجب ماتحت سيٽ

جيڪڏهن $B \subseteq A$ ۽ $A \subseteq B$ ته ٻئي سيٽ A ۽ B، هڪ ٻئي جا غير واجب ماتحت سيٽ چئبا آهن. اهڙي صورت ۾ $A = B$.

نوٽ: جيڪڏهن سيٽ B، سيٽ A جو واجب ماتحت سيٽ نه هجي ۽ نه وري غير واجب ماتحت سيٽ هجي ته اُن کي ترتيبوار $B \not\subset A$ يا $B \not\subseteq A$ لکبو آهي.

مثال 2. فرض ڪيو $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ۽ $B = \{4, 3, 2, 1\}$ ته سيٽ A، سيٽ B جو غير واجب ماتحت سيٽ آهي. $(A \subseteq B)$ ۽ $B \subseteq A$ سيٽ B، سيٽ A جو غير واجب سيٽ آهي)

مثال 3. $A = \{x, y, z\}$ ته اِن سيٽ جا ممڪن ماتحت سيٽ هينيان ٿيندا:

$\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}$

هڪ رُڪني سيٽ جا ٻه ماتحت سيٽ آهن: $(2 = 2^1)$

اهڙي طرح ٻه رُڪني سيٽ جا ممڪن ماتحت سيٽ چار ٿيندا: $(4 = 2^2)$

ٽه رُڪني سيٽ جا ممڪن ماتحت سيٽ ٿيندا: $(8 = 2^3)$

نوٽ: جيڪڏهن ڪنهن سيٽ A جي رُڪنن جو تعداد n هجي ته ان سيٽ جي سيني ممڪن ماتحت سيٽن جو تعداد 2^n ٿيندو.

3. سيٽ A جو سگهه سيٽ P (A) لهڻ

سگهه سيٽ: ڪنهن سيٽ A جي سيني ماتحت سيٽن جي سيٽ کي سندس سگهه سيٽ چئبو آهي ۽ نشانيءَ ۾ P(A) لکبو آهي.

مثال 4. $A = \{a, b\}$ ته سگهه سيٽ P(A) لهو.

حل: جيئن ته A جا سمورا ماتحت سيٽ آهن: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$

تنهن ڪري: $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

اهڙي طرح خالي سيٽ جو صرف هڪ ماتحت سيٽ آهي، يعني خالي سيٽ جو ماتحت سيٽ، خود خالي سيٽ آهي مطلب ته $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

مشق 1.1

1. فيصلو ڪريو تہ هيٺين مان ڪهڙو سيٽ، ٻئي سيٽ جو ماتحت سيٽ آهي؟

(i) $A = \{5,6,7\}$ ۽ $B = \{1,2,3,...,10\}$

(ii) $C = \{2\}$ ۽ $D = \{2,3,5\}$

(iii) $T = \{1,2,3,..., 8\}$ ۽ $S = \{2,4,6\}$

2. هيٺين مليل سيٽن مان هر هڪ جا ڪي بہ ٽي واجب ماتحت سيٽ لکو:

(i) $A = \{a, e, i, o, u\}$ (ii) $B = \{x, y\}$

3. هيٺين مليل سيٽن مان هر هڪ جا ڪي بہ ٻہ واجب ۽ هڪ غير واجب ماتحت سيٽ لکو:

(i) $X = \{2, 4\}$ (ii) $Y =$ عدد 4 کان ننڍن مفرد عددن جو سيٽ

4. هيٺين مليل سيٽن جا سمورا ممڪن ماتحت سيٽ لکو:

(i) $F = \{1,2,3\}$ ، (ii) $A =$ ٻڌي مفرد عددن جو سيٽ

(iii) عدد 7 کان ننڍن ٻڌي عددن جو سيٽ

(iv) $D = \{x | x \in \mathbb{E}^+ \wedge x \leqslant 6\}$ (v) $C = \{x | x \in \mathbb{Z} \wedge -2 < x < 2\}$

5. هيٺين جا سگهہ سيٽ لکو:

(i) $A = \{1, 3, 5\}$ (ii) $B = \{a, b, c, d\}$ (iii) $C = \varnothing$

6. اهڙو سيٽ لکو، جنهن جو صرف هڪ واجب ماتحت سيٽ هجي.

7. اهڙو سيٽ لکو، جنهن جو ڪوبہ واجب ماتحت سيٽ نہ هجي.

8. هيٺين جا غير واجب ماتحت سيٽ لکو:

(i) $\{x | x \in \mathbb{O} \wedge x \leqslant 7\}$ (ii) $\{x | x \in \mathbb{P} \wedge x \leqslant 11\}$

9. جيڪڏهن $X = \{20, 30, 40, 50, 60, 80, 100\}$ تہ X جي هيٺين ماتحت سيٽن ۾ موجود رُڪنن جو تعداد لکو:

(i) عدد 2 سان پورو پورو ونڊجندڙ عددن جوسيٽ

(ii) عدد 8 سان پورو پورو ونڊجندڙ عددن جو سيٽ

(iii) عدد 15 سان پورو پورو ونڊجندڙ عددن جو سيٽ

(iv) عدد 25 سان پورو پورو ونڊجندڙ عددن جو سيٽ

10. فيصلو ڪريو تہ هيٺين مليل سيٽن مان ڪهڙو سيٽ، ٻي مليل سيٽ جو ماتحت آهي.

(i) $\mathbb{N}$ ۽ $\mathbb{W}$ (ii) $\mathbb{Z}$ ۽ $\mathbb{N}$ (iii) $\mathbb{P}$ ۽ $\mathbb{N}$

(iv) $\mathbb{E}$ ۽ $\mathbb{Z}$ (v) $\mathbb{Q}$ ۽ $\mathbb{O}$ (vi) $\mathbb{Q}$ ۽ $\mathbb{E}$

1.2 سيٽن تي عمل

1.2.1 ميلاپ ۽ ڪاٽ لاءِ مٽاسٽا ۽ سنگت وارن قانونن جي تصديق

(A) ميلاپ ۽ ڪاٽ لاءِ مٽاسٽا وارا قانون.

فرض ڪريو تہ A ۽ B ڪي بہ ٻہ سيٽ آهن.

ميلاپ لاءِ مٽاسٽا وارو قانون: $\boxed{A \cup B = B \cup A}$

ڪاٽ لاءِ مٽاسٽا وارو قانون: $\boxed{A \cap B = B \cap A}$

مثال 1. جيڪڏهن $A= \{1,2,3\}$ ۽ $B= \{1,3,5\}$ تہ ميلاپ ۽ ڪاٽ لاءِ مٽاسٽا واري قانون جي تصديق ڪريو.

حل: (i) ميلاپ لاءِ مٽاسٽا واري قانون جي تصديق جو مطلب آهي:

اهو ڏسڻ تہ $\boxed{A \cup B = B \cup A}$

سڄو پاسو $= A \cup B$
$= \{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 5\}$
$= \{1, 2, 3, 5\}$

کٻو پاسو $= B \cup A$
$= \{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3\}$
$= \{1, 2, 3, 5\}$

جيئن تہ سڄو پاسو برابر آهي، کٻي پاسي جي.

تنهن ڪري تصديق ٿي تہ: $\boxed{A \cup B = B \cup A}$

حل: (ii) ڪاٽ لاءِ مٽاسٽا واري قانون جي تصديق جو مطلب آهي:

اهو ڏسڻ تہ $A \cap B = B \cap A$

سڄو پاسو $= A \cap B$
$= \{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5\}$
$= \{1, 3\}$

کٻو پاسو $= B \cap A$
$= \{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3\}$
$= \{1, 3\}$

جيئن تہ سڄو پاسو برابر آهي کٻي پاسي جي.

تنهن ڪري تصديق ٿي تہ $A \cap B = B \cap A.$

(B) ميلاپ ۽ ڪاٽ لاءِ سنگت وارا قانون

فرض ڪريو A، B ۽ C ڪي بہ ٽي سيٽ آهن تہ

ميلاپ لاءِ سنگت وارو قانون: $\boxed{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C}$

ڪاٽ لاءِ سنگت وارو قانون: $\boxed{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C}$

مثال 2. جيڪڏهن $A = \{1,2,3\}$ ، $B= \{2,3,4\}$ ۽ $C = \{3,4,5\}$ تہ تصديق ڪريو تہ

(i) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$

حل: **(i)** ڪاٽ لاءِ سنگت واري قانون جي تصديق لاءِ: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

ڪبو پاسو:	سڄو پاسو:
$A \cap (B \cap C)$	$(A \cap B) \cap C$
$= \{1, 2, 3\} \cap (\{2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5\})$	$= (\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\}) \cap \{3, 4, 5\}$
$= \{1, 2, 3\} \cap \{3, 4\} = \{3\}$	$= \{2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$

جيئن تہ ڪبو پاسو = سڄو پاسو

تنهن ڪري تصديق ٿي وئي تہ: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

حل: **(ii)** ميلاپ لاءِ سنگت واري خاصيت جي تصديق لاءِ: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

سڄو پاسو:	ڪبو پاسو:
$(A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cup C)$
$= (\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\}) \cup \{3, 4, 5\}$	$= \{1, 2, 3\} \cup (\{2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5\})$
$= \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5\}$	$= \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4, 5\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$	$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

جيئن تہ ڪبو پاسو برابر آهي، سڄي پاسي جي

تنهن ڪري تصديق ٿي تہ: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

1.2.2 ورهاست وارن قانونن جي تصديق ڪرڻ

فرض ڪريو تہ A، B ۽ C ڪي بہ ٽي سيٽ آهن.

سيٽن جي ميلاپ جو، ڪاٽ جي لحاظ کان ورهاست وارو قانون آهي:

$$\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$$

۽ سيٽن جي ڪاٽ جو، ميلاپ جي لحاظ کان ورهاست وارو قانون آهي:

$$\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$$

مثال. جيڪڏهن $A = \{1,2,3\}$ ، $B= \{2,4,6\}$ ۽ $C = \{2,3,6\}$ تہ سيٽن جي ورهاست وارن قانونن جي تصديق ڪريو.

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

حل **(i)** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ڪبو پاسو $= A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3\} \cup (\{2, 4, 6\} \cap \{2, 3, 6\})$
$= \{1, 2, 3\} \cup \{2, 6\} = \{1, 2, 3, 6\}.$

سڄو پاسو $= (A \cup B) \cap (A \cup C) = (\{1, 2, 3\} \cup \{2, 4, 6\}) \cap (\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 6\})$
$= \{1, 2, 3, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 6\} = \{1, 2, 3, 6\}.$

جيئن تہ ڪبو پاسو = سڄو پاسو

تنهن ڪري تصديق ٿي تہ: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

حل: **(ii)** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

کبو پاسو $= A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3\} \cap (\{2, 4, 6\} \cup \{2, 3, 6\})$

$= \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 6\} = \{2, 3\}.$

سڄو پاسو $= (A \cap B) \cup (A \cap C) = (\{1, 2, 3\} \cap \{2, 4, 6\}) \cup (\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 6\})$

$= \{2\} \cup \{2, 3\} = \{2, 3\}.$ جيئن تہ سڄو پاسو برابر آهي کابي پاسي جي

تنهن ڪري تصديق ٿي تہ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

آگسٽ دي مارگن (1806-1871) هڪ برطانوي رياضيدان جنهن دي مارگن جا قانون ٺاهيا

1.2.3 دي مارگن جا قانون بيان ڪرڻ ۽ تصديق ڪرڻ

فرض ڪريو تہ سيٽ A ۽ سيٽ B ڪنهن ڪائناتي سيٽ U جا ماتحت سيٽ آهن تہ دي مارگن جا قانون هن طرح آهن:

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$, (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

مثال: جيڪڏهن $U = \{1,2,3,\ldots,6\}$، $A = \{1,3,5\}$ ۽ $B = \{2,4,6\}$ تہ سيٽن تي دي مارگن قانونن مان ڪنهن بہ هڪ جي تصديق ڪريو.

حل: هتي اسان سيٽن تي دي مارگن جي قانونن مان $(A \cap B)' = A' \cup B'$ جي تصديق ڪنداسين.

$A \cap B = \{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \{\ \}$

کبو پاسو $= (A \cap B)' = U - (A \cap B) = \{1, 2, 3, \ldots, 6\} - \{\ \} = U$

$A' = U - A$

$= \{1, 2, 3, \ldots, 6\} - \{1, 3, 5\} = \{2, 4, 6\}$

$B' = U - B = \{1, 2, 3, \ldots, 6\} - \{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5\}$

سڄو پاسو $= A' \cup B' = \{2, 4, 6\} \cup \{1, 3, 5\} = U$

جيئن تہ سڄو پاسو = کبو پاسو

تنهن ڪري تصديق ٿي تہ $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

نوٽ: اهڙي طرح دي مارگن جي ٻي قانون جي تصديق پاڻ ڪريو.

عملي ڪم: جيڪڏهن $U = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A = \{a, b, c, d\}$ ۽ $B = \{c, d, e, f\}$ تہ دي مارگن جا قانون ثابت ڪريو.

ثابتي: **(i)** $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$A \cup B = \ldots\ldots\ldots$

$A' = \ldots\ldots\ldots,\ B' = \ldots\ldots\ldots$

$A' \cap B'$ ......

∴ کبو پاسو = ...

سڄو پاسو = ...

تنهن ڪري سڄو پاسو = ...

ثابتي: **(ii)** $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$A \cap B = \ldots\ldots\ldots$

$(A \cap B)' = \ldots\ \ A' = \ldots\ldots$

$B' = \ldots\ldots\ldots$

$A' \cup B' = \ldots\ldots$

کبو پاسو = ...

سڄو پاسو = ...

تنهن ڪري کبو پاسو = ...

مشق 1.2

1. جيڪڏهن $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ ۽ $C = \{2, 4, 6, 8\}$,
تہ هيٺين جي تصديق ڪريو:

(i) سيٽن جي ميلاپ ۽ ڪاٽ جي مٽاسٽا وارا قانون.

(ii) سيٽن جي ميلاپ ۽ ڪاٽ جي سنگت وارا قانون.

(iii) سيٽن جي ميلاپ جو ڪاٽ جي لحاظ کان ورهاست وارو قانون.

(iv) سيٽن جي ڪاٽ جو ميلاپ جي لحاظ کان ورهاست وارو قانون

2. جيڪڏهن $P = \{a, b, c, d, e\}$, $Q = \{a, e, i, o, u\}$ ۽ $R = \{c, d, e, i\}$
تہ هيٺين جي تصديق ڪريو: (i) $P \cup Q = Q \cup P$ (ii) $P \cap Q = Q \cap P$
(iii) $P \cap (Q \cap R) = (P \cap Q) \cap R$ (iv) $P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$

3. جيڪڏهن $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ۽ $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
تہ ڊي مارگن جي قانونن جي تصديق ڪريو: (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

4. جيڪڏهن $P = \{x/x \in \mathbb{O} \wedge x \leqslant 11\}$, $Q = \{x/x \in \mathbb{P} \wedge 3 \leqslant x \leqslant 11\}$
۽ $R = \{x/x \in \mathbb{E} \wedge x \leqslant 10\}$ تہ سيٽن جي ورهاست وارن قانونن جي تصديق ڪريو

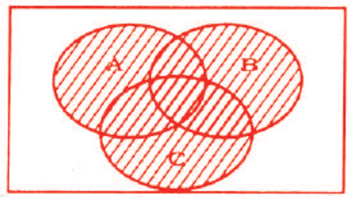
5. جيڪڏهن $U = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 11\}$, $A = \{x/x \in \mathbb{E} \wedge 2 < x < 10\}$
۽ $B = \{x/x \in \mathbb{P} \wedge 3 \leqslant x \leqslant 11\}$
تہ سيٽن تي ڊي مارگن قانونن جي تصديق ڪريو.

جان وين (1834-1923) هڪ انگريز رياضيدان جنهن وين شڪلين جو انتخاب ڪيو

1.3.1 وين ڊائيگرام ذريعي ٽن لاڳاپيل سيٽن جو ميلاپ ۽ ڪاٽ ڏيکارڻ

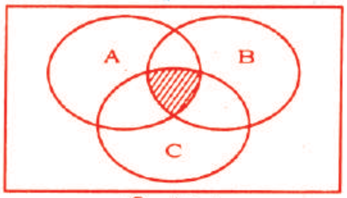
اسان ڄاڻون ٿا تہ وين ڊائيگرام ذريعي سيٽ ۽ اُنهن تي ٿيندڙ عملن کي جاميٽريءَ جي شڪلين ذريعي ڏيکاري سگهبو آهي. هاڻي اسان ڪن بہ ٽن لاڳاپيل سيٽن جي ميلاپ ۽ ڪاٽ کي وين ڊائيگرام وسيلي ظاهر ڪنداسين. شيڊ ٿيل حصو نتيجا ڏيکاري ٿو.

سيٽن جو ميلاپ



شڪل (1)

سيٽن جي ڪاٽ



شڪل (2)

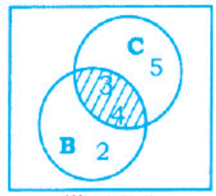
1.3.2 سيٽن ۾ سنگت ۽ ورهاست وارن قانونن جي وين ڊائيگرام وسيلي تصديق

سيٽن ۾ سنگت ۽ ورهاست وارن قانونن جي تصديق وين شڪلين ذريعي ڪرڻ آسان آهي جيئن هيٺ ڏنل مثالن مان ظاهر آهي.

مثال. جيڪڏهن $C = \{3, 4, 5\}$ ۽ $B = \{2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ تہ سيٽن ۾ هيٺ ڏنل قانونن جي تصديق ڪريو.

(i) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

حل: **(i)** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

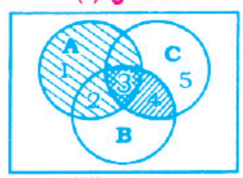


شڪل (i)

شڪل (i) مان ظاهر آهي: $B \cap C = \{3, 4\}$

$B \cap C$ کي ▨ سان ظاهر ڪيو آهي.

کٻو پاسو $= A \cap (B \cap C).$
$= \{3\}$

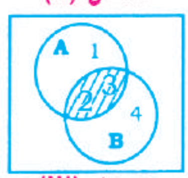


شڪل (ii)

شڪل (ii) مان ظاهر آهي:

$A \cap (B \cap C)$ کي ▩ سان ظاهر ڪيو آهي.

سيٽ A کي ▧ سان ظاهر ڪيو آهي.



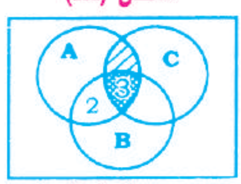
شڪل (iii)

شڪل (iii) مان ظاهر آهي: $A \cap B = \{2, 3\}$

$(A \cap B)$ کي ▨ سان ظاهر ڪيو آهي.

شڪل (iv) مان ظاهر آهي: $(A \cap B) \cap C = \{3\}$ = سڄو پاسو

$(A \cap B) \cap C$ کي ▩ سان ظاهر ڪيو آهي.



شڪل (iv)

جيئن تہ کٻو پاسو = سڄو پاسو

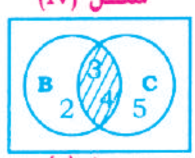
$\therefore \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

تنهن ڪري تصديق ٿي وئي.

ان کي سيٽن ۾ سنگت واري خاصيت ڪاٽ جي عمل تي چئجي ٿو.

عملي ڪم: سيٽن ۾ سنگت واري خاصيت کي ميلاپ جي عمل سان ثابت ڪريو.

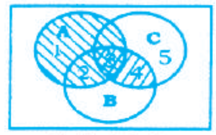
حل: **(ii)** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



شڪل (v)

شڪل (v) مان ظاهر آهي: $B \cap C = \{3, 4\}$

$B \cap C$ کي ▨ سان ظاهر ڪيو آهي.



شڪل (vi)

شڪل (vii)

شڪل (viii)

شڪل (ix)

$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\}$ = کبو پاسو

شڪل (vi) مان ظاهر آهي:

$A \cup (B \cap C)$ کي ، ، ۽ سان ظاهر ڪيو آهي.

شڪل (vii) مان ظاهر آهي: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \cup B$ کي شيڊ سان ظاهر ڪيو آهي.

شڪل (viii) مان ظاهر آهي: $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \cup C$ کي شيڊ سان ظاهر ڪيو آهي.

شڪل (ix) مان ظاهر آهي:

سجو پاسو = $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4\}$.

تنهن ڪري تصديق ٿي وئي

جيئن ته کبو پاسو = سجو پاسو

$\therefore A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ان کي شيڊ سان ظاهر ڪيو آهي.

مشق 1.3

1. جيڪڏهن $A = \{5,6,7\}$، $B = \{6,7,8\}$ ۽ $C = \{7,8,9\}$ ته سيٽن جي هيٺين عملن کي وين ڊائيگرام ۾ ظاهر ڪيو: (i) $A \cup (B \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cap C)$

2. جيڪڏهن P = عدد 15 کان ننڍن، ٻڌي قدرتي عددن جو سيٽ
Q = عدد 15 کان ننڍن، مفرد عددن جو سيٽ، R = عدد 15 کان ننڍن، اڪي قدرتي عددن جو سيٽ
ته هيٺين کي وين ڊائيگرام ۾ ڏيکاريو:
(i) $P \cup (Q \cup R)$ (ii) $P \cap (Q \cap R)$ (iii) $P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$

3. جيڪڏهن $A = \{a,b,c\}$, $B = \{b,c,d\}$, $C = \{c,d,e\}$ ته سيٽن جي هيٺين عملن جي وين ڊائيگرام وسيلي تصديق ڪريو:
(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4. جيڪڏهن $D = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 10\}$, $E = \{x/x \in \mathbb{W} \wedge x \leqslant 8\}$
$F = \{x/x \in \mathbb{P} \wedge x \leqslant 11\}$
ته وين ڊائيگرام وسيلي هيٺيان ثابت ڪريو.
(i) $D \cup (E \cap F) = (D \cup E) \cap (D \cup F)$ (ii) $D \cap (E \cup F) = (D \cap E) \cup (D \cap F)$

جائزي جي مشق 1

1. صحيح جواب ڳوليو.

(i) هينين مان ڪهڙو سيٽ W سيٽ جو ماتحت سيٽ آهي؟

(a) $\mathbb{Z}$ (b) $\mathbb{N}$ (c) $\mathbb{Q}$ (d) $\mathbb{E}$

(ii) $A = \{a,e,i,o,u\}$ جي جملي ماتحت سيٽن جو تعداد آهي:

(a) 8 (b) 16 (c) 32 (d) 64

(iii) ڪن به ٽن سيٽن A، B ۽ C لاءِ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ برابر آهي: ________ .

(a) $A \cap (B \cup C)$ (b) $A \cup (B \cup C)$ (c) $A \cup (B \cap C)$ (d) هنن مان ڪوبہ نہ.

(iv) وين ڊائيگرام ۾ ڪائناتي سيٽ کي گهڻو ڪري ظاهر ڪبو آهي، بطور:

(a) ٽڪنڊو (b) مستطيل (c) گول (d) ستارو

2. جيڪڏهن $A = \{x,y,z\}$ تہ $P(A)$ لکو.

3. جيڪڏهن $A = \{1,2,3\}$، $B = \{2,4,6\}$ ۽ $C = \{x / x \in W \wedge x \leqslant 4\}$

تہ هينيان تصديق ڪريو:

(i) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (iv) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(v) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (vi) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4. جيڪڏهن $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$، $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ ۽

$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ تہ سيٽن ۾ ڊي مارگن جي قانون جي تصديق ڪريو.

5. صحيح جواب ڳوليو.

(i) $A = \{2,4,6,8\}$، $B = \{1,3,5,7,9\}$ تہ $A \cap B$ آهي:

(a) $\{2, 4\}$ (b) $\{\ \}$ (c) $\{1, 3\}$ (d) $\{2, 9\}$

(ii) $A = \{0,2\}$، $B = \{1,3\}$ تہ $A \cup B$ آهي:

(a) $\{0, 2\}$ (b) $\{1, 3\}$ (c) $\{\ \}$ (d) $\{0, 1, 2, 3\}$

(iii) جيڪڏهن $P = \{0,2,6\}$ تہ سيٽ P جو غير واجب ماتحت سيٽ آهي:

(a) $\{0, 2\}$ (b) $\{0, 6\}$ (c) $\{0, 2, 6\}$ (d) $\{2, 6\}$

6. هيٺين سيٽن مان ڇڏايو تہ ڪهڙا سگهہ سيٽ ٿي سگهن ٿا؟ جيڪو سگهہ سيٽ هجي اُن جو اصل سيٽ لِکو.

(i) $\varnothing$ (ii) $\{\varnothing, x\}$ (iii) $\{\varnothing, \{x\}, \{y\}\}$
(iv) $\{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ (v) $\{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}\}$ (vi) $\{\varnothing\}$

خلاصو

- واضح بيان ڪيل مختلف شين جي ميڙ کي سيٽ چئبو آهي.
- عددن جا ڪجهہ مکيہ سيٽ:
  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
  $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \ldots\}$, $\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q}, p \wedge q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
  $\mathbb{E} = \{0, \pm2, \pm4, \ldots\}$, $\mathbb{O} = \{\pm1, \pm3, \pm5, \ldots\}$, $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$
- جيڪڏهن سيٽ A جو هر رڪن، سيٽ B جو بہ رڪن هجي تہ سيٽ A، سيٽ B جو 'ماتحت سيٽ' آهي.
- سيٽ A جو اهڙو ماتحت سيٽ، جيڪو سيٽ A جي برابر نہ هجي؛ اُن کي A جو 'پورو ماتحت سيٽ' يا 'واجب ماتحت سيٽ' چئبو آهي.
- سيٽ A جو اهڙو ماتحت سيٽ، جيڪو سيٽ A جي برابر هجي؛ اُن کي A جو 'اڻ پورو ماتحت سيٽ' يا 'غير واجب ماتحت سيٽ' چئبو آهي.
- هر سيٽ جو صرف هڪ اڻ پورو ماتحت سيٽ هوندو آهي (ڪهڙو؟)
- ڪنهن سيٽ A جي، سڀني ماتحت سيٽن جي سيٽ کي؛ سيٽ A جو 'سگهہ سيٽ' (Power Set) چئبو آهي ۽ اُن جي نشاني P(A) آهي.
- خالي سيٽ هر هڪ سيٽ جو ماتحت سيٽ هوندو آهي. جيڪڏهن ڪنهن سيٽ A ۾ موجود رڪنن جو تعداد n هجي تہ ان جي سگهہ سيٽ ۾ رڪنن جو تعداد 2^n ٿيندو.
- سيٽن ۾ مٽا سٽا وارا قانون: (i) $A \cup B = B \cup A$ (ii) $A \cap B = B \cap A$
- سيٽن ۾ سنگت وارا قانون: (i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  (ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- سيٽن ۾ ورهاست وارا قانون: (i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- سيٽن ۾ ڊي مارگن جا قانون:
  (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- سيٽن ۽ اُنهن تي ٿيندڙ عمل کي جاميٽري جي ڪجهہ شڪيلن وسيلي ظاهر ڪرڻ کي وين ڊائيگرام چئبو آهي.

باب
2

حقيقي عدد

2.1 غير ناطق عدد

2.1.1 غير ناطق عددن جي وصف

اسان روزمره جي ڪمن ۾ عدد استعمال ڪندا آهيون. عام طرح اسان جن به عددن جي باري ۾ سوچيندا آهيون، اهي حقيقي عدد آهن.

مثال طور 0، 1−، 12.59، 0.384 −، $\frac{3}{4}$، π وغيره، اِهي سڀ حقيقي عدد آهن. انهن مان ڪجهه ناطق عدد آهن ۽ ٻيا غير ناطق.

$\frac{5}{1}$، $\frac{2}{3}$، $\frac{1}{2}$ ۽ $\frac{22}{7}$، وغيره اهڙا عدد آهن جيڪي $\frac{p}{q}$ وانگر آهن، جڏهن تہ p ۽ q سچا عدد آهن ۽ $q \neq 0$ اهڙن عددن کي ناطق عدد چئبو آهي ۽ انهن جي سيٽ کي $\mathbb{Q}$ سان ظاهر ڪبو آهي.

$\sqrt{8}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{2}$ ۽ π وغيره اهڙا عدد آهن جيڪي $\frac{p}{q}$ وانگر نہ ٿا لکي سگهجن، انهن کي غير ناطق عدد چئبو آهي ۽ اهڙن عددن جي سيٽ کي $\mathbb{Q}'$ سان ظاهر ڪبو آهي.

مطلب تہ غير ناطق عدد نہ ختم ٿيندڙ ۽ نہ ورجندڙ ڏهائي اٽيور آهن.

2.1.2 ناطق ۽ غير ناطق عددن جي سڃاڻپ

هتي اسان مثالن ذريعي ناطق عددن ۽ غير ناطق عددن جي سڃاڻپ ڪنداسين.

عدد 0.333، $2\sqrt{9}$ ، $\sqrt{4}$، 0 ، 5، 4.755، $\frac{2}{8}$، $\frac{1}{7}$ ، $-\sqrt{49}$ ۽ $3\frac{2}{5}$ ناطق عدد آهن.

عدد $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ، $-3\sqrt{8}$ ، π ، $\sqrt{7}$، $\sqrt{48}$، $\sqrt{122}$ غيرناطق عدد آهن.

عدد $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ۽ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ غير ناطق آهن ڇو تہ انهن ۾ انس يا ڇيد مان ڪوبہ هڪ عدد سڄو عدد نہ آهي. $\mathbb{Q}$ ۽ $\mathbb{Q}'$ غير مشترڪ سيٽ آهن، يعني $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$

2.1.3 حقيقي عددن جي وصف

ناطق عددن جي سيٽ $\mathbb{Q}$ ۽ غير ناطق عددن جي سيٽ $\mathbb{Q}'$ جي ميلاپ سان حقيقي عددن جو سيٽ ملندو آهي جنهن کي $\mathbb{R}$ سان ظاهر ڪبو آهي. يعنيٰ $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$
مطلب تہ هر ناطق عدد حقيقي عدد آهي ۽ ساڳيءَ طرح هر غير ناطق عدد بہ حقيقي عدد آهي.

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \vee x \in \mathbb{Q}'\}$$

حقيقي عدد
- ناطق عدد $\frac{p}{q}; p, q \in Z, q \neq 0$
  - اڻپور
    - ڪاٽو اڻپور
    - واڌو اڻپور
  - سچا عدد
    - ڪاٽو عدد (< 0)
    - غير ڪاٽو عدد $(\geqslant 0)$
      - واڌو عدد
      - ٻڙي
- غير ناطق عدد (نہ ختم ٿيندڙ ۽ نہ ورجندڙ ڏهائي اڻپور)

2.1.4 نہ ڪٽندڙ ۽ نہ ورجندڙ ڏهائي اڻپور ڏيکارڻ

هيٺين مثالن تي غور ڪريو.

مثال 1. $\frac{1}{3}$ کي ڏهائي اڻپور ۾ بدلايو.

حل:

$$\begin{array}{r|l} & 0.333\ldots \\ 3 & 10 \\ & -9 \\ & 10 \\ & -9 \\ & 10 \\ & -9 \\ & 1 \end{array}$$

$\Rightarrow \frac{1}{3} = 0.333\ldots = 0.\overline{3}$

يعني $\frac{1}{3}$ هڪ نہ ڪٽندڙ پر ورجندڙ اڻپور آهي (هتي 3 جو عدد اڻ ڪٽ دفعا آهي).

مثال 2. $-\frac{4}{7}$ کي ڏهائي اڻپور ۾ بدلايو.

حل:

$$\begin{array}{r|l} & -0.571428 \\ 7 & -40 \\ & \mp 35 \\ & -50 \\ & \mp 49 \\ & -10 \\ & \mp 7 \\ & -30 \\ & \mp 28 \\ & -20 \\ & \mp 14 \\ & -60 \\ & \mp 56 \\ & -4 \end{array}$$

$\therefore -\frac{4}{7} = -0.571428\ldots$

يعني $-\frac{4}{7}$ بہ هڪ نہ ڪٽندڙ پر ورجندڙ اڻپور آهي. (هتي 571428 جو عدد اڻ ڪٽ دفعا آهي)

نوٽ: ونڊ جي عمل دوران پاڇي 0 اچي تہ اهو ختم ٿيندڙ يا ڪٽندڙ ڏهائي اڻپور ڪوٺبو.

مثال 3. $\frac{1}{2}$ ۽ $-\frac{4}{5}$ کي ڏهائي اٿپور ۾ بدلايو.

حل:

(i) جيئن ته $\frac{1}{2} = 0.5$ اهو اٿپور هڪ ختم ٿيندڙ ڏهائي اٿپور آهي.

(ii) جيئن ته $-\frac{4}{5} = -0.8$ اهو اٿپور به هڪ ختم ٿيندڙ ڏهائي اٿپور آهي.

مطلب ته هر غير ناطق عدد کي ڏهائي بعد لاتعداد انگ هوندا آهن جيڪي ورجندڙ نه هوندا آهن.
ناطق عددن کي ڏهائي بعد يا ته محدود انگ هوندا آهن يا لا تعداد ورجندڙ انگ هوندا آهن.
مثال طور، $\sqrt{5} = 2.23606...$ ، $\pi = 1.1412135...$ وغيره ناطق عدد آهن.

مشق 2.1

A هيٺين عددن مان ناطق ۽ غير ناطق عدد الڳ ڪريو:

1. 35 2. $\sqrt{36}$ 3. $-2\frac{1}{40}$ 4. $2\sqrt{4}$ 5. 6π 6. $\frac{22}{7}$

7. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 8. $-\sqrt{1}$ 9. $\frac{\pi}{5}$ 10. $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ 11. $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$ 12. $\sqrt{11}$

B. هيٺين مان ختم ٿيندڙ ۽ نه ختم ٿيندڙ پر ورجندڙ اٿپور سڃاڻو:

1. $\frac{1}{7}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. 0 4. $\frac{1}{11}$ 5. $\frac{4}{3}$ 6. $\frac{-1}{5}$

7. $\frac{-5}{6}$ 8. 2256 9. $\frac{9}{10}$ 10. $\frac{25}{26}$ 11. $\frac{243}{100}$ 12. $\frac{18750}{1000}$

2.2 چورس

ڪنهن به عدد کي ساڳئي عدد سان ضرب ڪبي ته اُن عدد جو چورس ملندو.

مثال طور، 2 جو چورس ٿيندو $2^2 = 2 \times 2 = 4$.

ساڳي، طرح a جو چورس ٿيندو: $a^2 = a \times a$

2.2.1 ڪنهن مليل عدد جو مڪمل چورس لهڻ

اهڙو عدد جيڪو ڪنهن به قدرتي عدد يا ناطق عدد جو چورس هجي، اُن کي مڪمل يا پورو چورس چئبو آهي.

مثال طور: 9 مڪمل چورس آهي 3 جو چو تہ $3^2 = 9$

16 مڪمل چورس آهي 4 جو چو تہ $4^2 = 16$

$\frac{4}{25}$ مڪمل چورس آهي $\frac{2}{5}$ جو ۽ 1.21 مڪمل چورس آهي 1.1 جو چو تہ $(1.1)^2 = 1.21$
پر 2 مڪمل چورس نہ آهي $\sqrt{2}$ جو، چو تہ $\sqrt{2}$ هڪ غير ناطق عدد آهي ۽ 2 جا مفرد جزا نہ ٿا نڪري سگھن. 0 جو عدد بہ مڪمل چورس نہ آهي. (چو ؟)

مثال **1**. 11 ۽ 65 جا مڪمل چورس لهو:

حل: 11 جو مڪمل چورس $= 11^2 = 11 \times 11 = 121$

65 جو مڪمل چورس $= (65)^2 = 65 \times 65 = 4,225$

نوٽ: اسان ناطق عددن جا مڪمل چورس لهي سگھون ٿا، پر غير ناطق عددن جا مڪمل چورس نہ ٿا لهي سگھون.

مثال طور: $(\sqrt{2})^2 = 2$ هتي 2 هڪ چورس آهي پر مڪمل چورس نہ آهي.

$(\pi)^2 = \pi^2$ هتي π^2 مڪمل چورس نہ آهي.

2.2.2 قدرتي عددن جي چورس معلوم ڪرڻ جو نمونو

هتي اسان قدرتي عددن جو چورس ضرب ڪرڻ جي بدران جوڙ وسيلي لهڻ جو نمونو سکنداسين.

پهريون قدرتي عدد آهي 1 ۽ $1^2 = 1 \times 1 = 1$ (1 کان اڳ ۾ ڪو قدرتي عدد نہ آهي)

ٻيو قدرتي عدد آهي 2 ۽ $2^2 = 2 \times 2 = 4 = 1 + 2 + 1$ (2 کان اڳ ۾ قدرتي عدد 1 آهي جيڪو جوڙ ۾ 2 کان اڳ ۾ ۽ پوءِ استعمال ٿيو آهي).

ٽيون قدرتي عدد آهي 3 ۽ $3^2 = 3 \times 3 = 9 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1$
(3 کان اڳ قدرتي عدد آهن 1 ۽ 2 جيڪي جوڙ ۾ اڳ ۾ ۽ پوءِ استعمال ٿيا آهن)
تنهن ڪري جوڙ وسيلي عددن جو چورس لهڻ جو هيٺيون نمونو آهي:

$$1^2 = \mathbf{1} = 1$$
$$2^2 = 1+\mathbf{2}+1 = 4$$
$$3^2 = 1+2+\mathbf{3}+2+1 = 9$$
$$4^2 = 1+2+3+\mathbf{4}+3+2+1 = 16$$
$$5^2 = 1+2+3+4+\mathbf{5}+4+3+2+1 = 25$$
$$6^2 = 1+2+3+4+5+\mathbf{6}+5+4+3+2+1 = 36$$
$$7^2 = 1+2+3+4+5+6+\mathbf{7}+6+5+4+3+2+1 = 49$$

ان ريت اهو سلسلو هلندو رهندو.

ڪنهن قدرتي عدد x جي چورس لهڻ لاءِ x کان ننڍا سمورا قدرتي عدد هڪ دفعو x کان اڳ ۾ جوڙ جي صورت ۾ لکبا ۽ هڪ x کان بعد لکبا.

قدرتي عددن جي چورس لهڻ جو هڪ ٻيو نمونو بہ آهي جنهن ۾ اِڪي عددن کي جوڙ ڪبو آهي. 1 کان شروع ڪيل ڪل اوترا اِڪي عدد جوڙ ڪبا جيترو عدد جو ملهہ آهي.

$1^2 = 1$

(پهرين ٻن اِڪي عددن جو جوڙ) $2^2 = 1 + 3 = 4$

(پهرين ٽن اِڪي عددن جو جوڙ) $3^2 = 9 = 1 + 3 + 5$

(پهرين چئن اِڪي عددن جو جوڙ) $4^2 = 16 = 1 + 3 + 5 + 7$

(پهرين ستن اِڪي عددن جو جوڙ) $7^2 = 49 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$

مشق 2.2

A. هيٺين جا چورس عدد لهو:

1. 5	**2.** 13	**3.** 19	**4.** 39	**5.** 45
6. 58	**7.** 63	**8.** 79	**9.** 97	**10.** 108

B. هيٺ ڏنل عددن جي جوڙن جي وچ ۾ موجود سمورا مڪمل چورس عدد لهو:

1. 10 ۽ 30 **2.** 20 ۽ 50 **3.** 40 ۽ 70 **4.** 70 ۽ 90

C. هيٺ ڏنل چورسن کي سڄن عددن جي جوڙ جي نموني سان لکو:

1. 7^2	**2.** 9^2	**3.** 15^2	**4.** 11^2	**5.** 13^2
6. 8^2	**7.** 12^2	**8.** 16^2	**9.** 20^2	**10.** 27^2

2.3 ٻيو مول

ٻيو مول لهڻ، چورس لهڻ جي اُبتڙ عمل آهي. مثال طور 4 جو چورس 16 آهي چو تہ $4^2 = 16$، تنهن ڪري 16 جو ٻيو مول 4 آهي.

اسان ٻئي مول لاءِ $\sqrt{}$ نشاني استعمال ڪندا آهيون. ان ڪري $\sqrt{16} = 4$ لکبو.

نوٽ: ڪنهن واڌو عدد جو ٻيو مول اهو عدد آهي، جنهن کي پاڻ سان ضرب ڏجي تہ اصلوڪو واڌو عدد ملي.

2.3.1 اهڙن قدرتي عددن، عام اٽيورن ۽ ڏهائي اٽيورن جو ٻيو مول لهڻ جيڪي مڪمل چورس هجن.

اسان ستين ڪلاس ۾ ٻئي مول لهڻ جا ٻہ طريقا، مفرد جزن وسيلي ۽ ونڊ وسيلي، سکي آيا آهيون. هتي انهن جي ورڇيڪ عملي مشق ڪجي ٿي.

(i) قدرتي عددن جو پيو مول لهڻ

مثال 1. هيٺ ڏنل عددن جو مفرد جزن ۽ ونڊ ذريعي پيو مول لهو.

(i) 625 **(ii)** 1,600

حل: **(i)** 625 جو پيو مول

مفرد جزن وارو طريقو

5	625
5	125
5	25
5	5
	1

$625 = \underline{5 \times 5} \times \underline{5 \times 5}$

يا $625 = 25 \times 25$

يا $625 = (25)^2$

$\therefore \sqrt{625} = 25$

ونڊ وارو طريقو

$1 \times 1 = 1$

$2 \times 2 = 4$

$3 \times 3 = 9$

$44 \times 4 = 176$

$45 \times 5 = 225$

$46 \times 6 = 276$

	25
2	$\hat{6}\overline{25}$
+2	4
45	225
+5	225
50	0

تنهن ڪري $\sqrt{625} = 25$

حل: **(ii)** 1,600 جو پيو مول

مفرد جزن وارو طريقو

2	1600
2	800
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
5	5
	1

$1600 = \underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{5\times5}$

تنهن ڪري $1600 = 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 5^2$ يا

$\sqrt{1600} = \sqrt{\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{5\times5}}$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40$

ونڊ وارو طريقو

$2 \times 2 = 4$

$3 \times 3 = 9$

$4 \times 4 = 16$

	40
4	1600
+4	16
80	00
+0	00
80	

ٻڙيءَ جي جوڙي مان هڪ ٻڙيءَ ڪي، پيئي مول جي جواب واري خاني ۾ لکو.

تنهن ڪري $\sqrt{1600} = 40$

(ii) عام اڀورن جو ٻيو مول

هتي انس ۽ ڇيد جو ٻيو مول الڳ الڳ لهبو آهي.

مثال 2. مفرد جزن سان ۽ ونڊ واري طريقي سان ٻيو ونڊ مول لهو: (i) $\frac{9}{16}$ (ii) $\frac{49}{64}$

حل: (i) $\frac{9}{16}$ جو ٻيو مول

انس: 9

3	9
3	3
	1

مفرد جزن وارو طريقو

$9 = 3 \times 3$

يا $\sqrt{9} = \sqrt{3 \times 3} = 3$

ڇيد: 16

2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$\therefore \sqrt{16} = \sqrt{\underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}}$

$\sqrt{16} = 2 \times 2 = 4$

ونڊ وارو طريقو

انس: 9

$1 \times 1 = 1$

$2 \times 2 = 4$

$3 \times 3 = 9$

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline 3 & \hat{9} \\ +3 & 9 \\ \hline 6 & 0 \end{array}$$

$\therefore \sqrt{9} = 3$

ڇيد: 16

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline 4 & \overline{16} \\ +4 & 16 \\ \hline 8 & 0 \end{array}$$

$\therefore \sqrt{16} = 4$

تنهن ڪري $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$

حل: (ii) $\frac{49}{64}$ جو ٻيو مول

مفرد جزن وارو طريقو

انس: 49

7	49
7	7
	1

$49 = 7 \times 7$

$\sqrt{49} = \sqrt{7 \times 7}$

$\therefore \sqrt{49} = 7$

ڇيد: 64

2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$64 = 2\times2\times2\times2\times2\times2$

$\therefore \sqrt{64} = \sqrt{\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}}$

$= 2 \times 2 \times 2 = 8$

ونڊ وارو طريقو

انس: 49

$$\begin{array}{r|l} & 7 \\ \hline 7 & \overline{49} \\ +7 & 49 \\ \hline 14 & 6 \end{array}$$

$\therefore \sqrt{49} = 7$

ڇيد: 64

$6 \times 6 = 36$

$7 \times 7 = 49$

$8 \times 8 = 64$

$$\begin{array}{r|l} & 8 \\ \hline 8 & \overline{64} \\ +8 & 64 \\ \hline 16 & 0 \end{array}$$

$\therefore \sqrt{64} = 8$

تنهن ڪري $\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \frac{7}{8}$

(iii) ڏهائي اٽپور جو بيو مول

مثال 3. مفرد جزن ۽ ونڊ وسيلي هيٺين جو بيو مول لهو.

(i) 0.01 (ii) 1.21 (iii) 0.64

حل: جيئن تہ ڏهائي اٽپور جا مفرد جزا نہ ٿا لهي سگهجن، تنهن ڪري پهريائين مليل ڏهائي اٽپور کي عام اٽپور جي صورت ۾ آڻيو.

(i) 0.01 جو بيو مول

ونڊ وسيلي

	0.1
1	$\hat{0}.\overline{01}$
+ 1	1
2	0

تنهن ڪري $\sqrt{0.01} = 0.1$

مفرد جزن وسيلي

$$0.01 = \frac{0.01}{100} = \frac{1}{100}$$

انس: 1. $\sqrt{1\times 1} = 1$

چيد: 100

2	100
2	50
5	25
5	5
	1

$$100 = 2\times 2\times 5\times 5$$
$$\sqrt{100} = \sqrt{2\times 2\times 5\times 5}$$
$$= 2\times 5 = 10$$

تنهن ڪري $\sqrt{0.01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10} = 0.1$

(ii) 1.21 جو بيو مول

ونڊ وسيلي

	1.1
1	$\hat{1}.\overline{21}$
+ 1	1
21	021
+ 1	21
22	0

تنهن ڪري $\sqrt{1.21} = 1.1$

مفرد جزن وسيلي

$$1.21 = \frac{1.21}{100} = \frac{121}{100}$$

انس: 121

11	121
11	11
	1

$$121 = 11\times 11$$

يا $\sqrt{121} = \sqrt{11\times 11} = 11$

چيد: 100

2	100
2	50
5	25
5	5
	1

$$100 = 2\times 2\times 5\times 5$$

يا $\sqrt{100} = \sqrt{2\times 2\times 5\times 5}$

$\therefore \sqrt{100} \quad 2\times 5 = 10$

تنهن ڪري $\sqrt{1.21} = \sqrt{\frac{121}{100}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{11\times 11}}{\sqrt{10\times 10}} = \frac{11}{10} = 1.1$

(iii) مٿي سيڪاريل طريقي سان شاگرد پاڻ 0.64 جو بيو مول لهي سگهن ٿا.

مشق 2.3

A هيٺين جو ٻيو مول مفرد جزن وسيلي لهو:

1. 961	2. 1296	3. 344569	4. 817216
5. $\frac{81}{121}$	6. $\frac{5929}{9604}$	7. $\frac{1764}{7744}$	8. $1\frac{984}{14641}$
9. 249.64	10. 0.4096	11. 2981.16	12. 131.1025

B. هيٺين جو ٻيو مول ونڊ ذريعي لهو:

1. 1024	2. 14161	3. 996004	4. 10329796
5. $\frac{169}{289}$	6. $\frac{1225}{2809}$	7. $\frac{29241}{55696}$	8. $1\frac{1089}{1936}$
9. 648.7209	10. 180.9025	11. 727.9204	12. 7613.609536

2.3.2 اهڙن عددن جو ٻيو مول لهڻ، جيڪي پورا چورس عدد نہ هجن

هڪ پوري چورس عدد جو ٻيو مول ناطق عدد هوندو آهي ۽ اڻپوري چورس عدد جو ٻيو مول غير ناطق هوندو آهي. اهڙي ٻي مول لهڻ لاءِ ونڊ وارو طريقو استعمال ڪبو آهي ۽ ڏهائي جي گهربل درجن ملڻ تائين ونڊ جو عمل جاري رکبو آهي.

مثال 1. 3 جو ٻيو مول ڏهائيءَ جي ٻن درجن تائين لهو.

حل: جيئن تہ 3 ۾ ڪوبہ ڏهائي انگ نہ آهي تنهن ڪري ڏهائيءَ جي ٻن درجن تائين ٻي مول لهڻ لاءِ ٻڙين جو جوڙو بہ بہ دفعا استعمال ٿيندو.

	1.73
1	$\hat{3}.\overline{00}\,\overline{00}$
+ 1	1
27	200
+ 7	189
343	1100
+ 3	1029
	71

26 × 6 = 156
27 × 7 = 189
28 × 8 = 224

342 × 2 = 684
343 × 3 = 1029
344 × 4 = 1376

تنهن ڪري $\sqrt{3} = 1.73$

مثال 2. 40.13 جو ٻيو مول ڏهائي جي ٽن درجن تائين لهو.

حل:

	6.334
6	$\overline{40}.\overline{13}\,\overline{00}\,\overline{00}$
+ 6	36
123	413
+ 3	369
1263	4400
+ 3	3789
12664	61100
+ 4	50656
12668	10444

122 × 2 = 244
123 × 3 = 369
124 × 4 = 496

1262 × 2 = 2524
1263 × 3 = 3789
1264 × 4 = 5056

12663 × 3 = 37989
12664 × 4 = 50656
12665 × 5 = 63325

تنهن ڪري

$\sqrt{40.13} = 6.334$ (ڏهائيءَ جي ٽن درجن تائين)

مشق 2.4

A. هيٺين جو پيو مول ڏهائي جي ٻن درجن تائين لهو:

1. 2	2. 5	3. 13	4. 141	5. 180
6. 2.5	7. 152.7696	8. 0.0143	9. 23.085	10. 125.08

B. هيٺين جو پيو مول ڏهائي جي ٽن درجن تائين لهو:

1. 6	2. 8	3. 11	4. 155	5. 205
6. 73	7. 125.79	8. 1468.9	9. 129048.27	10. 3355.30

2.3.3 مڪمل چورس عدد جي پئي مول ۾ انگن جي تعداد لهڻ جو قانون

مڪمل چورس عدد جي پئي مول لهڻ ڪان سواءِ، اُن ۾ موجود انگن جو تعداد هيٺين قانون تحت لهي سگهبو آهي:

جيڪڏهن مڪمل چورس عدد ۾ انگن جو تعداد n آهي ته:

اُن جي پئي مول ۾ $\frac{n}{2}$ انگ هوندا جيڪڏهن n ٻڌي عدد آهي ۽ $\frac{n+1}{2}$ انگ هوندا جيڪڏهن n اڪي عدد آهي. ان قانون جي تصديق لاءِ هيٺيان مثال ڏجن ٿا.

مثال 1. 240100 جي پئي مول ۾ موجود انگن جو تعداد لهو ۽ قانون جي تصديق ڪريو.

حل: هتي اصل عدد 240100 ۾ انگن جو تعداد 6 آهي

جيئن ته 6 هڪ ٻڌي عدد آهي، تنهن ڪري مٿي ڏنل قانون مطابق سندس پئي مول ۾ $3 = \frac{6}{2}$ انگ موجود آهن.

$$\begin{array}{r|l} & 490 \\ \hline 4 & \overline{24}\,\overline{01}\,\overline{00} \\ +4 & 16 \\ \hline 89 & 801 \\ +9 & 801 \\ \hline 980 & 00000 \end{array}$$

$$\frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

هتي $\sqrt{240100} = 490$ ۽ 490 ۾ انگن جو تعداد 3 آهي.

مثال 2. 34,596 جي ٻئي مول ۾ موجود انگن جو تعداد لهو ۽ قانون جي تصديق ڪريو.

$$\begin{array}{r|l} & 186 \\ \hline 1 & \hat{3}\overline{45}\,\overline{96} \\ +1 & 1 \\ \hline 28 & 245 \\ +8 & 224 \\ \hline 366 & 2196 \\ +6 & 2196 \\ \hline 372 & 0 \end{array}$$

حل: ڏنل عدد 34,596 ۾ انگن جو تعداد 5 آهي.

جيئن ته 5 هڪ اِڪي عدد آهي تنهن ڪري

قانون مطابق ڏنل عدد جي ٻئي مول ۾ انگن جو تعداد آهي:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

هتي $\sqrt{34596} = 186$ ۽ 186 ۾ ڪل 3 انگ آهن.

مشق 2.5

هيٺين مڪمل چورس عددن جي ٻئي مول ۾ موجود انگن جو تعداد لهو:

1. 8649	**2.** 250000	**3.** 322624	**4.** 614656
5. 432964	**6.** 81018001	**7.** 43388569	**8.** 3474748809
9. 73547776	**10.** 33942276	**11.** 7913169936	**12.** 935566751

2.3.4 ٻئي مول تي مشتمل حقيقي زندگي جا مسئلا حل ڪرڻ

مثال 1. هڪ ڪمري جي فرش ۾ 1,089 ماربل ٽائيل اهڙيءَ طرح لڳائجن ٿا، جو هر قطار ۾ ايترا ماربل ٽائيل آهن جيتريون قطارون.

ٻڌايو ته ماربل ٽائيل جون ڪيتريون قطارون آهن؟

$$\begin{array}{r|l} & 33 \\ \hline 3 & \overline{10}\,\overline{89} \\ +3 & 9 \\ \hline 63 & 189 \\ +3 & 189 \\ \hline 66 & 0 \end{array}$$

حل: جيئن ته هر قطار ۾ اوترا ماربل ٽائيل آهن، جيتريون قطارون آهن،

ان ڪري اسان کي 1,089 جو ٻيو مول لهڻو پوندو.

جيئن ته $\sqrt{1089} = 33$ تنهن ڪري 33 قطارون آهن ۽

هر هڪ قطار ۾ 33 ماربل ٽائيل آهن.

مثال 2. هڪ چورس ٻنيءَ جي ايراضي 4,225 چورس ميٽر آهي. سندس هڪ پاسي جي ڊيگھ لهو.

	65
6	$\overline{42}\,\overline{25}$
+6	36
125	625
+5	625
130	0

حل: جيئن ته چورس جي ايراضي = ^{2}(پاسو)

تنهن ڪري پاسو = $\sqrt{\text{چورس جي ايراضي}}$ = $\sqrt{4225}$

هتي $\sqrt{4225} = 65$

تنهن ڪري چورس ٻنيءَ جي هرهڪ پاسي جي ڊيگھ = 65 ميٽر

مثال 3. اهڙو ننڍي کان ننڍو عدد لهو، جيڪو

(i) 124 مان ڪٽ ڪجي (ii) 124 ۾ جوڙ ڪجي

(iii) 124 کي ضرب ڪجي ته هر دفعي پورو چورس عدد ملي.

	11	
1	$\hat{1}\,\overline{24}$	
+1	1	
21	24	
+1	21	
22	3	باقي

حل: اڳيوري چورس عدد جو بيو مول لهبو. **(i)** جيئن ته $124 = 11^2 + 3$

يعني 124 مڪمل چورس عدد $121 = (11)^2$ کان 3 وڌو آهي.

تنهن ڪري 124 مان 3 ڪٽ ڪبو ته 121 ملندو جيڪو هڪ پورو چورس عدد آهي.
مطلب ته اهڙو ڪٽ ڪرڻ وارو ننڍي کان ننڍو عدد 3 آهي.

(ii) 11 کان وڌو عدد 12 آهي ۽ $12^2 = 144$ آهي.

هاڻي $124 = 144 - 20 = (12)^2 - 20$

مطلب ته 124 وري مڪمل چورس 144 کان 20 ننڍو آهي تنهن ڪري 124 ۾ 20 جوڙ ڪبا ته 144 ملندو جيڪو هڪ پورو چورس آهي. يعني اهڙو جوڙ ڪرڻ وارو عدد 20 آهي.

(iii) 124 جا مفرد جزا: $124 = 2 \times 2 \times 31 = (2)^2 \times 31$

2	124
2	62
31	31
	1

انهن جزن مان 31 صرف هڪ دفعو اچي ٿو.

تنهن ڪري 124 کي مڪمل چورس بڻائڻ لاءِ 31 سان ضرب ڪرڻي پوندي
ته جيئن اهو به جوڙو بڻجي. يعني اهڙو ضرب ڪرڻ وارو عدد 31 آهي.

مشق 2.6

1. شاگردن جي پارٽي لاءِ چندو ڪٺو ڪيو ويو. هر هڪ شاگرد ايترا رپيا ڏنا جيترو شاگردن جو تعداد هيو. جيڪڏهن گڏ ٿيل رقم 8,464 رپيا آهي ته ٻڌايو ته هر هڪ شاگرد ڪيترو چندو ڏنو؟
2. هڪ چورس زمين جي ايراضي 10,816 چورس ميٽر آهي. سندس هڪ پاسي جي ماپ لهو.
3. هڪ اسڪول جي اسيمبليءَ ۾ 1,156 شاگرد قطارن ۾ بيهارڻا آهن. اهڙيءَ طرح جو هر قطار ۾ ايترا شاگرد هجن، جيترين قطارون. ٻڌايو ته اسيمبليءَ ۾ ڪل ڪيترين قطارون آهن؟
4. هڪ مستطيل زمين جي ايراضي 1,800 چورس ميٽر آهي. جيڪڏهن سندس ويڪر ڊيگهه جي اڌ جيتري آهي ته ڊيگهه لهو.
5. هڪ چورس زمين جي ايراضي 390,625 چورس ميٽر آهي. ان کي چوڌاري لوڙهي ڏيڻ لاءِ گهربل تار جي ڊيگهه لهو.

2.4 ڪعب ۽ ٽيون مول

2.4.1 ڪعبن ۽ مڪعبن جي سڃاڻپ

(i) **ڪعب:** ڪنهن به عدد جو ڪعب اُن عدد جي ٽين سگهه ٿيندو آهي. اِن جو مطلب ته x جي ٽين سگهه يعني $x, x^3 = x \times x \times x$ جو ڪعب آهي.

مثال 1. $1 \times 1 \times 1 = 1^3 = 1,\ 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$

$$3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27,\ 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$$

$$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125,\ 6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$$

اِن جو مطلب ته 1 جو ڪعب 1، 2 جو ڪعب 8، 3 جو ڪعب 27، 4 جو ڪعب 64، 5 جو ڪعب 125 ۽ 6 جو ڪعب 216 آهي.

(ii) **مڪمل ڪعب يا مڪعب:** ڪنهن به سچي عدد يا ناطق عدد کي انهيءَ عدد سان ٽي دفعا ضرب ڪجي ته هڪ مڪمل ڪعب ملندو.

مثال 2. $(7)^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$ ، $8^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$

$$(9)^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729, \quad 10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

تنهن ڪري 1، 8، 27، 64، 125، 216، 343، 512، 729 ۽ 1000 مڪمل ڪعب آهن 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9 ۽ 10 جا.

ساڳيءَ طرح اسان ناطق عددن جا بہ مڪمل ڪعب معلوم ڪري سگهون ٿا.

مثال طور $(0.5)^3 = 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = 0.125$, $(\frac{2}{3})^3 = \frac{2\times2\times2}{3\times3\times3} = \frac{8}{27}$

$(1.1)^3 = 1.1 \times 1.1 \times 1.1=1.331$, $(2.5)^3 = 2.5\times2.5\times2.5 = 15.625$

اسان چئي سگهون ٿا تہ $\frac{8}{27}$، 0.125، 1.331 ۽ 15.625 وغيره مڪمل ڪعب آهن.

نوٽ: غير ناطق عددن جا مڪمل ڪعب نہ ٿا معلوم ڪري سگهجن.

مثال 1. چڪاس ڪريو تہ هيٺيان عدد مڪمل ڪعب آهن يا نہ:

(i) 1,728 (ii) $5\frac{23}{64}$ (iii) 13.824

حل: اِن چڪاس ڪرڻ لاءِ اسان کي ڏنل عددن جا جزا لهڻا پوندا.

2	1728
2	864
2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

(i) $1728 = \underline{2\times2\times2}\times\underline{2\times2\times2}\times\underline{3\times3\times3}$

$= 1728 = 2^3\times2^3\times3^3 = (2\times2\times3)^3 = 12^3$

تنهن ڪري 1,728 مڪمل ڪعب آهي 12 جو.

(ii) $5\frac{23}{64} = \frac{5\times64+23}{64} = \frac{320+23}{64} = \frac{343}{64}$

$\frac{343}{64} = \frac{7\times7\times7}{4\times4\times4} = \left(\frac{7}{4}\right)^3 = \left(1\frac{3}{4}\right)^3$

انس

تنهن ڪري $5\frac{23}{64}$ مڪمل ڪعب آهي $1\frac{3}{4}$ جو.

2	13824
2	6912
2	3456
2	1728
2	864
2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

(iii) $13.824 = \frac{13.824}{1000} = \frac{13824}{1000} = \frac{13824}{1000}$

چيد

2	1000
2	500
2	250
5	125
5	25
5	5
	1

$= \frac{(2\times2\times2)\times(2\times2\times2)\times(2\times2\times2)\times(3\times3\times3)}{(2\times2\times2)\times(5\times5\times5)}$

$= \frac{2^3\times2^3\times2^3\times3^3}{2^3\times5^3}$

$= \frac{(2\times2\times2\times3)^3}{(2\times5)^3} = \left(\frac{24}{10}\right)^3 = (2.4)^3$

يعني 13.824 مڪمل ڪعب آهي 2.4 جو.

مشق 2.7

A هيٺين جا ڪعب لھو:

1. 10 **2.** 20 **3.** 30 **4.** 40 **5.** 50 **6.** 60
7. 8 **8.** 12 **9.** 15 **10.** 18 **11.** 24 **12.** 25

B. هيٺين عام اڻپورن جا ڪعب لھو:

1. $\frac{1}{2}$ **2.** $\frac{2}{3}$ **3.** $\frac{3}{4}$ **4.** $\frac{4}{5}$ **5.** $1\frac{1}{3}$ **6.** $2\frac{1}{2}$
7. $1\frac{1}{4}$ **8.** $2\frac{1}{6}$ **9.** $1\frac{1}{10}$ **10.** $2\frac{3}{20}$ **11.** $1\frac{1}{9}$ **12.** $3\frac{1}{3}$

C. هيٺين ڏهائي اڻپورن جا ڪعب لھو:

1. 0.4 **2.** 0.9 **3.** 1.2 **4.** 1.6 **5.** 2.1 **6.** 2.5
7. 0.01 **8.** 0.02 **9.** 0.05 **10.** 1.12 **11.** 1.05 **12.** 1.01

D. هيٺين مان ڪهڙا ڪعب آهن؟

1. 512 **2.** 729 **3.** 3375 **4.** 1728 **5.** $\frac{27}{64}$ **6.** $\frac{64}{125}$ **7.** 4096
8. 5832 **9.** 9261 **10.** 27000 **11.** 32768 **12.** 39304

2.4.2 مڪمل ڪعب / مڪعب عددن جو ٽيون مول لھڻ

اسان کي خبر آهي تہ $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$. ان جو مطلب تہ 2 جو ڪعب 8 آهي. يا 8 جو ٽيون مول 2 آهي.

ان کي هيٺئن بہ لکبو آهي: $2 = (8)^{\frac{1}{3}}$ يا $\sqrt[3]{8} = 2$

مثال: ٽيون مول لھو: **1.** 1,000 **2.** 216 **3.** 729

حل: (**1**) جيئن تہ: $1,000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$

سھن ڪري $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10$ يا $(1000)^{\frac{1}{3}} = (10^3)^{\frac{1}{3}} = 10$

حل: (2) $216 = 2\times2\times2\times3\times3\times3 = (2\times2\times2)\times(3\times3\times3)$

تنهن ڪري $216 = 2^3\times3^3 = 6^3$

$\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6$ يا $(216)^{\frac{1}{3}} = (6^3)^{\frac{1}{3}} = 6$

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

حل: (3) $729 = (3\times3)\times(3\times3)\times(3\times3)$

$= 3^2\times3^2\times3^2 = 9^3$

تنهن ڪري $\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{9^3} = 9$ يا $(729)^{\frac{1}{3}} = (9^3)^{\frac{1}{3}} = 9$

2.4.3 عددن جي ڪعبن جون خاصيتون سڃاڻڻ

عددن جي ڪعبن جون ڪجهه مشهور خاصيتون هي آهن:

(i) واڌو عدد جو ڪعب هميشه واڌو عدد ٿيندو آهي. مثال طور: $2^3 = 8,\ 5^3 = 125$

(ii) ڪاٽو عدد جو ڪعب هميشه ڪاٽو عدد ٿيندو آهي.

مثال طور: $(-3)^3 = -27,\ (-6)^3 = -216$

(iii) ٻڌي عدد جو ڪعب هميشه ٻڌي عدد ٿيندو آهي. مثال طور: $2^3 = 8,\ 4^3 = 64$

(iv) اِڪي عدد جو ڪعب هميشه اِڪي عدد ٿيندو آهي. مثال طور: $3^3 = 27,\ 5^3 = 125$

(v) عددن جي ڪعب ۾ ضرب ۽ ونڊ تي ورڇ واري خاصيت موجود آهي

مثال طور **(a)** $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3},\ \left(\frac{6}{7}\right)^3 = \frac{6^3}{7^3}$ **(b)** $(2\times3)^3 = 2^3\times3^3,\ (8\times9)^3 = 8^3\times9^3$

(vi) ناطق عددن جو ڪعب هميشه ناطق ٿيندو آهي. غير ناطق عددن جو ڪعب هميشه غير ناطق ٿيندو آهي.

نوٽ: عددن جي ٽئين مول ۾ به ضرب ۽ ونڊ تي ورڇ واري خاصيت موجود آهي:

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\ \sqrt[3]{b} \quad ۽ \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{h}}$$

مشق 2.8

A هيٺين جو ٽيون مول لهو:

1. 64 **2.** 343 **3.** 1331 **4.** 512 **5.** 729

6. 74,088 **7.** 3375 **8.** 13824 **9.** 15625 **10.** 35937

11. $\frac{1}{8}$ **12.** $2\frac{10}{27}$ **13.** $1\frac{61}{64}$ **14.** $1\ \frac{91}{125}$ **15.** $\frac{343}{729}$

B. مثالن سان تصديق ڪريو تہ:

(i) هڪ واڌو عدد جو ڪعب هميشہ واڌو عدد ٿيندو آهي.

(ii) هڪ ڪاٽو عدد جو ڪعب هميشہ ڪاٽو عدد ٿيندو آهي.

(iii) هڪ ٻڌي عدد جو ڪعب هميشہ ٻڌي عدد ٿيندو آهي.

(iv) هڪ اِڪي عدد جو ڪعب هميشہ اِڪي عدد ٿيندو آهي.

C. هيٺين جي تصديق ڪريو:

1. $(3 \times 4)^3 = 3^3 \times 4^3$
2. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3}$
3. $(2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$
4. $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3}$
5. $(4 \times 5)^3 = 4^3 \times 5^3 = 4^3 \times 5^3$
6. $(10 \times 20)^3 = 10^3 \times 20^3$
7. $\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5^3}{7^3}$
8. $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3}$
9. $(5 \times 8)^3 = 5^3 \times 8^3$

جائزي جي مشق 2

1. هر هڪ بيان بابت ٽي جواب ڏنل آهن. صحيح جواب تي (✓) نشان لڳايو:

(i) حقيقي عددن جو سيٽ، ناطق عددن ۽ غير ناطق عددن جي سيٽ

(a) جو تفاوت آهي (b) جي ڪاٽ آهي (c) جو ميلاپ آهي

(ii) عدد 100 جي باري ۾ هيٺ ڏنل جوابن مان ڪهڙو صحيح نہ آهي؟

(a) سجو عدد (b) ناطق عدد (c) غير ناطق عدد.

(iii) هيٺين مان ڪهڙو عدد مڪمل چورس نہ آهي؟

(a) 121 (b) 1.21 (c) 12.1

(iv) 4.9 جو چورس آهي:

(a) 4.90 (b) 24.01 (c) 240.0

(v) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = ?$

(a) $\frac{9}{5}$ (b) $\frac{3}{25}$ (c) $\frac{9}{25}$

(vi) $1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1=?$

(a) 8^2 (b) 9^2 (c) 7^2

(vii) هڪ چورس جي ڊيگهه 0.6 ميٽر آهي ته سندس ايراضي آهي:

(a) $0.36m^2$ (b) $3.6m^2$ (c) $36m^2$

(viii) $\sqrt{.04} = ?$

(a) .02 (b) 2.0 (c) 0.2

(ix) $\sqrt{1^2 \times 4^2} = ?$

(a) 4 (b) 14 (c) 41

(x) $\sqrt[3]{125} = ?$

(a) 3 (b) 4 (c) 5

(xi) $\sqrt{\frac{4}{9}} = ?$

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{2}{9}$ (c) $\frac{4}{3}$

(xii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = ?$

(a) $\frac{a}{b}$ (b) $\sqrt{\frac{b}{a}}$ (c) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

2. هيٺين عددن جي ٻي مول ۾ موجود انگن جو تعداد لکو.

(i) 12544 **(ii)** 418609 **(iii)** 30349081

3. هيٺين جو ٻيو مول لکو:

(i) $10\frac{26}{289}$ **(ii)** $28\frac{4}{9}$ **(iii)** $101\frac{92}{169}$

(iv) 0.053361 **(v)** 0.204304 **(vi)** 65.61

4. هڪ چورس زمين جي ايراضي 161,604 چورس ميٽر آهي. سنڌس هڪ پاسي جي ماپ لهو.

5. هيٺين جو ٽيون مول لهو: (i) 3375 (ii) 1728 (iii) $\frac{343}{512}$ (iv) $1\frac{602}{729}$

خلاصو

- جنهن عدد کي $\frac{p}{q}$ (p ۽ q سچا عدد آهن ۽ $q \neq 0$) جي صورت ۾ نہ لکي سگهجي، اُن کي غير ناطق عدد چئبو آهي.
- حقيقي عددن جو سيٽ ناطق عددن جي سيٽ ۽ غير ناطق عددن جي سيٽ جو ميلاپ آهي يعني $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$.
- ناطق عدد اهڙو عدد آهي، جنهن کي ختم ٿيندڙ يا ورجندڙ ڏهائي اٿپور جي شڪل ۾ لکي سگهجي ٿو.
- اهڙو ڏهائي اٿپور جنهن ۾ ڏهائيءَ بعد انگن جو تعداد محدود هجي، اُن کي 'ختم ٿيندڙ ڏهائي اٿپور' چئبو آهي.
- اهڙو ڏهائي اٿپور جنهن ۾ ڏهائيءَ بعد انگن جو تعداد لامحدود هجي، پر ڪجهہ انگ وري وري ساڳي ترتيب ۾ ايندا هجن، اُن کي 'ورجندڙ نہ ختم ٿيندڙ ڏهائي اٿپور' چئبو آهي. اِهي غير ناطق عدد آهن.
- ڪنهن عدد کي اُن عدد سان ضرب ڪبي تہ سنڌس چورس ملندو.
- سچي عدد يا ناطق عدد جي چورس کي مڪمل يا پورو چورس چئبو آهي.
- غير ناطق عدد جو چورس مڪمل چورس نہ ڪوٺبو آهي.
- n انگن واري مڪمل چورس جي ٻئي مول ۾ انگن جو تعداد $\frac{n}{2}$ هوندو جيڪڏهن x ٻڌي هجي ۽ $\frac{n+1}{2}$ هوندو جيڪڏهن x اڪي عدد هجي.
- ڪنهن واڌو عدد 'x' جو ٻيو مول هڪ ٻيو اهڙو واڌو عدد هوندو، جنهن جو چورس ڪرڻ سان اصلوڪو عدد x ملي.
- ڪاٽو سچن عددن جو ٻيو مول نہ لهي سگهبو آهي.
- ڪنهن بہ ناطق عدد لاءِ (i) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ (ii) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$
- ناطق عددن جو ٻيو مول غير ناطق عدد بہ ٿي سگهي ٿو.
- ڪنهن عدد جي ڪعب لهڻ لاءِ ان عدد کي ٽي دفعا پنهنجو پاڻ سان ضرب ڪرڻي پوندي.

باب
3
عددي سرشتو

3.1 عددي سرشتو

پڙهڻ، لکڻ، ڳڻڻ ۽ ليکي چوکي لاءِ عددي سرشتو ڪتب ايندو آهي. عددي سرشتو ڪن نشانين تي ٻڌل آهي، جن کي انگ چئبو آهي. هر عدد انهن انگن تي مشتمل هوندو آهي.

3.1.1 عددي سرشتي جي بنياد جي سڃاڻپ

ڪنهن به عددي سرشتي جي 'بنياد' جو مطلب آهي، ان ۾ استعمال ٿيندڙ انگن جو تعداد. عام طور استعمال ۾ ايندڙ عددن جي سرشتي کي ڏهه بنياد وارو سرشتو چئبو آهي، چو ته ان ۾ جملي ڏهه انگ استعمال ٿيندا آهن:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ۽ 9

0 کان 9 تائين عدد 'هڪ انگ' وارا عدد آهن، يعني هڪ انگي عدد آهن.

9 کان وڏا ۽ 100 کان ننڍا عدد 'ٻن انگن' وارا عدد آهن، يعني ٻه انگي عدد آهن.

ساڳيءَ طرح 99 کان وڏا ۽ 1000 کان ننڍا عدد 'ٽن انگن' وارا عدد آهن، يعني ٽه انگي عدد آهن.

3.1.2 ٻه بنياد، پنج بنياد، اَٺ بنياد ۽ ڏهه بنياد وارن عددن جي سرشتي جي وصف

(i) ٻه بنياد وارو عددي سرشتو

جنهن سرشتي ۾ فقط ٻه انگ 0 ۽ 1، استعمال ٿين ٿا. اِن کي 'ٻه بنياد' وارو عددي سرشتو چئبو آهي (Binary System). عام طور روزاني زندگيءَ ۾ اهوسرشتو استعمال نه ٿيندو آهي، مگر اهو سرشتو تمام ڪارائتو آهي، چو ته هر قسم جي ڪمپيوٽر ۾ استعمال ٿيندو آهي. ڪمپيوٽر ۾ ٻه بنيادي عددن وسيلي ئي مواد جمع ڪيو ويندو آهي. جيئن ته موجود زمانو ڪمپيوٽر جو زمانو آهي، تنهن ڪري ٻه بنيادي نظام کي گهڻي اهميت حاصل آهي. هن سرشتي ۾ ننڍي کان ننڍو انگ '0' آهي ۽ وڏي کان وڏو انگ '1' آهي. هن ۾ ٻڙي کي 0_2 ۽ هڪ کي 1_2 ڪري لکبو آهي. ٻن کي 10_2 ڪري لکبو ۽ پڙهبو. "هڪ ٻڙي ٻه بنياد ۾" ٽن کي 11_2 ڪري لکبو ۽ پڙهبو "هڪ هڪ ٻه بنياد ۾" ٻڙي ۽ ان کان وڏا پر 4 کان ننڍا عدد ٻن انگن وارا ٿين ٿا. 3 کان وڏا پر 8 کان ننڍا عدد ٽن انگن وارا ٿين ٿا. 7 کان وڏا ۽ 16 کان ننڍا عدد 4 انگن وارا آهن.

نوٽ: مختلف عددي نظامن ۾ فرق واضح ڪرڻ لاءِ عدد سان گڏ واسطو رکندڙ بنياد جو انگ پڻ لکيو ويندو آهي. مثال طور 431_5 جو مطلب آهي ته 431 کي پنج بنياد واري نظام ۾ لکيو ويو آهي.

(ii) پنج بنياد وارو عددي سرشتو

هن سرشتي ۾ ڪل پنج انگ 0، 1، 2، 3 ۽ 4 استعمال ٿيندا آهن. هتي ننڍي کان ننڍو انگ '0' ۽ وڏي کان وڏو انگ '4' آهي. پنج بنياد ۾ 4 کان وڏا 25 کان ننڍا عدد ٻن انگن وارا ٿين ٿا 24 کان وڏا 125 کان ننڍا عدد ٽن انگن وارا ٿين ٿا. 124 کان وڏا 625 کان ننڍا عدد چئن انگن وارا ٿيندا آهن.

هن سرشتي ۾ ٻڙيءَ کي 0_5، هڪ کي 1_5، ٻن کي 2_5، ٽن کي 3_5 ۽ چئن کي 4_5 ڪري لکبو آهي. پنجن کي 10_5 لکبو ۽ 'هڪ ٻڙي، پنج بنياد ۾' پڙهبو آهي. ڇهن کي 11_5 لکبو ۽ "هڪ هڪ، پنج بنياد ۾" پڙهبو آهي.

(iii) عددن جو اٺ بنيادي سرشتو

هن سرشتي ۾ ڪل اٺ انگ 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6 ۽ 7 استعمال ٿيندا آهن. هن سرشتي کي آڪٽل سرشتو (Octal System) به چئبو آهي. هتي ننڍي کان ننڍو انگ ٻڙي ۽ وڏي کان وڏو انگ 7 آهي. انهن کي 0_8 ۽ 7_8 ڪري لکبو آهي. اٺن کي 10_8 (هڪ ٻڙي، اٺ بنياد ۾) ۽ 9 کي 11_8 (هڪ هڪ، اٺ بنياد ۾) لکبو آهي. اٺ ۾ 0 ۽ ان کان وڏا پر 8 کان ننڍا عدد هڪ انگ وارا ٿين ٿا. 7 کان وڏا پر 64 کان ننڍا عدد ٻن انگن وارا ٿين ٿا. 63 کان وڏا 512 کان ننڍا عدد ٽن انگن وارا ٿيندا آهن.

(iv) عددن جو ڏهه بنياد وارو سرشتو

هن سرشتي ۾ ڪل ڏهه انگ 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8 ۽ 9 استعمال ٿيندا آهن. هن سرشتي کي عددن جو ڏهائي سرشتو (Decimal Numbers) به چئبو آهي. هي عددي سرشتو دنيا جي هر خطي ۾ مقبول آهي، ڇو ته 10 سان ضرب ۽ ونڊ ڪرڻ تمام آسان آهي.

3.1.3 ٻه بنياد، پنج بنياد، اٺ بنياد ۽ 10 بنياد وارن سرشتن جي وضاحت

(i) ٻه بنياد وارو عددي نظام (Binary System)

اسان کي خبر آهي ته ڏهائي سرشتي ۾ ننڍي کان ننڍو انگ 0 آهي ۽ وڏي کان وڏو انگ 9 آهي. تنهن ڪري 9 ۾ جڏهن 1 جوڙ ڪبو آهي ته جوڙ اُپت کي 10 ڪري لکبو آهي (ڏهه ڪري پڙهبو). بلڪل ساڳيءَ طرح ٻه بنياد واري سرشتي ۾ وڏي کان وڏو انگ 1 ۾ جڏهن انگ 1 جوڙ ڪبو ته جوڙ اُپت کي 10_2 ڪري لکبو آهي ۽ هڪ ٻڙي، ٻه بنياد ۾ ڪري پڙهبو آهي.

ياد رهي ته 10_2 جو ملهه ڏهه نه پر ٻه آهي.

هاڻي.

$1_2 + 1_2 =$ هڪ + هڪ = ٻه، جنهن کي لکبو 10_2

$1_2 + 10_2 =$ هڪ + ٻه = ٽي، جنهن کي لکبو 11_2

$1_2 + 11_2 =$ هڪ + ٽي = چار، جنهن کي لکبو 100_2

ڏهه بنيادي سرشتي ۾ ڏنل ڪنهن به عدد کي 2 جي سگهن جي جوڙ جي صورت ۾ لکي سگهبو. مثال طور:

$$13 = 8 + 4 + 1 = \mathbf{1} \times 2^3 + \mathbf{1} \times 2^2 + \mathbf{0} \times 2^1 + \mathbf{1} \times 2^0 = 1101_2$$

$$27 = 16 + 8 + 2 + 1 = \mathbf{1} \times 2^4 + \mathbf{1} \times 2^3 + \mathbf{0} \times 2^2 + \mathbf{1} \times 2^1 + \mathbf{1} \times 2^0 = 11011_2$$

(ii) پنج بنياد واري عددي سرشتو

جيئن ڏهائي سرشتي ۾ وڏي ۾ وڏو انگ 9 آهي ۽ ان ۾ انگ 1 جمع ڪرڻ سان 10 ملندا آهن. تيئن هن سرشتي ۾ موجود وڏي ۾ وڏو انگ 4 آهي ۽ ان ۾ انگ 1 جوڙ ڪبو تہ 5 نہ لکبو، پر 10_5 لکبو ۽ ”هڪ ٻڙي پنج بنياد ۾“ پڙهبو. ساڳي طرح هتي

10_5 (پنج) + 1_5 = 11_5 (ڇهه)، 11_5 (ڇهه) + 1_5 = 12_5 (ست)

12_5 (ست) + 1_5 = 13_5 (اٺ)، 13_5 (اٺ) + 1_5 = 14_5 (نو)

14_5 (نو) + 1_5 = 20_5 (ڏهه)، 20_5 (ڏهه) + 1_5 = 21_5 (يارهن)

ڏهہ بنياد ۾ ڏنل ڪنهن بہ عدد کي پنجن جي سگهن جي جوڙ جي صورت ۾ لکي سگهبو آهي. مثال طور:

(i) $87 = 75 + 10 + 2 = 3\times25+2\times5+2\times1$

$= 3 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 2 \times 5^0 = 322_5$

(ii) $138=125+10+3=1\times5^3+0\times5^2+2\times5^1+3\times5^0= 1023_5$

(iii) اٺ بنياد وارو عددي سرشتو يا آڪٽل سرشتو (Octal System)

هن سرشتي ۾ وڏي ۾ وڏو انگ 7 آهي ۽ ننڍي ۾ ننڍو انگ 0 آهي

تنهن ڪري ڏهائي سرشتي وانگر 7 ۾ 1 جوڙ ڪبو تہ 8 نہ لکبو پر 10_8 لکبو. پر 'هڪ ٻڙي' اٺ بنياد ۾ پڙهبو. $7_5 + 1_5 = 10_5$

ساڳيءَ طرح،

10_8 (اٺ) + 1_8 = 11_8 (نو)، 11_8 (نو) + 1_8 = 12_8 (ڏهه)

12_8 (ڏهه) + 1_8 = 13_8 (يارهن)، 13_8 (يارهن) + 1_8 = 14_8 (ٻارهن)

14_8 (ٻارهن) + 1_8 = 15_8 (تيرهن)، 15_8 (تيرهن) + 1_8 = 16_8 (چوڏهن)

16_8 (چوڏهن) + 1_8 = 17_8 (پندرهن)، 17_8 (پندرهن) + 1_8 = 20_8 (سورهن)

نوٽ: ڏهہ بنياد ۾ ڏنل ڪنهن بہ عدد کي اٺن جي سگهن جي جوڙ جي صورت ۾ ڏيکاري سگهبو آهي. مثال طور:

$$135 = 128 +7=2\times64+0\times8+7\times1=2\times8^2+0\times8^1+7\times8^0 = 207_8$$

(iv) ڏهائي سرشتو

جنهن عددي سرشتي جو بنياد 10 هجي اُن کي ڏهائي سرشتو چئبو آهي. اهو سرشتو تمام گهڻو زير استعمال آهي. واپار، ڏنڌي ۽ ڳڻپ ۾ روزمره ڪتب ايندو آهي. هن سرشتي جي ڪنهن بہ عدد کي ڏهن جي سگهن جي جوڙ جي صورت ۾ لکي سگهبو آهي مثال طور:

$$5683 = 5\times1000+6\times100+8\times10+3$$

$$= 5\times10^3+6\times10^2+8\times10^1+3\times10^0$$

مشق 3.1

1. هيٺين جا جواب ڏيو:

(i) عددن جي ٻه بنيادي سرشتي جي وصف ٻڌايو. پهرين اٺن عددن کي ٻه بنيادي سرشتي ۾ لکو.

(ii) عددن جي پنج بنيادي سرشتي جي تعريف ڪريو. پهرين ٻارهن عددن کي پنج بنيادي سرشتي ۾ لکو.

(iii) عددن جي اٺ بنيادي سرشتي جي تعريف ڪريو. پهرين سورهن عددن کي اِن نظام ۾ لکو.

(iv) ڏهائي سرشتي جي تعريف ڪريو ۽ ڪجهه مثال ڏيو.

2. هيٺين ڏهائي عددن کي ٻن جي سگهن جي جوڙ جي صورت ۾ لکو.

(i) 11 (ii) 15 (iii) 21 (iv) 29 (v) 37 (vi) 51 (vii) 63

3. هيٺين ڏهائي عددن کي پنجن جي سگهن جي جوڙ جي صورت ۾ لکو.

(i) 13 (ii) 24 (iii) 39 (iv) 47 (v) 59 (vi) 78 (vii) 99 (viii) 104

4. هيٺين ڏهائي عددن کي اٺن جي سگهن جي جوڙ جي صورت ۾ لکو.

(i) 30 (ii) 57 (iii) 78 (iv) 98 (v) 114 (vi) 225 (vii) 340

5. هيٺين ڏهائي عددن کي ڏهن جي سگهن جي جوڙ جي صورت ۾لکو.

(i) 201 (ii) 319 (iii) 4075 (iv) 56970 (v) 980762

3.2 هڪ سرشتي مان ٻئي سرشتي ۾ تبديلي

اسان ٻه بنياد، پنج بنياد، اٺ بنياد ۽ ڏهه بنياد وارا عددي سرشتا سکي چڪا آهيون. اهي سمورا سرشتا مڪاني قيمتن جي حساب سان آهن. اهي هڪ سرشتي مان ٻئي سرشتي ۾ تبديل ڪري سگهجن ٿا. سڀ کان آسان ۽ سنئو طريقو لڳاتار ونڊ وارو آهي، جنهن وسيلي اسان ڪنهن بہ ڏهائي سرشتي ۾ ڏنل عدد کي ٻئي سرشتي ۾ بدلائي سگهون ٿا. ساڳيءَ طرح ٻين سرشتن ۾ ڏنل عدد ۾ موجود هر هڪ انگ جي مڪاني قيمت ان سرشتي جي بنياد واري انگ جي سگهن وسيلي لهي سگهون ٿا.

3.2.1 ڏهائي نظام ۾لکيل عدد کي ٻہ بنياد، پنج بنياد ۽ آٺ بنياد واري نظام ۾ تبديل ڪرڻ ۽ ان جي اُبتڙ عمل

ڏهائي سرشتي ۾ لکيل عدد کي ٻہ بنياد، پنج بنياد ۽ آٺ بنياد واري سرشتي ۾ تبديل ڪرڻ

(i) ڏهائي نظام وارن عددن جي ٻہ بنياد واري نظام ۾ تبديلي

مثال 1. 19 کي ٻہ بنياد واري نظام ۾ تبديل ڪريو.

2	19
2	9 – 1
2	4 – 1
2	2 – 0
	1 – 0

حل: ان لاءِ اسان لاڳيتي ونڊ وارو طريقو استعمال ڪندا آهيون.
هن طريقي مطابق ڏنل عدد 19 کي 2 سان مسلسل ونڊ ڪئي ويندي، جيسين ونڊ اُپت 1 اچي يعني ونڊيندڙ 2 کان ننڍو عدد.
هر ونڊ بعد پاڇيءَ کي ونڊ اُپت جي ساڄي پاسي لکبو آهي.
تري واري انگ ۽ پاڇيءَ وارن انگن کي هيٺيان کان مٿي واري ترتيب ۾ لکي، گهربل ٻہ بنياد وارو عدد حاصل ڪبو آهي.
تنهن ڪري $19 = 10011_2$

مثال 2. 276 کي ٻہ بنياد واري عدد ۾ بدلايو.

2	276
2	138 – 0
2	69 – 0
2	34 – 1
2	17 – 0
2	8 – 1
2	4 – 0
2	2 – 0
	1 – 0

حل: لاڳيتي ونڊ وارو طريقو استعمال ڪبو.
ڏنل عدد 276 کي 2 سان مسلسل ونڊ ڪريو، هر دفعي پاڇيءَ واري انگ کي ونڊ اُپت جي ساڄي پاسي لکبو. اهو عمل جاري رهندو، جيسين ونڊ اُپت 1 حاصل ٿئي.
تنهن ڪري $276 = 100010100_2$

نوٽ: تري واري 1 ۽ پاڇي وارن انگن کي هيٺيان کان مٿي واري ترتيب ۾ لکڻ سان گهربل عدد ملندو.

(ii) ڏهائي نظام ۾لکيل عددن جي پنج بنياد ۾ تبديلي.

مثال 1. 678 کي پنج بنياد ۾ تبديل ڪريو.

حل: لاڳيتي ونڊ وارو طريقو استعمال ڪبو.

5	678
5	135 – 3
5	27 – 0
5	5 – 2
	1 – 0

هن طريقي مطابق ڏنل عدد 678 کي 5 سان مسلسل ونڊ ڪبي، جيسين ونڊ اُپت ونڊيندڙ 5 کان ننڍي حاصل ٿئي.
هر دفعي ونڊ بعد پاڇيءَ کي ونڊ اُپت جي ساڄي پاسي لکبو.
آخر ۾ تري واري انگ کان شروع ڪري سمورين پاڇين کي هيٺيان کان مٿي ترتيب ۾ لکڻ سان گهربل عدد ملندو.
تنهن ڪري $678 = 10203_5$

مثال 2. 6065 کي پنج بنياد ۾ بدلايو.

حل: مٿي ڏنل ترڪيب مطابق

$$6065 = 143230_5$$

5	6065
5	1213 – 0
5	242 – 3
5	48 – 2
5	9 – 3
	1 – 4

(iii) ڏهائي نظام ۾ لکيل عددن جي اٺ بنياد ۾ تبديلي

مثال 1. 728 کي اٺ بنياد ۾ تبديل ڪريو.

حل: لاڳيتي ونڊ وارو طريقو استعمال ڪبو.

هن طريقي مطابق ڏنل عدد 728 کي 8 سان مسلسل ونڊ ڪبي. جيسين ونڊ اُپت ونڊيندڙ 8 کان ننڍو عدد حاصل ٿئي. جيئن 2 بنياد ۽ 5 بنياد ۾ بدلائڻ وقت سيکاريل آهي. تيئن تري واري انگ کان شروع ڪري. پاڇين وارن انگن کي هيٺيان کان مٿي ترتيب سان لکڻ سان گهربل اٺ بنياد وارو عدد ملندو.

8	728
8	91 – 0
8	11 – 3
	1 – 3

تنهن ڪري $728 = 1330_8$

مثال 2. 2064 کي اٺ بنياد ۾ تبديل ڪريو.

حل: سامهون ڏيکاريل لاڳيتي ونڊ وسيلي، آسان گهربل اٺ بنياد وارو عدد حاصل ڪنداسين:

$$2064 = 4020_8$$

8	2064
8	258 – 0
8	32 – 2
	4 – 0

مشق 3.2

A. هيٺين ڏهائي عددن کي ٻہ بنياد واري نظام ۾ بدلايو.

1. 36	**2.** 77	**3.** 89	**4.** 156	**5.** 280
6. 489	**7.** 654	**8.** 786	**9.** 999	**10.** 1600
11. 1705	**12.** 1808	**13.** 1096	**14.** 2001	**15.** 2020

B. هيٺين ڏهائي عددن کي پنج بنياد واري نظام ۾ بدلايو.

1. 87	**2.** 98	**3.** 169	**4.** 205	**5.** 370
6. 444	**7.** 666	**8.** 1072	**9.** 2007	**10.** 3333
11. 5005	**12.** 5050	**13.** 5016	**14.** 5602	**15.** 5005

C. هيٺين ڏهائي عددن کي اٺ بنياد واري نظام ۾ بدلايو.

1. 504	2. 1765	3. 20093	4. 33661	5. 48360
6. 50607	7. 61278	8. 79118	9. 80877	10. 99099
11. 90009	12. 99009	13. 98765	14. 98065	15. 99999

(b) ٻين بنيادن ۾ ڏنل عددن جي ڏهائي نظام ۾ تبديلي

هر هڪ سرشتي ۾ عدد جي، هر انگ جي مڪاني قيمت، سندس بنياد واري انگ جي سگهه وسيلي لهي سگهجي ٿي.

(i) عددن کي ٻہ بنياد سرشتي مان ڏهائي سرشتي ۾بدلائڻ

ڪنهن بہ ڏنل عدد کي ٻہ بنياد مان ڏهہ بنياد ۾ بدلائڻ جي وضاحت هيٺين مثالن سان ڪجي ٿي.

مثال 1. هيٺين ٻہ بنياد وارن عددن کي ڏهائي نظام ۾ بدلايو.

(a) 11_2 (b) 111_2 (c) 110101_2

حل:

(a) $11_2 = 1\times10_2^1 + 1\times10_2^0 = 1\times2^1 + 1\times2^0 = 2+1 = 3_{10}$

(b) $111_2 = 1\times10_2^2 + 1\times10_2^1 + 1\times10_2^0$ (ڏهائي ۾ مڪاني قيمت)

$= 1\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0$ (ٻہ بنياد ۾ مڪاني قيمت)

$= 1\times4 + 1\times2 + 1\times1$

$= 4+2+1 = 7$

تنهن ڪري $111_2 = 7$

(c) $110101_2 = 1\times10_2^5+1\times10_2^4+0\times10_2^3+1\times10_2^2+0\times10_2^1+1\times10_2^0$

$= 1\times2^5+1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$ (مڪاني قيمت)

$= 1\times32+1\times16+0\times8+1\times4+0\times2+1\times1$

$= 32+16+0+4+0+1 = 53$

(ii) عددن کي پنج بنياد سرشتي مان ڏهہ بنياد ۾بدلائڻ

مثال 1. 42_5 کي ڏهائي سرشتي ۾ بدلايو.

حل: $42_5 = 4\times5^1 + 2\times5^0 = 4\times5 + 2\times1 = 20+2 = 22$

مثال 2. 234_5 کي ڏهائي سرشتي ۾ بدلايو.

حل: $234_5 = 2\times5^2 + 3\times5^1 + 4\times5^0 = 2\times25 + 3\times5 + 4\times1$

$= 50 + 15 + 4 = 69.$

مثال 3. 3044_5 کي ڏهائي نظام ۾ بدلايو.

حل:

$$3044_5 = 3 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 4 \times 5^0$$
$$= 3 \times 125 + 0 \times 25 + 4 \times 5 + 4 \times 1$$
$$= 375 + 0 + 20 + 4 = 399$$

تنهن ڪري $3044_5 = 399$

(iii) عددن کي اٺ بنياد سرشتي مان ڏهائي سرشتي ۾ بدلايو

مثال 1. 506_8 کي ڏهائي نظام ۾ آڻيو

حل:

$$506_8 = 5 \times 8^2 + 0 \times 8^1 + 6 \times 8^0 = 5 \times 64 + 0 \times 8 + 6 \times 1$$
$$= 320 + 0 + 6 = 326$$

يعني: $506_8 = 326$

مثال 2. 1456_8 کي ڏهائي نظام ۾ آڻيو.

حل:

$$1456_8 = 1 \times 8^3 + 4 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 6 \times 8^0$$
$$= 1 \times 512 + 4 \times 64 + 5 \times 8 + 6 \times 1 = 512 + 256 + 40 + 6$$
$$= 814$$

يعني: $1456_8 = 814$

نوٽ: ايڪي واري جاءِ جي انگ کي 8^0 سان ۽ بعد ۾ ايندڙ انگن کي 8^1، 8^2، 8^3، 8^4..... وغيره سان ضرب ڏبي.

(c) پنج بنياد واري عدد کي اٺ بنياد ۾ تبديل ڪرڻ ۽ اُبتو

هتي پهريائين پنج بنياد واري عدد کي ڏهائي سرشتي ۾ آڻبو ۽ پوءِ اهڙي طرح حاصل ٿيل عدد کي اٺ بنياد ۾ بدلائبو.

مشق 3.3

A. هيٺين ٻن بنياد وارن عددن کي ڏهائي عددن ۾ تبديل ڪريو.

1. 1101_2	**2.** 11011_2	**3.** 10111_2	**4.** 110101_2
5. 1010101_2	**6.** 1110111_2	**7.** 1100110_2	**8.** 1100111_2
9. 11010110_2	**10.** 11111101_2	**11.** 10010010_2	**12.** 11000101_2

B. هيٺين پنج بنياد وارن عددن کي ڏهائي عددن ۾ بدلايو.

1. 21_5	**2.** 30_5	**3.** 40_5	**4.** 12_5	**5.** 22_5
6. 131_5	**7.** 442_5	**8.** 232_5	**9.** 401_5	**10.** 430_5
11. 1310_5	**12.** 4421_5	**13.** 2322_5	**14.** 4013_5	**15.** 4304_5

C. هيٺين اٺ بنياد وارن عددن کي ڏهائي عددن ۾ بدلايو.

1. 47_8	**2.** 16_8	**3.** 40_8	**4.** 60_8	**5.** 70_8
6. 124_8	**7.** 242_8	**8.** 304_8	**9.** 450_8	**10.** 700_8
11. 3006_8	**12.** 1054_8	**13.** 6600_8	**14.** 4405_8	**15.** 5043_8

3.2.2 ٻہ بنياد، پنج بنياد ۽ اٺ بنياد وارن عددن جي جوڙ، ڪَٽ ۽ ضرب

A. ٻہ بنيادي نظام

(i) ٻہ بنياد واري سرشتي ۾ عددن جو جوڙ

ٻہ بنياد سرشتي ۾ جوڙ جو عمل نهايت ئي سولو ۽ سادو آهي، ڇو تہ ٻہ بنياد ۾ عددن ۾ موجود ٻن انگن جي جوڙ جا فقط هيٺيان ٽي جوڙا ٺهي سگهن ٿا.

جدول جي صورت ۾ هن ريت لکي سگهجي ٿو.

ٻہ بنياد ۾ جوڙ جي جدول

+	0	1
0	0	1
1	1	10

$$0_2 + 0_2 = 0_2$$
$$0_2 + 1_2 = 1_2 + 0_2 = 1_2$$
$$1_2 + 1_2 = 10_2$$

جيڪڏهن ٽي دفعا '1' جوڙ ڪرڻو هجي تہ نتيجو هيٺين ريت ٿيندو.

$$1_2 + 1_2 = 10_2 \quad \Rightarrow \quad 1_2 + 1_2 + 1_2 = 10_2 + 1_2 = 11_2$$

مثال 1. ٻن عددن 111_2 ۽ 101_2 جي جوڙ اُبت معلوم ڪريو.

حل: سڀ کان پهريائين مليل عددن کي انگن جي مڪاني قيمتن جي حساب سان هڪٻئي جي هيٺان رکو.

$$\begin{array}{r} 111_2 \\ +\ 101_2 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

پوءِ ساڄي پاسي کان شروع ڪندي هڪ ۾ هڪ جوڙ ڪريو تہ جواب 2 ايندو، جنهن کي ٻہ بنياد ۾ 10 لکبو آهي.تنهن ڪري جواب ۾ ايڪن جي جاءِ تي '0' لکي '1' حاصل ڪريو. انهيءَ 1 کي وچين انگن 1 ۽ 0 ۾ جوڙ ڪريو تہ 2 يعني، 10_2 جواب ملندو. انهن 10 جي '0' جواب ۾ وچ تي رکي '1' حاصل ڪريو. انهيءَ حاصل ٿيل 1 کي آخري کابي پاسي واري انگن 1 ۽ 1 ۾ جوڙ ڪريو تہ جواب 3 يعني 11_2 لکبو. تنهن ڪري $111_2 + 101_2 = 1100_2$

$$\begin{array}{r} 111_2 \\ +\ 101_2 \\ \hline 1100_2 \\ \hline \end{array}$$

مثال 2. جوڙ ڪريو

1010_2 ۽ 1111_2

حل:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 1010_2 \\ +\ 1111_2 \\ \hline 11001_2 \\ \hline \end{array}$$

تنهن ڪري $1010_2 + 1111_2 = 11001_2$

مثال 3. جوڙ ڪريو

1100_2 ، 1111_2 ۽ 1001_2

حل:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1} \\ 1100_2 \\ 1111_2 \\ +\ 1001_2 \\ \hline 100100_2 \\ \hline \end{array}$$

يعني $1100_2+1111_2+1001_2=100100_2$

(ii) ٻہ بنياد سرشتي ۾ عددن جي ڪٽ

ٻہ بنياد سرشتي ۾ ڪٽ بہ جوڙ وانگر ٿيندي آهي.

مثال 1. 101_2 منجهان 10_2 ڪٽ ڪريو.

حل:

$$\begin{array}{r} 1^{1}01_2 \\ -\ 10_2 \\ \hline 11_2 \\ \hline \end{array} \quad \text{يا} \quad \begin{array}{r} 101_2 \\ -\ 10_2 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

تنهن ڪري $101_2 - 10_2 = 11_2$.

مثال 2. 101_2 کي 1011_2 مان ڪٽ ڪريو

حل:

$$\begin{array}{r} 1011_2 \\ -\ 101_2 \\ \hline 110_2 \\ \hline \end{array}$$

يا $1011_2 - 101_2 = 110_2$

تنهن ڪري $1011_2 - 101_2 = 110_2$

(iii) ٻہ بنياد سرشتي ۾ عددن جي ضرب

ٻہ بنياد سرشتي ۾ ضرب جو عمل جوڙ جي عمل کان وڌيڪ آسان آهي. هن ۾ صرف مڪاني جاين جو خيال رکڻو پوندو آهي. هن سرشتي ۾ عددن کي ضرب ڪرڻ سان انگن جا صرف ٽي مختلف ضرب جا جوڙا ٺهندا آهن، جي هيٺين ريت آهن.

$0 \times 0 = 0$

$0 \times 1 = 1 \times 0 = 0$

$1 \times 1 = 1$

جدول جي شڪل ۾ هن طرح بہ لکي سگهجي ٿو. وضاحت لاءِ هيٺيان مثال ڏجن ٿا.

ٻہ بنياد ۾ ضرب جي جدول

×	0	1
0	0	0
1	0	1

مثال 1. 1101_2 کي 101_2 سان ضرب ڪريو

حل:

$$\begin{array}{rl} 1101_2 & \\ \times\ 101_2 & \\ \hline 1101 & (1 \text{ سان ضرب}) \\ 00000 & (0 \text{ سان ضرب}) \\ 110100 & (1 \text{ سان ضرب}) \\ \hline 1000001_2 & \text{تنهي ضرب اُپتن جو جوڙ} \\ \hline \end{array}$$

تنهن ڪري $1101_2 \times 101_2 = 1000001_2$

مثال 2. حل ڪريو $11100_2 \times 110_2$

حل:

$$\begin{array}{rl} 11100_2 & \\ \times\ 110_2 & \\ \hline 00000 & (0 \text{ سان ضرب}) \\ 111000 & (1 \text{ سان ضرب}) \\ 1110000 & (1 \text{ سان ضرب}) \\ \hline 10101000_2 & \text{تنهي ضرب اُپتن جو جوڙ} \\ \hline \end{array}$$

تنهن ڪري

$11100_2 \times 110_2 = 10101000_2$

مشق 3.4

A . حل ڪريو.

1. $110_2 + 11_2$
2. $1010_2 + 101_2$
3. $1110_2 + 111_2$
4. $11011_2 + 11001_2$
5. $10101_2 + 110_2$
6. $111_2 + 11_2$
7. $1101_2 + 110_2 + 1001_2$
8. $1101_2 + 1001_2 + 11_2$
9. $11011_2 + 110101_2 + 110_2$
10. $11111_2 + 1010_2 + 111_2$
11. $1010_2 + 1111_2 + 10111_2$
12. $1111_2 + 11101_2 + 11111_2$

B . حل ڪريو.

1. $1101_2 - 11_2$
2. $111_2 - 101_2$
3. $1110_2 - 110_2$
4. $11111_2 - 1010_2$
5. $110111_2 - 1101_2$
6. $10011_2 - 101_2$
7. $1001_2 - 10_2$
8. $1111_2 - 1000_2$
9. $11011_2 - 1010_2$
10. $11111 - 1010$

C. مختصر ڪريو.

1. $(1111_2 + 101_2) - (1100_2 - 101_2)$
2. $(1101_2 + 10010_2) - (10101_2 - 1010_2)$
3. $1111_2 - 1010_2 + 101_2$
4. $(10101_2 - 10010_2) - (10001_2 - 1110_2)$

D. ضرب ڇڏايو.

1. $101_2 \times 11_2$
2. $110_2 \times 101_2$
3. $1111_2 \times 100_2$
4. $110_2 \times 1101_2$
5. $101_2 \times 111_2$
6. $10101_2 \times 1010_2$
7. $11110_2 \times 101_2$
8. $1001_2 \times 101_2$
9. $10100_2 \times 11_2$
10. $110111_2 \times 111_2$
11. $101010_2 \times 101_2$
12. $101110_2 \times 110_2$

B. پنج بنياد وارو سرشتو

(i) پنج بنياد وارن عددن جي جوڙ ۽ ڪَٽ

اسان کي خبر آهي ته پنج بنياد واري سرشتي ۾ پنج نشانيون 4، 3، 2، 1، 0 استعمال ٿينديون آهن. هن سرشتي ۾ جوڙ ۽ ڪَٽ هيٺين مثالن وسيلي سيکارجي ٿي:

مثال 1. حل ڪريو: $4_5 + 1_5$

حل: 4 ۽ 1 جو جوڙ آهي 5 جنهن کي پنج بنياد ۾ لکبو '10_5'

تنهن ڪري $4_5 + 1_5 = 10_5$

$$\begin{array}{r} 4_5 \\ +\ 1_5 \\ \hline 10_5 \\ \hline \end{array}$$

مثال 2. حل ڪريو: $3_5 + 4_5$

حل: 3 ۽ 4 جو جوڙ آهي 7 جنهن کي پنج بنياد ۾ لکبو '12_5'.

تنهن ڪري $3_5 + 4_5 = 12_5$

$$\begin{array}{r} 3_5 \\ +\ 4_5 \\ \hline 12_5 \\ \hline \end{array}$$

مثال 3. 123_5 ۽ 312_5 جوڙ ڪريو.

حل:

$$\begin{array}{r} \scriptsize{1}\ \ \ \\ 123_5 \\ +\ 312_5 \\ \hline 440_5 \\ \hline \end{array}$$

يعني

يا $123_5 + 312_5 = 440_5$

مثال 4. 4141_5 ۽ 3421_5 جو جوڙ لهو

حل:

$$\begin{array}{r} \scriptsize{1\,1}\ \ \ \ \ \\ 4141_5 \\ +\ 3421_5 \\ \hline 13112_5 \\ \hline \end{array}$$

يعني

يا $4141_5 + 3421_5 = 13112_5$

جوڙ جي عمل کي آسان بنائڻ لاءِ شاگردن جي سهولت خاطر جوڙ جي جدول سامهون چارٽ جي شڪل ۾ ڏجي ٿي.

پنج بنياد وارن عددن
لاءِ جوڙ جي جدول

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

پنج بنياد وارن عددن جي ڪٽ لاءِ اسان ڀ بنياد وارن عددن جي ڪٽ وانگر طريقو استعمال ڪندا آهيون.

مثال 5. 231_5 کي 424_5 مان ڪٽ ڪريو.

حل:

$$\begin{array}{r} 424_5 \\ -\ 231_5 \\ \hline 143_5 \\ \hline \end{array}$$

يا $424_5 - 231_5 = 143_5$

سمجهاڻي: هتي اسان پهرين '4' مان '1' ڪٽ ڪيو، جنهن مان '3' مليا. وري '2' مان '3' ڪٽ نه ٿا ٿي سگهن، تنهن ڪري ڀر واري انگ '4' مان '1' ورتوسين جيئن تہ هتي پنج بنياد سرشتي جو حساب آهي. ان ڪري اهو هڪ، پنج (5) جي برابر آهي (جيئن ڏهائي سرشتي ۾ ڪاٻي پاسي کان ورتي ڏنل هڪ، ڏهاڪو ٿيندو آهي). تنهن ڪري 2 ۾ 5 ملائڻ سان 7 مليا، جنهن مان 3 ڪٽ ڪري هيٺ 4 لکياسين. آخر ۾ 3 مان 2 ڪٽ ڪياسين ۽ حاصل ٿيندڙ '1' هيٺ لکيوسين.

مثال 6. 13012_5 مان 4141_5 ڪٽ ڪريو.

حل:

$$\begin{array}{r} 13012_5 \\ -\ 4141_5 \\ \hline 3321_5 \\ \hline \end{array}$$

يا

$13012_5 - 4141_5 = 3321_5$.

(ii) پنج بنياد سرشتي ۾ عددن جي ضرب

اسان ڄاڻون ٿا ته سڄن عددن سان ضرب ڪرڻ حقيقت ۾ ڪنهن عدد کي ورائي ورائي جوڙ ڪرڻ جو ٻيو نالو آهي. ٻين سرشتن وانگر پنج بنياد ۾ پڻ ضرب، جوڙ جي عمل مان نڪتي آهي. سهولت خاطر پنج بنياد سرشتي ۾ ضرب جي جدول جو چارٽ سامهون ڏجي ٿو.

پنج بنياد وارن عددن جي ضرب جو جدول

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

مثالون:

$2_5 \times 2_5 = 4_5$

$3_5 \times 2_5 = 11_5$

$4_5 \times 4_5 = 31_5$

$3_5 \times 3_5 = 14_5$

$3_5 \times 4_5 = 22_5$

$2_5 \times 4_5 = 4_5 \times 2_5 = 40_5$

مثال 1. 231_5 ۽ 34_5 جي ضرب اُپت لهو.

حل:

$$\begin{array}{rl} 231_5 & \\ \times\ 34_5 & \\ \hline 2024 & \text{(4 سان ضرب)} \\ +\ 12430 & \text{(3 سان ضرب)} \\ \hline 20004_5 & \text{پڇاڙي ضرب اُپتن جو جوڙ} \end{array}$$

تنهن ڪري $231_5 \times 34_5 = 20004_5$

مثال 2. 4321_5 کي 123_5 سان ضرب ڪريو.

حل:

$$\begin{array}{rl} 4321_5 & \\ \times\ 123_5 & \\ \hline 24013 & \text{(3 سان ضرب)} \\ 141420 & \text{(2 سان ضرب)} \\ +\ 432100 & \text{(1 سان ضرب)} \\ \hline 1203033_5 & \text{تنهي ضرب اُپتن جو جوڙ} \end{array}$$

تنهن ڪري

$4321_5 \times 123_5 = 1203033_5$

مشق 3.5

A. حل ڪريو.

1. $432_5 + 134_5$
2. $3344_5 + 1304_5$
3. $4333_5 + 343_5$
4. $43_5 + 14_5$
5. $34321_5 + 24113_5$
6. $43_5 + 143_5$
7. $1432_5 + 2341_5 + 123_5$
8. $222_5 + 3433_5 + 142_5$
9. $4443_5 + 343_5$
10. $12340_5 + 3444_5 + 444_5$
11. $12340_5 + 12340_5$
12. $43324_5 + 1243_5$

B. حل ڪريو.

1. $342_5 - 12_5$ 2. $202_5 - 14_5$ 3. $3214_5 - 1403_5$ 4. $1203_5 - 134_5$

5. $4321_5 - 1234_5$ 6. $4231_5 - 2304_5$ 7. $4310_5 - 3421_5$ 8. $20102_5 - 1424_5$

C. حل ڪريو.

1. $342_5+444_5-341_5$ 2. $1234_5+4321_5-444_5$ 3. $1321_5+223_5-44_5$

4. $44444_5-321_5-444_5$ 5. $23222_5-2111_5-232_5$ 6. $4304_5-222_5-333_5$

7. $1234_5+4321_5-3221_5$ 8. $304021_5-103002_5-200403_5$

D. ضرب اُپت لهو.

1. $423_5 \times 321_5$ 2. $14_5 \times 13_5$ 3. $1134_5 \times 223_5$

4. $3221_5 \times 443_5$ 5. $233_5 \times 343_5$ 6. $403_5 \times 243_5$

7. $1004_5 \times 113_5$ 8. $4004_5 \times 303_5$ 9. $2410_5 \times 432_5$

10. $3210_5 \times 114_5$ 11. $3344_5 \times 1230_5$ 12. $4321_5 \times 234_5$

C. اٺ بنياد وارن عددن جو سرشتو

(i) اٺ بنياد واري عددي سرشتي ۾ جوڙ

اسان کي خبر آهي تہ ان سرشتي ۾ ست انگ 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6 ۽ 7 استعمال ٿيندا آهن. تنهن ڪري جوڙ ڪرڻ سان جيڪڏهن ڪن بہ ٻن انگن جو جوڙ 7 کان وڌي وڃي تہ اُن جوڙ کي 8 سان ونڊ ڪري پاڇي کي هيٺ رکبو ۽ ونڊ اُپت کي مٿي کڻي وڃبو.

مثال 1: هيٺيان جوڙ ڪريو.

(i) 5_8 ۽ 7_8 (ii) 64_8 ۽ 74_8

حل (i)

$$\begin{array}{r} 5_8 \\ +\ 7_8 \\ \hline 14_8 \\ \hline \end{array}$$

$5_8 + 7_8 = \square$

تنهن ڪري $5_8 + 7_8 = 14_8$.

حل (ii)

$64_8 + 74_8 = \square$

$$\begin{array}{r} ^{1} \\ 64_8 \\ +\ 74_8 \\ \hline 160_8 \\ \hline \end{array}$$

تنهن ڪري $64_8 + 74_8 = 160_8$

اٺ بنياد ۾ جوڙ جي جدول هيٺ ڏجي ٿي،
جنهن جي استعمال سان اٺ بنياد سرشتي ۾ عددن کي آساني سان جوڙ ڪري سگهبو.

اٺ بنياد ۾ جوڙ جي جدول

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

سمجهاڻي $3_8 + 5_8 = 10_8, 5_8 + 6_8 = 13_8$

مثال 2. هيٺيان جوڙ ڪريو.

(i) 445_8 ۽ 443_8

(ii) 675_8 ۽ 756_8

حل: **(i)** $445_8 + 443_8 = \boxed{}$

$$\begin{array}{r} ^{1\,1} \\ 445_8 \\ +\ 443_8 \\ \hline 1110_8 \\ \hline \end{array}$$

يعني $445_8 + 443_8 = 1110_8$

حل: **(ii)** $675_8 + 756_8 = \boxed{}$

$$\begin{array}{r} ^{1\,1} \\ 675_8 \\ +\ 756_8 \\ \hline 1653_8 \\ \hline \end{array}$$

يعني $675_8 + 756_8 = 1653_8$.

(ii) اٺ بنياد وارن عددن جي ڪَٽ.

هن سرشتي ۾ هڪ عدد کي ٻئي عدد مان ڪَٽ ڪرڻ وقت جيڪڏهن ڪٽجندڙ انگ واسطيدار انگ کان وڏو آهي تہ اسان واسطيدار انگ جي پر واري انگ مان '1' اُڌارو وٺي ان ۾ جوڙ ڪندا آهيون. هن سرشتي ۾ اُڌاري ورتل انگ جو مڪاني ملهہ '8' آهي.

مثال 1. حل ڪريو: (i) $14_8 - 6_8$ (ii) $604_8 - 247_8$

حل: **(i)** $14_8 - 6_8 = \boxed{}$

$$\begin{array}{r} 14_8 \\ -\ 6_8 \\ \hline 6_8 \\ \hline \end{array}$$

تنهن ڪري $14_8 - 6_8 = 6_8$

حل: **(ii)** $604_8 - 247_8 = \boxed{}$

$$\begin{array}{r} 604_8 \\ -\ 247_8 \\ \hline 335_8 \\ \hline \end{array}$$

تنهن ڪري $604_8 - 247_8 = 335_8$

مثال 2. ڪٽ ڪريو.

(i) 3756_8 مان 2547_8 (ii) 567442_8 مان 476053_8

حل: (i) $3756_8 - 2547_8$

ڏنل عددن کي ڪٽ جي عمودي عمل واري صورت ۾ لکو

$$\begin{array}{r} 3756_8 \\ -\,2547_8 \\ \hline 1207_8 \\ \hline \end{array}$$

تنهن ڪري $3756_8 - 2547_8 = 1207_8$

حل: (ii) $567442_8 - 476053_8$

ڏنل عددن کي ڪٽ جي عمودي عمل واري صورت ۾ لکو:

$$\begin{array}{r} 567442_8 \\ -\,476053_8 \\ \hline 71367_8 \\ \hline \end{array}$$

يعني $567442_8 - 47053_8 = 71367_8$

(iii) اٺ بنياد سرشتي ۾ عددن جي ضرب

ضرب اُپت لهڻ لاءِ هيٺ ڏنل جدول استعمال ڪريو.
پهرين انگ جي سامهون واري قطار ۾ ٻي انگ جي هيٺيان ڪالم جنهن خاني ۾ هڪ ٻئي سان ملن، ان ۾ لکيل عدد ضرب اُپت جي برابر آهي.

اٺ بنياد ۾ ضرب جي جدول

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61
سمجهاڻي $3_8 \times 3_8 = 11_8,\ 3_8 \times 6_8 = 22_8$								

مثال 1.

حل ڪريو. $36_8 \times 43_8$

حل: $36_8 \times 43_8 = \square$

$$\begin{array}{r} 3\ \\ 2\ \\ 36_8 \\ \times\,43_8 \\ \hline 132 \\ +\,1700 \\ \hline 2032_8 \\ \hline \end{array}$$

تنهن ڪري

$36_8 \times 43_8 = 2032_8$

مثال 2. ملهه لهو:

(i) $446_8 \times 213_8$ (ii) $30456_8 \times 234_8$.

حل:

(i) $446_8 \times 213_8$

ڏنل عددن کي عمودي ضربي صورت ۾ لکو.

$$\begin{array}{rl} 446_8 & \\ \times\ 213_8 & \\ \hline 1562 & \text{(3 سان ضرب ڪرڻ سان)} \\ 4460 & \text{(1 سان ضرب ڪرڻ سان)} \\ +\ 111400 & \text{(2 سان ضرب ڪرڻ سان)} \\ \hline 117642_8 & \text{تنهي ضرب اُپتن کي جوڙ ڪرڻ سان} \\ \hline \end{array}$$

تنهن ڪري $446_8 \times 213_8 = 117642_8$

(ii) $30456_8 \times 234_8$

ڏنل عددن کي عمودي ضربي صورت ۾ لکو.

$$\begin{array}{rl} 30456_8 & \\ \times\ 234_8 & \\ \hline 142270 & \text{(4 سان ضرب ڪرڻ سان)} \\ 1116120 & \text{(3 سان ضرب ڪرڻ سان)} \\ +\ 6113400 & \text{(2 سان ضرب ڪرڻ سان)} \\ \hline 7374010_8 & \text{تنهي ضرب اُپتن کي جوڙ ڪرڻ سان} \\ \hline \end{array}$$

تنهن ڪري

$30456_8 \times 234_8 = 7374010_8$

مشق 3.6

1. حل ڪريو.

(i) $356_8 + 67_8$ (ii) $5034_8 + 6721_8$ (iii) $5003_8 + 66644_8$

(iv) $7356_8 + 6256_8$ (v) $657546_8 + 46701_8$

2. ملهه لهو.

(i) $73_8 - 46_8$ (ii) $200_8 - 173_8$ (iii) $4326_8 - 3754_8$

(iv) $77601_8 - 67706_8$ (v) $163732_8 - 77766_8$

3. ضرب چڙهايو.

(i) $67_8 \times 45_8$ (ii) $345_8 \times 171_8$ (iii) $13470_8 \times 563_8$

(iv) $30076_8 \times 324_8$ (v) $763541_8 \times 4061_8$

3.2.3 مختلف بنياد وارن عددن جو جوڙ، ڪَٽ ۽ ضرب ڪرڻ

وضاحت لاءِ ڪجهه مثال ڏجن ٿا.

مثال 1. مختصر ڪريو ۽ پنهنجي جواب کي ہ بنياد واري عدد ۾ ظاهر ڪريو.

$12 + 12_5 + 110_2$

حل: هن حساب ۾ اسان پهريائين 12_5 ۽ 110_2 کي ڏهائي سرشتي ۾ بدلائينداسين.

$$12_5 = 1 \times 5^1 + 2 \times 5^0$$
$$= 1 \times 5 + 2 \times 1 = 5 + 2$$
يعني $12_5 = 7$
$$110_2 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$
$$= 1 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 4 + 2$$
يعني $110_2 = 6$

هاڻي $12 + 12_5 + 110_2 = 12 + 7 + 6 = 25.$

اهڙي طرح مختصر ڪرڻ تي، جواب 25 مليو.

تنهن ڪري $12 + 12_5 + 110_2 = 25 = 11001_2$

هاڻي جواب ۾ مليل عدد 25 کي ٻه بنياد واري سرشتي ۾ مٽايون ٿا

2	25
2	12 — 1
2	6 — 0
2	3 — 0
	1 — 1

يعني $25 = 11001_2$

مثال 2. $125 - 114_5 - 110_2$ کي مختصر ڪريو ۽ پنهنجي جواب کي پنج بنياد سرشتي ۾ ظاهر ڪريو.

حل: هن سوال ۾ اِهو بهتر ٿيندو ته اسين 114_5 ۽ 110_2 کي ڏهائي نظام ۾ مٽائي، پوءِ انهيءَ کي مختصر ڪري وٺون.

$$114_5 = 1 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 4 \times 5^0$$
$$= 1 \times 25 + 1 \times 5 + 4 \times 1 = 25 + 5 + 4 = 34$$
$$110_2 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$
$$= 1 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 4 + 2 = 6$$

هاڻي $125 - 114_5 - 110_2 = 125 - 34 - 6$
$$= 125 - 40 = 85$$

اهڙي طرح مختصر ڪرڻ سان جواب مليو 85.

تنهن ڪري $125 - 114_5 - 110_2 = 85 = 320_5$

هاڻي مليل جواب 85 کي پنج بنياد سرشتي ۾ مٽايون ٿا.

5	85
5	17 — 0
	3 — 2

يعني $85 = 320_5$

مثال 3. $102_5 \times 1001_2$ کي مختصر ڪريو ۽ پنهنجي جواب کي پنج بنياد ۾ بنياد عددن ۾ ظاهر ڪريو.

حل: سڀ کان پهريائين اسين 102_5 ۽ 1001_2 کي ڏهائي سرشتي ۾ مٽايون ٿا.

$$102_5 = 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 2 \times 5^0$$
$$= 1 \times 25 + 0 \times 5 + 2 \times 1$$
$$= 25 + 2 = 27$$
$$1001_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$
$$= 1 \times 8 + 0 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1$$
$$= 8 + 1 = 9$$

يعني $102_5 \times 1001_2 = 27 \times 9 = 243$

اسين 243 کي پنج بنياد واري سرشتي ۾ مٽايون ٿا.

5	243
5	48 — 3
5	9 — 3
	1 — 4

تنهن ڪري
$102_5 \times 1001_2 = 243 = 1433_5$

وري اسين 243 کي ٻه بنياد سرشتي ۾ مٽايون ٿا

2	243
2	121 — 1
2	60 — 1
2	30 — 0
2	15 — 0
2	7 — 1
2	3 — 1
	1 — 1

يعني $243 = 11110011_2$

تنهن ڪري $102_5 \times 1001_2 = 243$
$= 1433_5 = 11110011_2$

مشق 3.7

1. هيٺين کي سادي، صورت ۾ آڻيو ۽ ٻه بنيادي نظام ۾ لکو.

(i) $31 + 13_5 + 26_8$ (ii) $65 + 31_5 + 101_8$ (iii) $71 + 121_5 + 1010_2 + 20_8$
(iv) $34 + 34_5 + 110_2 + 15_8$ (v) $45 + 44_5 + 1010_2 + 30_8$

2. هيٺين کي سادي صورت ۾ آڻيو ۽ پنج بنيادي نظام ۾ لکو

(i) $31 - 13_5 - 101_2$ (ii) $65 - 31_5 - 10_8$ (iii) $71 - 121_5 - 111_2 - 11_8$
(iv) $100 - 100_5 - 100_2$ (v) $1000 - 1001_5 - 1010_2 - 100_8$

3. هيٺين کي ڇڏائڻ بعد پنج بنياد ۽ آٺ بنياد ۾ لکو.

(i) $32 \times 114_5 \times 110_2$ (ii) $32 \times 101_5 \times 111_2$ (iii) $95 \times 1101_5 \times 101_8$

4. 11100_2 ۽ 101_5 جي جوڙ کي 39 ۽ 3145 جي جوڙ مان ڪَٽ ڪريو ۽ اُن حاصل ٿيل عدد کي ٻہ بنياد، پنج بنياد ۽ اٺ بنياد واري نظام ۾ بدلايو.

5. 123_5 ۽ 11011_2 جي ضرب اُپت کي 29 ۽ 2145_8 جي ضرب اُپت مان ڪَٽ ڪريو ۽ حاصل ٿيل عدد کي پنج بنياد ۽ اٺ بنياد ۾ بدلايو.

جائزي جي مشق 3

1. هيٺين پنج بنياد وارن عددن کي ڏهائي عددن ۽ اٺ بنياد وارن عددن سان ظاهر ڪريو.

(i) 3421_5 (ii) 44332_5 (iii) 1020304_5

2. هيٺين کي سادي صورت ۾ آڻيو۽پو۽جواب کي ڏهائي عدد واري نظام ۾ لکو.

(i) $12431_8 + 34211_5 + 101_2 + 289$ (ii) $40044_8 - 202023_5 - 101000_2$

(iii) $4021_8 \times 1204_5$ (iv) $11000_2 \times 1100_5 \times 100_8$

3. هيٺين کي حل ڪريو ۽ جواب کي ٻہ بنياد، پنج بنياد ۽ اٺ بنياد ۾ بدلايو.

(i) $408 + 4310_5 + 1011_2 + 110_8$ (ii) $753_8 - 4401_5 - 111101_2$

(iii) $3412_5 \times 25_8 \times 110_2$ (iv) $25 \times 24_8 \times 23_5 \times 100_2$

4. خال ڀريو:

	ڏهائي عدد	پنج بنيادي عدد	اٺ بنيادي عدد
(i)	40	______	______
(ii)	82	______	______
(iii)	______	132	______
(iv)	______	______	62
(v)	______	______	705

5. عدد 31204 ۾:

(i) انگ 2 جو مڪاني ملھ 200 آهي ______ بنياد واري سرشتي ۾.

(ii) انگ 2 جو مڪاني ملھ 128 آهي ______ بنياد واري سرشتي ۾.

(iii) انگ 2 جو مڪاني ملھ 50 آهي ______ بنياد واري سرشتي ۾.

(iv) انگ 1 جو مڪاني ملھ 125 آهي ______ بنياد واري سرشتي ۾.

(v) انگ 1 جو مڪاني ملھ 512 آهي ______ بنياد واري سرشتي ۾.

6. عدد 12034 جي انگن جي مکاني قيمت لاءِ خال ڀريو:

	انگ	پنج بنياد ۾	اٺ بنياد ۾	ڏھ بنياد ۾
(i)	4	$4 \times 5^0 = 4 \times 1 = 4$	______	______
(ii)	3	______	$3 \times 8^1 = 24$	______
(iii)	0	$0 \times 5^2 = 0$	______	______
(iv)	2	______	______	$2 \times 10^3 = 2000$
(v)	1	______	$1 \times 8^4 =$ ____	______

خلاصو

- ڏهائي سرشتي (Decimal System) جو بنياد 10 آهي.
- ڏهائي نظام ۾ ڪل 10 انگ يا نشانيون استعمال ٿين ٿيون:
  0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- ڏهائي عدد ۾ موجود هرهڪ انگ 10 جي ڪاڻ ڪا سگهه آهي.
- ڏهائي نظام ۾ وڏي ڪان وڏو انگ '9' آهي ۽ ان ۾ '1' جوڙ ڪرڻ سان ملندڙ عدد کي 10 (ڏهه) چئون ٿا.
- ٻه بنياد سرشتي (Binary System) جو بنياد 2 آهي ڇوته ان ۾ ڪُل ٻه نشانيون '1' ۽ '0' استعمال ٿين ٿيون.
- ٻه بنياد وارن عددن کي جوڙ، ڪَٽ ۽ ضرب ڪري سگهجي ٿو.
- ٻه بنياد سرشتي ۾ وڏو انگ '1' آهي ۽ ان ۾ '1' جوڙ ڪرڻ سان '10' حاصل ٿئي ٿو جنهن کي 'هڪ ٻڙي' ٻه بنياد ۾ ڪري پڙهبو ۽ 10_2 ڪري لکبو آهي.
- ٻه بنياد سرشتي ۾ موجود هرهڪ انگ جي مکاني قيمت بنيادي انگ '2' جي سگهه وسيلي لهبي آهي.
- پنج بنياد سرشتي ۾ وڏو انگ '4' آهي ۽ اُن ۾ '1' جوڙ ڪرڻ سان '10' حاصل ٿئي ٿو، جنهن کي 'هڪ ٻڙي' پنج بنياد ۾ ڪري پڙهبو ۽ 10_5 ڪري لکبو آهي.
- پنج بنياد سرشتي ۾ موجود هرهڪ انگ جي مکاني قيمت بنيادي انگ '5' جي ڪاڻ ڪا سگهه آهي.
- اٺ بنيادي نظام (Octal system) ۾ وڏو انگ '7' آهي ۽ اُن ۾ '1' جوڙ ڪرڻ سان '10' ملي ٿو جنهن کي 'هڪ ٻڙي' اٺ بنياد ۾ ڪري پڙهبو ۽ 10_8 ڪري لکبو آهي.

باب
4

مالياتي حساب

دؤر جي مشق IV

1. هيٺين جو چوٿون متناسب لهو.

(i) 3,4,6 (ii) 7, 11, 14 (iii) 38, 19, 18
(iv) 5.6, 6.3, 4.8

2. ڪنهن تناسب جا ٻاهريان رڪن 11 ۽ 27 آهن. جيڪڏهن وچين رڪنن مان هڪڙو 9 هجي ته ٻيو رڪن لهو.
3. ڪن 25 شين جي قيمت 300 رپيا آهي. اهڙين 225 شين جي قيمت ڪيتري ٿيندي؟
4. جيڪڏهن ڪنهن ڪپڙي جي 40 ميٽرن جي قيمت 1,000 رپيا هجي ته 1,315 رپين ۾ ڪيترا ميٽر ساڳيو ڪپڙو خريد ڪري سگهبو؟
5. هڪ بحري جهاز 800 سامونڊي ميل مفاصلو 40 ڏينهن ۾ طئي ڪري ٿو. ٻڌايو ته اهو جهاز 2,440 سامونڊي ميل ڪيترن ڏينهن ۾ طئي ڪندو.
6. هڪ گهڙي هر ٻارهن ڪلاڪن ۾ 3 منٽ اڳتي وڃي ٿي (تڪڙو هلي ٿي). ٻڌايو ته 14 ڏينهن ۾ ڪيترا منٽ اڳتي ويندي؟
7. هڪ ٽاور (گنبذ) جي اوچائي 20 ميٽر آهي ۽ سندس ٻاڇي جي ڊيگهه 25 ميٽر آهي. ٻڌايو ته ٻئي اهڙي ٽاور جي اوچائي ڪيتري ٿيندي جيڪڏهن سندس ٻاڇو ساڳئي وقت ۾ 75 ميٽر هجي.
8. 120 ماڻهو ڪو ڪم 90 ڏينهن ۾ پورو ڪري سگهن ٿا. ٻڌايو ته ڪيترا ماڻهو وڌيڪ ڪپن جو اهو ساڳيو ڪم 40 ڏينهن ۾ پورو ٿئي؟
9. هڪ قلعي ۾ موجود 600 ماڻهن لاءِ 27 ڏينهن جي خوراڪ موجود آهي. جيڪڏهن 10 ڏينهن گذرڻ بعد اُن قلعي ۾ 80 وڌيڪ ماڻهو اچن ته ٻڌايو ته اها خوراڪ ڪُل گهٽن ڏينهن لاءِ ڪافي ٿيندي؟
10. هڪ جڳهه تي 200 ماڻهن لاءِ 20 ڏينهن جي خوراڪ موجود آهي. ٻڌايو ته اُتان ڪيترا ماڻهو هليا وڃن جو اها خوراڪ 25 ڏينهن هلي؟

4.1 مرڪب تناسب

4.1.1 مرڪب تناسب جي وصف.

ٻن يا وڌيڪ تناسبن جي وچ ۾ تعلق کي مرڪب تناسب چئبو آهي. مرڪب تناسب جون ٽي حالتون آهن.

حالت 1. ٻئي تناسب سڌا تناسب آهن.

حالت 2. هڪ سڌو تناسب آهي ۽ ٻيو اُبتو.

حالت 3. ٻئي اُبتا تناسب آهن.

4.1.2 حقيقي زندگيءَ ۾ مرڪب تناسب، ڀائيواري ۽ وراثت بابت مسئلا حل ڪرڻ

A مرڪب تناسب: مرڪب تناسب جي وڌيڪ وضاحت لاءِ اسان هيٺيان مثال حل ڪريون ٿا.

مثال 1. جيڪڏهن 70 ماڻهو 5 ڏينهن ۾ 630 ڪعب ميٽر مٽي کوٽي ڪڍن ٿا ته 80 ماڻهو 10 ڏينهن ۾ ڪيتري مٽي کوٽيندا؟

حل: هي مثال مرڪب تناسب جي حالت (1) مطابق آهي جو ته

ماڻهن جو تعداد وڌندو ته مٽي وڌندي (سڌو تناسب)

ڏينهن وڌندا ته مٽي وڌندي (سڌو تناسب)

فرض ڪريو ته x ڪعب ميٽر مٽي کوٽي سگهندا.

مٽي (ڪعب ميٽر)	ڏينهن	ماڻهو	
630 ↑	5 ↑	70 ↑	
x	10	80	(جو ته ٻئي وڌن ٿا)

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{630} = \frac{10}{5} \times \frac{80}{70}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\overset{2}{\cancel{10}} \times 80 \times \overset{9}{\cancel{630}}}{\cancel{5} \times \cancel{70}} =$$

$2 \times 80 \times 9 = 1440\ m^3$. (ڪعب ميٽر)

يعني 1440 ڪعب ميٽر مٽي کوٽيندا.

مثال 2. هڪ ڪٽنب جي 4 ڀاتين لاءِ 12,000 رپيا 32 ڏينهن لاءِ ڪافي آهن. ٻڌايو ته 8 ڀاتين واري ڪٽنب لاءِ 24,000 رپيا ڪيترن ڏينهن لاءِ ڪافي ٿيندا؟

حل: هي مثال مرڪب تناسب جي حالت (2) مطابق آهي جو ته،

رپين جو تعداد وڌندو ته ڏينهن وڌندا (سڌو تناسب)

ڀاتي وڌندا ته ڏينهن گهٽندا (اُبتو تناسب)

فرض ڪريو تہ 8 پاتين واري ڪتب لاءِ 24,000 رپيا x ڏينهن لاءِ ڪافي آهن.

ڏينهن	پاتي	رپيا
32 ↑	4 ↓	12,000 ↑
x	8	24,000

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{32} = \left(\frac{24000}{12000}\right) \times \frac{4}{8} = \frac{\cancel{24000}^{2}}{\cancel{12000}_{1}} \times \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{8}_{\cancel{4}_1}} = \frac{1}{1}$$

$$\frac{x}{32} = \frac{1}{1} \quad \Rightarrow x = 32 \text{ ڏينهن}$$

يعنيٰ تہ اها رقم 32 ڏينهن لاءِ ڪافي آهي.

مثال 3. 2,400 ماڻهن لاءِ 1.2 ڪلوگرام في ماڻهو جي حساب سان 20 ڏينهن لاءِ خوراڪ موجود آهي. ڪيترا ماڻهو هليا وڃن جو اها خوراڪ 1.5 ڪلوگرام في ماڻهو جي حساب سان 40 ڏينهن هلي؟

حل: هي مثال مرڪب تناسب جي حالت (3) مطابق آهي جو تہ،

روزاني خوراڪ في ماڻهو وڌندي تہ موجود خوراڪ گهٽ ماڻهن لاءِ هلندي (اُبتو تناسب)

ڏينهن وڌندا تہ موجود خوراڪ زياده ماڻهن لاءِ هلندي (اُبتو تناسب)

فرض ڪريو تہ 1.5 ڪلوگرام في ماڻهو روزاني بنياد تي اها خوراڪ x ماڻهن لاءِ 40 ڏينهن تائين هلندي.

ماڻهن جو تعداد	ڏينهن	روزاني خوراڪ في ماڻهو
2400 ↑	20 ↓	1.2 ↓
x	40	1.5

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{2400} = \frac{\cancel{20}^{1}}{\cancel{40}_{2}} \times \frac{\cancel{1.2}^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{1.5}_{5}} = \frac{2}{5} \qquad \text{(ٻئي گهٽجن ٿا)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{\cancel{5}_1} \times \cancel{2400}^{480} = 960 \text{ ماڻهو}$$

شروع ۾ موجود هيا = 2,400 ماڻهو

ڏينهن جو تعداد ۽ روزاني خوراڪ بدلائڻ سان خوراڪ ڪافي آهي 960 ماڻهن لاءِ اِن جو مطلب تہ (960 – 2,400) = 1,440 ماڻهو هليا وڃن.

مشق 4.1

1. 12 ڪلو گرام وزن واري بار جو 36 ڪلوميٽر مفاصلي لاءِ ڀاڙو 24 رپيا آهي. ٻڌايو ته 18 ڪلوگرام وزن واري بار جو 12 ڪلوميٽر مفاصلي لاءِ ڪيترو ڀاڙو ٿيندو؟
2. 4,800 ماڻهن لاءِ 1.5 ڪلوگرام في ماڻهو جي حساب سان 20 ڏينهن جو راشن موجود آهي. ٻڌايو ته اهو ساڳيو راشن 1.0 ڪلوگرام في ماڻهو جي حساب سان ڪيترن ماڻهن لاءِ 16 ڏينهن هلندو؟
3. هڪ 16 ميٽر ڊگهي ۽ 6 ميٽر ويڪري غاليچي جي قيمت 6,288 رپيا آهي. ٻڌايو ته 24 ميٽر ڊگهي ۽ 12 ميٽر ويڪري غاليچي جي قيمت ڪيتري ٿيندي؟
4. 10 ماڻهو 200 سائيڪلون 8 ڏينهن ۾ جوڙي سگهن ٿا. ٻڌايو ته 5 ماڻهو 16 ڏينهن ۾ ڪيتريون سائيڪلون جوڙي ويندا؟
5. جيڪڏهن 60 ماڻهو 40 ڪلوگرام کنڊ 12 ڏينهن ۾ استعمال ڪن ٿا ته 90 ماڻهو 200 ڪلوگرام کنڊ ڪيترن ڏينهن ۾ استعمال ڪندا؟
6. 14 ماڻهو 5 ڪلاڪ روزانو ڪم ڪرڻ سان ڪو ڪم 8 ڏينهن ۾ پورو ڪن ٿا. ٻڌايو ته 35 ماڻهو ڪيترا ڪلاڪ روزانو ڪم ڪن جو اهو ڪم 4 ڏينهن ۾ پورو ٿئي؟
7. هڪ ٺيڪيدار 30 مزدور رکيا جن کي 30 ڏينهن ۾ روڊ ٺاهڻو هيو، پر 10 ڏينهن ۾ ڪم جو صرف چوٿون حصو پورو ٿيو هو. ٻڌايو ته ڪيترا مزدور وڌيڪ رکي ته جيئن رهيل ڪم مقرر وقت اندر پورو ٿئي؟
8. 1,200 ڪلوگرام وزن کي 200 ڪلوميٽر مفاصلي تائين کڻي وڃڻ جو ڀاڙو 300 رپيا آهي. ٻڌايوته 500 رپين ۾ 300 ڪلوميٽر مفاصلي تائين ڪيترو وزن کڻي سگهبو؟
9. 100 ميٽر ڊگهي ۽ 40 ميٽر ويڪري فرش جو ڪم 3 رازا 16 ڏينهن ۾ پورو ڪن ٿا. ٻڌايو ته 4 رازا ڪيترن ڏينهن ۾ 160 ميٽر ڊگهي ۽ 50 ميٽر ويڪري فرش جو ڪم پورو ڪندا؟
10. 14 ماڻهو روزانو 5 ڪلاڪ ڪم ڪرڻ سان ڪنهن ڪم جو ٽيون حصو 8 ڏينهن ۾ پورو ڪن ٿا. ٻڌايو ته 35 ماڻهو ڪيترا ڪلاڪ روزانو ڪم ڪن جو رهيل ڪم 4 ڏينهن ۾ پورو ٿئي؟

(B) ڀائيواري:

هي ڌنڌي جو هڪ اهڙو قسم آهي جنهن ۾ ٻه يا وڌيڪ انسان گڏجي ڪري ڪو ڪاروبار شروع ڪن جنهن ۾ نفعي ۽ نقصان ۾ سڀ ڀائيوار هجن. ڀائيواريءَ جا ٻه قسم آهن.

(i) سادي ڀائيواري: هن قسم جي ڀائيواري ۾ ڀائيوار ڪوبه ڪاروبار هڪ جيتري رقم يا مختلف رقمون سيڙائي ساڳئي وقت ۾ شروع ۽ ختم ڪندا آهن.

(ii) گڏيل ڀائيواري: هيءَ اهڙي قسم جي ڀائيواري آهي جنهن ۾ ڀائيوار مختلف رقمون مختلف وقتن لاءِ سيڙائيندا آهن.

نفعي ۽ نقصان جي ورهاست هر هڪ ڀائيوار جي رقمن ۽ وقت جي حساب ٿيندي آهي.

حقيقي زندگيءَ ۾ ڀائيواري جا مسئلا حل ڪرڻ.

مثال 1. اسد ۽ عمار هڪ ڪاروبار ۾ ترتيب وار 63,000 رپيا ۽ 72,000 رپيا سيڙايا. هڪ سال ۾ 45,000 رپيا نفعو ٿيو ته هر هڪ ڀائيوار جو نفعي ۾ حصو لهو.

حل: هي 'سادي ڀائيواري' آهي. جيئن ته مختلف رقمون ساڳئي وقت لاءِ سيڙايل آهن تنهن ڪري نفعي کي سندن سيڙايل رقمن جي نسبت سان ورهائبو.

سيڙايل رقمن يا موڙين (رپيا) وچ ۾ نسبت

عمار	:	اسد
72,000	:	63,000
72	:	63
8	:	7

نسبتن جو جوڙ = 8 + 7 = 15

ڪل نفعو = 45,000 رپيا

$$\text{اسد جو نفعو} = \frac{7}{\cancel{15}_{1}} \times \overset{3,000}{\cancel{45,000}} = 21,000 \text{ رپيا}$$

$$\text{عمار جو نفعو} = \frac{8}{\cancel{15}_{1}} \times \overset{3,000}{\cancel{45,000}} = 24,000 \text{ رپيا}$$

مثال 2. امجد هڪ ڪاروبار 30,000 رپين جي موڙي سان شروع ڪيو. 6 مهينن بعد عمر ان ڪاروبار ۾ 60,000 رپيا سيڙايا. عثمان انهن ٻنهي جي گڏيل ڪاروبار ۾ 3 مهينن بعد 180,000 رپيا سيڙايا. هڪ سال گذرڻ بعد کين ڪل 490,000 رپيا نفعو ٿيو. هر هڪ ڀائيوار جو نفعي ۾ حصو لهو.

حل: هي گڏيل ڀائيواري آهي جنهن ۾ ڀائيوارن مختلف رقمون، مختلف وقتن لاءِ سيڙايون آهن.

مدو × سيڙايل رقم = امجد جي اثرائتي سيڙائپ

$= 30,000 \times 12 = 360,000$ رپيا

$60,000 \times 6 = 360,000$ رپيا = عمر جي اثرائتي سيڙپ

$180,000 \times 3 = 540,000$ رپيا = عثمان جي اثرائتي سيڙپ

ڀائيوارن جي اثرائتي سيڙپن (رپيا) وچ ۾ نسبت

امجد	:	عمر	:	عثمان
360,000	:	360,000	:	540,000
36	:	36	:	54
2	:	2	:	3

نسبتن جو جوڙ $7=2+2+3=$

$\frac{2}{7} \times 490,000 = 140,000$ رپيا = امجد جو نفعي ۾ حصو

$\frac{2}{7} \times 490,000 = 140,000$ رپيا = عمر جو نفعي ۾ حصو

$\frac{3}{7} \times 490,000 = 210,000$ رپيا = عثمان جو نفعي ۾ حصو

(C) حقيقي زندگيءَ ۾ ورثي جا مسئلا حل ڪرڻ

جڏهن ڪو ماڻهو وفات ڪري وڃي ته جيڪا ملڪيت پوئتان ڇڏي وڃي، ان کي ورثو چئبو آهي. اها ملڪيت سندس وارثن ۾ شريعت مطابق ورهائبي آهي. ان جي وراثت لاءِ هيٺيان ڏاڪا آهن:

- سڀ کان پهريان مرحوم يا مرحومہ تي جيڪڏهن ڪو قرض آهي ته اهو ادا ڪبو.
- پوءِ جيڪڏهن ڪا وصيت ڪري ويو آهي ته اها ملڪيت جي $\frac{1}{3}$ حصي تائين ادا ڪرڻي آهي.
- باقي بچيل ملڪيت کي سندس وارثن ۾ هيٺئين ريت ورهائبو:

(i) جيڪڏهن وفات ڪري ويل شخص (مرد يا عورت) جا پيءُ ۽ ماءُ زنده آهن ته انهن مان هر هڪ کي $\frac{1}{6}$ حصو ملندو.

(ii) اولاد هجڻ جي صورت ۾ بيوه زال يا زالن کي $\frac{1}{8}$ حصو ملندو يا رنڊ مرد کي $\frac{1}{4}$ حصو ملندو. اولاد نہ هجڻ جي صورت ۾ بيواهن کي $\frac{1}{4}$ حصو يا رنڊ مرد کي $\frac{1}{2}$ حصو ملندو، باقي سندس ڀينرن ۽ ڀائرن ۾ ورهائبو.

(iii) ڌيءُ جو حصو پاءُ جي حصي جو اڌ مقرر آهي. ساڳيءَ طرح پيٽ کي به پاءُ جي حصي جو اڌ ملندو.

مثال 3. انور وفات وقت 1,000,000 رپيا روڪ ۽ 600,000 رپين جو پلاٽ ڇڏي ويو. جيڪڏهن هن جي هڪ بيوه، ٻه پٽ ۽ 3 ڌيئر وارث آهن ته هر هڪ جي حصي ۾ ڪيتري رقم ايندي؟

حل: ڪُل ورثو = روڪ رقم + پلاٽ

1,600,000 رپيا = 600,000 رپيا + 1,000,000 رپيا =

$\frac{1}{8}\times$ 1,600,000 = 200,000 رپيا = بيواه کي ملندو

1,600,000 − 200,000 = 1,400,000 رپيا = باقي وراثت جي رقم

فرض ڪريو ته هڪ ڌيءُ جو حصو آهي 1

ته هڪ پٽ جو حصو ٽيندو 2

ٽن ڌيئن جا حصا ٿيندا 3 × 1 = 3 ۽ ٻن پٽن جا حصا ٿيندا 2 × 2 = 4

اولاد جا ڪُل حصا ٿيا = 3 + 4 = 7

$\frac{2}{7}\times$ 1,400,000 = 400,000 رپيا = هر هڪ پٽ کي ملندو

$\frac{1}{7}\times$ 1,400,000 = 200,000 رپيا = هر هڪ ڌيءُ کي ملندو

مثال 4. مسز فاطمه وفات وقت 645,000 رپين جي ملڪيت ڇڏي. 40,000 رپيا مٿس قرض هيو ۽ 5,000 رپيا سندس ڪفن دفن تي خرچ آيو. سندس ماءُ، مڙس،هڪ ڌيءُ ۽ ٽن پٽن ۾ ملڪيت ورهايو.

حل:

وارثن ۾ ورهائڻ لاءِ = ڪفن دفن جو خرچ − قرض − ڪل ورثو

600,000 رپيا = 5,000 − 40,000 − 645,000 =

$\frac{1}{6}\times$ 600,000 = 100,000 رپيا = ماءُ کي ملندو

$\frac{1}{4}\times$ 600,000 = 150,000 رپيا = مڙس کي ملندو

600,000 − 100,000 − 150,000 رپيا = اولاد ۾ ورهائڻ لاءِ ورثو

350,000 رپيا =

هر هڪ ڌيءُ جو حصو = 1
هر هڪ پٽ جو حصو = 2
تہ 3 پٽن جا حصا = 2 × 3 = 6 ۽ اولاد جا ڪُل حصا = 6 + 1 = 7

تنهن ڪري: رپيا $50{,}000 = 350{,}000 \times \frac{1}{7}$ = ڌيءُ کي ملندا

رپيا $100{,}000 = 350{,}000 \times \frac{2}{7}$ = هر هڪ پٽ کي ملندا

مشق 4.2

1. مريم ۽ عارف ترتيب وار 60,000 رپيا ۽ 80,000 رپيا هڪ گڏيل ڪاروبار ۾ سيڙايا. هڪ سال بعد ڪُل نفعو 21,000 رپيا ٿيو. هر پائيوار جو نفعو لهو.

2. اڪرم هڪ ڌنڌو (ڪاروبار) 70,000 رپين جي لاڳت سان شروع ڪيو. ٽن مهينن بعد اسلم 40,000 رپيا ۽ ڇهن مهينن بعد اصغر بہ 40,000 رپيا ان ڌنڌي ۾ سيڙايا. هڪ سال ۾ جملي 28,800 رپيا نفعو ٿيو تہ هر هڪ پائيوار جو نفعي ۾ حصو ڪيترو ٿيو؟

3. علي، زين ۽ اسد هڪ ڌنڌي ۾ ترتيب وار 30,000 رپيا، 30,000 رپيا ۽ 24,000 رپيا سيڙايا. 5 مهينا گذرڻ بعد زين 18,000 رپيا ڪيرايا ۽ 10 مهينن بعد ڪاروبار ختم ٿي ويو. ڪُل نفعي جي رقم 37,500 رپين مان هر هڪ پائيوار کي ڪيترو ملندو؟

4. علي ۽ عثمان مختلف رقمون مختلف وقتن لاءِ هڪ ڌنڌي ۾ سيڙايون. جيڪڏهن هر دفعي نفعو 60,000 رپيا آهي تہ هيٺ ڏنل جدول ۾ خال پريو:

جريان نمبر	عليءَ جي سيڙپ (رپيا)	عثمان جي سيڙپ (رپيا)	عليءَ جو سيڙپ لاءِ وقت (مهينا)	عثمان جو سيڙپ لاءِ وقت (مهينا)	نفعن جي نسبت علي:عثمان	علي کي نفعو (رپيا)	عثمان کي نفعو (رپيا)
(i)	50,000	25,000	12	12	2:1	40,000	20,000
(ii)	50,000	75,000	12	12	--	--	--
(iii)	25,000	25,000	12	6	--	--	--
(iv)	50,000	--	6	6	--	--	--

5. هڪ ماڻهو مرڻ وقت 1,800,000 رپين جي ملڪيت ڇڏي. هن جا وارث 6 ڌيئرون ۽ 2 پٽ آهن. هر هڪ ڌيءُ ۽ پٽ کي ڪيترو ملندو؟

6. اسلم وفات وقت 1,660,000 رپين جي ملڪيت ڇڏي. هن جا وارث 2 زالون، 2 پٽ ۽ هڪ ڌيءُ آهي. ٻڌايو ته هر هڪ وارث کي ڪيترو ملندو جڏهن ته هن جي ڪفن دفن تي 60,000 رپيا خرچ ٿيو.

7. اڪرم 1,520,000 رپين جي ملڪيت ڇڏي. ڪيس هڪ ماءُ، هڪ زال (بيوه)، 3 پٽ ۽ 4 ڌيئر آهن. هن جي ڪفن دفن تي 30,000 رپيا خرچ ٿيو ۽ مٿس 50,000 رپيا قرض به هيو. ٻڌايو ته هر هڪ وارث کي ڪيترو ملندو؟

8. مسز عبدالرحمٰن جو انتقال ٿي ويو ته هن جو پيءُ، ماءُ، ٻه پٽ ۽ مڙس وارث آهن. هن وراثت ۾ 480,000 رپيا ڇڏيا ته سندس هر هڪ پٽ کي ڪيترو ملندو؟

9. ڪنهن ماڻهوءَ جي وفات وقت صرف سندس اولاد آهي (والدين ۽ زال زنده نه آهن) ۽ هن 800,000 رپيا جي ميراث ڇڏي. اولاد جي مختلف تعداد جي صورت ۾ هيٺيان خال پريو:

جريان نمبر	پٽن جو تعداد	ڌيئرن جو تعداد	پٽن جا ڪُل حصا	ڌيئرن جا ڪُل حصا	هر پٽ جي رقم (رپيا)	هر ڌيءُ جي رقم (رپيا)
(i)	1	2	2	2	400,000	200,000
(ii)	2	1	4	1	--	--
(iii)	2	4	--	--	--	--
(iv)	--	6	2	--	--	--
(v)	3	--	--	4	--	--
(vi)	--	--	2	--	--	100,000

4.2 بئنڪاري

بئنڪ جو خاص ڪم آهي ته ڪاتيدارن کان پيسا وٺي جمع ڪري ۽ ڪين ضرورت وقت قرض ڏئي. ان عيوض بئنڪ جمع ٿيل رقم تي نفعو ڏيندي ۽ قرض ڏنل رقم تي مارڪ اپ وٺندي.

4.2.1 بئنڪ جي کاتن جا قسم

(a) تجارتي بئنڪ کاتا (ڪمرشل بئنڪ ڊپازٽس)

گراهڪن طرفان جمع ڪرايل رقم مختلف قسم جي کاتن ۾ PLS يعني نفعو نقصان

شراڪتي ڪاتي، غير ملڪي ناڻن واري ڪاتي وغيره ۾ رکي ويندي آهي. بئنڪ جا ڪاتا هيٺئين ريت آهن.

(i) PLS بئنڪ بچت ڪاتو (نفع نقصان شراڪتي سيونگ اڪائونٽ)

هي اڪائونٽ نفعي ۽ نقصان ۾ ڀائيواري جي بنياد تي ٻڌل آهي. هن قسم جي اڪائونٽ جو مقصد ماڻهن ۾ بچت جي حوصلي افزائي ڪرڻ آهي. هن ۾ رقم جي ادائيگي جي مدت مقرر نہ آهي ۽ پهرين رمضان تي زڪواة ڪاٽي ويندي آهي. ڪاتيدارن کي وقتاً فوقتاً ليکو ڪري مناسب نفعو ملندو آهي.

(ii) ڪرنٽ ڊپازٽ اڪائونٽ

هي مسلسل جاري رهندڙ اڪائونٽ آهي. هن ۾ جمع ٿيل رقم تي نفعو نہ ملندو آهي ۽ زڪواة بہ نہ ڪٽبي آهي. جيئن تہ هن اڪائونٽ ۾ روزانو ڪيترائي ڀيرا پيسا جمع ڪرائي ۽ ڪيرائي سگهجن ٿا تنهن ڪري ڪاروباري ماڻهن لاءِ مفيد آهي. ڪاتيدارن کي گهٽ ۾ گهٽ ڪجهه مقرر رقم ڪاتي ۾ رکڻي هوندي آهي.

(iii) نفع نقصان شراڪتي مقرر مدت وارو ڊپازٽ اڪائونٽ

هن قسم جي ڪاتي ۾ ڪاتيدار کي رقم مقرر مدت لاءِ جمع ڪرائڻي هوندي آهي. بئنڪون اهڙن ڪاتيدارن کي غير مقرر مدت وارن ڪاتن جي مقابلي ۾ وڌيڪ نفعو ڏينديون آهن.

(iv) فارين ڪرنسي اڪائونٽ (Foreign Currency Account)

هي اهڙو اڪائونٽ آهي جنهن ۾ رقم غير ملڪي ڪرنسي جي صورت ۾ جمع ڪرائي يا ڪيرائي سگهبي آهي. ٻين ملڪن ۾ رهندڙ پاڪستاني يا غير ملڪي ڪمپنيون ان قسم جو ڪاتو ڪولائينديون آهن. هن اڪائونٽ ۾ پيل رقم تي زڪواة يا ٻيو ڪوبہ ٽئڪس نہ لڳندو آهي.

(b) نيگوشبل انسٽرومينٽ جي وضاحت:

هي اهڙا ڪاغذ يا لکت ۾ معاهدا آهن جن وسيلي گهرج وقت يا مقرر مدت بعد بئنڪون اصل مالڪن يا انهن جي نمائندن کي رقم ڏيڻ جون پابند آهن. چيڪ، پي آرڊر ۽ ڊمانڊ ڊرافٽ اهڙن ڪاغذن جا مثال آهن.

(i) چيڪ: چيڪ بئنڪ اڪائونٽ مان رقم ڪيرائڻ جو اهڙو طريقو آهي جنهن ۾ ڪاتيدار واسطيدار بئنڪ کي مخصوص رقم لاءِ لکت ۾ آرڊر ڏيندو آهي.

(ii) ڊمانڊ ڊرافٽ (Demand Draft): هي هڪ غير مشروط لکت ۾ هدايت نامو آهي جيڪو هڪ بئنڪ، ٻئي مخصوص بئنڪ کي ڏيندو آهي جنهن مطابق رکيل رقم مخصوص شخص يا ڪمپني کي گهرڻ وقت ادا ڪرڻي آهي. پهرين بئنڪ اها رقم اڳ ۾ وصول ڪندي آهي ۽ ٻئي بئنڪ کي ڏيڻ لاءِ پابند آهي.

(iii) پي آرڊر (Pay Order): رقم جي ادائيگي جو هڪ اهڙو هدايت نامو آهي جنهن تحت مخصوص شخص ان تي لکيل رقم ڪنهن بہ بئنڪ کان وصول ڪري سگهندو.

4.2.2 آن لائين بئنڪاري

(i) آن لائين بئنڪاري جي وضاحت: هن نظام تحت ڪاتيدار ڪمپيوٽر ۽ انٽرنيٽ ڪنيڪشن جي استعمال سان ڪنهن بہ وقت بئنڪ ۾ ڏيتي ليتي، يوٽيلٽي بلن جي ادائيگي ۽ رقمن جي هڪ ڪاتي مان ٻي ڪاتي ۾ مٽاسٽا ڪري سگهي ٿو.

(ii) آٽوميٽڊ ٽيلر مشينن ذريعي ڏيتي ليتي: گراهڪن کي بئنڪ طرفان ATM ڪارڊ ڏنو ويندو آهي تہ جيئن ATM واريون سهولتون استعمال ڪري سگهن. جڏهن گراهڪ ATM ڪارڊ کي مشين ۾ وجهي، ان کي ڪجهہ معلومات PIN (ذاتي شناختي نمبر) وغيره بابت ڏيندو تہ ATM سافٽ ويئر گهربل ڏيتي ليتي ڪندو.

(iii) ڊيبٽ ڪارڊ (Debit Card): هي ڪارڊ بئنڪ پنهنجن ڪاتيدارن کي مهيا ڪندو آهي جيڪو سنئون سڌو ان ڪاتيدار جي اڪائونٽ سان وابستہ (لاڳاپيل) هوندو آهي. ان ڪارڊ کي شين جي خريداري يا نقد رقم ڪيرائڻ لاءِ استعمال ڪبو آهي.

(iv) ڪريڊٽ ڪارڊ (Credit Card)

هي پلاسٽڪ جو اهڙو ڪارڊ ٿيندو آهي جنهن کي هڪ مقناطيسي پٽي لڳل هوندي آهي. ان پٽيءَ ۾ ڪاتيدار جي متعلق معلومات گڏ ٿيل هوندي آهي. (نالو، ڪاتو نمبر، ڪريڊٽ جي حد وغيره). ان ڪارڊ وسيلي ڪارڊ رکندڙ شخص خريداري ڪري سگهندو آهي.

4.2.3 ناڻي جي مٽاسٽا

هڪ ملڪ جي ڪرنسي کي ٻئي ملڪ جي ڪرنسي ۾ بدلائڻ لاءِ مٽاسٽا جا اگهہ ٿيندا آهن. اهي اگهہ مختلف ملڪن جي ڪرنسين جي وچ ۾ تعلق کي ظاهر ڪندا آهن ۽ مقرر نہ آهن پر ڦرندا رهندا آهن.

پاڪستاني ڪرنسي کي ڪن مشهور بين الاقوامي ڪرنسين ۾ بدلائڻ، غير ملڪي ڪرنسين جي مٽاسٽا جي اگهہ سان، اسان کي اهو معلوم ٿيندو آهي تہ غير ملڪي ڪرنسي خريد ڪرڻ لاءِ اسان کي ڪيتري پاڪستاني ڪرنسي ادا ڪرڻي پوندي.

تازه ترين ڪرنسين جي مٽاسٽا جي اگهن ۽ نشانين جي جدول

ملڪ	ڪرنسي جو نالو	نشاني	خريدي قيمت (پاڪستاني رپيا)	وڪري جي قيمت (پاڪستاني رپيا)
US (آمريڪا)	ڊالر	$	103.40	103.65
UK (برطانيا)	پائونڊ	£	139.00	139.75
انڊيا	رپيا	₹	1.60	1.65
يورپين مارڪيٽ	يورو	€	126.00	126.25
چائنا	يوئان	¥	16.25	16.50
جاپان	يين	¥	0.946	0.953
سعودي عرب	ريال	ريال	27.15	27.40

مثال 1. هڪ آمريڪي باشندو 250 ڊالرن عيوض پاڪستاني رپيا وٺڻ چاهي ٿو. ٻڌايو تہ ڪيس ڪيترا پاڪستاني رپيا ملندا؟ (1 آمريڪي ڊالر = 103.40 رپيا پاڪستاني)

حل: پاڪستاني رپيا 103.40 = 1 آمريڪي ڊالر

پاڪستاني رپيا 25,850 = 103.40 × 250 = 250 آمريڪي ڊالر

مثال 2. مسٽر جمال 60,000 پاڪستاني رپين عيوض سعودي ريال وٺڻ چاهي ٿو. ٻڌايو تہ ڪيس ڪل ڪيترا سعودي ريال ملندا؟

حل: پاڪستاني رپيا 27.15 = 1 سعودي ريال

سعودي ريال $\frac{1}{27.15}$ = 1 پاڪستاني رپيو

سعودي ريال 2,209 = $\frac{60,000}{27.15}$ = 60,000 پاڪستاني رپيا

مشق 4.3

1. تبديل ڪريو:

(i) 90,000 رپين کي چيني يوئان ۾ (1 يوئان = 16.25 رپيا پاڪستاني)

(ii) 50,000 پاڪستاني رپين کي انڊين رپين ۾
(1 انڊين رپيو = 1.60 پاڪستاني رپيا)

(iii) 110 برطانوي پائونڊن کي پاڪستاني رپين ۾
(1 برطانوي پائونڊ = 139 رپيا پاڪستاني)

(iv) 250 يورو کي پاڪستاني رپين ۾ (1 يورو = 126.0 رپيا پاڪستاني)

(v) 64,200 پاڪستاني رپين کي ترڪش ليرا ۾
(1 ترڪش ليرا = 42.80 پاڪستاني رپيا)

2. هڪ پاڪستاني سعودي عرب ۾ 9,000 ريال ماهوار ڪمائي ٿو جن مان 2,500 ريال هر مهيني خرچ ڪري ٿو. سندس ماهوار بچت پاڪستاني رپين ۾ ٻڌايو.
(1 سعودي ريال = 27.15 رپيا پاڪستاني)

3. ڪمال وٽ 38,400 رپيا پاڪستاني ۽ 4,000 چيني يوئان آهن جن بدلي هو آمريڪن ڊالر وٺڻ چاهي ٿو. جيڪڏهن مناسٽا جو اگهہ 1 آمريڪي ڊالر = 103.4 رپيا پاڪستاني ۽ 1 چيني يوئان = 16.25 رپيا پاڪستاني آهي تہ ٻڌايو تہ ڪيس ڪيترا آمريڪي ڊالر ملندا؟

4. 48,000 پاڪستاني رپين کي انڊين رپين ۾ بدلايو.

5. 48,000 انڊين رپين کي پاڪستاني رپين ۾ بدلايو.

6. هڪ فرج جي قيمت پاڪستاني مارڪيٽ ۾ 77,500 رپيا آهي. ساڳيو فرج جاپان ۾ 70,000 ين ۾ وڪامجي پيو. جپان کان پاڪستان آڻڻ تي 5,000 رپيا ڪرايو ۽ 3,000 رپيا ڪسٽم ڊيوٽي جو خرچ آهي. ٻڌايو ته اهو فرج جاپان مان گهرائڻ تي ڪل گهٽ خرچ ڪائيندو ۽ ڪيتري رقم بچندي جڏهن مٽاسٽا جو اگهه 1 يين = 0.946 رپيا پاڪستاني آهي.

4.2.4 نفعو / مارڪ اپ

(i) a. نفعو (I): جڏهن اسان بئنڪ ۾ پيسا جمع ڪندا آهيون ته بئنڪ ان رقم کي استعمال ڪندي آهي ۽ اسان کي وقت گذرڻ بعد اصل جمع ڪيل رقم کان ڪجهه وڌيڪ رقم واپس ڪندي آهي. بئنڪ طرفان وڌيڪ ڏنل رقم کي نفعو چئبو آهي.

(i) b. مارڪ اپ (I): جڏهن اسان بئنڪ کان قرض وٺندا آهيون ته وقت گذرڻ بعد بئنڪ اسان کان قرض ڏنل رقم کان ڪجهه وڌيڪ رقم وٺندي آهي. بئنڪ طرفان وڌيڪ ورتل رقم کي مارڪ اپ چئبو آهي.

(ii) اصل رقم يا مُوڙ (P): هيءُ اها رقم آهي جيڪا اسان بئنڪ ۾ جمع ڪندا آهيون يا بئنڪ کان قرض وٺندا آهيون.

(iii) نفعي يا مارڪ اپ جي شرح (R): هي اهو اگهه آهي جنهن حساب سان بئنڪ جمع ڪرايل رقم تي نفعو ڏيندي آهي يا قرض ڏنل رقم تي مارڪ اپ وٺندي آهي. اها شرح اصل رقم جو في سيڪڙو مقرر ٿيندي آهي.

(iv) مدت (T): هيءُ اهو عرصو آهي جنهن لاءِ ڪا رقم بئنڪ ۾ جمع ڪرائي وئي آهي يا قرض ڪنيو ويو آهي.

4.2.4 (v) نفعو يا مارڀ، اصل رقم، نفعي يا مارڪ اپ جي شرح ۽ مدت لهڻ.

نفعي يا مارڪ اپ لهڻ جو فارمولا آهي: $I = PRT$

مثال 1. اڪبر هڪ بئنڪ مان 7% مارڪ اپ جي شرح سان 3 سالن لاءِ 70,000 رپيا قرض ورتو. مارڪ اپ جي رقم ۽ ڪل رقم جيڪا اڪبر بئنڪ کي ڏيندو اها لهو.

حل: جيئن تہ هتي رپيا P = 70,000، شرح R = 7%، 3 سال = T آهي.

$$\therefore \quad I = P \times R \times T = 70,000 \times \frac{7}{100} \times 3$$
$$= 700 \times 7 \times 3 = 14,700 \text{ رپيا}$$

(I) مارڪ اپ + (P) قرض ورتل رقم = ڪل رقم ادا ڪرڻي

$$= 70,000 + 14,700 = 84,700 \text{ رپيا}$$

(B) اصل رقم (P) لهڻ.

فارمولا:
$$I = PRT \Rightarrow P = \frac{I}{R \times T}$$

مثال 2. رياض ڪا رقم هڪ ڊنڊي ۾ سيڙائي. جيڪڏهن ڪيس 12% ساليانيءَ جي شرح سان 3 سالن ۾ 27,000 رپيا نفعو مليو تہ اصل سيڙايل رقم لهو.

حل: جيئن تہ هتي رپيا I = 27,000، R = 12%، سال T = 3

$$\therefore \; P = \frac{I}{R \times T} = \frac{27,000 \times 100}{12 \times 3} = 75,000 \text{ رپيا}$$

مطلب تہ رياض 75,000 رپيا سيڙايا هيا.

(C) نفعي يا مارڪ اپ جي شرح لهڻ (R):

فارمولا:
$$I = PRT \Rightarrow R = \frac{I}{P \times T}$$

مثال 3. مارڪ اپ جي ڪهڙي شرح تي اصل رقم 34,000 رپيا 3 سالن بعد 43,180 رپيا ٿيندي؟

حل: اصل رقم − ڪُل رقم = (I) مارڪ اپ

$$= 43,180 - 34,000 = 9,180 \text{ رپيا}$$

جيئن تہ هتي سال T = 3 ۽ P = 34,000

$$\therefore \; R = \frac{I}{P \times T} = \frac{9180}{34000 \times 3} = 0.09$$

$$\Rightarrow R = 0.09 \times 100 = 9\%$$

(D) مدت (T) لهڻ: فارمولا $I = PRT \Rightarrow T = \dfrac{I}{P \times R}$

مثال 4. ڪيتري عرصي ۾ ڪاٻ رقم 5% مارڪ اپ جي شرح سان ٽيڻي ٿيندي؟

حل: فرض ڪريو تہ اصل رقم P = 100 رپيا آهي.

ڪل رقم اصل رقم جي ٽيڻ ٿيندي 3P = 300 روپيا.

اصل رقم − ڪُل رقم = (I) مارڪ اپ

$= 3P - P = 2P = 300 - 100 = 200$ رپيا

جيئن تہ هتي $R = 5\% = \dfrac{5}{100} = 0.05$

$$\therefore \quad T = \frac{I}{P \times R} = \frac{200}{100 \times 0.05}$$

$= \dfrac{200}{5} = 40$ سال

مثال 5. 25,000 رپيا ڪنهن بئنڪ ۾ 12% سالياني مارڪ اپ جي شرح سان ڪيتري مدت لاءِ رکجن جو 34,000 رپيا ملن؟

حل: $P = 25{,}000$ رپيا, $R = 12\% = \dfrac{12}{100}$ واپسي رقم (راس) = 34,000 = رپيا

اصل رقم − واپسي رقم = I

$= 34{,}000 - 25{,}000 = 9{,}000$ رپيا

$$\therefore T = \frac{I}{P \times R} = \frac{9000 \times 100}{25000 \times 12} = 3$$ سال

4.2.5 فنانس جا قسم

وضاحت

(i) اوور ڊرافٽ (OD): بئنڪ طرفان پنهنجن کاتيدارن کي مالي سهولت ڏني ويندي آهي تہ جيئن هو هڪ دفعو پنهنجي کاتي ۾ موجود رقم کان ڪجهہ وڌيڪ رقم ڪيرائي سگهن.

(ii) گردشي سرمايو (Running Finance): هي بہ اوور ڊرافٽ وانگر آهي. اها بہ هڪ حد تائين قرض ڏيڻ جي سهولت آهي. اها سهولت قرضدار بار بار حاصل ڪري سگهي ٿو.

(iii) ٻماٺ فنانس (گهربل سرمايو): هي قرض جو اهڙو قسم آهي جنهن ۾ بئنڪ ڪهڙي بہ وقت مقروض کان رقم جي واپسي جو مطالبو ڪري سگهي ٿي. ان جي مدت ڪڏهن ٿوري تہ ڪڏهن گهٽي ٿيندي آهي.

(iv) ليزنگ (ٺيڪو): هي ڊگهي مدت واري قرض جو قسم آهي. هن لاءِ هڪ معاهدو ڪيو ويندو آهي جنهن تحت مالڪ پنهنجو ڪو اثاثو ٺيڪي وٺڻ واري کي مقرر مدت لاءِ استعمال ڪرڻ ڏيندو آهي، ان مدت دوران مالڪاڻا حق مالڪ وٽ ئي رهندا آهن ۽ ڪيس شروع ۾ سوٽي طور (Down Payment) ڪجهه رقم ملندي آهي ۽ باقي رهيل رقم قسطن ۾ ملندي آهي. مدت پوري ٿيڻ بعد ٺيڪيدار اهو اثاثو مالڪ کي موٽائي ڏيندو.

نوٽ: اوڌر تي خريداري (Hire purchase) جي صورت ۾ اثاثو واپس مالڪ کي نه ملندو.

4.2.5 (vii) بئنڪن ۽ ماليات سان لاڳاپيل حقيقي زندگي جا مسئلا.

مثال 1. هڪ ڪمپني کو گهر 6 سالن لاءِ مسواڙ تي ورتو، معاهدي مطابق ڪمپني گهر مالڪ کي 2,000,000 رپيا اڳوات ڏيندي ۽ 40,000 رپيا ماهوار مسواڙ ڏيندي. 3 سالن بعد ڪمپني 5% مسواڙ وڌائيندي. ٻڌايو ته مالڪ مڪان (lesser) کي ڪل ڪيتري رقم ملندي؟

حل. مالڪ کي اڳوات مليل رقم = 2,000,000 رپيا

پهريان 3 سال ماهوار مسواڙ = 40,000 رپيا

پهرين ٽن سالن جي مسواڙ = $3 \times 12 \times 40,000 = 1,440,000$ رپيا

ٽن سالن بعد ماهوار مسواڙ = $40,000 \times \dfrac{105}{100} = 42,000$ رپيا

(5% واڌ جو مطلب 100 رپيا ڦري 105 رپيا ٿيندا)

آخري ٽن سالن جي مسواڙ = $3 \times 12 \times 42,000 = 1,512,000$ رپيا

مالڪ کي جملي ملندڙ رقم = اڳوات مليل رقم + پهرين ٽن سالن جي مسواڙ + آخري 3 سالن جي مسواڙ

$= 2,000,000 + 1,440,000 + 1,512,000 = 4,952,000$ رپيا

مثال 2. هڪ ڪار جي نقدي قيمت 900,000 رپيا آهي. اها ڪار 2 سالن لاءِ اوڌر تي ملي ٿي جنهن لاءِ 15% رقم اڳوات ڏيڻي آهي ۽ باقي بچيل رقم تي 10% شرح سان ساليانو مارڪ اپ ڏيڻو آهي ۽ اها رقم ماهوار قسطن ۾ ادا ڪرڻي آهي. ٻڌايو ته

(i) ماهوار قسط ڪيتري ٿيندي؟ **(ii)** ڪار جي اوڌر تي وڪري جي قيمت ڪيتري ٿيندي؟

حل: سوٽي رقم = نقدي قيمت جو 15% = $\dfrac{15}{100} \times 900,000$

$= 135,000$ رپيا

بقايا رقم (P) = نقدي قيمت − سوٽي رقم

$= 900,000 - 135,000 = 765,000$ رپيا

بقايا رقم تي مارڪ اپ ٿيندو:

$$I = P \times R \times T = 765{,}000 \times \frac{10}{100} \times 2 = 153{,}000$$ رپيا

مارڪ اپ (I) + بقايا رقم (P) = 24 مهينن ۾ رقم ادا ڪرڻي

= 765,000 + 153,000 = 918,000 رپيا

(i) ماهوار قسط = 918,000 ÷ 24 = 38,250 رپيا

(ii) ڪار جي جملي قيمت = اڳواٽ رقم + رهيل رقم + مارڪ اپ

= 135,000 + 765,000 + 153,000

= 1,053,000 رپيا

مشق 4.4

1. 50,000 رپين تي 6 سالن ۾ 5% في سال جي حساب سان ڪيترو نفعو ملندو؟
2. اسد هڪ بئنڪ کان چئن سالن لاءِ 25,000 رپيا قرض ورتو. 8% ساليانيءَ جي حساب سان بئنڪ جو مارڪ اپ لهو.
3. نسيم ڪي 3 سالن ۾ 12% ساليانيءَ جي مارڪ اپ جي اڳهه تي 27,000 رپيا نفعو مليو. ٻڌايو ته هن ڪيتري رقم سيڙائي هئي؟
4. ڪهڙي ساليانيءَ مارڪ اپ جي اڳهه سان 68,000 رپيا 11 سالن بعد 90,440 رپيا ٿيندا؟
5. 31,000 رپيا 6% مارڪ اپ جي اڳهه تي ڪيترو عرصو سيڙائجي جو ان تي 5,332 رپيا نفعو ملي؟
6. ڪيتري مارڪ اپ جي اڳهه تي ڪا به رقم 20 سالن ۾ ٻيڻي ٿيندي؟
7. ڪيتري عرصي ۾ 8% مارڪ اپ جي اڳهه تي ڪا به رقم ٻيڻي ٿيندي؟
8. هيٺين جدول مڪمل ڪريو:

جريان نمبر	مارڪ اپ (I) (رپيا)	مور (P) (رپيا)	وقت (T) (سال)	مارڪ اپ جو اڳهه (في سيڪڙو)
(i)	---	20,000	5	4
(ii)	---	98,000	6	6.5
(iii)	10,500	21,000	---	5
(iv)	2,100	---	6	7
(v)	1,740	5,800	3	---

9. هاشر هڪ ايئرڪنڊيشنر جنهن جي نقدي قيمت 50,000 رپيا آهي اوڌر تي خريد ڪيو. ان کي اوڌر تي حاصل ڪرڻ لاءِ ڪيس 20% رقم اڳوات ڏيڻي آهي ۽ بقايا رقم تي 10% مارڪ اپ ادا ڪرڻو آهي. جيڪڏهن $2\frac{1}{2}$ سالن اندر ڪيس رقم ادا ڪرڻي آهي ته

(i) ماهوار قسط لهو (ii) ڪل ڪيتري رقم پريندو؟

10. هڪ ڪمپني ڪو گهر 4 سالن لاءِ ليز تي ورتو، ان لاءِ 80,000 رپيا اڳوات ادا ڪرڻ بعد 20,000 رپيا ماهوار مسواڙ ڏيڻي اٿس. ٻن سالن بعد ڪمپني 5% مسواڙ وڌيڪ ڏيڻ قبول ڪيو. ٻڌايو ته مالڪ کي جملي ڪيتري رقم ملي.

11. ارشد هڪ فليٽ 200,000 رپين قيمت وارو اوڌر تي خريد ڪيو. مختلف اڳوات رقمن، مارڪ اپ جي اگهه ۽ عرصي لاءِ هيٺين جدول مڪمل ڪريو:

جريان نمبر	اڳوات رقم (في سيڪڙو)	مارڪ اپ جو ساليانو اگهه (في سيڪڙو)	اوڌر جو عرصو (سال)	ماهوار قسط (رپيا)	ڪل رقم(رپيا) (اڳوات + قسطون)
(i)	20%	10%	2	8,000	232,000
(ii)	20%	5%	2	---	---
(iii)	20%	10%	4	---	---
(iv)	40%	10%	2	---	---

4.3 سيڪڙو

في سيڪڙي جو مطلب آهي ”هڪ سو مان“ ان جي نشاني % آهي. مثلاً 40% جو مطلب آهي 100 مان 40.

4.3.1 نفعو ۽ نقصان

جڏهن وڪري جي قيمت (S.P) خريدي قيمت (C.P) کان وڌيڪ هجي ته نفعو ٿيندو آهي.

(خريدي قيمت − وڪري جي قيمت) = نفعو

جڏهن خريدي قيمت وڪري جي قيمت کان وڌيڪ هجي ته نقصان ٿيندو آهي.

(وڪري جي قيمت − خريدي قيمت) = نقصان

نفعو ۽ نقصان هميشہ خريدي قيمت تي ٿيندو آهي، تنهن ڪري انهن جو في سيڪڙو بہ خريدي قيمت تي لهبو.

$$\text{نفعو في سيڪڙو} = \frac{\text{نفعو}}{\text{خريدي قيمت}} \times 100 \qquad \text{نقصان في سيڪڙو} = \frac{\text{نقصان}}{\text{خريدي قيمت}} \times 100$$

مثال 1. جيڪڏهن خريدي قيمت 1,000 رپيا هجي ۽ نفعو 150 رپيا هجي تہ

$$\text{نفعو في سيڪڙو} = \frac{\text{نفعو}}{\text{خريدي قيمت}} \times 100 = \frac{150}{1000} \times 100 = 15\%$$

مثال 2. جيڪڏهن خريدي قيمت 2,000 رپيا هجي ۽ نقصان 100 رپيا هجي تہ

$$\text{نقصان في سيڪڙو} = \frac{\text{نقصان}}{\text{خريدي قيمت}} \times 100 = \frac{\cancel{100}^{5}}{\cancel{2000}_{1}} \times \cancel{100} = 5\%$$

4.3.2 ڇوٽ

ڳراهڪن کي پاڻ ڏانهن ڇڪڻ لاءِ ڪڏهن ڪڏهن ڪن ائٽمن کي لکيل قيمت کان گهٽ قيمت تي وڪڻبو آهي. لکيل قيمت (M.P) ۽ وڪري جي قيمت ۾ فرق کي "ڇوٽ" چئبو آهي.

ڇوٽ = (لکيل قيمت − وڪري جي قيمت) = (M.P − S.P)

$$\text{ڇوٽ في سيڪڙو} = \frac{\text{ڇوٽ}}{\text{لکيل قيمت}} \times 100$$

ڇوٽ في سيڪڙو کي ڇوٽ جي شرح يا اگهہ بہ چئبو آهي.

(ii) ڇوٽ جي شرح لهڻ.

مثال 1. جيڪڏهن ڪنهن ائٽم جي لکيل قيمت 3,000 رپيا هجي ۽ ان جي وڪري جي قيمت 2,700 رپيا هجي تہ

ڇوٽ = (لکيل قيمت − وڪري جي قيمت) = (3,000 − 2,700) = 300 رپيا

$$\text{ڇوٽ في سيڪڙو} = \frac{\text{ڇوٽ}}{\text{لکيل قيمت}} \times 100 = \frac{300}{3000} \times 100 = 10\%$$

مثال 2. جيڪڏهن وڪري جي قيمت 1,500 رپيا آهي ۽ ڇوٽ 200 رپيا آهي تہ

لکيل قيمت = (وڪري جي قيمت + ڇوٽ) = 1,500 + 200 = 1700 رپيا

$$\text{ڇوٽ في سيڪڙو} = \frac{\text{ڇوٽ}}{\text{لکيل قيمت}} \times 100 = \frac{200}{1700} \times 100 = 11.76\%$$

(iii) لاڳيتي ڇوٽ مسلسل ڏيتي ليتي.

جيڪڏهن لکيل قيمت تي هڪ ٻئي پٺيان ڇوٽ (مختلف شرحن تي) ڏجي تہ ان کي لاڳيتي ڇوٽ چئبو آهي (مسلسل ڏيتي ليتي وانگر).

لاڳيتي ڇوٽ ۾ اسان لکيل قيمت تي پهرين ڇوٽ لهي، اها ڇوٽ لکيل قيمت مان ڪٽ ڪري وڪري جي پهرين قيمت لهندا آهيون. بعد ۾ وڪري جي پهرين قيمت تي ٻي ڇوٽ لهي وڪري جي ٻي قيمت لهندا آهيون، وغيره.

مثال 1. هڪ صوفي جي لکيل قيمت 80,000 رپيا آهي. جيڪڏهن ان جي وڪري لاءِ 8% ۽ 4% شرح جي حساب سان ڇوٽ ڏجي ته اُن صوفي جي صافي يا آخري وڪري جي قيمت لهو.

حل. لکيل قيمت = (M.P) = 80,000 رپيا

پهرين ڇوٽ = پهرين ڇوٽ جي شرح × لکيل قيمت

$$= \frac{8}{100} \times 80,000 = 6,400$$ رپيا

وڪري جي پهرين قيمت = (لکيل قيمت − پهرين ڇوٽ) = (80,000 − 6,400) = 73,600 رپيا

ٻي ڇوٽ = ٻي ڇوٽ جي شرح × وڪري جي پهرين قيمت

$$= \frac{4}{100} \times 73,600 = 2,944$$ رپيا

وڪري جي ٻي قيمت = (وڪري جي پهرين قيمت − ٻي لاٽ)

= 73,600 − 2,944 = 70,656 رپيا

ان جو مطلب ته صوفي جي صافي وڪري جي قيمت 70,656 رپيا آهي.

نوٽ: شاگردن کي کپي ته صوفي جي صافي قيمت 4% ۽ 8% شرح جي حساب سان به لهن ۽ ڏسن ته لاڳيتي ڇوٽ ۾ لاٽن جي شرح جي ترتيب بدلائڻ سان صافي قيمت ساڳي رهي ٿي.

مثال 1. اسد هڪ ڪار 500,000 رپين ۾ خريد ڪري 550,000 رپين ۾ وڪرو ڪئي. سندس في سيڪڙو نفعو لهو.

حل. خريدي قيمت (C.P) = 500,000 رپيا، وڪري جي قيمت (S.P) = 550,000 رپيا

نفعو = S.P − C.P = 550,000 − 500,000 = 50,000 رپيا

نفعو في سيڪڙو = $\frac{\text{نفعو}}{\text{خريدي قيمت}} \times 100 = \frac{\cancel{50,000}^{10}}{\cancel{500,000}_{1}} \times \cancel{100} = 10\%$

مثال 2. جمال هڪ گهر 333,000 رپين ۾ خريد ڪيو ۽ 283,050 رپين ۾ وڪيو. سندس نقصان في سيڪڙو لهو.

حل. خريدي قيمت = 333,000 رپيا، وڪري جي قيمت = 283,050 رپيا

نقصان = (خريدي − وڪري) = 333,000 − 283,050 = 49,950 رپيا

نقصان في سيڪڙو = $\frac{\text{نقصان}}{\text{خريدي قيمت}} \times 100 = \frac{\cancel{49950}^{\cancel{1665}^{\cancel{555}^{15}}}}{\cancel{333,000}_{\cancel{11137}_{1}}} \times \cancel{100} = 15\%$

مثال 3. ڪنهن شيءِ جي لکيل قيمت 1,800 رپيا آهي. چوٽ ڏيڻ بعد اها شيءِ 1,620 رپين ۾ وڪرو ڪئي وئي تہ چوٽ جي شرح لهو.

حل. رپيا 1,620 = وڪري جي قيمت (S.P)، رپيا 1,800 = لکيل قيمت (M.P)

رپيا 180 = 1,620 − 1,800 = M.P − S.P = چوٽ

$$\text{چوٽ في سيڪڙو} = \frac{\text{چوٽ}}{\text{لکيل قيمت}} \times 100 = \frac{180}{1800} \times 100 = 10\%$$

تنهن ڪري چوٽ جي شرح = 10%

مثال 4. ڪمال هڪ شيءِ خريد ڪئي جنهن تي 5,000 رپيا قيمت لکيل هئي. هن کي جيڪڏهن 20% چوٽ ڏني وئي تہ ٻڌايو تہ هن کي اها شيءِ ڪيتري قيمت ۾ ملي؟

حل. 20% = چوٽ جي شرح، رپيا 5,000 = لکيل قيمت

$$\text{چوٽ ڏنل رقم} = 5{,}000 \times \frac{20}{100} = 1{,}000 \text{ رپيا}$$

تنهن ڪري: (چوٽ − لکيل قيمت) = ڪمال پريا

رپيا 4,000 = 1,000 − 5,000 =

مثال 5. هڪ رانديڪي جي خريدي قيمت 3,000 رپيا آهي. دڪاندار اُن تي خريدي قيمت کان 15% مٿي قيمت لکي ڇڏي، پر 2,760 رپين ۾ وڪرو ڪري ڇڏيائين. ٻڌايو تہ دڪاندار خريدار کي ڪيترو سيڪڙو چوٽ ڏني؟

حل. 15% = قيمت وڌائڻ جي شرح، رپيا 3,000 = (C.P) خريدي قيمت

$$\text{خريدي قيمت ۾ واڌ ڏيکاريل} = \frac{3000 \times 15}{100} = 450 \text{ رپيا}$$

خريدي قيمت ۾ واڌ + C.P = لکيل قيمت (M.P)

رپيا 3,450 = 450 + 3,000 =

رپيا 2,700 = S.P وڪري جي قيمت

$$\text{چوٽ} = \left[\text{لکيل قيمت (M.P)} - \text{وڪري جي قيمت (S.P)}\right] = 3{,}400 - 2{,}760 = 690 \text{ رپيا}$$

$$\text{تنهن ڪري} \quad \text{چوٽ جي شرح} = \frac{\text{چوٽ}}{\text{لکيل قيمت}} \times 100 = \frac{\cancel{690}^{1}}{\cancel{3450}_{5}} \times 100 = \frac{100}{5} = 20\%$$

تنهن ڪري چوٽ جي شرح = 20%

مثال 6. هڪ ٻتو دڪاندار ريزڪي دڪاندار کي هڪ موٽرسائيڪل 10% نفعي تي وڪڻي ٿو. ريزڪي دڪاندار وري اها موٽرسائيڪل 37,950 رپين ۾ وڪڻي ٿو تہ کيس 15% نفعو مليو. ٻڌايو تہ ٻڌي دڪاندار اها موٽرسائيڪل گهٽي ۾ خريد ڪئي هئي؟

حل. ريزڪي واري لاءِ خريدي قيمت = ہڏي دوڪاندار لاءِ وڪري جي قيمت
رپيا 37,950 = ريزڪي واري لاءِ وڪري جي قيمت
15% = ريزڪي واري لاءِ نفعي جي شرح
فرض ڪريو تہ ريزڪي واري لاءِ خريدي قيمت آهي 100 رپيا
تہ ريزڪي واري لاءِ وڪري جي قيمت ٿيندي 15 + 100 = 115 رپيا
جيڪڏهن ريزڪي واري لاءِ وڪري جي قيمت (S.P) آهي 115 رپيا تہ سندس (C.P) خريدي قيمت آهي 100 رپيا
جيڪڏهن ريزڪي واري لاءِ (S.P) وڪري جي قيمت آهي 100 رپيا تہ سندس (C.P) خريدي قيمت آهي $\frac{100}{115}$ رپيا
جيڪڏهن ريزڪي واري لاءِ وڪري جي قيمت (S.P) آهي 37,950 رپيا تہ سندس (C.P) خريدي قيمت

$$= \frac{100}{\cancel{115}_{23}} \times \cancel{37950}^{7590} = 33,000 \text{ رپيا}$$

تنهن ڪري ہڏي دڪاندار لاءِ وڪري جي رقم = ريزڪي واري جي خريدي = 33,000 رپيا
هاڻي اسان ہڏي دڪاندار لاءِ خريدي قيمت لهنداسين.
فرض ڪريو تہ ہڏي دڪاندار جي لاءِ خريدي رقم آهي 100 رپيا
تہ ہڏي دڪاندار لاءِ وڪري جي رقم ٿيندي 110 رپيا (10% نفعو)
جيڪڏهن ہڏي دڪاندار لاءِ S.P آهي 110 رپيا تہ سندس لاءِ C.P هوندي 100 رپيا
جيڪڏهن ہڏي دڪاندار لاءِ S.P آهي 110 رپيا تہ سندس C.P آهي $\frac{100}{110}$ رپيا
جيڪڏهن ہڏي دڪاندار لاءِ S.P آهي 33,000 رپيا تہ سندس C.P آهي

$$\frac{100}{\cancel{110}_{1}} \times \cancel{33,000}^{3,000} = 30,000 \text{ رپيا}$$

تنهن ڪري ہڏي دڪاندار لاءِ خريدي قيمت آهي 30,000 رپيا

مشق 4.5

1. هيٺ ڏنل جدول مڪمل ڪريو:

جريان نمبر	خريدي قيمت (C.P) (رپيا)	وڪري جي قيمت (S.P) (رپيا)	نفعو (رپيا)	نفعو في سيڪڙو
(i)	1,050	1,155	---	---
(ii)	1,665	---	333	---
(iii)	6,000	---	---	22
(iv)	---	1,250	---	25

2. هڪ دڪاندار 160 ڪرسيون في ڪرسي 900 رپيا ۾ خريد ڪيون. انهن منجهان 60 ڪرسيون 1,000 رپيا في ڪرسي جي اگهہ تي وڪرو ڪيائين ۽ باقي ڪرسيون 960 رپيا في ڪرسي وڪرو ٿيون. سندس في سيڪڙو نفعو يا نقصان لهو.
3. جليل 4 پراڻيون ڪارون 900,000 رپين ۾ خريد ڪيون ۽ انهن کي ترتيب وار 225,000 رپين، 250,000 رپين، 300,000 رپين ۽ 215,000 رپين ۾ وڪرو ڪيو. سندس في سيڪڙو نفعو يا نقصان لهو.
4. خليل 2,200 رپين ۾ 250 بيضن وارو هڪ ڪارٽون خريد ڪيو. اُنهن منجهان 20 خراب نڪتا ۽ 10 ڀڄي پيا. باقي بچيل بيضا هن 11 رپيا في بيضو جي حساب سان وڪيا. سندس في سيڪڙو نفعو يا نقصان لهو.
5. هڪ شيءِ تي 10,000 رپيا قيمت لکيل هئي. اُن کي ڇوٽ جي مختلف شرحن ذريعي وڪرو ڪجي تہ هيٺين جدول مڪمل ڪريو:

جريان نمبر	لاڳيتي ڇوٽن جي شرح في سيڪڙو	ڇوٽ (رپيا)	وڪري جي قيمت (رپيا)	يڪسان سادي ڇوٽ (لاٽ) في سيڪڙو
(i)	5% ۽ 15%	500 ۽ 1425	8,075	19.25
(ii)	15% ۽ 5%	---	---	---
(iii)	15% ۽ 10%	---	---	---
(iv)	18% ۽ 12%	---	---	---

6. هڪ سائيڪل تي 8,500 رپيا قيمت لکيل آهي. ٻنو دڪاندار ريزڪي دڪاندار کي 10% ۽ 5% لاڳيتو ڇوٽ ڏئي تو تہ ٻتي دڪاندار لاءِ سائيڪل جي وڪري جي قيمت لهو.
7. ٽن لاڳيتن ڇوٽن 20%، 10% ۽ 5% جي برابر هڪ سادي ڇوٽ في سيڪڙو لهو.
8. هڪ ڪاريگر ڪنهن شيءِ جي ٺاهڻ تي 5,000 رپيا خرچ ڪري ان کي 20% نفعي تي وڪرو ڪيو. اُن خريدار وري ساڳي شيءِ 25% نفعي تي ڪپائي، تہ اُن جي آخري وڪري واري قيمت لهو.

4.4 ويمو (Insurance)

4.4.1 ويمي جي وصف

ويمو زندگي ۾پيش ايندڙ حادثن ۽ خطرن جي مالي نقصان کان بچڻ جو هڪ اهم ذريعو آهي. اهو درحقيقت ٻن پارٽين جي وچ ۾ هڪ معاهدو آهي. ڪوبہ شخص يا ادارو جيڪو ويمي ڪندڙ ڪمپني (Insurer) کي ماهوار، سماهي، شش ماهي يا ساليانو ڪا مقرر

رقم ڏيڻ قبول ڪري ٿو تہ ان کي ويمو ٿيل (Insured) يا ويمي دار چئبو آهي. ان معاهدي تحت ويمو ڪندڙ ڪمپني ويمي ٿيل جي ملڪيت، صحت ۽ حياتيءَ بابت ٿيل نقصانن جي صورت ۾ مالي تحفظ مهيا ڪندي آهي.

انهيءَ معاهدي کي 'ويمي جي پاليسي' چئبو آهي. قسطون جيڪي ڪمپنيءَ کي ملنديون انهن کي 'پريميم' چئبو آهي. جيتري وقت لاءِ معاهدو ٿيل هوندو آهي ان کي 'مدت تڪميل' (Maturity) چئبو آهي. ويمي جي مختلف قسمن مان هتي اسان صرف ٻن قسمن جي باري ۾ پڙهنداسين **(i)** حياتيءَ جو ويمو **(ii)** گاڏيءَ جو ويمو.

4.4.2 حياتي ۽ گاڏيءَ جي ويمن بابت زندگيءَ ۾ پيش ايندڙ مسئلا حل ڪرڻ

(i) حياتيءَ جو ويمو

حياتيءَ جو ويمو، ويمو ڪرائيندڙ شخص ۽ ويمي ڪمپني جي وچ ۾ مقرر مدت لاءِ هڪ معاهدو آهي. ويمي پاليسي جو مالڪ ويمي ڪمپني کي پريميم جون قسطون مقرر وقتن تي ڏيڻ جو پابند آهي ۽ ان عيوض ويمي ڪمپني ويمي دار شخص کي مقرر وقت بعد يا ان وقت اندر سندس موت يا سخت بيماريءَ جي صورت ۾ مخصوص رقم ڏيندي. پريميم جي رقم ۽ مدت تڪميل جو تعين ويمي ڪرائيندڙ شخص جي عمر ۽ صحت مطابق ويمي ڪمپني ڪندي آهي.

مثال. هڪ ماڻهو 400,000 رپين ۾ پنهنجو ويمو ڪرايو. ساليانو پريميم جي شرح پاليسي رقم جو 4.5% آهي ۽ پاليسي فِي 0.25% آهي. سندس ساليانو پريميم ۽ سماهي پريميم لهو. جڏهن تہ سماهي پريميم جي شرح ساليانو پريميم جو 27% آهي.

حل: پاليسي رقم = 400,000 رپيا

$$\text{پاليسي في} = \frac{0.25}{100} \times 400,000 = 1,000 \text{ رپيا}$$

$$\text{پهريون پريميم} = \frac{4.5}{100} \times 400,000 = 18,000 \text{ رپيا}$$

ساليانو پريميم = پهريون پريميم + پاليسي في

$$= 18,000 + 1,000 = 19,000 \text{ رپيا}$$

$$\text{سماهي پريميم} = \frac{27}{\cancel{100}} \times 19,\cancel{000} = 5,130 \text{ رپيا}$$

(ii) گاڏين جو ويمو

ڪڏهن گاڏين جا مالڪ يا ڪمپنيون پنهنجي گاڏين جو بہ ويمو ڪرائيندا آهن جيئن چوري، حادثن يا ٻاهر لڳڻ جهڙن واقعن جي صورت ۾ ڪجهہ ازالو ٿئي پريميم جي شرح گاڏيءَ

جي قسم، قيمت، ڊرائيور جي عمر، روڊن جي حالت ۽ امن امان جي صورتحال مطابق طئي ڪئي ويندي آهي.

پريميم جي رقم بابت ويمي ڪمپني فيصلو ڪندو آهي جيڪو مختلف وقتن يا مدتن ۾ مختلف هوندو آهي. هن صورت ۾ پاليسي في جدا نہ ورتي ويندي آهي. تنهنڪري پهرين ساليانی پريميم جي رقم پهرين سال جي جملي قسطن جي رقمن برابر ٿيندي آهي.

مثال 1: اڪبر پنهنجي ڪار جو ويمو هڪ سال لاءِ 4.5% شرح سان ڪرايو. جيڪڏهن ڪار جي قيمت 800,000 رپيا آهي تہ پريميم جي رقم لهو.

حل: ڪار جي قيمت = 800,000 رپيا، ويمي جي شرح = 4.5%

تنهن ڪري: پريميم جي رقم = $\frac{4.5}{1\cancel{00}} \times 800,\cancel{000} = 45 \times 800$

= 36,000 رپيا

مثال 2: فهيم پنهنجي بس جو ويمو ٻن سالن لاءِ 3% ساليانی جي شرح سان ڪرايو. سندس بس جوملهه 4,000,000 رپيا آهي. جيڪڏهن بس جو ملهه 10% ساليانی جي حساب سان گهٽجي ٿو تہ ٻڌايو تہ فهيم ڪل ڪيتري رقم پريميم طور ادا ڪئي.

حل: بس جو شروعاتي ملهه = 4,000,000 رپيا

ساليانی پريميم جي شرح = 3%، ملهه گهٽجڻ جي شرح = 10%

تنهن ڪري: پهريون پريميم = $\frac{3}{100} \times 4,000,000 = 120,000$ رپيا

هڪ سال بعد بس جو ملهه = (اصل ملهه − ملهه ۾ گهٽتائي)

= $(4,000,000 - 400,000)$

= 3,600,000 رپيا

$\therefore$ ٻيو پريميم = $\frac{3}{100} \times 3,600,000 = 108,000$ رپيا

جملي پريميم جي رقم = پهريون پريميم + ٻيو پريميم

= $120,000 + 108,000 = 228,000$ رپيا

مشق 4.6

1. جيڪڏهن حياتيءَ جي ويمي لاءِ پريميم جي رقم هيٺئين ريت پرٺي آهي:

ساليانو = پاليسي جي رقم جو 4.75% + پاليسي في،

پاليسي في = پاليسي جي رقم جو 0.2%

ششماهي = ساليانی پريميم جو 52%

سماهي = ساليانو پريميم جو 27%

ماهوار = ساليانو پريميم جو 9%

تہ هيٺ ڏنل جدول مکمل ڪريو:

جريان نمبر	پاليسي رقم (رپيا)	ساليانو پريميم 0.2% + 4.75%	ششماهي پريميم (رپيا)	سماهي پريميم (رپيا)	ماهوار پريميم (رپيا)
(i)	100,000	---	---	---	---
(ii)	150,000	---	---	---	---
(iii)	300,000	---	---	---	---

2. حميد حياتيءَ جو ويمو 300,000 رپين ۾ ڪرايو.جيڪڏهن ساليانو پريميم جي شرح 5.2% آهي ۽پاليسي في 0.25% آهي تہ سندس پهرين پريميم جي رقم لهو.

3. بشير پنهنجي ڪار جو ويمو 3 سالن لاءِ 2% ساليانو شرح تي 500,000 رپين ۾ ڪرايو. جيڪڏهن هر سال ڪار جي قيمت ۾ 5% گهٽتائي ٿئي ٿي تہ ٻڌايو تہ هن ويمي عيوض ڪل ڪيترو پريميم ڀريو؟

4. هڪ گاڏيءَ جو ويمو سندس ملهہ جي 4.0% جي شرح سان 3 سالن لاءِ ڪرايو ويو. جيڪڏهن ملهہ ۾ گهٽتائي جي شرح 10% ساليانو آهي تہ هيٺين جدول مکمل ڪريو:

جريان نمبر	گاڏيءَ جو ملهہ (هزار رپيا)	پهرين ساليانو پريميم جي رقم (هزار رپيا)	ٻيو ساليانو پريميم (هزار رپيا)	ٽيون ساليانو پريميم (هزار رپيا)	ڪل پريميم جي رقم (هزار رپيا)
(i)	100	4.00	3.60	3.24	10.84
(ii)	250	10.00	---	---	---
(iii)	300	---	---	---	---
(iv)	---	---	---	16.20	---
(v)	---	---	36.00	---	---

5. هڪ عورت پنهنجو ويمو هڪ سال لاءِ 5% جي شرح سان ڪرايو. جيڪڏهن هن 25,000 رپيا پريميم ڀريو تہ سندس ويمي جي رقم لهو (پاليسي في نہ لڳندي).

4.5 آمدني ٽئڪس

4.5.1 آمدني ٽئڪس، ڇوٽ ڏنل آمدني ۽ ٽئڪس لائق آمدني جي وضاحت.

(a) **آمدني ٽئڪس:** هي اها في آهي جيڪا سرڪار اهڙن شخص يا ڪمپنين مٿان لاڳو ڪندي آهي جن جي ساليانى آمدني ڪنهن مقرر ٿيل حد کان وڌيڪ هوندي آهي. آمدني ٽئڪس جا قانون ۽ اگهه (شرح) سرڪار بدلائيندي رهندي آهي ۽ اهي ساليانى بجيٽ پيش ڪرڻ وقت ظاهر ڪندي آهي.

(b) **ڇوٽ ڏنل آمدني:** هي اها آمدني آهي جنهن تي مروج قانون تحت ٽئڪس نه لڳندو آهي. مثلاً

(i) زرعي آمدني (ii) پينشن يا گرئجويٽي

(iii) بيوه جي گهر يا ملڪيت مان آمدني

(c) **ٽئڪس لائق/ لاڳو آمدني:** جملي ساليانى آمدني مان ڇوٽ ڏنل آمدني ڪٽ ڪبي ته باقي آمدني تي ٽئڪس لاڳو ٿيندو.

ان ڪري (ڇوٽ ڏنل آمدني – جملي ساليانى آمدني) = ٽئڪس لائق آمدني

(d) **ڊيبٽ:** سرڪار هر سال هڪ رقم يا حد مقرر ڪندي آهي جنهن تي آمدني ٽئڪس نه پرٽي پوندي آهي. ان حد کي 'ڊيبٽ' چئبو آهي.

مثلاً جيڪڏهن ڪنهن پگهاردار شخص جي ساليانى ڪمائي 500,000 رپيا آهي ۽ مروج قانون تحت 400,000 رپيا ڊيبٽ آهي ته ڪيس بقايا 100,000 رپين تي آمدني ٽئڪس پرٽو پوندو، جنهن جي شرح هر سال بجيٽ پيش ڪرڻ وقت مقرر ڪئي ويندي آهي.

(e) .... **مدت:** اها مدت هر سال پهرين جولاءِ کان وٺي ايندڙ ٻئي سال جي 30 جون تائين آهي.

انڪم ٽيڪس پرڻ لاءِ گوشوارا جدول 2017 -2016

جريان نمبر	ٽئڪس لائق آمدني (رپيا)	ٽئڪس جي شرح/ اگهه
.1	آمدني 400,000 رپين کان مٿي نه آهي	انڪم ٽيڪس نه لڳندو
.2	400,000 کان 500,000 تائين	400,000 رپين کان مٿي رقم جو 2%
.3	500,000 کان 750,000 تائين	2,000 رپيا + 500,000 رپين کان وڌيڪ رقم جو 5%
.4	750,000 کان 1,400,000 تائين	14,500 رپيا + 750,000 رپين کان وڌيڪ رقم جو 10%

جريان نمبر	ٽئڪس لائق آمدني (رپيا)	ٽئڪس جي شرح/ اڳهه
.5	1,400,000 کان 1,500,000 تائين	79,500 رپيا + 1,400,000 رپين کان وڌيڪ رقم جو 12.5%
.6	1,500,000 کان 1,800,000 تائين	92,000 رپيا + 1,800,000 رپين کان وڌيڪ رقم جو 15%
.7	1,800,000 کان 2,500,000 تائين	137,000 رپيا + 1,800,000 رپين کان وڌيڪ رقم جو 17.5%
.8	2,500,000 کان 3,000,000 تائين	259,500 رپيا + 2,500,000 رپين کان وڌيڪ رقم جو 20%
.9	3,000,000 کان 3,500,000 تائين	359,500 رپيا + 3,000,000 رپين کان وڌيڪ رقم جو 22.5%
.10	3,500,000 کان 4,000,000 تائين	472,000 رپيا + 3,500,000 رپين کان وڌيڪ رقم جو 25%
.11	4,000,000 کان 7,000,000 تائين	597,000 رپيا + 4,000,000 رپين کان وڌيڪ رقم جو 27.5%
.12	7,000,000 رپين کان وڌيڪ	1,422,000 رپيا + 7,000,000 رپين کان وڌيڪ رقم جو 30%

4.5.2 آمدني ٽئڪس پريندڙن جا حقيقي زندگيء ۾ مسئلا حل ڪرڻ.

مثال 1. جنيد جي سالياني آمدني 480,000 رپيا آهي، سندس سالياني آمدني ٽئڪس معلوم ڪريو.

حل. سالياني آمدني = 480,000 رپيا

اها آمدني ٽئڪس جوڳي آمدني جي جدول ۾ جريان نمبر (2) ۾ اچي ٿي. جنهن تحت 400,000 رپين کان وڌيڪ آمدني تي ٽئڪس جي شرح 2% آهي ۽ گهٽ کان گهٽ ٽئڪس ٻڙي رپيا آهي (0.0 رپيا)

آمدني ٽئڪس جوڳي رقم = 480,000 − 400,000 = 80,000 رپيا

جنهن رقم تي ٽئڪس لڳي × ٽئڪس جي شرح = آمدني ٽئڪس

$$= \frac{2}{100} \times 80{,}000 = 1{,}600 \text{ رپيا}$$

يعني جنيد کي سال ۾ 1,600 رپيا آمدني ٽئڪس ڀرڻو آهي.

مثال 2. اشرف جي سالياني آمدني 900,000 رپيا آهي. سندس آمدني ٽئڪس معلوم ڪريو، جيڪڏهن هن 50,000 رپيا زڪواة ڏني آهي.

حل. جيئن تہ زڪواة جي رقم تي ٽئڪس نہ لڳندو آهي تنهن ڪري

رپيا 850,000 = 50,000 − 900,000 = آمدني ٽئڪس جوڳي رقم

اها آمدني ٽئڪس جوڳي آمدني جي جدول ۾ جريان نمبر (4) ۾ اچي ٿي. جنهن تحت 750,000 رپين ڪان وڌيڪ آمدني تي ٽئڪس جي شرح 10% آهي ۽ گهٽ ڪان گهٽ ٽئڪس 14,500 رپيا آهي.

رپيا 100,000 = 750,000 − 850,000 = واڌاري آمدني

واڌاري آمدني × ٽئڪس جي شرح = واڌارو آمدني ٽئڪس

$$= \frac{10}{100} \times 100{,}000 = 10{,}000 \text{ رپيا}$$

زائد آمدني تي ٽئڪس + گهٽ ڪان گهٽ ٽئڪس = ڪل آمدني ٽئڪس

رپيا 24,500 = 10,000 + 14,500 =

يعني اشرف کي 24,500 رپيا آمدني ٽئڪس پرڻو آهي.

مثال 3. حرمين سال ۾ 107,000 رپيا آمدني ٽئڪس پريو. ٻڌايو تہ سندس سالياني آمدني ڪيتري آهي؟

حل. آمدني ٽئڪس واري جدول ۾ ڏسڻ سان خبر پئي ٿي تہ ٽئڪس پريل رقم 107,000 رپيا جي رقم جريان نمبر (6) ۾ اچي ٿي، جو تہ اها رقم جريان نمبر (6) جي بنيادي آمدني ٽئڪس 92,000 رپين ڪان 15,000 رپيا وڌيڪ آهي ۽ جريان نمبر (7) جي بنيادي آمدني ٽئڪس 137,000 رپين ڪان گهٽ آهي. جريان نمبر (6) ۾ 1,500,000 رپين ڪان وڌيڪ آمدني تي ٽئڪس جي شرح 15% آهي. هاڻ اسان کي اها رقم لهڻي آهي جنهن تي 92,000 رپين ڪان وڌيڪ آمدني ٽئڪس پرڻي پئي.

15 رپيا آمدني ٽئڪس آهي 100 رپيا آمدني تي

تہ 1 رپيا آمدني ٽئڪس آهي $\frac{100}{15}$ رپين تي

تہ 15,000رپيا آمدني ٽئڪس آهي $15{,}000 \times \frac{100}{15} = 100{,}000$ رپين تي = (واڌاري آمدني)

واڌاري آمدني + جريان نمبر (6) ۾ گهٽ ڪان گهٽ آمدني = حرمين جي سالياني آمدني

رپيا 1,600,000 = 100,000 + 1,500,000 =

مشق 4.7

1. امجد جي ماهوار پگهار 75,000 رپيا آهي. سندس سالیانو آمدني ٽئڪس لهو.

2. شازيہ هڪ سال ۾ 495,000 رپيا ڪمائي ٿي، ڪيس ڪيترو ساليانو آمدني ٽئڪس پرڻو پوندو جڏهن تہ هن 40,000 رپيا زڪواة ادا ڪئي آهي؟

3. هڪ ماڻهو 7,000,000 رپيا سال ۾ ڪمايا آهن. 120,000 رپيا ٽئڪس اڳ ۾ ئي ڪٽجي ويا ۽ 130,000 رپيا زڪواة بہ ادا ڪئي اٿس. ٻڌايو تہ مالي سال جي آخر ۾ هن کي باقي ڪيترو آمدني ٽئڪس ڀرڻو پوندو؟

4. اسماعيل جي ماهوار پگهار 200,000 رپيا آهي. ٻڌايو تہ هن سال جي آخر ۾ ڪيتري آمدني ٽئڪس ڀري جڏهن تہ 80,000 رپيا زڪواة ۽ 20,000 رپيا دولت ٽئڪس بہ ڀري چڪو آهي.

5. سفيان هڪ سال ۾ 497,000 رپيا آمدني ٽئڪس ڀريو آهن تہ سندس ماهوار آمدني ٻڌايو.

6. بشرا سال جي آخر ۾ 289,500 رپيا آمدني ٽئڪس ادا ڪئي. جيڪڏهن هن 130,000 رپيا دولت ٽئڪس ۽ 120,000 رپيا زڪواة بہ ادا ڪئي هئي تہ سندس ساليانی آمدني لهو.

7. آمدني جي مختلف حدن تحت هيٺين جدول مڪمل ڪريو:

جريان نمبر	ساليانی آمدني (هزارن ۾)	آمدني ٽئڪس سليب نمبر	گهٽ ۾ گهٽ ٽئڪس (رپيا)	هيٺين حد (هزارن ۾)	هيٺين حد کان وڌيڪ آمدني (هزارن ۾)	ٽئڪس ريٽ	ڪل انڪم ٽئڪس (رپيا)
(i)	578	03	2,000	500	78	5%	5,900
(ii)	480	---	---	---	---	---	---
(iii)	900	---	14,500	---	---	---	---
(iv)	6,000	11	---	---	2,000	27.5%	---

جائزي جي مشق 4

1. درست جواب تي گولڙو پايو:

(i) لکيل رقم تي رعايت ڏيڻ کي چئبو آهي:

(a) ٽئڪس (b) نفعو (c) لاٽ (d) نقصان

(ii) ٻن يا وڌيڪ تناسبن جي وچ ۾ تعلق کي چئبو آهي:

(a) سڌو تناسب (b) اڻ سڌو تناسب

(c) اُبتو تناسب (d) مرڪب تناسب

(iii) ATM جو مطلب آهي:

اڪائونٽ ٽرانسفرميشن (b)	اڪائونٽ ٽيلي مشين (a)
آٽوميٽڪ ٽرانسفر مشين (d)	آٽوميٽيڊ ٽيلر مشين (c)

(iv) زڪواة جو ريٽ آهي:

(a) 5% (b) 2.5% (c) 10% (d) 1.0%

(v) هڪ ڪتاب جي خريدي قيمت آهي 300 رپيا. جيڪڏهن اهو ڪتاب 20% ڇوٽ تي وڪرو ڪجي ته ان جي وڪري جي قيمت ٿيندي:

(a) 240 رپيا (b) 260 رپيا (c) 230 رپيا (d) 280 رپيا

(vi) جيڪڏهن مٽاسٽا جو اگهه 1 سعودي ريال = 27.15 رپيا پاڪستاني هجي ته:

سعودي ريال ________ = 54,300 رپيا پاڪستاني

(a) 1,900 (b) 2,100 (c) 2,000 (d) 2,010

(vii) آمدني تي لڳايل ٽئڪس کي چئبو آهي:

(a) عشر (b) جزيہ (c) آمدني ٽئڪس (d) ملڪيت ٽئڪس

(viii) هڪ شخص وفات ڪري ويو. سندس ملڪيت هڪ بيوه، ٽن ڌيئرن ۽ ٻن پٽن ۾ ورهائڻي آهي. هر هڪ پٽ جو ملڪيت ۾ حصو ٿيندو:

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{3}$

(ix) ڪاٻہ رقم 8% مارڪ اپ جي اگهه تي ________ سالن ۾ ٽيڻي ٿيندي:

(a) 40 (b) 30 (c) 20 (d) 25

(x) سادي ڇوٽ جيڪا ٻن لاڳيتين ڇوٽن 10% ۽ 5% جي برابر آهي سا________ آهي:

(a) 15% (b) 14.5% (c) 15.5% (d) 14%

2. هڪ ڪمپني جي نفعي کي چئن ڀائيوارن A, B, C ۽ D ۾ 3:4:5:6 جي نسبت ۾ ورهائڻو آهي. جيڪڏهن D کي5,4000 رپيا حصي ۾ ملن ٿا تہ ٻڌايو تہ A ۽ B کي الڳ الڳ ڪيتري رقم ملندي؟ ڪل نفعو ڪيترو ٿيو؟

3. جيڪڏهن 30 ماڻهو 20 ڪلوگرام کنڊ 5 ڏينهن ۾ استعمال ڪن ٿا تہ ٻڌايو تہ 15 ماڻهو 320 ڪلوگرام ڪيترا ڏينهن استعمال ڪندا؟

4. کهڙي ڇوٽ (لاٽ) وڌيڪ آهي هڪ دفعي سان 25% يا لڳاتار 15% ۽ 10% ؟

5. اڪبر هڪ ڪار 1,000,000 رپين ۾ خريد ڪئي. اصغر کي 20% نفعي تي ڏني. اصغر ساڳي ڪار انور کي 20% نقصان تي وڪرو ڪئي. ٻڌايو تہ انور ان ڪار جي ڪيتري قيمت ڏني؟

6. اسلم پنهنجي ڪار جي انشورنس/ ويمو ڪرائڻ لاءِ 40,500 رپيا ڀهريون پريميم ڀريو. جيڪڏهن پريميم جو ساليانو اگهه 3.85% آهي ۽ 2,000 رپيا سروس في آهي تہ ڪار جي ويمي جي رقم لهو.

7. هڪ فئڪٽري پنهنجي تيار ڪيل مال تي خريدي رقم کان 20% وڌيڪ رقم رکي ۽ ڪجهه ڇوٽ (لاٽ) تي وڪرو ڪئي. جيڪڏهن ڪنهن ائٽم جي خريدي قيمت 2,500 رپيا آهي ۽ وڪري جي قيمت 2,700 رپيا آهي ته گراهڪ کي ڪيترو سيڪڙو ڇوٽ (لاٽ) ڏني وئي؟
8. احمد جي صافي ساليانو آمدني ڪيتري آهي جيڪڏهن هن 8,900 رپيا آمدني ٽئڪس ڀري ۽ 20,000 رپيا زڪواة ڏني.

خلاصو

- مرڪب تناسب ڪن ٻه ٻن تناسبن جي وچ ۾ هڪ تعلق آهي.
- ٻه يا وڌيڪ ماڻهو گڏجي ڪو ڪاروبار ڪن ته ان کي ڀائيواري چئبو آهي.
- جڏهن ڪو ماڻهو وفات ڪري ويندو آهي ته سندس ڇڏي ويل ملڪيت کي ورثو چئبو آهي ۽ اُها سندس وارثن ۾ ورهائي ويندي آهي.
- بئنڪ ۾ اهڙو کاتو جنهن تي نفعي ۽ نقصان ۾ شراڪت داري هجي اُن کي PLS اڪائونٽ چئبو آهي.
- ڪرنٽ ڊپازٽ اڪائونٽ هڪ مسلسل جاري رهندڙ اڪائونٽ آهي جنهن تي نفعو يا نقصان نه ٿيندو آهي. ڪاروباري شخصن لاءِ روزمره جي ڏيتي ليتي لاءِ فائديمند آهي.
- چيڪ هڪ لکت ۾ آرڊر (حڪم) آهي جنهن تحت ڪنهن بئنڪ کي هدايت ڪئي ويندي آهي ته چيڪ رکندڙ شخص کي لکيل رقم مخصوص کاتي مان ڏني وڃي.
- ڊمانڊ ڊرافٽ (DD) هڪ اهڙو لکت ۾ آرڊر آهي جيڪو هڪڙي بئنڪ ٻيءَ مخصوص بئنڪ کي ڏيندي آهي ته لکيل رقم DD رکندڙ شخص کي ادا ڪئي وڃي.
- پي آرڊر هڪ بئنڪ طرفان اهڙو هدايت نامو آهي جنهن تحت ڪابه بئنڪ مخصوص پارٽيءَ کي لکيل رقم ادا ڪرڻ جي پابند آهي. پي آرڊر جاري ڪرڻ واري بئنڪ ضامن آهي.
- آن لائين بئنڪاري ۾ انٽرنيٽ جي استعمال سان بئنڪ پنهنجن گراهڪن کي سهولت مهيا ڪندو آهي مثلاً کاتيدار هڪ اڪائونٽ مان ٻئي اڪائونٽ ۾ رقم منتقل ڪري سگهندو آهي، يوٽيلٽي بل ادا ڪري سگهندو آهي.
- مارڪ اپ ان واڌاري رقم کي چئبو آهي جيڪا بئنڪ پنهنجي قرضدار کان مور کان علاوه وصول ڪندي آهي.
- جنهن اگهه تي بئنڪ پنهنجي ڪنهن کاتيدار کي قرض ڏيندي آهي ان کي مارڪ اپ ريٽ چئبو آهي.

- اوور ڊرافٽ (OD) هڪ سهولت آهي جيڪا بئنڪ پنهنجن کاتيدارن کي ڏيندي آهي جنهن تحت هو پنهنجي اصل جمع ٿيل رقم کان ڪجهه وڌيڪ رقم ڪيرائي سگهن ٿا.
- I = PRT جتي I مارڪ اپ لاءِ، P مور لاءِ (سيڙايل رقم) ۽ T مدت (سيڙپ جي وقت) لاءِ آهي.
- ليزنگ هڪ قسم جو معاهدو آهي جنهن مطابق ڪنهن ملڪيت کي ليز تي وٺندڙ شخص يا ادارو ان ملڪيت کي مخصوص مدت لاءِ استعمال ڪري سگهندو ۽ ان عيوض مقرر رقم ڪرائي طور ادا ڪندو رهندو. اُن کي مقاطعو بہ چئبو آهي.
- لکيل قيمت کان گهٽ قيمت تي وڪڻڻ کي چوٽ ڏيڻ چئبو آهي.
  (وڪري جي قيمت − لکيل رقم) = چوٽ
- مسلسل چوٽ ۾ پهريائين گراهڪ کي لکيل رقم تي چوٽ ڏئي وري بچيل رقم تي ٻيهر يا ٽيهر چوٽ ڏبي آهي.
- ويمو هڪ معاهدو آهي جيڪو ويمي واري ڪمپني ۽ ويمو پاليسي رکندڙ شخص جي وچ ۾ طئي ٿيل رقم ۽ مدت لاءِ ٿيندو آهي. اهو ڪڏهن زندگيءَ جو تہ ڪڏهن حادثي جي صورت ۾ وارثن کي رقم جي ادائيگي لاءِ ٿيندو آهي.
- آمدني ٽئڪس سرڪار پاران شخصن يا ڪمپنين جي ساليانی آمدني تي لڳايو ويندو آهي، جيڪڏهن انهن جي آمدني ڪنهن مخصوص حد کان وڌيڪ هوندي آهي.
- چوٽ ڏنل آمدني (Rebate) اها آمدني آهي جنهن تي آمدني ٽئڪس نہ لڳندو آهي. مثلاً زرعي آمدني، پينشن، بيواهن جي ملڪيت وغيره.
- ٽئڪس لائق آمدني = (ساليانی آمدني − چوٽ ڏنل آمدني)
- ربيٽ (چوٽ جي رقم) ان آمدنيءَ کي چئبو آهي جنهن تي ٽئڪس نہ ورتو ويندو آهي.
- ٽئڪس ڀريندڙ (Assesses) اهو شخص آهي جنهن تي آمدني ٽئڪس قانون تحت ڪانہ کا ٽئڪس لڳندي هجي.
- اي ٽي ايم (Auto Teller Machine) هڪ برقي ذريعو (Device) آهي جنهن ذريعي کاتيدار رقم ڪيرائي سگهي ٿو، بچيل رقم معلوم ڪري سگهي ٿو ۽ هڪ کاتي مان ٻئي کاتي ۾ رقم منتقل ڪري سگهي ٿو.
- ڪريڊٽ ڪارڊ بئنڪ طرفان جاري ٿيل پلاسٽڪ جو ڪارڊ هوندو آهي جنهن وسيلي ڪارڊ رکندڙ شخص مقرر رقم تائين جي خريداري نقد رقم بدران ڪارڊ ذريعي ڪري سگهي ٿو.

باب 5

گهڻ رقمون

آلجبرا جي مضمون جو پايو وجهندڙ مسلمان رياضيدان الخوارزمي (780-850) جي وقت ۾ ٿيو آهي. هن کي جديد آلجبرا جو پڻ أبو تصور ڪيو ويو آهي.

5.1 آلجبري اظهار

آلجبري اظهار ۾ ڪي بدلجندڙ ۽ مستقل مقدار آلجبري عملن جوڙ، ڪَٽ، ضرب، ونڊ، مول لهڻ ۽ سگهه لهڻ وسيلي پاڻ ۾ ڳنڍيل هوندا آهن. مثال طور هيٺ ڏنل رقمون آلجبرائي اظهار آهن:

(i) x (ii) -5 (iii) xyz

(iv) $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ (v) $\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{5}x+\frac{1}{4}$

آلجبري اظهارن جي اهڙن مختلف حصن کي جن کي جوڙ ۽ ڪٽ جون نشانيون پاڻ ۾ ملائن ٿيون، اظهار جون رقمون چئبو آهي.

مٿي ڏنل مثال (v) ۾ $\frac{1}{2}x^3$، $-\frac{1}{3}x^2$، $-\frac{1}{5}x$ ۽ $\frac{1}{4}$ ڏنل اظهار جون رقمون آهن.

آلجبري اظهارن جي استعمال سان مساواتون حل ڪرڻ ۽ فارمولا بيان ڪرڻ آسان ٿيندا آهن. پراڻو طريقو جنهن ۾ هر ڳالهه يا مسئلي کي بياني طريقي سان لکبو هو، اُن مان نه جان ڇٽي، وقت نه بچي ٿو ۽ سوچ جو مادو پڻ پيدا ٿئي ٿو.

5.1.1 مستقل مقدار، بدلجندڙ، حرفي مقدار ۽ عددي منين جي سڃاڻپ

(i) مستقل مقدار: اُها رقم جنهن جو ڪو مقرر عددي ملهه هجي اُن کي مستقل مقدار چئبو آهي. مثال طور اظهارن $2x$، $3x+9y-1$ ۽ $5x^2y-4xy^2+8$ ۾ ترتيب وار 2؛ 3، 9، 1-؛ 5، 4- ۽ 8 مستقل مقدار آهن.

(ii) متغير يا بدلجندڙ هڪ اهڙي علامت يا نشاني هوندي آهي، جيڪا ڪنهن غير خالي سيٽ جي هرهڪ رڪن کي ظاهر ڪرڻ لاءِ استعمال ٿيندي آهي. بدلجندڙ جو ملهه معلوم نه هوندو آهي. مٿي ڏنل مثالن ۾ x ۽ y بدلجندڙ آهن. بدلجندڙن کي انگريزي الفابيٽ جي اکرن x، y، z وغيره سان ظاهر ڪبو آهي.

(iii) حرفي اکر: اُهي اکر جيڪي ڪنهن مستقل مقدار يا بدلجندڙ لاءِ استعمال ٿين، تن کي حرفي اکر (Literal) چئبو آهي.

مثال طور: $ax+by+c$ ۾ a، b ۽ c اهڙا حرفي اکر آهن جيڪي مستقل مقدارن کي ظاهر ڪن ٿا، جڏهن ته x ۽ y حرفي اکر بدلجندڙن کي ظاهر ڪن ٿا. ياد رهي ته 2 حرفي اکر نه آهي، پر عدد آهي. ساڳيءَ طرح $2x-5y+p$ ۾ x، y ۽ p حرفي اکر آهن.

(iv) عددي سرا يا مُنڍيا: هي اُهو مستقل مقدار آهي، جيڪو ڪنهن رقم ۾ موجود بدلجندڙ جو ضربيندڙ آهي.

5.2 گھڻ رقمي اظهار

5.2.1 گھڻ رقمون ۽ سندن درجن ۽ عددي سرن جي وصف

(i) گھڻ رقمي اظهار: هڪ بدلجندڙ 'x' ۾ گھڻ رقمي اظهار هيٺين ريت لکبو آهي:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

جتي n هڪ واڌو سچو عدد يا ٻڙي آهي ۽ سمورا عددي سرا a_1، a_2، a_3، ...، a_n حقيقي عدد آهن.

گھڻ رقمي اظهار ٻن يا وڌيڪ بدلجندڙن ۾ به ٿيندا آهن.

مثال: (i) 1 (ii) 0 (iii) $2y - \frac{1}{2}$

(iv) $x^2 + 2x - 3$ (v) $\sqrt{3}\,x^2y + 1$

اِهي سڀ گھڻ رقمون آهن پر هيٺ ڏنل آلجبري اظهار تہ آهن مگر گھڻ رقمون نہ آهن. (چو؟)

(vi) $\frac{3}{x}$ (vii) $6\sqrt{x - y}$ (viii) $2x^{2/3} + 5x^{5/7}$ (ix) $\frac{1}{x^2}$

(ii) گھڻ رقميءَ جو درجو: مٿي ڏيکاريل $P(x)$ ۾ جيڪڏهن $a_n \neq 0$ تہ گھڻ رقميءَ جو درجو n چئبو.

جيڪڏهن $n = 0$ ۽ $a_0 \neq 0$ تہ $P(x) = a_0$. ان جو مطلب تہ اِها گھڻ رقمي هڪ مستقل مقدار آهي ۽ اُن جو درجو ٻڙي آهي.

جيڪڏهن $n = 0$ ۽ $a_0 = 0$ تہ $P(x) = 0$. اها بہ هڪ گھڻ رقمي تہ آهي پر اِن کي ڪوبہ مخصوص درجو نہ ٿو ڏئي سگھجي (چو؟).

(iii) گھڻ رقميءَ جا عددي منڍيا

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

هڪ بدلجندڙ ۾ n درجن واري گھڻ رقمي آهي.

هتي a_0، a_1، a_2، ...، a_{n-1}، a_n حقيقي عدد آهن، انهن کي گھڻ رقميءَ جا مُنڍيا ڪوٺبو آهي.

مثال طور: گھڻ رقمي $2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 8x + 5$ ۾ 2، -3، 7، -8 ۽ 5 عددي مُنڍيا آهن.

نوٽ: مستقل مقدار 5 بہ عددي منيو آهي، چو تہ $(5 = 5x^0)$ اهو بہ x^0 جو ضربيندڙ آهي.

5.2.2 هڪ، ٻن ۽ وڌيڪ بدلجندڙ وارين گھڻ رقمن جي سڃاڻپ

متغيرن يا بدلجندڙن جي تعداد جي لحاظ کان سڃاڻپ هيٺين مثالن وسيلي ڪجي ٿي.

(i) $4x, 2x^2 + 9, 5a^2 + 6a - 1$ ۽ $y^3 - 3y^2 + y + 7$

هڪ بدلجندڙ واريون گھڻ رقمون آهن.

(ii) $3xy, 2x^2 - 3y + 2, -a^3 + 2b^3$ ۽ $p^4 + 4p^2q - 2pq^2 + q^4$

ٻن بدلجندڙن واريون گھڻ رقمون آهن.

(iii) $x^2yz + xy^2z + xyz^2 + 5$ ۽ $xyz + xy + yz + zx$

ٽن بدلجندڙن واريون گھڻ رقمون آهن.

5.2.3 مختلف درجن وارين گھڻ رقمن جي سڃاڻپ

ڪنهن بہ گھڻ رقميءَ ۾ موجود رقمن ۾ بدلجندڙ جي وڏي کان وڏي سگھہ کي، اُن گھڻ رقميءَ جو درجو چئبو آهي. هتي اسان گھڻ رقمن کي سندن درجن جي حوالي سان سڃاڻينداسين.

(i) هڪ رقمي **(Linear Polynomial)**: اُها گھڻ رقمي آهي جنهن جو درجو هڪ ٽيندو آهي. مثال طور: $2x+3y$، $5x$، $\frac{x}{4} + 4$ ۽ $5x-9y-z$ وغيره مان هر هڪ رقمي يا هڪ درجي گھڻ رقمي آهي.

(ii) ٻہ درجي گھڻ رقمي **(Quadratic Polynomial)**: اُها گھڻ رقمي آهي جنهن جو درجو ٻہ ٽيندو آهي. مثال طور: xy، $\frac{1}{3}y^2$، $2xy + \sqrt{3}$، p^2+q^2+r وغيره مان هر هڪ ٻہ رقمي يا ٻہ درجي گھڻ رقمي آهي.

نوٽ: xy هڪ اهڙي ٻہ رقمي آهي، جنهن ۾ غير ٻڙي واري صرف هڪ رقم آهي، تنهن ڪري اُن جو درجو ٻنهي بدلجندڙ x ۽ y جي سگھہ نمائن جي جوڙ برابر ٽيندو يعني $1 + 1 = 2$

(iii) ٽہ رقمي **(Cubic Polynomial)**: اُها گھڻ رقمي آهي جنهن جو درجو ٽي ٽيندو آهي مثال طور: x^2y، $xyz + 3x + 1$، $5pq^2 + 2p^2 + 5q^2$ ۽ $x^3 + y^3$ وغيره مان هرهڪ ٽہ رقمي يا ٽہ درجي گھڻ رقمي آهي.

(iv) چار رقمي **(Biquadratic Polynomial)**: اُها گھڻ رقمي آهي جنهن جو درجو 4 ٽيندو آهي.

مثال طور: $2x^4$، $x^3y - xy^3$، $x^4 + x^3y - 5xy^3 - y^4$ ۽ $p^2qr + pq + qr + pr + 3$ وغيره مان هرهڪ چار درجي گھڻ رقمي آهي.

مشق 5.1

1. هيٺين آلجبري اظهارن مان مستقل مقدار، بدلجندڙ ۽ حرفي اکر لکو.

(i) $3x + 1$ (ii) 0 (iii) $2a^2 + \frac{1}{3}b - 3$ (iv) $3l - 2m$

(v) $a + b^2 - 2c + 4$ (vi) $px + qy + r$ (vii) $-5x + 9y - 4$ (viii) $3^2p - 2^2q$

(ix) $y^2 - y - 1$ (x) $\sqrt{3}\,a - 9ab + \sqrt{5}$ (xi) $7x^2 - 2x + 3$ (xii) -8

2. هيٺين آلجبرائي اظهارن مان ڪهڙيون گهڻ رقمون آهن؟

(i) -1 (ii) $\frac{3}{y}$ (iii) $\frac{1}{x} - x$ (iv) $\sqrt{5}\,x + y$

(v) $5xy^3$ (vi) $2 - x$ (vii) $\frac{\sqrt{1}}{3}$ (viii) $\frac{1}{x^2 + 3}$

(ix) $x^2 + 3x - 1$ (x) $3^5 + \frac{4}{x}$ (xi) $ax^2 + bx + c$ (xii) $2a^2 + 3a + 1$

3. هيٺين گهڻ رقمن جو درجو ٻڌايو.

(i) 5^3 (ii) x (iii) $x + y^2$ (iv) $x^2y^2 + y^2$

(v) $x^3y^2z^2 + 1$ (vi) $-\frac{1}{4} + 3x + 5$ (vii) $x^4y + y^2 + y^3$ (viii) 3^2xyz

(ix) $x^6 + x^2y^3 + xy^4$ (x) $-x^3 + 8xyz^2$ (xi) $\frac{2}{13}$ (xii) $4^2x^45^2y^4$

4. هيٺين گهڻ رقمن جا عددي سرا لکو.

(i) 3 (ii) $\sqrt{4}\,xy$ (iii) $-x$ (iv) $x^2yz + 1$

(v) $5x^2 + 9y + z$ (vi) $\sqrt{2}\,x^3 - \sqrt{3}\,y^4$ (vii) $-2xyz$ (viii) $-\frac{3}{4}x^2$

5. هيٺين گهڻ رقمن ۾ موجود بدلجندڙن جو تعداد لکو.

(i) $3x + 2y$ (ii) $5x^2 - 4y - 3z$ (iii) $x^2 - y^3 + 1$ (iv) $2x^2y$

(v) $xy + 3$ (vi) $3x^7$ (vii) 25 (viii) $6x^3y^4z^2$

6. هيٺين گهڻ رقمن جي سڃاڻپ ڪريو ته ڪهڙيون هڪ رقمي، ٻه رقمي، ٽه رقمي يا چار رقمي گهڻ رقمون آهن.

(i) $x+2y$	(ii) $3x-5$	(iii) $2xy+\frac{y}{5}$	(iv) y^2+y-3
(v) x^3+xy+5	(vi) $x^4-2x^3+\frac{1}{2}$	(vii) $x^3+x^2+\sqrt{4}$	(viii) $5x^4$
(ix) $-9xy^2$	(x) $x^2+2x^2y^2+y^2$	(xi) x^2-x	(xii) $3xy^2z$

5.3 گهڻ رقمن تي عمل

5.3.1 گهڻ رقمن جو جوڙ، ڪٽ ۽ ضرب

اسان اڳ ۾ ئي گهڻ رقمن تي مٿيان عمل ڪرڻ سکي آيا آهيون.

(i) گهڻ رقمن جو جوڙ

گهڻ رقمي اظهارن جي جوڙ ۾ سنگت واري خاصيت، مٽاسٽا واري خاصيت ۽ ضرب جي جوڙ تي ورهائجڻ واري خاصيت جو استعمال ٿيندو آهي. جوڙ ڪرڻ جا ٻه طريقا آهن. سڌو يا اُفقي طريقو ۽ عمودي طريقو. انهن جي وضاحت مثالن سان ڪجي ٿي.

مثال 1. $2x+3y-4z$ ۽ $5z+6x-3y$ کي سڌي يعني اُفقي طريقي سان جوڙ ڪريو.

حل:

$$\text{جوڙ اُپت} = (2x+3y-4z)+(5z+6x-3y)$$
$$= 2x+3y-4z+5z+6x-3y$$
$$= 2x+6x+3y-3y-4z+5z$$
$$= 8x+z \quad \text{گهربل جوڙ}$$

مثال 2. $a^2-ab+2bc+3c^2$، $2ab+b^2-3bc-4c^2$ ۽ $ab-4bc+c^2-a^2$ کي سڌي يعني اُفقي طريقي ۽ عمودي طريقي سان جوڙ ڪريو.

حل:

سڌو يعني اُفقي طريقو

$$\text{جوڙ اُپت} = (a^2-ab+2bc+3c^2)+$$
$$(2ab+b^2-3bc-4c^2)+(ab-4bc+c^2-a^2)$$
$$=a^2-ab+2bc+3c^2+2ab+b^2-3bc$$
$$-4c^2+ab-4bc+c^2-a^2$$
$$=a^2-a^2-ab+2ab+ab+2bc-3bc$$
$$-4bc+b^2+3c^2-4c^2+c^2$$
$$=2ab-5bc+b^2$$

عمودي طريقو

$$\begin{array}{rrrrr} a^2 & -\ ab & +\ 2bc & +\ 3c^2 & +\ 0b^2 \\ 0a^2 & +\ 2ab & -\ 3bc & -\ 4c^2 & +\ b^2 \\ -a^2 & +\ ab & -\ 4bc & +\ c^2 & +\ 0b^2 \\ \hline +0 & +\ 2ab & -\ 5bc & +\ 0 & +\ b^2 \end{array}$$

تنهن ڪري جوڙ اُپت آهي $2ab-5bc+b^2$

(ii) گهڻ رقمن جي ڪَٽ

ڪَٽ جو عمل جوڙ جي عمل جي اُبتڙ آهي. اِن ڪري پهريائين جيڪا گهڻ رقمي ڪَٽ ڪرڻي هوندي آهي، اُن جي هر رقم جي نشاني تبديل ڪري سندس جمعي اُبتڙ لهبو.
ان طرح حاصل ٿيل گهڻ رقميءَ کي، ٻي گهڻ رقميءَ ۾ جوڙ ڪبو آهي.

مثال 1. $2a + 3b + 4$ مان $6 + 5a - 6b$ ڪَٽ ڪريو.

حل:

$$= (6 + 5a - 6b) - (2a + 3b + 4) \quad \text{ڪَٽ اُپت}$$
$$= 6 + 5a - 6b - 2a - 3b - 4$$
$$= 6 - 4 + 5a - 2a - 6b - 3b$$
$$= 2 + 3a - 9b$$

مثال 2. $5ab^3 + 6b^4 - a^4 + 7a^3b - 8a^2b^2 + 7$ مان $a^4 - 7a^3b + 6a^2b^2 + 5ab^3 + 6b^4$ ڪَٽ ڪريو. سڌي يعني اُفقي طريقي ۽ عمودي طريقي سان.

عمودي طريقو:

حل:

$$\begin{array}{rrrrrr}
5ab^3 & +6b^4 & -a^4 & +7a^3b & -8a^2b^2 & +7 \\
+5ab^3 & +6b^4 & +a^4 & -7a^3b & +6a^2b^2 & -0 \\
- & - & - & + & - & + \\
\hline
0 & +0 & -2a^4 & +14a^3b & -14a^2b^2 & +7 \\
\hline
\end{array}$$

سڌو يعني اُفقي طريقو:

$$(5ab^3 + 6b^4 - a^4 + 7a^3b - 8a^2b^2 + 7) - (a^4 - 7a^3b + 6a^2b^2 + 5ab^3 + 6b^4)$$
$$= 5ab^3 + 6b^4 - a^4 + 7a^3b - 8a^2b^2 + 7 - a^4 + 7a^3b - 6a^2b^2 - 5ab^3 - 6b^4$$
$$= 5ab^3 - 5ab^3 + 6b^4 - 6b^4 - a^4 - a^4 + 7a^3b + 7a^3b - 8a^2b^2 - 6a^2b^2 + 7$$
$$= -2a^4 + 14a^3b - 14a^2b^2 + 7 \quad \Rightarrow 14a^3b - 2a^4 - 14a^2b^2 + 7$$

مطلب ته گهربل تفاوت آهي: $14a^3b - 2a^4 - 14a^2b^2 + 7$

(iii) گهڻ رقمن جي ضرب

گهڻ رقمن جي ضرب لهڻ لاءِ، ضرب جي جوڙ ۽ ڪَٽ تي ورهائجي وڃڻ وارا قانون، متاسئا وارا قانون، سنگت وارا قانون، سگهن جا قاعدا ۽ نشانين جا قاعدا استعمال ٿيندا آهن.

مثال طور: $2x$ کي $3y$ سان ضرب ڪرڻي هجي ته: $2x \times 3y = 6xy$

مثال 1. $3a^2bc$ ۽ $4ab^3c^4$ جي ضرب أپت لهو.

حل:

سنگت وارو قانون: $(3a^2bc)\ (4ab^3c^4) = (3 \times 4)\ (a^2bc)\ (ab^3c^4)$

$= 12a^{2+1}\ b^{1+3}\ c^{1+4}$

سگهن وارو قانون: $= 12a^3b^4c^5$

مثال 2. $x^2 - 2x - 5$ کي $x + 3$ سان ضرب ڪريو.

حل:

عمودي طريقو

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x - 5 \\ x + 3 \\ \hline x^3 - 2x^2 - 5x \\ +3x^2 - 6x - 15 \\ \hline x^3 + x^2 - 11x - 15 \\ \hline \end{array}$$

ستو يعني أفقي طريقو

$(x^2 - 2x - 5)\ (x+3)$

$= x^2\ (x+3) - 2x(x+3) - 5\ (x+3)$

$= x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 6x - 5x - 15$

$= x^3 + x^2 - 11x - 15$

مطلب تہ گهربل ضرب أپت آهي: $x^3 + x^2 - 11x - 15$

5.3.2 ڪنهن گهڻ رقميءَ کي هڪ رقميءَ سان ونڊ ڪرڻ

ونڊ جو عمل ضرب جي عمل جي أبتڙ آهي. مثالن وسيلي وضاحت ڪجي ٿي.

مثال 1. $6x^2 + 8x - 14$ کي 2 سان ونڊ ڪريو.

حل: $(6x^2 + 8x - 14) \div 2 = \dfrac{(6x^2 + 8x - 14)}{2} = \dfrac{6x^2}{2} + \dfrac{8x}{2} - \dfrac{14}{2} = 3x^2 + 4x - 7$

مثال 2. k جي ڪهڙي ملهہ سان گهڻ رقمي $x^2 + 5x + k$ کي $x + 4$ سان پورو ونڊي سگهبو؟

حل: پورو ونڊڻ لاءِ پاڇي ٻڙي ٿيڻ گهرجي.

$$\begin{array}{r|l} x+4 & x^2 + 5x + k\ (x+1 \\ & \underline{\pm x^2 \pm 4x} \\ & x + k \\ & \underline{\pm x \pm 4} \\ \text{پاڇي} & k - 4 \end{array}$$

يعني $k - 4 = 0 \Rightarrow k = 4$

مطلب تہ

هتي $\dfrac{x^2 + 5x + 4}{x + 4} = x + 1$

ونڊٽي $x^2 + 5x + 4$ آهي

ونڊيندڙ $x + 4$ آهي

ونڊ أپت $x + 1$ آهي

پاڇي 0 آهي

مثال 3. $5x^2 - 16xy + 3y^2$ کي $x - 3y$ سان ونڊ ڪريو.

حل

$$\begin{array}{r} 5x - y \\ x - 3y\overline{)5x^2 - 16xy + 3y^2} \\ 5x^2 - 15xy \\ - \quad + \\ \hline -xy + 3y^2 \\ -xy + 3y^2 \\ + \quad - \\ \hline 0 \end{array}$$

پاچي = 0

مطلب تہ گھربل ونڊ اُپت آهي $5x - y$

نوٽ: جيڪڏهن پاچي ٻڙي بچي تہ چئبو تہ مليل گھڻ رقمي يعني ونڊٽي کي ونديندڙ پورو پورو ونڊي ٿو.

وضاحت:

ڏاڪو پهريون: ونڊٽي، جي پهرين رقم کي، ونديندڙ جي پهرين رقم سان ونڊ ڪريو: $\frac{5x^2}{x} = 5x$

ڏاڪو ٻيو: حاصل رقم سان ونديندڙ کي ضرب ڪريو:

$(5x)(x - 3y) = 5x^2 - 15xy$

ڏاڪو ٽيون: ان طرح حاصل رقم کي ونڊٽي مان ڪٽ ڪريو.

ڏاڪو چوٿون: جيڪا پاچي بچي اُن مان مٿي ڏنل طريقي سان ونڊ ڪندا رهو، جيسين پاچي، ونديندڙ کان ننڍي ٿئي.

مشق 5.2

1. جوڙ ڪريو.

(i) $4x + 6y + 5z,\ -3x - 9y$ ۽ $x + 3y - 4z$

(ii) $7x + 2y^3 - 4xy,\ 3x - 2xy^3 + 7xy$ ۽ $2xy - 5x + 6y^3$

(iii) $4x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 3,\ \ 2x - y^2 + 3x^2 - 4y + 3$ ۽ $-6x^2 - 2y^2 - 1$

(iv) $6ab - a^2 - b^2 - 7,\ 5a^2 - 7ab + 3b^2 + 9$ ۽ $-4b^2 - 3ab - 2a^2 - 3$

2. پهرين اظهار مان ٻيو اظهار ڪٽ ڪريو. (ڪابي پاسي کان شروع ڪريو)

(i) $2x - 3y - z$ مان $z - 4x - 6y$

(ii) $y^4 - 6y^2 - 3y^3 + 4y^5$ مان $6y^2 - 3y^5 + 2y^4 + 3y^3 + 8$

(iii) $7x - 8y + 4z - 5w$ مان $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 7y - 5z - 5w$

(iv) $5z^2 - 3yz + 2y^2$ مان $10y^2 - 2yz - 3z^2$

3. $p^2 + 3pq + q^2$ ۽ $2p^2 - pq + 5q^2$ جي جوڙ مان $6p^2 - 7pq + 4q$ ۽ $7p^2 - 2pq + 3q^2$ جو جوڙ ڪٽ ڪريو.

4. ٻن گھڻ رقمن جو جوڙ $3a^3 + 3a + 7b + 4ab$ آهي، جيڪڏهن اِنهن مان هڪ گھڻ رقمي $4ab - 3a^3$ آهي تہ ٻي گھڻ رقمي لھو.

5. سادي صورت ۾ آڻيو:

(i) $6(2x+y-7xy)-3(5x-2y+5xy)$ (ii) $4(2x-3y+xy)-5(3x-2y-xy)$

(iii) $x(x^2+2xy+y^2)+4y(x^2+3xy+9y^2)$ (iv) $x^2(x^2+xy+y^2)-y^2(x^2-xy-y^2)$

6. ضرب اُپت لهو:

(i) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y)$ (ii) $(x^3-xy+y^3)(x^3+xy+y^3)$

(iii) $(a^2-b^2)(a^2-2ab+b^2)$ (iv) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

7. ونڊ ڪريو:

(i) $(3x^3-6x^2+12x)\div 3x$ (ii) $(4x^4-16x^3+8x^2)\div 2x^2$

(iii) $(x^2+x-6)\div(x+3)$ (iv) $(9x^2-6xy-8y^2)\div(3x+2y)$

(v) $(a^3+b^3)\div(a+b)$ (vi) $(a^6-b^6)\div(a^2-b^2)$

8. ٻن گهڻ رقمين جي ضرب اُپت $x^4-3x^2y^2+y^4$ آهي، انهن مان هڪ گهڻ رقمي x^2-xy-y^2 آهي ته ٻي لهو.

9. $2a^4+3a^3-a^2-5$ مان ڇا ڪَٽ ڪجي، جو باقي بچيل گهڻ رقمي کي $a-2$ سان پورو ونڊي سگهجي؟

10. t جو اهو ملهه لهو جنهن سان $2x^4+3x^3-4x^2+14x+2t$ کي x^2-2x+3 سان پورو پورو ونڊي سگهجي.

جائزي جي مشق 5

1. هيٺين سوالن جا جواب ڏيو:

(i) ته رقميءَ جو مطلب ڇا آهي؟ هڪ متغير يعني بدلجندڙ واري ته رقميءَ جو هڪ مثال لکو.

(ii) بدلجندڙ جي وصف بيان ڪريو ۽ ڪجهه مثال ڏيو.

(iii) گهڻ رقمي $a+2b+3c$ ۾ ڪهڙا حرفي مقدار (Literal) استعمال ٿيل آهن؟

(iv) $x^3+2x^2+3x^2$ ۾ گهٽيون رقمون آهن؟

(v) گهڻ رقمي جي درجي مان ڇا مراد آهي؟ مثال ڏيو.

2. صحيح جوابن تي (✓) نشان لڳايو يا خال ڀريو.

(i) ax^2+bx+c ۾ بدلجندڙن جو تعداد آهي: ____________

(a) ٻڙي (b) ٽي (c) ٻه (d) هڪ

(ii) $x - 1$ هڪ _______ گھڻ رقمي آهي.

(a) ٻہ درجي (b) چار درجي (c) هڪ درجي (d) ٽہ درجي

(iii) چار درجي گھڻ رقمي _______ آهي.

(a) xy (b) $2a^4$ (c) $x + y$ (d) $a + x + 3$

(iv) $3x^2 + 4xy^4 + y^6 + 9$ جو درجو _______ آهي.

(a) 9 (b) 4 (c) 5 (d) 6

(v) ڪنهن گھڻ رقمي ۾ موجود بدلجندڙ يا بدلجندڙن جي ضربيندڙ عدد کي _______ چئبو آهي

(a) بدلجندڙ (b) عددي منيو (c) سگھ نما (d) ٽنهي مان ڪوبہ نہ

(vi) هيٺين مان _______ ٽہ درجي گھڻ رقمي آهي.

(a) $xbc + a^2$ (b) $a^2 + b^2 + c^2$ (c) $x^3 + \frac{1}{x^3}$ (d) 3

(vii) هيٺين آلجبري اظهارن مان ڪهڙو اظهار گھڻ رقمي نہ آهي؟

(a) $x + \frac{1}{x^{-2}}$ (b) -7 (c) $x^3 - y^3$ (d) $x^{-3} + 1$

(viii) ٻہ (Quadratic) رقميءَ جو درجو _______ ٿئي ٿو.

(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 0

(ix) $px^2 + qx + r$ ۾ حرفي مقدار آهن:

(a) p, q, r (b) x (c) x^2, x (d) p, q, r, x

(x) جيڪڏهن هڪ گھڻ رقمي، ڪنهن ٻي گھڻ رقمي سان پورو پورو ونڊجي وڃي تہ پاڇي _______ ٿيندي.

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) ٽنهي مان ڪوبہ نہ

3. هيٺين جو ملھ لھو:

(i) $x - 5y$ جو، جڏهن $x = 2a + 3b,\ y = a - 5b$

(ii) $(x + y)(x^3 - 2x^2y + xy^2)$ جو، جڏهن $x = -2,\ y = -3$

(iii) $\frac{a^2+b^2}{a^2+2ab+b^2}$ جو، جڏهن $a = 0,\ b = 5$

(iv) $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+1+\frac{1}{a^2}\right)$ جو، جڏهن $a = 3$

(v) $(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)\ (a + b + c)$ جو، جڏهن $a = -2,\ b = 0,\ c = 2$

4. سادي صورت ۾ آڻيو.

(i) $\dfrac{x+y}{3} - \dfrac{y+z}{2} + \dfrac{4x-z}{5}$ (ii) $(\sqrt{x} + y)(\sqrt{x} - y)$

(iii) $(x+y+2)(x-y-2)$ (iv) $(a^3 - 2a + 4) \div (a+2)$

5. k جي ڪهڙي ملهه لاءِ $k^3 - 5k^2 - 14$ کي $k - 2$ پورو پورو ونڊيندو؟

خلاصو

- گهڻ رقمي اظهار اهڙا آلجبري اظهار آهن، جن ۾ هڪ کان وڌيڪ رقمون هونديون آهن ۽ بدلجندڙن جي سگهه غير ڪاٽو ٿئي ٿي.
- اهڙا رقم يا نشاني جنهن جو ملهه (عام طرح) تبديل نہ ٿئي، ان کي مستقل مقدار چئبو آهي.
- ڪن بدلجندڙن ۽ مستقل مقدارن کي بنيادي عملن +، −، ×، ÷ ۽ مول لهڻ يا سگهه لهڻ وسيلي پاڻ ۾ ملائڻ سان حاصل ٿيندڙ رقمن کي آلجبري اظهار چئبو آهي.
- بدلجندڙ هڪ اهڙي علامت يا اکر آهي، جنهن جو ملهه نامعلوم ۽ تبديل ٿيندڙ آهي.
- آلجبري اظهار ۾ موجود مستقل مقدارن ۽ بدلجندڙن لاءِ استعمال ڪيل اکرن کي (Literal) 'حرفي مقدار' چئبو آهي. مثال طور $ax + by + 3$ ۾ x ۽ y بدلجندڙن لاءِ، a ۽ b مستقل مقدارن لاءِ (Literal) حرفي مقدار آهن.
- گهڻ رقمي اظهار ۾ موجود رقمن ۾ بدلجندڙ جي وڏي کان وڏي سگهه کي اُن گهڻ رقميءَ جو درجو (Degree) چئبو آهي.
- جنهن مستقل مقدار سان ڪنهن بدلجندڙ کي ضرب ڏنل هجي تہ اُن کي بدلجندڙ جو عددي مُنيو يا سِرو چئبو آهي.
- گهڻ رقمي اظهار جي هر رقم ۾ موجود بدلجندڙ کي هڪ عددي مُنيو ٿيندو آهي. انهن سمورن عددي منين کي گهڻ رقمي اظهار جا منيا چئبو آهي.
- ليڪي گهڻ رقمي اظهار جو درجو 'هڪ' ٿئي ٿو.
- مستقل جو درجو 'ٻڙي' ٿئي ٿو.
- سمورا عددي مُنيا ٻڙيءَ جي برابر هجن تہ گهڻ رقمي اظهار پاڻ بہ 'ٻڙي' جي برابر ٿي ويندو. اهڙي گهڻ رقمي جو ڪوبہ درجو نہ ٿيندو آهي.

باب
6
جزالھڻ ۽ ھمزاد مساواتون

6.1 بنيادي آلجبرائي فارمولا

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(iii) $a^2 - b^2 = (a-b)(c+b)$

اسان ھيٺين ڪلاسن ۾ مٿين فارمولا بابت ڄاڻ حاصل ڪري چڪا آھيون. ھتي اسان انھن کي استعمال ڪرڻ سکنداسين:

مثال 1. ملھ لھو: (i) $(102)^2$ (ii) $(98)^2$ (iii) $(102)(98)$

حل:

(i) $(102)^2 = (100+2)^2$

$= (100)^2 + 2(100)(2) + (2)^2,$

$\because [(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2]$

$= 10000 + 400 + 4 = 10404$

(ii) $(98)^2 = (100-2)^2$

$= (100)^2 - 2(100)(2) + (2)^2,$

$\because [(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2]$

$= 10000 - 400 + 4 = 9604$

(iii) $(102)(98) = (100+2)(100-2)$

$\because [(a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$

مٿيون فارمولو استعمال ڪرڻ سان

$= (100)^2 - (2)^2,$

$= 10000 - 4 = 9996$

عملي ڪم: 203×197 جو ملھ لھو.

حل: $(200 + \text{\_\_\_\_\_}) \times (\text{\_\_\_\_\_} - 3)$

فارمولو استعمال ڪريو $(a+b)(a-b) = (\quad)$

$= (200)^2 - (\quad)^2$

$= 40,000 - \text{\_\_\_\_\_\_} = \text{\_\_\_\_\_\_}$

مثال 2. ملھ لھو: (i) $(1.02)^2$ (ii) $(0.98)^2$ (iii) $(1.02)(0.98)$

حل:

(i) $(1.02)^2 = (1 + .02)^2$

$= (1)^2 + 2(1)(0.02) + (0.02)^2,$

$[\because (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2]$

$= 1 + 0.04 + 0.0004 = 1.0404$

(ii) $(0.98)^2 = (1 - 0.02)^2$

$= (1)^2 - 2(1)(0.02) + (0.02)^2,$

$[\because (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2]$

$= 1 - 0.04 + 0.0004 = 0.9604$

(iii) $(1.02)(0.98) = (1 + 0.02)(1 - 0.02) = (1)^2 - (0.02)^2,$

$[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$

$= 1 - 0.0004 = 0.9996$

مثال 3. $x^2+\frac{1}{x^2}$ ۽ $x^4+\frac{1}{x^4}$ جا ملھ لھو جڏھن (i) $x+\frac{1}{x}=6$ (ii) $x-\frac{1}{x}=2$

حل:

(i) $x+\frac{1}{x}=6\ldots$ (مليل)

$\Rightarrow (x+\frac{1}{x})^2=(6)^2$ (چورس ڪرڻ سان)

$\Rightarrow x^2+2(x)(\frac{1}{x})+\frac{1}{x^2}=36$

$\Rightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=36$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=36-2$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=34$

$\Rightarrow (x^2+\frac{1}{x^2})^2=(34)^2$

(چورس ڪرڻ سان)

$\Rightarrow x^4+2(x^2)(\frac{1}{x^2})+\frac{1}{x^4}=1156$

$\Rightarrow x^4+\frac{1}{x^4}=1156-2=1154$

(ii) $x-\frac{1}{x}=2\ldots$ (مليل)

(چورس ڪرڻ سان)

$\Rightarrow (x-\frac{1}{x})^2=(2)^2$

$\Rightarrow x^2-2(x)(\frac{1}{x})+\frac{1}{x^2}=4$

$\Rightarrow x^2-2+\frac{1}{x^2}=4$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=4+2$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=6$

(چورس ڪرڻ سان)

$\Rightarrow (x^2+\frac{1}{x^2})^2=(6)^2$

$\Rightarrow x^4+2(x^2)(\frac{1}{x^2})+\frac{1}{x^4}=36$

$\Rightarrow x^4+\frac{1}{x^4}=36-2=34$

مثال 4. تصديق ڪريو تہ $x^4+\frac{1}{x^4}=(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2$

ثابتي: ساڄو پاسو $(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2$

$=(x^2)^2+2(x^2)(\frac{1}{x^2})+(\frac{1}{x^2})^2-2$ (چورس ڇڏائڻ سان)

$=x^4+2+\frac{1}{x^4}-2=x^4+\frac{1}{x^4}=$ کابو پاسو

مشق 6.1

1. مناسب فارمولا جي استعمال سان هيٺين جو ملھ لھو:

(i) $(105)^2$ (ii) $(96)^2$ (iii) $(57)^2$ (iv) $(52)^2$

(v) 104×96 (vi) 47×53 (vii) 107×93 (viii) 89×111

2. مناسب فارمولا جي استعمال سان هيٺين جو ملهه لهو:

(i) $(1.03)^2$ (ii) $(0.99)^2$ (iii) $(1.05)^2$
(iv) $(0.91)^2$ (v) 1.03×0.97 (vi) 5.02×4.98

3. $x^2+\frac{1}{x^2}$ ۽ $x^4+\frac{1}{x^4}$ جو ملهه لهو جڏهن:

(i) $x+\frac{1}{x}=5$ (ii) $x+\frac{1}{x}=-4$ (iii) $x+\frac{1}{x}=7$

4. $x^2+\frac{1}{x^2}$ ۽ $x^4+\frac{1}{x^4}$ جو ملهه لهو جڏهن:

(i) $x-\frac{1}{x}=3$ (ii) $x-\frac{1}{x}=0.2$ (iii) $x-\frac{1}{x}=-6$

5. تصديق ڪريو:

(i) $x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$ (ii) $x^2+\frac{1}{x^2}=(x-\frac{1}{x})^2+2$

6.2 جزا لهڻ (Factorization)

ڪوبہ ڏنل اظهار جيڪڏهن ٻن يا وڌيڪ ننڍن اظهارن جي ضرب اُپت برابر آهي تہ انهن ننڍن اظهارن کي ڏنل اظهار جا جزا چئبو آهي.

مثال: $3x^2+6x=3x(x+2)$ جو مطلب آهي تہ 3، x ۽ $x+2$ جزا آهن $3x^2+6x$ جا. ڪنهن بہ ڏنل اظهار جي جزن لهڻ جي عمل کي 'جزا لهڻ' چئبو آهي ۽ ان لاءِ انهيءَ اظهار کي ٻن يا وڌيڪ اظهارن جي ضرب اُپت طور لکبو آهي.

6.2.1 $ka+kb+kc$ جي صورت وارن آلجبرائي اظهارن جا جزا:

جيڪڏهن k هڪ حقيقي عدد آهي ۽ $k\neq0$ تہ

$$\boxed{ka+kb+kc=k(a+b+c)}$$

هتي k ۽ $(a+b+c)$ ڏنل اظهار $(ka+kb+kc)$ جا بہ جزا آهن.

مثال 1. مليل اظهارن جا جزا لهو: (i) $5x+10y+20z$ (ii) $6x^2+12xy-30xy^2$

حل:

(i) $5x+10y+20z$
$=5(x+2y+4z)$, (جو تہ 5 عام جزو آهي)

(ii) $6x^2+12xy-30xy^2$
$=6x(x+2y-5y^2)$, (جو تہ $6x$ عام جزو آهي)

6.2.2 $ac + ad + bc + bd$ جي صورت وارن آلجبرائي اظھارن جا جزا معلوم ڪرڻ

اسان ڏيڪاريندا سين تہ $\boxed{ac + ad + bc + bd = (a + b)(c + d)}$

ثابتي:

ساڄو پاسو $= (a + b)(c + d)$
$= a(c + d) + b(c + d)$
$= ac + ad + bc + bd =$ کاٻو پاسو

کاٻو پاسو $= \underline{ac + ad} + \underline{bc + bd}$
$= a(c + d) + b(c + d)$
$= (a + b)(c + d)$ ساڄو پاسو

مثال 2. مليل اظھارن جا جزا لھو: (i) $5x + xz + 5z + z^2$ (ii) $3x^2y + 6xy^2 - 2xz - 4yz$

حل:

(i) $\underline{5x + xz} + \underline{5z + z^2}$
$= x(5 + z) + z(5 + z)$
$= (5 + z)(x + z)$

(ii) $\underline{3x^2y + 6xy^2} - \underline{2xz - 4yz}$
$= 3xy(x + 2y) - 2z(x + 2y)$
$= (x + 2y)(3xy - 2z)$

6.2.3 $a^2 \pm 2ab + b^2$ جي صورت وارن آلجبرائي اظھارن جا جزا معلوم ڪرڻ

(i) اسان کي ڏيکارڻو آھي تہ

ثابتي: $\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$

کاٻو پاسو $= a^2 + 2ab + b^2$
$= a^2 + ab + ab + b^2$
$= a(a + b) + b(a + b)$
$= (a + b)(a + b)$
$= (a + b)^2 =$ ساڄو پاسو

(ii) اسان کي ڏيکارڻو آھي تہ

ثابتي: $\boxed{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$

کاٻو پاسو $= a^2 - 2ab + b^2$
$= a^2 - ab - ab + b^2$
$= a(a - b) - b(a - b)$
$= (a - b)(a - b) = (a - b)^2$
$=$ ساڄو پاسو

مثال 1. $x^2 + 6xy + 9y^2$ جا جزا لھو.

حل: مليل اظھار $= x^2 + 6xy + 9y^2$
$= (x)^2 + 2(x)(3y) + (3y)^2$
$= (x + 3y)^2$ (فارمولا وسيلي)

مثال 2. $25x^2 - 10xy + y^2$ جا جزا لھو.

حل: مليل اظھار $= 25x^2 - 10xy + y^2$
$= (5x)^2 - 2(5x)(y) + (y)^2$
$= (5x - y)^2$

6.2.4 $a^2 - b^2$ جي صورت وارن آلجبرائي اظھارن جا جزا معلوم ڪرڻ

اسان کي اھو ڏيکارڻو آھي تہ

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

ثابتي: ساڄو پاسو $= (a + b)(a - b)$
$= a(a - b) + b(a - b)$
$= a^2 - ab + ab - b^2$
$= a^2 - b^2 =$ کاٻو پاسو

مثال 1. $4a^2 - 9b^2$ جا جزا لھو.

حل: مليل اظھار $= 4a^2 - 9b^2$
$= (2a)^2 - (3b)^2$
$= (2a + 3b)(2a - 3b)$

مثال 2. مليل اظهارن جا جزا لهو: **(ii)** $8a^2 - 50b^2$ **(i)** $25x^2 - 36y^2$

حل: مليل اظهار = **(i)** $25x^2 - 36y^2$

$= (5x)^2 - (6y)^2$

$= (5x + 6y)(5x - 6y)$

حل: مليل اظهار = **(ii)** $8a^2 - 50b^2$

$= 2(4a^2 - 25b^2)$

$= 2\{(2a)^2 - (5b)^2\}$

$= 2(2a + 5b)(2a - 5b)$

6.2.5 $a^2 \pm 2ab + b^2 - c^2$ جي صورت وارن اظهارن جا جزا معلوم ڪرڻ

هن صورت ۾ اسان پهريائين فارمولا $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$ استعمال ڪنداسين ۽ پوءِ فارمولا $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ جو استعمال ڪنداسين.

مثال 1. $x^2 + 10x + 25 - y^2$ جا جزا لهو.

حل: مليل اظهار = $x^2 + 10x + 25 - y^2 = [(x)^2 + 2(x)(5) + (5)^2] - y^2$

$= (x + 5)^2 - y^2 = (x + 5 + y)(x + 5 - y)$

ساڳيءَ طرح اسان $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$ جي صورت وارن اظهار جا جزا لهڻ لاءِ فارمولا $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ ۽ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ جو استعمال ڪنداسين.

مثال 2. $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$ جا جزا لهو:

حل: مليل اظهار = $x^2 - 2xy + y^2 - z^2 = [(x)^2 - 2(x)(y) + (y)^2] - z^2$

$= (x - y)^2 - z^2 = (x - y + z)(x - y - z)$

مشق 6.2

A. هيٺين اظهارن جا جزا لهو:

(1) $4x + 8z$
(2) $5x + 10y + 30z$
(3) $2x - 4xy + 8xz$
(4) $2a^2 + 10a^3 - 20a^4$
(5) $3a^2b + 7ab^2 - 8a^2b^2$
(6) $6a^2bc + 12ab^2c - 36abc^2$
(7) $5x + 10y + 3xz + 6yz$
(8) $abc - abd + cx - xd$
(9) $x^2 + 5x + 6xy + 30y$
(10) $7xy + 14yz - 5ax - 10az$
(11) $3x^2 + 6y^2 + 6x^2z + 12y^2z$
(12) $x^2 - 7xy - xz + 7yz$

B. هيٺين اظهارن جا جزا لهو:

(1) $a^2 + 10a + 25$
(2) $x^2 + 12xy + 36y^2$

(3) $4x^2+12xy+9y^2$
(4) $16a^2+40ab+25b^2$
(5) b^2+c^2-2bc
(6) $49p^2-14p+1$
(7) $81c^2-36cd+4d^2$
(8) $144x^4-72x^2y^2+9y^4$
(9) $3a^2-6ab+3b^2$
(10) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{9}y^2$

C. هيٺين اظهارن جا جزا لهو:

(1) $81x^2-4y^2$
(2) $169a^2-100b^2$
(3) $3a^2-27b^4$
(4) $2p^2-18q^2$
(5) $5x^2-125y^2$
(6) $\frac{25}{x^2}-\frac{y^2}{16}$
(7) $\frac{x^2}{144}-y^2$
(8) $\frac{36}{25}l^2-\frac{49}{4}d^2$
(9) $c^2-(a-b)^2$
(10) $(x+y)^2-z^2$
(11) $(a+b)^2-(p+q)^2$
(12) $144-y^4$
(13) $32a^2-50b^2$
(14) x^4-y^4
(15) $(2a+b)-9c^2$

D. هيٺين اظهارن جا جزا لهو:

(1) $x^2+2xy+y^2-z^2$
(2) $a^2+b^2-2ab-c^2$
(3) $64a^2+48ab+9b^2-c^2$
(4) $4p^2-12pq+9q^2-49r^2$
(5) $x^4+2x^2y^2+y^4-25z^2$
(6) $\frac{x^2}{4}-xy+y^2-\frac{c^2}{36}$
(7) $2a^2+4ab+2b^2-2c^2$
(8) $81c^2-16p^2+18cd+d^2$
(9) $4x^2+12x+9-16y^2$
(10) $36-25a^2+70ab-49b^2$

6.3 آلجبري اظهارن جو استعمال

هاڻي اسين هيٺ ڏنل ڪن فارمولا جي استعمال سان ڪجهه مسئلا حل ڪنداسين.

6.3.1 ٻن رقمن جي جوڙ جي ڪعب لهڻ جو فارمولا معلوم ڪرڻ

ثابتي: کاٻو پاسو $=(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$=(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)$$
$$= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$$
$$= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$$
$$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 =$$ ساڄو پاسو

نوٽ: $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$
$\Rightarrow a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

مثال 1. $2x + 3$ جو ڪعب لھو.

حل:
$$(2x+3)^3 = (2x)^3 + 3\,(2x)^2\,(3) + 3\,(2x)\,(3)^2 + (3)^3$$
$$= 8x^3 + 3\,(4x^2)\,(3) + 6x\,(9) + 27$$
$$= 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$$

مثال 2. $x^3 + \frac{1}{x^3}$ جو ملھ لھو، جڏھن $x + \frac{1}{x} = 5$

حل: $x + \frac{1}{x} = 5$ (مليل)

طريقو پھريون: ڇاتل مان اڻ ڇاتل لھڻ

ٻنھي پاسن جو ڪعب لھڻ سان

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = (5)^3$$
$$x^3 + 3\,(x^2)\left(\frac{1}{x}\right) + 3\,(x)\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^3} = 125$$
$$\Rightarrow x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = 125$$
$$\Rightarrow x^3 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3} = 125$$
$$\Rightarrow x^3 + 3(5) + \frac{1}{x^3} = 125 \quad \left(\because x + \frac{1}{x} = 5\right)$$
$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 125 - 15 = 110.$$

اڻ ڇاتل: $x^3 + \frac{1}{x^3}$

طريقو ٻيو:

اسان کي خبر آھي تہ
$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$
$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3(x)\left(\frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$= 5^3 - 3(5)$$
$$= 125 - 15$$
$$= 110.$$

6.3.2 ٻن رقمن جي تفاوت جو ڪعب معلوم ڪرڻ

فارمولا: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

ثابتي: کاٻو پاسو $= (a-b)^3 = (a-b)\,(a-b)^2 = (a-b)\,(a^2 - 2ab + b^2)$

$= a\,(a^2 - 2ab + b^2) - b\,(a^2 - 2ab + b^2) = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 =$ ساڄو پاسو

مثال 1. $4x-1$ جو ڪعب لھو.

حل: مليل اظھار $= 4x-1$

ڪعب ڪرڻ سان: $(4x-1)^3$

$= (4x)^3 - 3(4x)^2(1) + 3(4x)(1)^2 - (1)^3$

$= 64x^3 - 3(16x^2) + 12x - 1$

$= 64x^3 - 48x^2 + 12x - 1$

مثال 2. 19 جو ڪعب فارمولا وسيلي لھو.

مليل عدد = 19

حل: ڪعب ڪرڻ سان: $(19)^3 = (20-1)^3$

$= (20)^3 - 3(20)^2(1) + 3(20)(1)^2 - (1)^3$

$= 8000 - 1200 + 60 - 1 = 6{,}859$

مثال 3. مليل اظھار $x^3 - \frac{1}{x^3}$ جو ملھ لھو جڏھن $x - \frac{1}{x} = 2$

حل: معلوم اظھار $x - \frac{1}{x} = 2$ (جاتل)

طريقو پھريون: جاتل مان اڻ جاتل لھڻ

ٻنھي پاسن جو ڪعب لھڻ سان: $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = (2)^3$

$\Rightarrow x^3 - 3(x^2)\left(\frac{1}{x}\right) + 3(x)\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x^3} = 8,$

$\Rightarrow x^3 - 3x - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x} = 8$

$\Rightarrow x^3 - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^3} = 8$

اڻ جاتل: $x^3 - \frac{1}{x^3}$

طريقو ٻيو:

اڻ جاتل کي جاتل وانگر لکڻ

فارمولا: $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

$\therefore\ x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x\frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right)$

$= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$

$= (2)^3 + 3(2) = 8 + 6 = 14$

$\Rightarrow\ x^3 - 3(2) - \frac{1}{x^3} = 8 \quad \left(\because x - \frac{1}{x} = 2\right)$

$\Rightarrow\ x^3 - 6 - \frac{1}{x^3} = 8$ يا $x^3 - \frac{1}{x^3} = 8 + 6 = 14$

مشق 6.3

1. ھيٺين اظھارن جو ڪعب لھو:

(i) $(2x+3)$ (ii) $5x-1$ (iii) $2x-3y$ (iv) $2a+5b$ (v) $x+7z$

(vi) $\frac{x}{2} - 1$ (vii) $5+3a$ (viii) $5 - \frac{a}{4}$ (ix) $5a-3b$ (x) $\frac{x}{3} + \frac{y}{5}$

2. هيٺين اظهارن مان هرهڪ جو فارمولا وسيلي ڪعب لهو:

(i) 18 (ii) 13 (iii) 105 (iv) 10.1 (v) 0.98 (vi) 2.25

3. $x^3 + \frac{1}{x^3}$ جو ملهه لهو، جڏهن:

(i) $x + \frac{1}{x} = 6$ (ii) $x + \frac{1}{x} = -5$

(iii) $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ (iv) $x + \frac{1}{x} = 10.1$

4. $x^3 - \frac{1}{x^3}$ جو ملهه لهو، جڏهن:

(i) $x - \frac{1}{x} = 5$ (ii) $x - \frac{1}{x} = -2$

(iii) $x - \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$ (iv) $x - \frac{1}{x} = 9.9$

6.4 هڪ ۽ ٻن بدلجندڙن وارين همزاد ليڪي مساواتن جي ڄاڻ

اسان کي خبر آهي ته ليڪي مساواتون هڪ درجي واريون ٿينديون آهن. انهن ۾ هڪ، ٻه يا گهڻا بدلجندڙ هوندا آهن.

مثال: $2x + 6 = 0$ هڪ بدلجندڙ 'x' ۾ ليڪي مساوات آهي.

$5x + 6y = 9$ ٻن بدلجندڙن x ۽ y ۾ ليڪي مساوات آهي.

هڪ بدلجندڙ ۾ ليڪي مساوات جو معياري نمونو آهي: $ax + b = 0$ جڏهن ته a ۽ b حقيقي عدد آهن ۽ $a \neq 0$

ٻن بدلجندڙن ۾ ليڪي مساوات جو معياري نمونو آهي: $ax + by + c = 0$ جڏهن ته a، b ۽ c حقيقي عدد آهن ۽ $a \neq 0, b \neq 0$

6.4.1 همزاد ليڪي مساواتون (Simultaneous Linear Equations)

ٻه يا ٻن کان وڌيڪ ليڪي مساواتون جيڪي ڪنهن ساڳي مسئلي مان ملن، ته انهن کي همزاد ليڪي مساواتون چئبو آهي.

مثال 1. $2x + 3 = 5$ ۽ $2x + y = 6$ ٻه همزاد ليڪي مساواتون آهن، جن مان هڪڙي هڪ بدلجندڙ ۾ آهي ۽ ٻي ٻن بدلجندڙن ۾ آهي.

مثال 2. $6x + y = 8$ ۽ $3x - y = 1$ ٻن بدلجندڙن ۾ ٻه همزاد ليڪي مساواتون آهن.

نوٽ: همزاد ليڪي مساواتن جو صرف هڪ حل ٿيندو آهي. جيئن مثال 1 ۾ ليڪي مساواتن جو حل آهي $x = 1, y = 4$ يا $(x, y) = (1, 4)$.

مثال 2 ۾ ليڪي مساواتن جو حل آهي $x = 1, y = 2$ يا $(x, y) = (1, 2)$.

6.4.2 ٻن بدلجندڙن ۾ هڪ ليڪي مساوات ٺاهڻ جو تصور

اسان کي ڄاڻ آهي ته ٻن بدلجندڙن ۾ هڪ ليڪي مساوات دراصل ڪنهن بيان ۾ موجود ٻن شين جي وچ ۾ موجود تعلق کي الجبرائي اظهار ۾ ظاهر ڪندي آهي.

ليڪي مساوات ٺاھڻ لاءِ ھيٺيان قدم ۽ ترڪيب ضروري آھي.

ڏاڪو 1. ڏنل بيان يا مسئلي کي غور سان پڙھو ۽ معلوم ڪريو تہ اڻ ڄاڻايل شيون ڪھڙيون آھن.

ڏاڪو 2. اڻ ڄاتل شين لاءِ انگلش الفابيٽ جا لفظ x، y، z وغيره مقرر ڪريو.

ڏاڪو 3. ڄاتل ۽ اڻ ڄاتل شين جي وچ ۾ تعلق ٺاھيو.

مثال 1. ھيٺين بيانن مان ھرھڪ لاءِ ھڪ ليڪي مساوات ٺاھيو.

(i) ٻن شاگردن جي عمرين جو جوڙ 30 آھي.

(ii) 5 ڪلوگرام صوف ۽ 3 ڪلوگرام انب 550 رپين ۾ مليا آھن.

(iii) 6 پينن جي قيمت ھڪ ڪتاب جي قيمت ڪان ٻيٽي آھي.

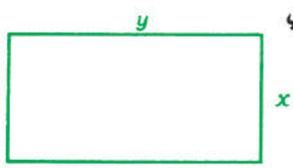
حل (i): ھن بيان ۾ اڻ ڄاتل عمرين لاءِ x ۽ y استعمال ڪرڻ سان ڄاتل عمر '30 سال' جو تعلق ٺھندو. $x + y = 30$ (ليڪي مساوات)

حل (ii): 1 ڪلوگرام صوفن جي قيمت لاءِ x ۽ 1 ڪلوگرام انبن جي قيمتن لاءِ y استعمال ڪرڻ سان مساوات ملندي $5x + 3y = 550$ (ڄاتل رقم)

حل (iii): ھڪ پين جي قيمت لاءِ x ۽ ھڪ ڪتاب جي قيمت لاءِ y استعمال ڪرڻ سان مساوات $6x = 2y$ ملندي.

مثال 2. ھيٺ ڏنل بيان مان ٻن بدلجندڙن ۾ ٻہ ھمزاد ليڪي مساواتون ٺاھيو، جڏھن:

ھڪ مستطيل شڪل جي ڊيگھہ، ويڪر کان 4 س.م وڏي آھي ۽ سندس احاطو 92 س.م آھي.



حل: فرض ڪريو مستطيل شڪل جي ڊيگھہ = y س.م،
ويڪر = x س.م ۽ احاطو $2(x + y) = 192$
تنھنڪري $y - x = 4$ .... (i) ۽

$$2(x + y) = 192 \Rightarrow x + y = \frac{192}{2} = 96 \quad .... \text{(ii)}$$

6.4.3 ليڪي مساواتن بابت مکيہ حقيقتون

(1) ڪن بہ ٻن بدلجندڙن ۾ ھڪ ليڪي مساوات جا لاتعداد حل ٿيندا آھن.

مثال: $x + y = 6$ ٻن بدلجندڙن ۾ ھڪ ليڪي مساوات آھي ۽ ان جا لاتعداد حل آھن جن مان ڪجھ جوڙا ھن ريت آھن:

$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), ...$

تصديق: (1, 5) لاءِ ڏنل مساوات درست آھي جو تہ $6 = 5 + 1$
(4, 2) لاءِ بہ ڏنل مساوات درست آھي جو تہ $6 = 2 + 4$. اھڙي طرح $6 = 3 + 3$

(2) ٻن بدلجندڙن ۾ ٻن ھمزاد ليڪي مساواتن جو فقط ھڪ حل ٿيندو آھي (يعني رقمن جو فقط ھڪ جوڙو ٿئي ٿو)

ڪڏھن ٻنھي مساواتن ۾ ٻہ بدلجندڙ ھوندا آھن تہ ڪڏھن وري ھڪ مساوات ۾ ھڪ بدلجندڙ ۽ ٻيءَ ۾ ٻہ بدلجندڙ ھوندا آھن.

مثال: $x = 3$ ۽ $y = 2x + 5$ ٻہ ھمزاد مساواتون آھن، جن مان ھڪڙي ۾ فقط ھڪ بدلجندڙ آھي.

نوٽ: ٻن ھمزاد ليڪي مساواتن جي حل جو مطلب آھي بدلجندڙن جا اُھي مُلھہ جن سان ٻئي مساواتون درست ٿين.

مثال: $x + y = 5$ ۽ $x - y = 3$ ٻن بدلجندڙن ۾ ٻہ ھمزاد ليڪي مساواتون آھن ۽ انھن جو فقط ھڪ حل آھي (4, 1).

تصديق: $x = 4$ ۽ $y = 1$ وجھڻ سان $4 + 1 = 5$ ۽ $4 - 1 = 3$ يعني ٻئي مساواتون درست آھن.

مشق 6.4

1. ھيٺ ڏنل مساواتن مان ڪھڙيون ھڪ درجي واريون ھڪ بدلجندڙ ۾، ڪھڙيون ٻن بدلجندڙن ۾ ۽ ڪھڙيون ھمزاد مساواتون آھن:

(i) $2x + 3y = 6$ (ii) $2x - 7 = 0$ (iii) $2x = 6,\ x + y = 8$
(iv) $x - y = 7,\ x + y = 10$ (v) $5y = 8$ (vi) $3y - 7 = 8x$

2. ھيٺ ڏنل بيانن مان ھرھڪ لاءِ ھڪ درجي واري ليڪي مساوات ٺاھيو:

(i) ٻن ڇوڪرن جي وزنن جو جوڙ 50 ڪلوگرام آھي.
(ii) 6 پينن جي قيمت ھڪ مئگزين جي قيمت کان ٽيڻي آھي.
(iii) ھڪ عدد جي ٻيڻ ۾ 5 جوڙ ڪرڻ سان 25 جو عدد ملي ٿو.
(iv) 3 ڪلوگرام صوفن جي قيمت مان 6 ڪلوگرام انبن جي قيمت ڪَٽ ڪرڻ سان 45 رپيا بچن ٿا.
(v) ھڪ اسڪول ۾ شاگردياڻين جو تعداد شاگردن جي تعداد جي $\frac{2}{3}$ حصي برابر آھي.

3. اندازي سان ڪي بہ ٽي حل ڳوليو ۽ تصديق ڪريو: (i) $x + y = 10$ (ii) $2x + y = 10$

4. اندازي سان ڪي بہ چار حل ڳوليو ۽ تصديق ڪريو: (i) $x - y = 2$ (ii) $2x + y = 16$

5. اندازي سان ھمزاد ليڪي مساواتن $x - y = 4$ ۽ $x - 2y = 2$ جو حل ڳوليو ۽ تصديق ڪريو.

6. چڪاس ڪريو تہ ٻن جوڙن (1, 5) ۽ (6, 0) مان ڪھڙو جوڙو ھمزاد مساواتن $2x + y = 7$ ۽ $6x - y = 1$ جو حل نہ آھي.

7. ھيٺ ڏنل بيانن مان ھمزاد مساواتن جا جوڙا ٺاھيو:

(i) ھڪ ڪتاب جي قيمت ھڪ ڪاپيءَ جي قيمت کان 50 رپيا وڌيڪ آھي ۽ ٻنھي جي گڏيل قيمت 115 رپيا آھي.
(ii) ٻن عددن جو جوڙ 27 آھي ۽ ڪَٽ 17 آھي.
(iii) ٻن ڪمپليمينٽري ڪنڊن مان ھڪ جي ماپ ٻئي ڪنڊ جي ماپ کان ٻيڻي آھي.
(iv) ھڪ پين جي قيمت 50 رپيا آھي. ٻن پينن ۽ پنجن پينسلن جي قيمت 200 رپيا آھي.

6.5 همزاد ليکي مساواتن کي حل ڪرڻ

ٻن همزاد ليکي مساواتن کي حل ڪرڻ جا ڪيترائي طريقا آهن، پر هتي اسان فقط ٽي طريقا سکنداسين.

6.5.1 همزاد ليکي مساواتون حل ڪرڻ لاءِ:

(1) عددي مُنڍيا برابر ڪرڻ جو طريقو

هن طريقي ۾ اسان ٻنهي مساواتن جي ڪنهن به هڪ بدلجندڙ جا مُنڍيا هڪجهڙي جي برابر ڪندا آهيون (جيڪڏهن برابر نه آهن). نئين حاصل ٿيل مساواتن کي جوڙ يا ڪَٽ ڪرڻ سان اهو بدلجندڙ خارج ٿي ويندو.

مثال 1. $2x - 3y = 3$ ۽ $5x + y = 16$ کي عددي مُنڍين جي برابري واري طريقي سان حل ڪريو.

حل: هتي (i) .... $2x - 3y = 3$ ۽ (ii) .... $5x + y = 16$ ۾ x جا منڍيا برابر ڪرڻ لاءِ مساوات (i) کي 5 سان ۽ مساوات (ii) کي 2 سان ضرب ڪرڻ پوندي. شاگرد پاڻ ڪري ڏسن.

نيون مساواتون: $10x - 15y = 15$ .... (iii)

$10x + 2y = 32$ .... (iv)

مساوات (iii) مان مساوات (iv) ڪَٽ ڪرڻ سان

$10x - 15y = 15$ (x خارج ٿئي ٿي)

$\underline{\pm 10x \pm 2y = \pm 32}$

$-17y = -17$

$\Rightarrow 17y = 17$ يا $y = \frac{17}{17} = 1.$

مساوات (i) ۾ $y = 1$ وجهڻ سان

$2x - 3(1) = 3$

$\Rightarrow 2x - 3 = 3$

$\Rightarrow 2x = 6$

$\Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$

$\therefore x = 3$ ۽ $y = 1$

تنهن ڪري حل سيٽ آهي $\{(3, 1)\}$

ان کان آسان ٿيندو ته فقط مساوات (ii) کي 3 سان ضرب ڪري y جا منڍيا برابر ڪجن.

(2) ملهه وجهڻ جي طريقي سان خارج ڪرڻ

هن طريقي ۾ اسان ڪنهن به هڪ ڏنل مساوات مان، هڪ بدلجندڙ جو ملهه، ٻئي بدلجندڙ ۾ لهندا آهيون. پوءِ اِهو ملهه ٻئي مساوات ۾ وجهندا آهيون، جيئن هيٺ ڏنل مثال ۾ سمجهايل آهي.

نوٽ 1: جنهن مساوات ۾ ڪنهن به هڪ بدلجندڙ جو منڍيو 1 آهي ته صرف ان مساوات کي ضرب ڪرڻ جي ضرورت آهي.

نوٽ 2: ڪوشش ڪريو اُن بدلجندڙ کي خارج ڪجي، جنهن لاءِ ننين عددن سان ضرب ڪرڻي پئي.

مثال 2 $x + 2y = 8$ ۽ $3x - 4y = -6$ کي ملهه وجهي، خارج ڪرڻ جي طريقي سان حل ڪريو.

حل: هتي ٻه مساواتون (i) ...$x + 2y = 8$

۽ (ii) ...$3x - 4y = -6$ مليل آهن.

ڏسون ٿا ته مساوات (i) مان x جو ملهه y ۾ لهڻ سولو آهي

يعني (iii) ...$x = 8 - 2y$

x جو اهو ملهه مساوات (ii) ۾ وجهڻ سان

$3(8 - 2y) - 4y = -6$

$\Rightarrow 24 - 6y - 4y = -6$

$\Rightarrow 24 - 10y = -6$

$\Rightarrow -10y = -6 - 24$

$\Rightarrow -10y = -30$

$\Rightarrow y = \frac{-30}{-10} = 3.$

مساوات (iii) ۾ $y = 3$ وجهڻ سان (x جو ملھ ملندو) $x = 8 - 2(3) = 2$

يعني $x = 2$ ۽ $y = 3$ يا حل سيٽ آهي $\{(2, 3)\}$

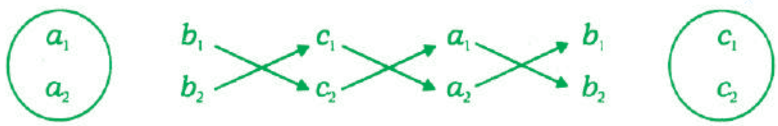
(3) آمھون سامھون ضرب ڪرڻ جو طريقو: (Cross-Multiplication Method)

هن طريقي جي وضاحت ڪرڻ لاءِ اسان ٻہ همزاد ليکي مساواتون معياري نموني ۾ لکندا آهيون يعني $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ۽ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.
پوءِ هيٺين ترڪيب ڪتب آڻبي:

ڏاڪو 1. بدلجندڙن جي عددي مندين ۽ مستقلن کي هيٺين ريت لکبو:

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 & c_2 \end{array}$$

ڏاڪو 2. پهرين ۽ آخري ڪالم کي ڇڏي باقي ملهن کي هيٺين ريت آمهون سامهون ضرب ڏبي.



ڏاڪو 3. x ۽ y جي ملھ لھڻ لاءِ اسان هيٺيون برابر نسبتون ڪم آڻيندا آهيون:

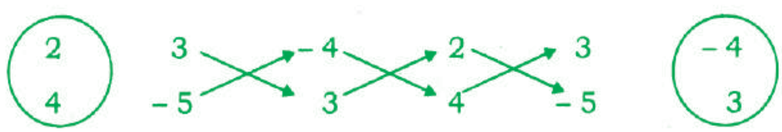
$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

مثال 3. $2x + 3y = 4$ ۽ $4x - 5y = -3$ کي آمهون سامهون ضرب ڪرڻ جي طريقي سان حل ڪريو.

حل: ڏنل مساواتن کي معياري صورت ۾ لکڻ سان:

$$2x + 3y - 4 = 0 \text{ ۽ } 4x - 5y + 3 = 0$$

ڏنل عددي مندين ۽ مستقلن کي ترتيب سان رکڻ سان:



برابر نسبتون ٺاهڻ سان:

$$\frac{x}{(3)(3) - (-5)(-4)} = \frac{y}{(-4)(4) - (3)(2)} = \frac{1}{(2)(-5) - (4)(3)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{9-20} = \frac{y}{-16-6} = \frac{1}{-10-12} \quad \text{يا} \quad \frac{x}{-11} = \frac{y}{-22} = \frac{1}{-22}$$

ان مان ٻہ مساواتون ملن ٿيون: $\frac{x}{-11} = \frac{1}{-22}$ ۽ $\frac{y}{-22} = \frac{1}{-22}$

$$\Rightarrow -22x = -11 \quad ۽ \quad y = \frac{22}{22} = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad ۽ \quad y = 1.$$

تنهن ڪري حل سيٽ آهي: $\left\{\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$ يا $\left\{(0.5, 1)\right\}$

مشق 6.5

1. عددي مُٽيا برابر ڪرڻ جي طريقي سان هيٺ ڏنل مساواتون حل ڪريو.

(i) $2x + y = 10,\ 5x - 2y = 7.$

(ii) $5x - y = 3,\ 3x + y = 4.$

(iii) $3x+7y=27,\ 5x+2y=16$

(iv) $2x + 3y = 2,\ 4x - 9y = -1.$

(v) $2x + y = 8,\ 6x - 2y = -1.$

(vi) $2x + 3y = 14,\ 3x+2y=5$

2. ملھ وجهي خارج ڪرڻ جي طريقي سان هيٺ ڏنل همزاد مساواتون حل ڪريو .

(i) $3x - 5y = 5,\ 2x + y = 12.$

(ii) $4x + 3y = 2,\ 5x + 2y = -1.$

(iii) $13x-9y=1,\ 11x-12y=14$

(iv) $7x - 4y = 1,\ 2x - 5y = 8.$

(v) $x + y = 1,\ 3x + 6y = 5.$

(vi) $3x-7y=1,\ 4x+y=22$

3. امهون سامهون ضرب ڪرڻ جي طريقي سان هيٺ ڏنل مساواتون حل ڪريو.

(i) $2x + 5y = 7,\ 5x - y = 4$

(ii) $-2x + 5y = 5,\ 3x - 2y = -13$

(iii) $2x+y=10,\ x+3y=8$

(iv) $x - 4y = 2,\ 2x - 7y = 5$

(v) $10x + 2y = 8,\ 5x + y = 2$

(vi) $13x-y=14,\ 2x+7y=9$

6.5.2 حقيقي زندگيءَ جا مسئلا ٻن بدلجندڙن وارين ٻن همزاد ليکي مساواتن ذريعي حل ڪرڻ.

هاڻي اسان حقيقي زندگيءَ جي مسئلن کي حل ڪرڻ لاءِ ٻن بدلجندڙن وارين ٻن همزاد ليکي مساواتن کي استعمال ڪنداسين.

مثال 1. اسلم 3 ڪلوگرام صوفن ۽ 2 ڪلوگرام انبن تي 400 رپيا خرچ ڪيا. جيڪڏهن صوفن جو اگهه انبن جي اگهه کان ٻيڻو آهي ته 1 ڪلو گرام صوفن جو اگهه لهو.

حل: فرض ڪريو ته صوفن جي 1 ڪلوگرام جي قيمت x رپيا آهي ۽ انبن جي 1 ڪلوگرام جي قيمت y رپيا آهي.

ڏنل بيان مطابق (i) —— $3x + 2y = 400$ ۽ (ii) —— $x = 2y$

ملهه وجهڻ جي طريقي مطابق:

مساوات (ii) ۾ x جو ملهه $2y$ ڏنل آهي

x جو اهو ملهه مساوات (i) ۾ وجهڻ سان

$$3(2y) + 2y = 400$$

$$\Rightarrow \quad 6y + 2y = 400$$

$$\Rightarrow \quad 8y = 400$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{400}{8} = 50$$

y جو اِهو ملهه مساوات (i) ۾ وجهڻ سان:

$$x = 2(50) = 100.$$

ان ڪري 1 ڪلوگرام صوفن جي قيمت 100 رپيا آهي.

مثال 2. بسمه ڪجهه پينون 50 رپيا في پين جي حساب سان ۽ ڪجهه ڪاپيون 30 رپيا في ڪاپيءَ جي حساب سان خريد ڪرڻ تي ڪل 350 رپيا خرچ ڪيا. جيڪڏهن پينن ۽ ڪاپين جو ڪل تعداد 9 آهي ته ٻڌايو ته هن ڪيترين پينن ۽ ڪيترين پينسلن خريد ڪيون؟

حل: فرض ڪريو ته خريد ڪيل پينن جو تعداد x آهي ۽ ڪاپين جو تعداد y آهي

ڏنل بيان مطابق:

$$x + y = 9 \quad \text{(i)}$$

$$50x + 30y = 350 \quad \text{(ii)}$$

۽ ملهه وجهي خارج ڪرڻ جي طريقي مطابق:

مساوات (i) مان مليو (iii) .... $x = 9 - y$

x جو اهو ملهه مساوات (ii) ۾ وجهڻ سان:

$$50(9 - y) + 30y = 350$$

$$\Rightarrow \quad 450 - 50y + 30y = 350$$

$$\Rightarrow \quad 450 - 20y = 350$$

يا $\quad -20y = 350 - 450$

يا $\quad -20y = -100$

يا $\quad 20y = 100$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{100}{20} = 5.$$

y جو اهو ملهه مساوات (iii) ۾ وجهڻ سان $x = 9 - 5 = 4$

اِن جو مطلب ته بسمه 4 پينون ۽ 5 ڪاپيون خريد ڪيون.

مشق 6.6

1. عائشہ 6 ڪلوگرام پٽاٽا 300 رپين ۾ خريد ڪيا. جيڪڏهن ٽماٽن جو اگهہ پٽاٽن جي اگهہ کان ٽيڻو آهي تہ ٽماٽن جو اگهہ لهو.
2. طلحہ ڪجهہ بئنون 100 رپيا في بئڻ جي حساب سان ۽ ڪجهہ بال 50 رپيا في بال جي حساب سان خريد ڪيا. جيڪڏهن هن جملي 600 رپين ۾ ڪل 8 شيون خريد ڪيا تہ ٻڌايو تہ بال ڪيترا هيا؟
3. هڪ چوڪنڊي راند جي ميدان جي ديگهہ سندس ويڪر کان ٻيڻي آهي. پوري ميدان کي لوڙهو ڏيڻ تي 9,000 رپيا خرچ اچي ٿو. جيڪڏهن في ميٽر خرچ 30 رپيا آهي تہ ميدان جي ديگهہ ۽ ويڪر لهو.
4. هڪ اسڪول ۾ ڇوڪرن جو تعداد، ڇوڪرين جي تعداد کان ٻيڻو آهي. جيڪڏهن اسڪول ۾ پڙهندڙ ڪل شاگردن جو تعداد 450 آهي تہ ڇوڪرن جو تعداد لهو.
5. هڪ مزدور جي ماهوار آمدني ۽ خرچ جي نسبت آهي 14:15. جيڪڏهن سندس ماهوار بچت 2000 رپيا آهي تہ ڪمائي لهو.

6.6 خارج ڪرڻ (Elimination)

ڏنل مساواتن مان ڪنهن مخصوص بدلجندڙ کان آزاد تعلق (Relation) حاصل ڪرڻ جي طريقي کي 'خارج ڪرڻ' چئبو آهي. ٻن اڻ ڄاتل ملهن وارين ٻن مساواتن مان ڪنهن بہ هڪ بدلجندڙ يا اڻ ڄاتل ملهہ کي خارج ڪرڻ جا ڪيترائي طريقا آهن. پر هتي اسان صرف ٻن طريقن بابت بحث ڪنداسين.

(i) ملهہ وجهي خارج ڪرڻ

هن طريقي ۾ اسان ڪنهن بہ هڪ ڏنل مساوات مان هڪ بدلجندڙ (جيڪو خارج ڪرڻو آهي) جو ملهہ ٻين بدلجندڙن ۾ لهندا آهيون. اهو ملهہ ٻيءَ مساوات ۾ وجهڻ سان گهربل بدلجندڙ خارج ٿي ويندو.

مثال 1. $2x + y = 6$ ۽ $x - 3y = 8$ مان x خارج ڪريو.

حل: هتي

x جو ملهہ y ۾ لهڻ لاءِ اسان مساوات (ii) استعمال ڪنداسين (ڇو؟)

جنهن مان $x = 3y + 8$ مليو، اِهو ملهہ مساوات (i) ۾ وجهبو تہ

اهو تعلق x کان آزاد آهي $7y = -10$

مثال 2. $V_f = V_i + gt$ ۽ $V_f^2 - V_i^2 = 2gs$ مان Vi کي خارج ڪريو (V_i ۽ V_f شروعاتي رفتار ۽ آخري رفتار لاءِ نشانيون آهن).

حل: اسان کي ٻه مساواتون مليل آهن

$$V_f^2 - V_i^2 = 2gS \rightarrow \text{(i)}$$

$$V_f = V_i + gt \rightarrow \text{(ii)}$$

V_i کي خارج ڪرڻ لاءِ ان جو ملھ لھبو.

مساوات (ii) مان $V_i = V_f - gt$

V_i جو اهو ملھ مساوات (i) ۾ وجھڻ سان

$$V_f^2 - (V_f - gt)^2 = 2gs$$

$$\Rightarrow V_f^2 - (V_f^2 - 2gtV_f + g^2t^2) = 2gS$$

$$V_f^2 - V_f^2 + 2gtV_f - g^2t^2 = 2gS$$

$$\Rightarrow g(2V_f t - gt^2) = 2gS$$

$$\Rightarrow 2V_f t - gt^2 = 2S$$

$$\Rightarrow S = \frac{2V_f t}{2} - \frac{gt^2}{2}$$

$$\Rightarrow S = V_f t - \frac{1}{2}gt^2.$$

اهڙي طرح مساوات $S = V_f t - \frac{1}{2}gt^2$ اهو تعلق آهي، جنھن ۾ V_i موجود نہ آهي.

(ii) فارمولا جي مدد سان خارج ڪرڻ

هن طريقي ۾ اسان گھرج آڌار چورس لھڻ يا ڪعب لھڻ جا فارمولا استعمال ڪندا آهيون.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ ۽ } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مثال 3. $x + \frac{1}{x} = a$ ۽ $x - \frac{1}{x} = b$ مان x خارج ڪريو.

حل: هتي $x + \frac{1}{x} = a \ldots \text{(i)}$ ۽

$$x - \frac{1}{x} = b \ldots \text{(ii)}$$

ٻنھي مساواتن جي ٻنھي پاسن جو چورس ڪرڻ سان

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = a^2 \ldots \text{(iii)}$$

$$x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = b^2 \ldots \text{(iv)}$$

هاڻي مساوات (iii) مان مساوات (iv) ڪٽ ڪرڻ سان:

$$\begin{array}{r} x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = a^2 \\ x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = +b^2 \\ - \quad + \quad - \qquad - \\ \hline 4 = a^2 - b^2 \end{array}$$

يعني $a^2 - b^2 = 4$ اهڙو تعلق آهي، جيڪو x کان آزاد آهي.

مشق 6.7

1. ھيٺ ڏنل ھمزاد مساواتن مان x کي ملھہ وجھڻ واري طريقي سان خارج ڪريو.

(i) $x-y+1=0,\quad 3x+y-3=0.$ (ii) $x+5y=2,\quad 6x+3y=7.$ (iii) $2x+y=7,\quad x+3y=4.$

(iv) $x^2+y=0,\quad ax^2+b=0.$ (v) $x-2y+1=0,\quad 3x+y-3=0.$ (vi) $4x+3y+8=0,\quad x+5y-2=0.$

2. ھيٺ ڏنل ھمزاد مساواتن مان V_t کي ملھہ وجھڻ واري طريقي سان خارج ڪريو.

(i) $V_f=V_i+at,\quad S=V_it+\frac{1}{2}at^2.$ (ii) $V_f=V_i+gt,\quad S=V_it-\frac{1}{2}gt^2.$ (iii) $V_f^2-V_i^2=2gS,\quad V_f=V_i+gt.$

3. ھيٺ ڏنل ھمزاد مساواتن مان x کي فارمولا تحت خارج ڪريو

(i) $x+\frac{1}{x}=2a,\quad x-\frac{1}{x}=2b+1.$ (ii) $x^2-\frac{1}{x^2}=2a,\quad x^2+\frac{1}{x^2}=3b.$ (iii) $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=p,\quad x-\frac{1}{x}=q^2$

(iv) $x^2+\frac{1}{x^2}=p^2,\quad x^4+\frac{1}{x^4}=q^4.$ (v) $x+\frac{1}{x}=2y+1,\quad x-\frac{1}{x}=y-2.$ (vi) $\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}=m,\quad \frac{x^3}{y^3}-\frac{y^3}{x^3}=n$

جائزي جي مشق 6

1. صحيح جواب ڳوليو.

(i) $(x+y)^2=$ ________

(a) x^2+y^2 (b) $x^2+2xy+y^2$ (c) x^2-y^2 (d) a ۽ b ٻئي

(ii) $x^2-y^2=$ ________

(a) $(x+y)^2$ (b) $(x-y)^2$ (c) x^2+y^2 (d) $(x-y)(x+y)$

(iii) $y^3+3y^2x+3yx^2+x^3=$ ________

(a) $(y-x)^3$ (b) $(x-y)^3$ (c) $(x+y)^3$ (d) ڪوبہ نہ

(iv) مساوات $x + y + 6 = 0$ جو هڪ حل آهي ________.

(a) $(1, 2)$ (b) $(-2, 4)$ (c) $(-4, -2)$ (d) $(4, 2)$

(v) $x + y = 5$ ۽ $x - y = 1$ جو حل ________ آهي.

(a) $(2, 3)$ (b) $(3, 2)$ (c) $(1, 4)$ (d) $(4, 1)$

2. جيڪڏهن $x + \frac{1}{x} = 3$ ۽ $x - \frac{1}{x} = 5$ ته هيٺين جو ملهه لهو.

(i) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ (ii) $x^4 + \frac{1}{x^4}$ (iii) $x^4 - \frac{1}{x^4}$ (iv) $x^3 + \frac{1}{x^3}$ (v) $x^3 - \frac{1}{x^3}$ (vi) $x^6 - \frac{1}{x^6}$

3. فارمولا جي مدد سان ملهه لهو.

(i) $(103)^2$ **(ii)** $(97)^2$ **(iii)** $(103) \times (97)$

4. جزا لهو.

(i) $5x + 10y + 15z$ (ii) $x^2 + 14x + 49$ (iii) $144x^2 - 121y^2$

(iv) $25x^2 - 10xy + y^2$ (v) $a^2 + 4ab + 4b^2 - 9y^2$ (vi) $1 - \frac{1}{x^4}$

5. ڪعب لهو.

(i) $2x + 3y$ (ii) $3x - 4y$ (iii) $x + \frac{1}{x}$ (iv) $x - \frac{1}{x}$

6. فارمولا وسيلي ڪعب لهو.

(i) 29 **(ii)** 31

7. هيٺين مساواتن کي حل ڪريو.

(a) ملهه وجهي خارج ڪرڻ جي طريقي سان:

(i) $2x - y = 6$, $x + 3y = 10$ **(ii)** $2x + 5y = 1$, $x - 2y = 4$

(b) منڍيا برابر ڪرڻ واري طريقي سان:

(i) $3x + 2y = 7$, $2x + 3y = 8$ **(ii)** $3x - 2y = 7$, $5x + y = 29$

(c) آمهون سامهون ضرب ڪرڻ جي طريقي سان:

(i) $2x + y = 5$, $3x - 2y = 4$ **(ii)** $5x + y = 56$, $x + 18y = 29$.

8. هڪ مستطيل جي ويڪر سندس ڊيگهه جي اڌ جيتري آهي. جيڪڏهن مستطيل جو پيريميٽر يعني احاطو 24 س.م آهي ته ان جي ايراضي لهو.

9. فارمولا وسيلي x خارج ڪريو.

(i) $x - \frac{1}{x} = 2k - 1$, $x + \frac{1}{x} = 5k$ **(ii)** $x - \frac{1}{x} = m$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = n^2$

خلاصو

- گهڻ رقمي اظهار کي ٻن يا وڌيڪ اظهارن جي ضرب اُپت طور ڏيکارڻ جي عمل کي جزا لهڻ چئبو آهي.
- ڪجهه بنيادي فارمولا:

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(iii) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

(iv) $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(v) $(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

- هڪ درجي واري مساوات کي ليڪي مساوات به چئبو آهي. اهڙي هڪ بدلجندڙ ۾ مساوات کي $ax + b = 0$ لکبو آهي جڏهن ته $a \neq 0$ ۽ a، b ٻئي حقيقي عدد آهن.
- ٻه يا وڌيڪ ليڪي مساواتون جيڪي ڪنهن ساڳي مسئلي سان وابسته هجن اُنهن کي همزاد ليڪي مساواتون چئبو آهي. انهن جو صرف هڪڙو حل ٿيندو آهي.
- ٻن بدلجندڙن ۾ليڪي مساوات جو معياري نمونو $ax + by + c = 0$ آهي، جڏهن ته a، b ۽ c ٽيئي حقيقي عدد آهن ۽ $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$.
- ٻن بدلجندڙن ۾ هڪ ليڪي مساوات کي اڻ ڳڻ تعداد ۾ حل ٿيندا آهن.
- ٻن بدلجندڙن ۾ ٻن ليڪي مساواتن کي يا ته صرف هڪ حل هوندو يا ڪو به حل نه هوندو. انهن کي حل ڪرڻ جا ٽي طريقا آهن:
- عددي مَنين کي برابر ڪرڻ، ملهه وجهي خارج ڪرڻ، آمهون سامهون ضرب ڪرڻ.
- ڏنل مساواتن مان ڪنهن خاص بدلجندڙ کان آزاد تعلق حاصل ڪرڻ کي 'خارج ڪرڻ' چئبو آهي. ان جا ٻه طريقا آهن: ملهه وجهي خارج ڪرڻ يا فارمولا جي مدد سان.

باب 7

جا ميٽري ءَ جا بنيادي تصور

7.1 پور وچوٽ ليڪون

7.1.1 پور وچوٽ ليڪن جي وصف

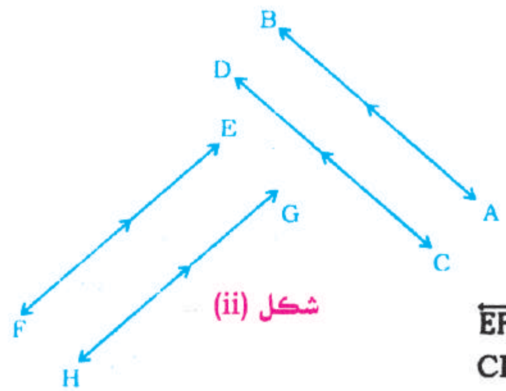
شڪل (i)

ڪي به ٻه ليڪون پور وچوٽ سڏبيون آهن جڏهن ته:

(i) اُهي ساڳي سطح ۾ موجود آهن.

(ii) اُهي هڪ ٻئي کي نٿيون ڪپين.

جيئن ريلوي جون لوهي لائينون وچايل هونديون آهن. 'پور وچوٽ لاءِ نشاني || استعمال ٿئي ٿي.



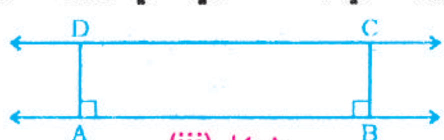
شڪل (ii)

شڪل (i) ۾ $l \parallel m$ کي پڙهبو:

l پور وچوٽ آهي m جي.

شڪل (ii) ۾ $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{GH}$ ۽ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

يعني ليڪ AB پور وچوٽ آهي ليڪ CD جي ۽ ليڪ EF پور وچوٽ آهي ليڪ GH جي. هاڻي هيٺين شڪل (iii) تي غور ڪريو:



شڪل (iii)

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{AD}$ ۽ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{BC}$ يعني AB هڪ ليڪ آهي، ليڪ ٽڪر AD عمود آهي، ليڪ AB تي. ساڳي وقت ليڪ ٽڪر CB عمود آهي ليڪ AB تي. تنهن ڪري چئي سگهبو ته $m\overline{AD} = m\overline{BC}$ ۽ اها ڳالهه به نوٽ ڪريو ته $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.

7.1.2 شڪلين وسيلي پور وچوٽ ليڪن جي هيٺ ڏنل خاصيتن جو مشاهدو ڪريو.

خاصيت 1. ٻه مليل ليڪون جيڪي هڪئي ساڳي ليڪ جي پور وچوٽ آهن، اُهي مليل ٻئي ليڪون پاڻ ۾ به پور وچوٽ هونديون. هيٺ ڏنل شڪل (iv) تي غور ڪريو.

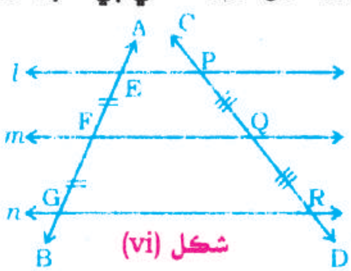
شڪل (iv)

مٿي ڏنل شڪل (iv) ۾ ڏسون ٿا ته: $l \parallel n$ ۽ $m \parallel n$

شڪل (v)

تنهنڪري $m \parallel l$ اِها پور وچوٽ ليڪن جي هڪ خاص خاصيت جي عڪاسي ڪري ٿي. سامهون ٻارڙن واري ٽيبل اُبتي رکيل آهي جنهن جو مٿيون مٿاڇري وارو حصو هيٺ تري ۾ آهي ۽ سندس جنگهون مٿين طرف آهن. شڪل (v) ۾ ڏسون ٿا ته جنگهه $\overline{AB}$ پور وچوٽ آهي جنگهه $\overline{CD}$ جي يعني ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$) ۽ جنگهه $\overline{EF}$ پور وچوٽ آهي جنگهه $\overline{CD}$ جي يعني ($\overline{EF} \parallel \overline{CD}$) اهڙي طرح هاڻي اوهان پاڻ چڪاس ڪري ٻڌايو ته ڪهڙن ڪهڙن پاسن جو جوڙو پور وچوٽ آهي.

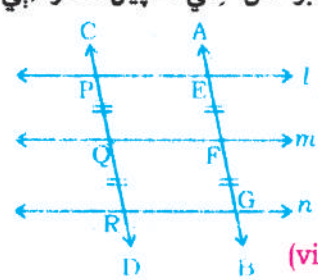
خاصيت 2: جيڪڏهن ٽي پور وچوٽ ليڪون، ٻن ڪپيندڙ ليڪن کي اهڙي طرح ڪپين، جو اُهي هڪ ڪپيندڙ ليڪ کي يڪسان ليڪ ٽڪرن ۾ ورهائين ٿيون ته اُهي ٻي ڪپيندڙ ليڪ کي پڻ يڪسان ليڪ ٽڪرن ۾ ورهائينديون.



شڪل (vi)

سامهون ڏنل شڪل (vi) کي ڏسو ان ۾ ٽي ليڪون l، m ۽ n هڪ ٻئي جي پور وچوٽ آهن. ڪپيندڙ ليڪ $\overleftrightarrow{AB}$ انهن پور وچوٽ ليڪن کي ترتيبوار ٽٻڪن E، F ۽ G وٽ اهڙي ريت ڪپي ٿي جو $m\overline{EF} = m\overline{FG}$. ساڳي وقت ٻي ڪپيندڙ ليڪ $\overline{CD}$ ساڳين پور وچوٽ ليڪن کي ترتيبوار ٽٻڪن P، Q ۽ R تي اهڙيءَ طرح ڪپي ٿي جو ٽڪر $\overline{PQ}$ ۽ $\overline{QR}$ ٺهن ٿا. جيئن ته پهرين ڪپيندڙ ليڪ $\overleftrightarrow{AB}$ جا ڪپيل ٽُڪر پاڻ ۾ يڪسان آهن يعني $m\overline{EF} = m\overline{FG}$. تنهنڪري $m\overline{PQ} = m\overline{QR}$ جنهن جو مطلب آهي ته ٻي ڪپيندڙ ليڪ جا ڪپيل ٽڪر به ماپ ۾ پاڻ ۾ هڪ جيترا ٿيندا.

اها ڳالهه نوٽ ڪرڻ گهرجي ته هيءَ خاصيت نٿي چوي ته پهرين ڪپيندڙ ليڪ جا ڪپيل ٽڪر برابر آهن ٻي ڪپيندڙ ليڪ جي ڪپيل ٽڪرن جي. پر هيءَ خاصيت اها ڳالهه ظاهر ڪري ٿي ته ٻي ڪپيندڙ ليڪ جا ڪپيل ٽڪر پاڻ ۾ برابر آهن. اِهي ڪپيل ٽُڪر (ٻي ڪپيندڙ ليڪ جا) يا وڏا ٿيندا يا ننڍا ٿيندا پهرين ڪپيندڙ ليڪ جي ڪپيل ٽڪرن سان.



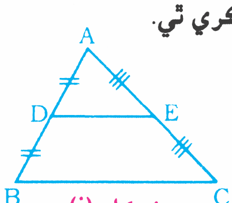
شڪل (vii)

اهي چار ئي ڪپيل ٽڪر پاڻ ۾برابر ٿيندا جيڪڏهن ڪپيندڙ ليڪون پاڻ ۾ پور وچوٽ آهن. جيئن شڪل (vi) ۽ شڪل (vii) مان ظاهر ٿئي ٿو.

$$m\overline{EF} = m\overline{FG} = m\overline{PQ} = m\overline{QR}$$

خاصيت 3: هڪ ليڪ جيڪا ٽڪنڊي جي هڪ پاسي جي وچين ٽِڪي مان گذرندڙ ٻي پاسي جي پور وچوٽ آهي، اُها ٽڪنڊي جي ٽئين پاسي کي اڌو اڌ ڪري ٿي.

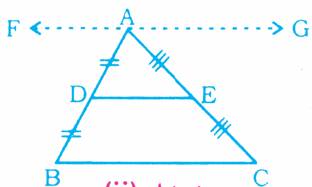
(متين خاصيت (2) جو هيءَ هڪ استعمال آهي)



شڪل (i)

سامهون ڏنل شڪل (i) کي ڏسو. ٽڪنڊي ABC ۾ ٽِڪو D ليڪ ٽڪر $\overline{AB}$ جو وچون ٽِڪو آهي ۽ $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ تنهن ڪري $m\,\overline{AD} = m\,\overline{DB}$ (هتي ٽِڪو E، ليڪ ٽڪر $\overline{AC}$ يعني ٽڪنڊي جي ٽئين پاسي کي اڌو اڌ ڪيو ٿو.

مطلب ته $m\,\overline{AE} = m\,\overline{EC}$)



شڪل (ii)

هاڻي شڪل (ii) کي ڏسو ته ان ۾ خاصيت (2) کي ڪيئن سمايو آهي. ٽِڪي A مان ليڪ $\overleftrightarrow{FG}$، ليڪ $\overline{DE}$ جي پور وچوٽ ٺاهي وئي آهي. تنهن ڪري خاصيت (1) مطابق $\overline{BC} \parallel \overleftrightarrow{FG}$ ۽ خاصيت (2) مطابق $m\,\overline{AE} = m\,\overline{EC}$

(ڇاڪاڻ ته $m\,\overline{AD} = m\,\overline{DB}$)

7.1.3 هڪ ڪپيندڙ ليڪ ٺاهيو جيڪا ٻن پور وچوٽ ليڪن کي ڪپي.

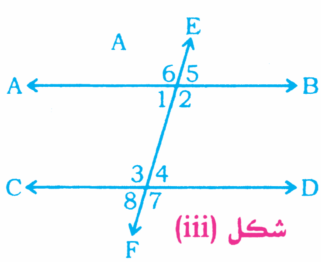
هاڻي شڪل ۾ ٺهندڙ نسبتي ڪنڊن،متبادل اندرين ڪنڊن، آمهون سامهون وارين چوٽيءَ وارين ڪنڊن ۽ ڪپيندڙ ليڪ جي ساڳي پاسي وارين اندرين ڪنڊن جو مشاهدو ڪريو.

هتي اسان کي مشاهدو ڪري ظاهر ڪرڻو آهي ته انهن ڪنڊن جا جوڙا جيڪي ٻن پور وچوٽ ليڪن کي هڪ ڪپيندڙ ليڪ سان ٺهجن ٿا.

جڏهن هڪ ڪپيندڙ ليڪ ٻن يا ٻن کان وڌيڪ پور وچوٽ ليڪن کي ڪپي ٿي ته هيٺيون ڪندون ٺهن ٿيون:

(i) چوٽيءَ واريون آمهون سامهون واريون ڪندون
(ii) نسبتي ڪندون
(iii) متبادل ڪندون
(iv) ڪپيندڙ ليڪ جي ساڳي پاسي ٺهندڙ اندريون ڪندون

سامهون شڪل (iii) ۾ ٻه پور وچوٽ ليڪون $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ ۽ $\overleftrightarrow{EF}$ ڪين ڪپي ٿي. نتيجي ۾ اٺ ڪندون $(\angle1, \angle2, ..., \angle8)$ ٺهن ٿيون.



شڪل (iii)

انهن ڪنڊن مان $\angle1$ $\angle2$ $\angle3$ ۽ $\angle4$ اندريون ڪنڊون آهن. جڏهن ته $\angle5$ $\angle6$ $\angle7$ ۽ $\angle8$ ٻاهريون ڪنڊون آهن.

(i) $(\angle1, \angle5)$، $(\angle2, \angle6)$، $(\angle3, \angle7)$ ۽ $(\angle4, \angle8)$ اهي چارئي آمهون سامهون واريون چوٽيءَ واريون ڪنڊن جا جوڙا آهن.

(ii) نسبتي ڪنڊن جا چار جوڙا هن ريت آهن:

(i) $\angle 4, \angle 5$ (ii) $\angle 3, \angle 6$ (iii) $\angle 1, \angle 8$ (iv) $\angle 2, \angle 7$.

نوٽ: نسبتي ڪنڊن جي هر هڪ جوڙي ۾ هڪ ڪنڊ اندرين ڪنڊ آهي، جڏهن تہ ٻي ڪنڊ ٻاهرين ڪنڊ آهي. ٻنهي ڪنڊن جو جوڙو ڪٽيندڙ ليڪ جي ساڳي پاسي آهي ۽ ٻئي ڪنڊون مختلف چوٽين تي ٺهن ٿيون.

(iii) ٻہ متبادل اندرين ڪنڊن جا جوڙا هن طرح ٺهن ٿا.

(i) $\angle 1$ ۽ $\angle 4$ (ii) $\angle 2$ ۽ $\angle 3$

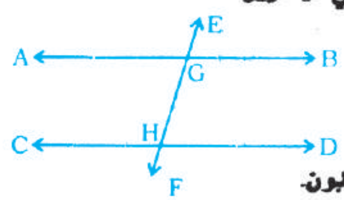
نوٽ: اها ڳالهہ غور سان ڏسندا تہ متبادل اندريون ڪنڊون ڪٽيندڙ ليڪ جي سامهون وارن پاسن تي مختلف چوٽين تي ٺهن ٿيون.

(iv) ڪٽيندڙ ليڪ جي ساڳي پاسي ٻہ جوڙا اندرين ڪنڊن جا هن طرح ٺهن ٿا.

(i) $\angle 1$ ۽ $\angle 3$ (ii) $\angle 2$ ۽ $\angle 4$

مثال 1. جيڪڏهن ٻہ پور وچوٽ ليڪون آهن $\overleftrightarrow{AB}$ ۽ $\overleftrightarrow{CD}$، ڪين هڪ ڪٽيندڙليڪ $\overleftrightarrow{EF}$ ٽڪڻ G ۽ H تي ڪٽي ٿي.

سامهون شڪل مان ڏسي ڪري هيٺين ڪنڊن جا جوڙا لکي ڏيکاريو.



(i) آمهون سامهون واريون چوٽيءَ واريون ڪنڊون.

(ii) نسبتي ڪنڊون

(iii) متبادل ڪنڊون

(iv) ڪٽيندڙ ليڪ جي ساڳي پاسي ٻہ ٺهندڙ اندريون ڪنڊون.

حل **(i)**: آمهون سامهون وارين چوٽيءَ وارين ڪنڊن جا چار جوڙا هن ريت آهن:

(a) $\angle AGH, \angle EGB$ (b) $\angle AGE, \angle BGH$ (c) $\angle CHF, \angle GHD$ (d) $\angle GHC, \angle DHF$

(ii) نسبتي ڪنڊن جا چار جوڙا هن ريت آهن:

(a) $\angle AGH, \angle CHF$ (b) $\angle AGE, \angle GHC$ (c) $\angle EGB, \angle GHD$ (d) $\angle BGH, \angle DHF$

(iii) متبادل ڪنڊن جا ٻہ جوڙا هن ريت آهن:

(a) $\angle AGH, \angle GHD$ (b) $\angle BGH, \angle GHC$

(iv) ڪٽيندڙ ليڪ جي ساڳي پاسي وارين اندرين ڪنڊن جا ٻہ جوڙا هن ريت آهن:

(a) $\angle AGH, \angle GHC$ (b) $\angle BGH, \angle GHD$

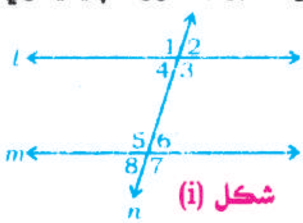
7.1.4. ٻن پور وڇوٽ ليڪن کي هڪ ڪپيندڙ ليڪ جي ڪپڻ سان جيڪي ڪنڊن جا جوڙا ٺهن ٿا انهن جي وچ ۾ تعلق جو بيان

هڪ ڪپيندڙ ليڪ جڏهن ٻن پور وڇوٽ ليڪن کي ڪپي ٿي ته ان حالت ۾ ٺهندڙ ڪنڊن جي جوڙن جو تعلق هن ريت بڻجي ٿو:

(i) نسبتي ڪنڊن جا جوڙا پاڻ ۾ برابر ٿين ٿا.

(ii) اندرين متبادل ڪنڊن جا جوڙا پاڻ ۾ برابر ٿين ٿا.

(iii) ڪپيندڙ ليڪ جي ساڄي پاسي ۾ ٺهندڙ اندرين ڪنڊن جا جوڙا سپليمينٽري ڪنڊون ٿين ٿيون.



شڪل (i)

سامهون شڪل (i) ۾ ڏسو جنهن ۾ ليڪ $m \parallel l$ ۽ n انهن کي ڪپي ٿي: ان حالت ۾ ٺهندڙ:

(a) نسبتي ڪنڊن جا جوڙا هن ريت آهن:

$(\angle 1, \angle 5); (\angle 2, \angle 6); (\angle 4, \angle 8); (\angle 3, \angle 7)$

اِهي سڀ ڪنڊن جا جوڙا ماپ ۾ هڪ ٻئي جي برابر آهن:

يعني $m\angle 1 = m\angle 5; m\angle 2 = m\angle 6; m\angle 4 = m\angle 8; m\angle 3 = m\angle 7$

(b) اندرين متبادل ڪنڊن جا جوڙا هن ريت آهن.

$\angle 3$ ۽ $\angle 5$، $\angle 4$ ۽ $\angle 6$

اهي سڀ ڪنڊن جا جوڙا ماپ ۾ هڪ ٻئي جي برابر آهن:

يعني $m\angle 3 = m\angle 5; m\angle 4 = m\angle 6$

(c) ڪپيندڙ ليڪ جي ساڄي پاسي ۾ ٺهندڙ اندرين ڪنڊن جا جوڙا هن ريت آهن:

$\angle 5$ ۽ $\angle 4$، $\angle 6$ ۽ $\angle 3$

اهي سڀ ڪنڊن جا جوڙا سپليمينٽري ڪنڊون آهن.

يعني $\angle 4$ ۽ $\angle 5$ سپليمينٽري ڪنڊون آهن. $\angle 3$ ۽ $\angle 6$ سپليمينٽري ڪنڊون آهن.

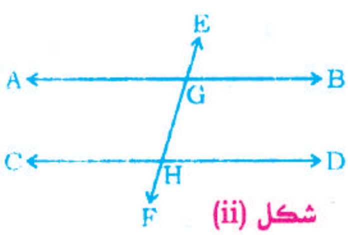
اها ڳالهه ظاهر ڪري ٿي ته: $m\angle 5 + m\angle 4 = 180^\circ$

۽ $m\angle 6 + m\angle 3 = 180^\circ$

مثال 2. سامهون شڪل (ii) ۾ ڏسي، هيٺين ڏنل ڪنڊن سان تعلق ٺاهيندڙ ڪنڊن جي ڇاڻ ڏيو.

(i) $\angle GHD$ جي يڪسان جيڪا اِن سان نسبتي ڪنڊن جو جوڙو ٺاهي.

(ii) $\angle GHD$ جي يڪسان جيڪا اِن سان متبادل ڪنڊن جو جوڙو ٺاهي.

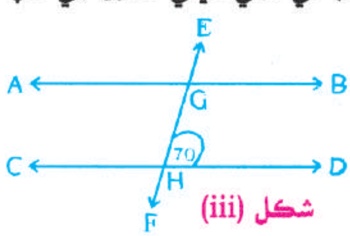


شڪل (ii)

(iii) $\angle GHD$ جون سپليمينٽري ڪنڊون جيڪي:
(a) ڪپينڊڙ ليڪ جي ساڳي پاسي سان اندرين ڪنڊن جو جوڙو ٺاهين ٿيون.
(b) لڳولڳ يعني پرسان وارين اندرين ڪنڊن جو جوڙو ٺاهين ٿيون.
(c) لڳولڳ يعني پرسان وارين ٻاهرين ڪنڊن جو جوڙو ٺاهين ٿيون.
(iv) $\angle GHD$ جي يڪسان جيڪي پاڻ ۾ چوٽيءَ واريون آمهون سامهون واريون ڪنڊون ٿين ٿيون.

حل: (i) $\angle EGB \cong \angle GHD$ (نسبتي ڪنڊون)
(ii) $\angle AGH \cong \angle GHD$ (متبادل ڪنڊون)
(iii) (a) $\angle BGH$ سپليمينٽري ڪنڊ آهي $\angle GHD$ جي، جيڪا ڪپينڊڙ ليڪ جي ساڳي پاسي ۾ اندرين ڪنڊ آهي.
(b) $\angle GHC$ سپليمينٽري ڪنڊ آهي $\angle GHD$ جي، جيڪا اندرين پر واري ڪنڊ آهي.
(c) $\angle DHF$ سپليمينٽري ڪنڊ آهي $\angle GHD$ جي، جيڪا ٻاهرين پر واري ڪنڊ آهي.
(iv) $\angle CHF \cong \angle GHD$ (چوٽيءَ واريون آمهون سامهون واريون ڪنڊون آهن)

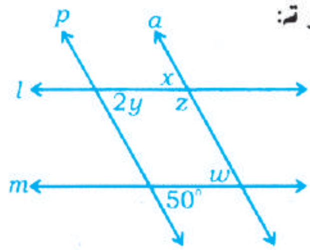
مثال 3. مٿي ڏنل مثال (2) ۾ استعمال ٿيندڙ شڪل (ii) کي ڏسي سڀني ڪنڊن جي ماپ ٻڌايو، جڏهن $m\angle GHD = 70^\circ$



شڪل (iii)

حل: (1) جيئن تہ $\angle AGH \cong \angle GHD$ (متبادل ڪنڊون آهن)
تنهنڪري $m\angle AGH = 70^\circ$
(2) جيئن تہ $\angle EGB \cong \angle GHD$ (نسبتي ڪنڊون آهن)
تنهنڪري $m\angle EGB = 70^\circ$
(3) جيئن تہ ($m\angle BGH + m\angle GHD = 180^\circ$) (ڪپينڊڙ ليڪ جي ساڳي پاسي واريون اندريون ڪنڊون آهن) تنهنڪري $\Rightarrow m\angle BGH = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$
(4) $\angle AGE \cong \angle BGH$ (چوٽيءَ واريون آمهون سامهون واريون ڪنڊون آهن)
تنهنڪري $m\angle AGE = 110^\circ$
(5) $\angle GHC \cong \angle BGH$ (متبادل ڪنڊون آهن)
تنهنڪري $m\angle GHC = 110^\circ$
(6) $\angle DHF \cong \angle GHC$ (چوٽيءَ واريون آمهون سامهون واريون ڪنڊون آهن)
تنهنڪري $m\angle DHF = 110^\circ$
(7) $\angle CHF \cong \angle GHD$ (چوٽيءَ واريون آمهون سامهون واريون ڪنڊون آهن)
تنهنڪري $m\angle CHF = 70^\circ$

مثال 4. جيڪڏهن $m \parallel l$ ۽ $q \parallel p$ تہ پوءِ w، x، y ۽ z ڪنڊن جي ماپ لهو.



حل: سامهون ڏنل شڪل تي غور ڪرڻ سان معلوم ٿئي ٿو ته:

(1) ڪنڊ w متبادل ڪنڊ آهي 50° جي ڪنڊ جي.

تنهن ڪري $m\angle w = 50^\circ$

(2) $\angle x$ ۽ $\angle w$ نسبتي ڪنڊون آهن، تنهن ڪري

$m\angle x = m\angle w \Rightarrow m\angle x = 50^\circ$

(3) $\angle 2y$ متبادل ڪنڊ آهي $\angle x$ جي، تنهن ڪري

$$\therefore m\angle 2y = m\angle x \Rightarrow m\angle 2y = 50^\circ \Rightarrow \angle y = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$$

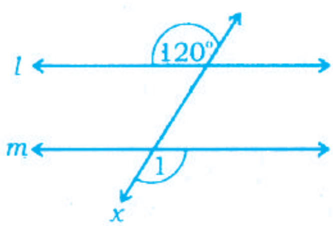
(4) $\angle z$ سپليمينٽ ڪنڊ آهي $\angle x$ جي. $\therefore m\angle x + m\angle z = 180^\circ$ يا $50^\circ + m\angle z = 180^\circ$

$$\Rightarrow m\angle z = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

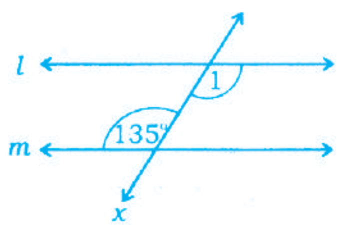
مشق 7.1

1. هيٺ ڏنل هر هڪ شڪل ۾ $\angle 1$ جي ماپ لهو، جڏهن ته هر هڪ شڪل ۾ ڪنهن هڪ ڪنڊ جي ماپ ڏنل آهي.

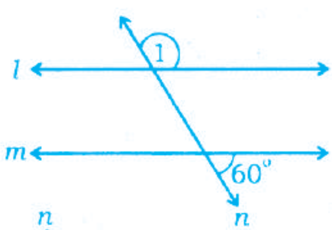
(a)



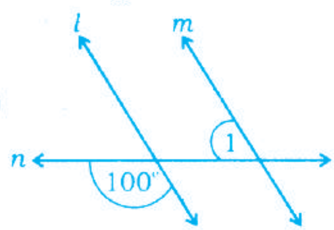
(b)

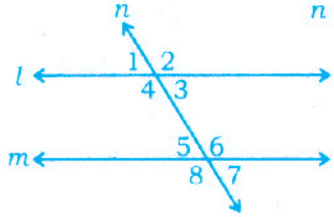


(c)



(d)





2. سامهون شڪل ۾ $l \parallel m$. شڪل ۾ ڄاڻايل سڀني ڪنڊن جي ماپ لهو، جڏهن $m\angle 3 = 65^\circ$

3. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ ۽ $\overleftrightarrow{EF}$ اِنهن کي ٽبڪن P ۽ Q تي اهڙيءَ طرح ڪپي ٿي جو $m\angle PQD = 50^\circ$ انهيءَ بيان مطابق شڪل ٺاهيو ۽ سڀني رهيل ڪنڊن جي ماپ لکو.

4. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ ۽ $\overleftrightarrow{EF}$ انهن کي ترتيبوار ٽبڪن G ۽ H تي ڪپي ٿي ته اُها ڪنڊ ٻڌايو جيڪا:

(i) $\angle GHC$ جي يڪسان آهي ۽ هڪ نسبتي ڪنڊ آهي.

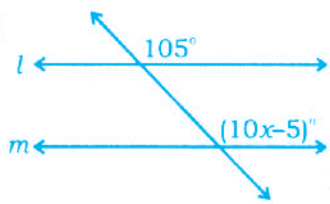
(ii) $\angle GHC$ جي يڪسان آهي ۽ هڪ متبادل ڪنڊ آهي.

(iii) $\angle GHC$ جي يڪسان آهي ۽ هڪ چوٽي واري آمهون سامهون واري ڪنڊ آهي.

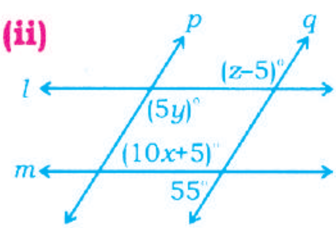
(iv) $\angle GHC$ جي سپليمينٽ ڪنڊ آهي جڏهن: (a) ڪپيندڙ ليڪ جي ساڳي پاسي اندرين ڪنڊ آهي (b) اندرين پرواري ڪنڊ آهي (c) ٻاهرين پر واري ڪنڊ آهي.

5. هيٺين شڪلين ۾ ڏيکاريل آهي ته $l \parallel m$ ۽ $p \parallel q$ انهن ۾ ڄاڻايل ڪنڊن x، y يا z جا مُلهه لکو.

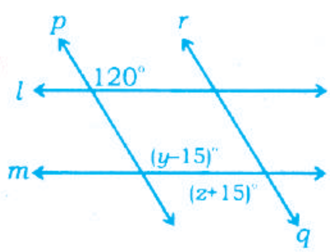
(i)



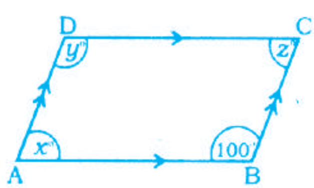
(ii)



(iii)



6. سامهون ڏنل پور وچوٽ پاسي چوڪنڊي جي شڪل ۾ $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ۽ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ شڪل ۾ ڄاڻايل ڪنڊن x، y ۽ z جا مُلهه لکو.



7.2 گهڻ ڪنڊو

7.2.1 گهڻ ڪنڊي جي وصف

ٽن يا ٽن کان وڌيڪ پاسن سان جُڙيل هڪ سطح واري بند شڪل کي گهڻ ڪنڊو چئجي ٿو. هتي ڪجهه مکيه گهڻ ڪنڊن جون شڪليون سندن مخصوص نالن سان ڏجن ٿيون.

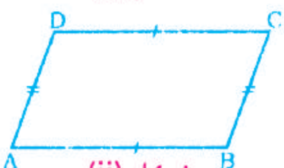
باب 7 جا ميٽري ءَ جا بنيادي تصور

ٽڪنڊو   چوڪنڊو   پنج ڪنڊو   ڇهه ڪنڊو   ست ڪنڊو

7.2.2 پور وچوٽ پاسي چوڪنڊي جي خاصيتن جو مشاهدو

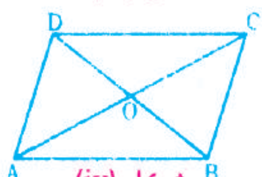
پور وچوٽ پاسي چوڪنڊي جي سامهون وارا پاسا ماپ ۾ برابر آهن. پور وچوٽ پاسي چوڪنڊي جا اُريب هڪٻئي کي اڌواڌ ڪن ٿا. اسان پهريان ڪان ئي ڄاڻون ٿا ته پور وچوٽ پاسو چوڪنڊو هڪ اهو چوڪنڊو آهي جنهن جا آمهون سامهون وارا پاسا پور وچوٽ آهن. مثال طور هيٺي سامهون ڏيکاريل شڪل (i) ۾ هڪ چوڪنڊو آهي، ڇاڪاڻ ته ان کي چارپاسا آهن پر جيئن ته $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ۽ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ آهن، تنهن ڪري چوڪنڊو ABCD ، هڪ پور وچوٽ پاسو چوڪنڊو آهي. علامتي طور پور وچوٽ پاسي چوڪنڊي کي $\parallel^m$ سان ظاهر ڪيون ٿا. مطلب ته مٿين شڪل $ABCD \parallel^m$ آهي. پور وچوٽ پاسي چوڪنڊي کي هيٺيون خاصيتون ٿين ٿيون.

شڪل (i)



شڪل (ii)

شڪل (iii)



شڪل (iv)

1. آمهون سامهون وارا پاسا ماڻ ۾ برابر ٿين ٿا

ان جو مطلب اهو آهي ته پور وچوٽ پاسي چوڪنڊي جا آمهون سامهون وارا پاسا يڪسان ٿين ٿا، جيئن سامهون واري شڪل (ii) ۾ $ABCD \parallel^m$ آهي ۽ ان ۾ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ۽ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

2. آمهون سامهون واريون ڪنڊون يڪسان ٿين ٿيون.

پور وچوٽ پاسي چوڪنڊي ۾ آمهون سامهون واريون ڪنڊون يڪسان آهن. جيئن ته سامهون ڏنل شڪل (iii) $ABCD \parallel^m$ آهي جنهن ۾

$\angle A \cong \angle C$ ۽ $\angle B \cong \angle D$

3. اُريب هڪ ٻئي کي پوري طرح اڌواڌ ڪن ٿا.

پور وچوٽ پاسي چوڪنڊي جا اُريب، هڪ ٻئي کي پوري طرح اڌواڌ ڪن ٿا.

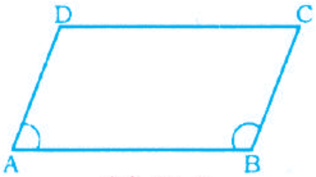
مثال طور سامهون ڏنل شڪل (iv) ۾ $ABCD \parallel^m$ ۾ اُريب $\overline{AC}$ ڪپي ٿو، اُريب $\overline{BD}$ کي ٽپڪي O وٽ اهڙي طرح جو ٽپڪو O وچون ٽپڪو چوائي ٿو $\overline{AC}$ ۽ $\overline{BD}$ جو. يعني اُريب $\overline{AC}$ ۽ $\overline{BD}$ هڪٻئي کي ٽپڪي O وٽ اڌواڌ ڪري ٿو. مطلب ته

$\overline{BO} \cong \overline{DO}$ ۽ $\overline{AO} \cong \overline{CO}$

۽ $m\,\overline{AO} = \frac{1}{2} m\,\overline{AC} = m\,\overline{CO}\ ,\ m\,\overline{BO} = \frac{1}{2} m\,\overline{BD} = m\,\overline{DO}$

4. پور وچوٽ پاسي چوڪنڊي جي هر هڪ پاسي جي ڇيڙن تي ٺهيل ڪنڊون سپليمينٽري ڪنڊون ٿين ٿيون.

پور وچوٽ پاسي چوڪنڊي ۾ ٻن لاڳيتن ڪنڊن جو هرهڪ جوڙو سپليمينٽري ڪنڊون ٺاهي ٿو يعني پور وچوٽ پاسي چوڪنڊي ۾ هرهڪ پاسي جي ڇيڙن تي ٺهيل ڪنڊون سپليمينٽري ٿين ٿيون.



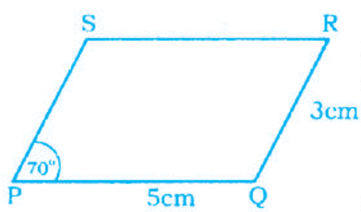
شڪل (v)

مثال طور سامهون شڪل (v) ۾ ABCD $^m\parallel$ آهي، جنهن ۾ $m\angle A + m\angle B = 180^o$ ساڳي طرح

$$m\angle B + m\angle C = m\angle C + m\angle D = m\angle D + m\angle A = 180^o$$

مثال 1. شڪل (vi) ۾ PQRS $^m\parallel$ آهي جنهن ۾

$m\overline{PQ} = 5\text{ cm}, m\overline{QR} = 3\text{ cm}$ ۽ $m\angle P = 70^o$ ته پور وچوٽ پاسي چوڪنڊي جي رهيل پاسن ۽ ڪنڊن جي ماپ لهو.



شڪل (vi)

حل (i): $\overline{RS} \cong \overline{PQ}$ (جيئن ته مليل پور وچوٽ پاسي چوڪنڊي جا آمهون سامهون وارا پاسا پور وچوٽ پاسي چوڪنڊي جي خاصيتن مطابق يڪسان آهن)

جيئن ته $m\overline{PQ} = 5\text{ cm}$ تنهن ڪري $m\overline{RS} = 5\text{ cm}$

(ii) $\overline{PS} \cong \overline{QR}$، $^m\parallel$ جا آمهون سامهون وارا پاسا يڪسان آهن) جيئن ته $m\overline{QR} = 3\text{ cm}$،

تنهن ڪري $m\overline{PS} = 3\text{ cm}$

(iii) $\angle P \cong \angle R$ (مليل $^m\parallel$ جون آمهون سامهون واريون ڪنڊون يڪسان آهن)

جيئن ته $m\angle P = 70^o$، تنهن ڪري $m\angle R = 70^o$

(iv) $m\angle P + m\angle Q = 180^o$ (ڪپيندڙ ليڪ جي ساڳي پاسي واريون اندريون ڪنڊون سپليمينٽري آهن). جيئن ته $m\angle R = 70^o$

$$\therefore m\angle Q = 180^o - 70 \Rightarrow m\angle Q = 110^o$$

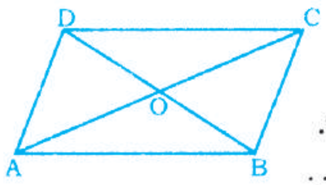
(v) $m\angle S = m\angle Q$ (پور وچوٽ پاسي چوڪنڊي جي آمهون سامهون واريون ڪنڊون)

جيئن ته $m\angle Q = 110^o$ تنهن ڪري $m\angle S = 110^o$

جيئن ته $m\angle P = 70^o$ ، تنهن ڪري $m\angle R = 70^o$

مثال 2. پور وچوٽ پاسي چوڪنڊي ABCD ۾ $m\overline{BD}$ (اُريب) $= 4\text{ cm}$ ۽ اُريب $\overline{AC}$ جي ماپ اُريب $\overline{BD}$ جو $\frac{3}{2}$ حصو آهي، ته $\overline{AC}$، $\overline{OC}$ ۽ $\overline{OD}$ جي ماپ لهو.

حل: اسان ڄاڻون ٿا ته: پور وچوٽ پاسي چوڪندي جا اُريب هڪ ٻئي کي اڌواڌ ڪن ٿا
وڌيڪ اِها ڳالهه مليل آهي ته: $m\overline{BD} = 4\text{ cm}$



$$m\overline{OD} = \frac{1}{2}\, m\overline{BD} = \frac{1}{2}(4\text{ cm}) = 2\text{ cm}$$

$$\therefore\ m\overline{AC} = \frac{3}{2}\, m\overline{BD} = \frac{3}{2} \times 4 = 6\text{ cm}$$

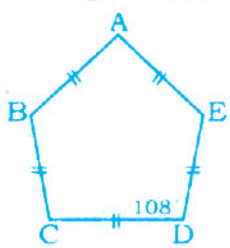
$$\because\ m\overline{OC} = \frac{1}{2}\, m\overline{AC} \Rightarrow m\overline{OC} = \frac{1}{2}(6) = 3\text{ cm}$$

7.2.3 پور پاسو پنج ڪندو، ڇهه ڪندو ۽ اٺ ڪندو

اُهو گهڻ ڪندو جنهن جا سڀ پاسا ماپ ۾ هڪ ٻئي جي يڪسان آهن. ان کي پور پاسو گهڻ ڪندو چئبو آهي. پور پاسي گهڻ ڪندي جون اندريون ڪندون هڪ ٻئي جي يڪسان ٿين ٿيون.

(a) پور پاسو پنج ڪندو

پور پاسو پنج ڪندو



هڪ پنج ڪندو (پنجن پاسن واري بند شڪل آهي) جنهن جا سڀ پاسا هڪ ٻئي جي يڪسان ٿين ٿا. ان کي پور پاسو پنج ڪندو سڏجي ٿو.

پور پاسي پنج ڪندي جي هرهڪ اندرين ڪند به هڪ ٻئي جي يڪسان ٿين ٿيون.

فرض ڪيو ته پور پاسي پنج ڪندي جي اندرين ڪندن جو جوڙ برابر آهي S ڳونيون ڪندون

اسان ڄاڻون ٿا ته: $S = (2n - 4)$

ڳونيون ڪندون $\therefore S = (2n - 4) \Rightarrow S = (2 \times 5 - 4) = (10 - 4) = 6$

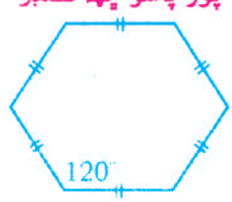
اهڙي طرح پور پاسي پنج ڪندي جي هر هڪ ڪند = $\dfrac{\text{6 ڳونيون ڪندون}}{5}$

يعني $\frac{6}{5}$ ڳونيون ڪندون = $\dfrac{6 \times 90^\circ}{5} = \dfrac{540^\circ}{5} = 108^\circ$

مطلب ته پورپاسي پنج ڪندي جي هر هڪ ڪند = 108°

(b) پورپاسو ڇهه ڪندو

پور پاسو ڇهه ڪندو

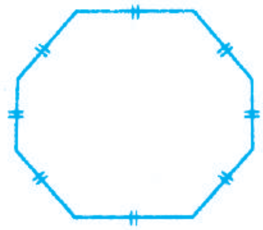


هڪ پورپاسو ڇهه ڪندو اُها شڪل آهي جيڪا هڪ جيترن ڇهن پاسن سان بند ٿيل شڪل ٿئي ٿي. ان کي پورپاسو ڇهه ڪندو چئبو آهي. پور پاسي ڇهه ڪندي جي هر هڪ اندرين ڪند جي ماپ 120° آهي.

ثابتي: پورپاسي ڇهه ڪندي جي هر هڪ ڪند، هڪ ٻئي جي يڪسان ٿئي ٿي.
فرض ڪيو ته پورپاسي ڇهه ڪندي جي سڀني اندرين ڪندن جو جوڙ S ڳونيون ڪندون آهي.
اسان ڄاڻون ٿا ته: $S = (2n - 4)$ ڳونيون ڪندون

$\therefore S = (2 \times 6 - 4) = (12 - 4) = 8$ ڳونيون ڪندون $= 8 \times 90^\circ = 720^\circ$

مطلب ته پورپاسي ڇهه ڪندي جي هر هڪ اندرين ڪند جي ماپ = $\dfrac{720^\circ}{6} = 120^\circ$



(c) پور پاسو اٺ ڪنبو

هڪ اٺ ڪنبو جيڪو اٺن پاسن سان بند ٿيل شڪل ٿئي ٿي. هن جو هر هڪ پاسو يڪسان ٿئي ٿو.

پور پاسي اٺ ڪنڊي جي هر هڪ ڪنڊ هڪٻئي جي يڪسان ٿئي ٿي.پور پاسي اٺ ڪنڊي جي سڀني اندرين ڪنڊن جو جوڙ S گونيون ڪنڊون آهي.

گونيون ڪنڊون $\therefore S = 2n - 4 = 2 \times 8 - 4 = 16 - 4 = 12$

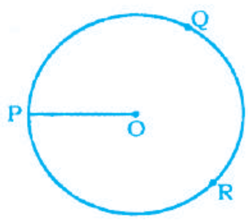
يعني پور پاسي اٺ ڪنڊي جي سڀني اندرين ڪنڊن جي ڪُل ماپ = 12 گونيون ڪنڊون

$$\Rightarrow \quad 12 \times 90^o = 1080^o$$

تنهن ڪري پور پاسي اٺ ڪنڊي جي هر هڪ ڪنڊ جي ماپ ٿيندي: $\Rightarrow \dfrac{1080^o}{8} = 135^o$

7.3 گول

هڪ گول هڪ سادي بند قوس نما شڪل ٿئي ٿي، جنهن جا سڀ ٽپڪا ڪنهن هڪ مقرر ٿيل ٽپڪي کان هڪ جيتري مفاصلي تي ٿين ٿا. انهيءَ مقرر ٽپڪي کي گول جو مرڪز چئجي ٿو.

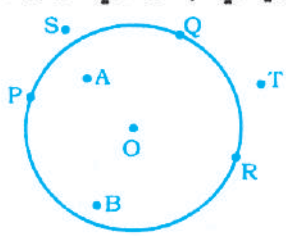


شڪل (i)

سامهون شڪل (i) ۾ PQR هڪ گول آهي. جنهن جو مرڪز ٽپڪو O آهي. هڪ گول کي عام طور تي ٽن ٽپڪن سان نالو چئجي ٿو يا ان کي نشاني "⊙" يا O سان ظاهر ڪجي ٿو ۽ پڙهجي ٿو گول O سامهون شڪل (i) ۾ $\overline{OP}$ نيم قطر جو ليڪ ٽڪر آهي. هتي $m\overline{OP}$ يعني ليڪ ٽڪر OP جي ماپ گول جو نيم قطر سڏجي ٿو.

7.3.1 گول جي اندر ۽ ٻاهر وارن ٽپڪن جو مشاهدو

جڏهن هڪ گول ڪنهن مٿاڇري تي ناهجي ٿو ته اُن مٿاڇري تي ٽپڪن جي سيٽن جا هيٺيان ٽي ماتحت سيٽ ملن ٿا:



شڪل (ii)

(1) گول جي سڀني ٽپڪن جو سيٽ: انهي سيٽ ۾ اُهي سڀ ٽپڪا اچي وڃن جن جو مفاصلو گول جي مرڪز کان ساڳيو هڪ جيترو ٿئي ٿو جنهن کي نيم قطر چئجي ٿو.

سامهون شڪل (ii) ۾ ٽپڪا R ،Q ،P انهيءَ سيٽ موجود آهن. ٽپڪن جي انهيءَ سيٽ کي گول جي بائونڊري يعني گهيرو چئجي ٿو.

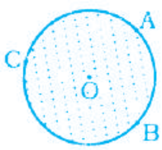
(2) گول جي اندرين پاسي وارن سڀني ٽپڪن جو سيٽ:

انهيءَ سيٽ ۾ اُهي سڀ ٽپڪا موجود آهن جن جو مفاصلو گول جي مرڪز کان نڪتل نيم قطر جي ڊيگهه کان گهٽ ٿئي ٿو. جڏهن ته هتي ٽپڪا A ۽ B گول جو اندريون آهن.

(گول جا نيم قطر آهن): $\because m\,\overline{OB} < m\,\overline{OP}$ يا $m\,\overline{OQ}$ يا $m\,\overline{OR}$

$m\overline{OA} < m\,\overline{OP}$ يا $m\,\overline{OQ}$ يا $m\,\overline{OR}$

(3) گول جي ٻاهرين پاسي وارن سڀني ٽپڪن جو سيٽ: انهيءَ سيٽ ۾ اُهي سڀ ٽپڪا شامل آهن جن جو مفاصلو مرڪز کان نڪتل ليڪ ٽڪر يعني نيم قطر کان وڏو آهي. ٽپڪن جي انهيءَ سيٽ کي گول جو ٻاهريون سڏيو وڃي ٿو. مٿي شڪل (ii) ۾ ٽپڪا S ۽ T گول جو ٻاهريون آهن، ∵ $m\,\overline{OS} > m\,\overline{OP}$ يا $m\,\overline{OR}$ يا $m\,\overline{OQ}$ ($m\,\overline{OT} > m\,\overline{OP}$ يا $m\,\overline{OR}$ يا $m\,\overline{OQ}$)

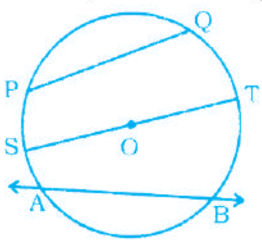


شڪل (iii)

گول جي سڀني اندرين ٽپڪن جي سيٽ ۽ گول جي گهيري تي سڀني ٽپڪن جي سيٽ جي مجموعي يعني ٻنهي سيٽن جي ميلاپ کي گول جو علائقو سڏيو وڃي ٿو.

گول ۽ گول جو علائقو ٻه مختلف جاميٽريءَ جا اصطلاح سڏيا وڃن ٿا ۽ انهيءَ ڪري رياضيدان به ٻنهي اصطلاحن کي هڪ ٻئي سان نه ٿا مٽائين.

7.3.2 گول سان تعلق رکندڙ اصلاحن جو بيان



شڪل (iv)

گول جو سيڪٽر، سيڪنٽ، زه، گولائيءَ وارا ٽپڪا، گول جي چُهٽي ليڪ ۽ هم مرڪز گول

قوس: گول جي گهيري جي ڪجهه حصي کي قوس چئجي ٿو.

گول جو قوس ننڍو يا وڏو ٿي سگهي ٿو.

گول جو ننڍو قوس اُهو قوس ٿئي ٿو جيڪو انهيءَ گول جي اڌ گول کان ننڍو ٿئي ٿو. ساڳي وقت گول جو وڏو قوس اُهو قوس آهي جيڪو ساڳي گول جي اڌ گول کان وڏو ٿئي ٿو. مٿي ڏنل شڪل (iii) ۾ $\widehat{AB}$ گول جو ننڍو قوس آهي ۽ $\widehat{ACB}$ گول جو وڏو قوس آهي.

زه: هڪ ليڪ ٽڪر جيڪو گول جي گهيري کي ٻن ٽپڪن سان پاڻ ۾ ملائي، انهي ليڪ ٽڪر کي زه سڏجي ٿو. هڪ زه جيڪو گول جي مرڪز مان گذري، ان کي گول جو قطر سڏجي ٿو.

قطر جي ماپ = نيم قطر × 2 يعني $d = 2r$

مٿي ڏنل شڪل (iv) ۾ $\overline{PQ}$ هڪ زه آهي. $\overline{ST}$ به هڪ زه آهي. جيئن ته اهو گول جي مرڪز مان گذري ٿو تنهن ڪري اهو گول جو قطر آهي.

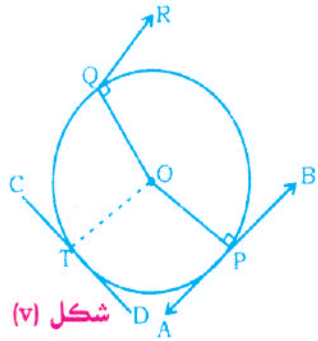
سيڪنٽ (گول جي ڪپيندڙ ليڪ): اُها ليڪ جيڪا گول کي ڪن به ٻن ٽپڪن تي ڪپي، اُن کي سيڪنٽ يا گول جي ڪپيندڙ ليڪ چئبو آهي. مٿي ڏنل شڪل (iv) ۾ $\overleftrightarrow{AB}$ گول جي ڪپيندڙ ليڪ يعني سيڪنٽ آهي.

نوٽ: مٿين شڪل (iv) ۾ $\overline{AB}$ زه آهي، جڏهن ته $\overleftrightarrow{AB}$ سڪينٽ آهي هتي $\overline{AB}$، $\overleftrightarrow{AB}$ جو ماتحت سيٽ آهي.

ڇُهٽي ليڪ: هڪ ليڪ (ليڪ ٽڪر يا شعاع) گول جي ڇهٽي ليڪ سڏجي ٿو. جيڪڏهن اِها گول کي ڪنهن بہ فقط هڪ ٽٻڪي تي ملي ٿي يا ڪَپي ٿي يعني اِها گول کي ڪنهن بہ هڪ ٽٻڪي تي ڇُهي ٿي.

سامهون شڪل (v) ۾ $\overleftrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{QR}$ ۽ $\overline{CD}$ گول جون ڇهٽيون ليڪون آهن جيڪي ٽٻڪي O مرڪز واري گول کي ٽٻڪي P، Q ۽ T تي ڇُهن ٿيون.

تنهنڪري ٽٻڪا P، Q ۽ T ڇُهڻ وارا ٽٻڪا آهن. نيم قطر وارو ليڪ ٽُڪر هميشہ ڇُهٽي ليڪ تي ڇُهڻ ٽٻڪي وٽ عمود ٿئي ٿو يعني $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OP}$، $\overrightarrow{QR} \perp \overline{OQ}$ ۽ $\overline{CD} \perp \overline{OT}$.

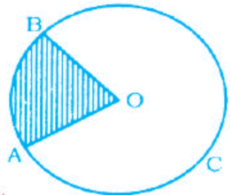


شڪل (v)

سيڪٽر: گول جو اُهو گولائيءَ وارو حصو جيڪو گول جي ٻن نيم قطرن ۽ هڪ قوس سان گڏجي ٺهجي ٿو.

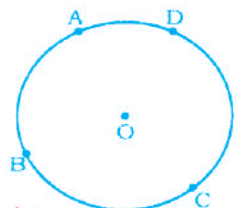
سامهون شڪل (vi) ۾ شيڊ ٿيل حصو گول جو سيڪٽر آهي جنهن جو مرڪز ٽٻڪو O آهي. اهو سيڪٽر ٻن نيم قطرن $\overline{OA}$ ۽ $\overline{OB}$ ۽ ننڍي قوس $\overset{\frown}{AB}$ سان گڏجي ٺهيو آهي.

اِها ڳالهہ پڻ ڌيان تي رکو تہ گول جو غير شيڊ ٿيل حصو پڻ سيڪٽر آهي جيڪو ٻن نيم قطرن $\overline{OB}$ ۽ $\overline{OA}$ ۽ وڏي قوس $\overset{\frown}{ACB}$ سان گڏجي ٺهيو آهي. هي گول جو غير شيڊ ٿيل حصو آهي.



شڪل (vi)

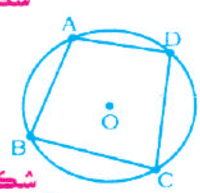
گولائيءَ وارا ٽٻڪا: جيڪڏهن چار يا وڌيڪ ٽٻڪا اهڙي طرح آهن جو هڪ گول انهن چئني يا وڌيڪ ٽٻڪن مان گذري ٿو. انهن ٽٻڪن کي گولائيءَ وارا ٽٻڪا سڏجي ٿو. سامهون شڪل (vii) ۾ ٽٻڪا A، B، C ۽ D گولائيءَ وارا ٽٻڪا آهن.



شڪل (vii)

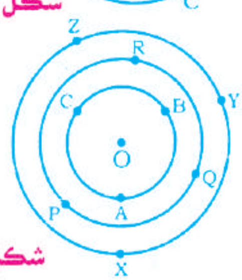
مستطيل ۽ چورس جي چوٽين وارا ٽٻڪا هميشہ گولائيءَ وارا ٽٻڪا سڏجن ٿا، چاڪاڻ تہ انهن جون آمهون سامهون چوٽيءَ واريون ڪنڊون سپليمينٽري ٿين ٿيون. سامهون شڪل (viii) ۾ ٽٻڪا A، B، C ۽ D گولائيءَ وارا ٽٻڪا آهن. تنهن ڪري

$$m\angle A+m\angle C=180^\circ \text{ ۽ } m\angle B+m\angle D=180^\circ$$



شڪل (viii)

هم مرڪز گول: ٻہ يا ٻن کان وڌيڪ گول جن جو مرڪز ساڳيو ٿئي ٿو پر سندن نيم قطر مختلف ماپ جا ٿين ٿا تہ اهڙن گولن کي هم مرڪز گول چئجي ٿو. سامهون شڪل (ix) ۾ $\odot ABC$، $\odot PQR$ ۽ $\odot XYZ$ ساڳي مرڪز O وارا گول آهن، يعني هم مرڪز گول آهن.



شڪل (ix)

مشق 7.2

1. هيٺ ڏنل بيانن مان غلط جملا ڳولهيو.

(i) هڪ مستطيل هڪ پور وچوٽ پاسو چوڪندو آهي.

(ii) هڪ چورس، هڪ پور وچوٽ پاسو چوڪندو ءِ ساڳي وقت هڪ مستطيل پڻ آهي.

(iii) پور وچوٽ پاسي چوڪندي ۾ ڪپيندڙ ليڪ جي ساڳي پاسي واريون اندريون ڪندون سپليمينٽري ٿين ٿيون.

(iv) جيڪڏهن هڪ ڪپيندڙ ليڪ ساڳي سطح ۾ ٻن ليڪن کي ڪٽي ٿي ته متبادل اندريون ڪندون هميشه يڪسان نه ٿيون ٿين.

(v) جيڪڏهن هڪ ڪپيندڙ ليڪ جي ساڳي پاسي واريون اندريون ڪندون سپليمينٽري آهن ته پوءِ چئبو ته ڪپيندڙ ليڪ ڪپي ٿي ٻن ليڪن کي ساڳي سطح ۾ جيڪي هڪ ٻئي کي نه ٿيون ڪپين.

(vi) جيڪڏهن ڪنهن چوڪندي جا اُريب هڪ ٻئي کي اڌواڌ ڪن ٿا ګوني ڪندن تي، ته اُهو چوڪندو، پور وچوٽ پاسو چوڪندو آهي.

(vii) ڪنهن مستطيل ۾، اُن جا اُريب هڪٻئي کي ګوني ڪندن تي اڌواڌ نه ٿا ڪن.

(viii) ڪنهن پور وچوٽ پاسي چوڪندي ۾ جيڪڏهن ڪو هڪ اُريب ڪاهيو وڃي ٿو ته اُهو ٻه جوڙا متبادل ڪندن جا ٻڻائي ٿو ءِ هرهڪ جوڙي ۾ يڪسان ڪندون ٿين ٿيون.

(ix) هڪ چورس، پور پاسو چوڪندو ٿئي ٿو.

(x) جيڪڏهن ڪي ٻه ٻه ليڪون ڪيترو به چو نه وڌايون وڃن ته اُهي ٻئي ليڪون هڪ ٻئي کي ڪنهن به صورت ۾ نه ٿيون ڪپين ته چئبو ته اُهي ٻئي ليڪون ٿي سگهي ٿو يا نه به ٿي سگهي ته اِهي پور وچوٽ ليڪون هجن.

2. PQRS پور وچوٽ پاسي چوڪندي جو احاطو 18 cm آهي، جيڪڏهن سندس هڪ پاسي جي ڊيگهه ماپ ٻئي کان ٻيڻي آهي ته هر هڪ پاسي جي ڊيگهه لهو.

3. هڪ پور وچوٽ پاسي چوڪندي ABCD ۾ آمهون سامهون وارين ڪندن جي هڪ جوڙي جو جوڙ 130° آهي ته چوڪندي جي هر هڪ ڪند جي ماپ لهو.

4. پور وچوٽ پاسي چوڪندي WXYZ ۾ جيڪڏهن $\angle X$ جي ماپ، $\angle W$ جي ماپ کان ٻيڻي آهي ته چوڪندي جي هر هڪ ڪند جي ماپ لهو.

5. هڪ پوڙ وچوٽ پاسي چوڪندي ABCD ۾، پهرين اريب $\overline{AC}$ جي ڊيگھ، ٻي اريب $\overline{BD}$ کان ٻيڻي آهي. جيڪڏهن چوڪندي جي ٻنهي اريبن جي ڊيگھه 9 سينٽي ميٽر آهي، ته هر هڪ اريب جي ڌار ڌار ڊيگھه لهو. جيڪڏهن ٻئي اريب هڪ ٻئي کي ٽبڪي P تي ڪپين ٿيون، ته $\overline{PA}$ ۽ $\overline{PB}$ جي ڊيگھه لهو ۽ $m\,\overline{PA} : m\,\overline{PB}$ جو تعلق پڻ معلوم ڪريو.

6. هيٺين جون وصفون بيان ڪريو:

(i) پور وچوٽ پاسو چوڪندو (ii) پورو پاسو پنج ڪندو (iii) پورو پاسو اٺ ڪندو
(iv) زهه (v) سيڪنٽ (vi) سيڪٽر (vii) ڇهٽي ليڪ
(viii) گولائي وارا ٽبڪا (ix) هم مرڪز گول (x) قطر

7. هڪ گول جنهن جو مرڪز ٽبڪو O آهي، سندس نيم قطر 3 س م آهي. ٽي ٽبڪا P، Q ۽ R ساڳي سطح ۾ اهڙي طرح آهن جو ٽبڪي P جو مفاصلو ٽبڪي O تائين 2.5 س م آهي. ٽبڪي Q جو مفاصلو ٽبڪي O تائين 4 س م آهي ۽ ٽبڪي R جو مفاصلو ٽبڪي O تائين 3 سينٽي ميٽر آهي. ٻڌايو ته مليل گول سان هر هڪ ٽبڪي جي ڇا بيهڪ واري حالت آهي.

8. هيٺين بيانن مان صحيح بيان ڳولهيو ۽ جيڪڏهن ڪو بيان غلط آهي ته ان کي درست ڪري لکو.

(i) قطر جيڪو گول جي مرڪز مان گذري ٿو، ان کي زهه چيو وڃي ٿو.

(ii) گولائي واري علائقي جو اهو حصو جيڪو ٻن نيم قطرن ۽ هڪ سيڪٽر جي وچ ۾ ٺهي ٿو، ان کي قوس چيو وڃي ٿو.

(iii) سيڪنٽ يعني ڪپيندڙ ليڪ اهو هڪ ليڪ ٽڪر آهي جيڪو گول کي ٻن ٽبڪن وٽ ڪپي ٿو.

(iv) ڪو به هڪ ٽبڪو جيڪو گول جي ٻاهر واقع ٿئي، جيڪڏهن ان ٽبڪي جو گول کان مفاصلو انهيءَ گول جي نيم قطر واري مفاصلي کان وڌو آهي.

(v) ٽي يا چار ٽبڪا گولائيءَ وارا ٽبڪا سڏجن ٿا. جيڪڏهن هڪ گول انهن ٽبڪن مان گذري سگهي ٿو.

(vi) پور وچوٽ پاسي چوڪندي جون چوٽيون گولائي وارا ٽبڪا ٿين ٿا. يعني پور وچوٽ پاسي چوڪندي جي چوٽين مان هڪ گول گذري سگهي ٿو.

(vii) جيڪڏهن ڪي به چار ٽبڪا گولائيءَ وارا ٽبڪا آهن ته انهن ٽبڪن سان ٺهندڙ چوڪندي جون آمهون سامهون وارين ڪنڊن جا جوڙا ڪامپليمينٽري ڪندون آهن.

(viii) ڪنهن به گول جو قوس انهيءَ گول جو ماتحت سيٽ نه آهي.

(ix) هڪ گول جو نيم قطر، ان گول جي قطر کان ڊيگھه ۾ ٻيڻو آهي.

(x) گول جي ڇهٽي ليڪ جي پور وچوٽ ليڪ ڇهڻ ٽبڪي وٽ، گول جي مرڪز مان گذرندي.

جائزي واري مشق 7

1. هيٺيان خال مناسب لفظن سان پريو.

(i) ٻہ _____ ليڪون پور وچوٽ سڌيون وڃن ٿيون، جيڪڏهن اُهي پاڻ ۾ هڪ ٻئي کي نہ ٿيون ڪپين.

(ii) ٻہ ليڪون جيڪي هڪ ساڳي ليڪ جي پور وچوٽ آهن تہ اُهي بہ ليڪون پاڻ ۾ _____ هونديون.

(iii) هڪ ليڪ ٽڪر جيڪو ٽڪنڊي جي هڪ پاسي جي _____ مان گذري ٿو ۽ ٻي پاسي جي پور وچوٽ وڃي ٽڪنڊي جي _____ پاسي کي اڌو اڌ ڪري ٿو.

(iv) ٻن پور وچوٽ ليڪن کي هڪ ڪپيندڙ ليڪ سان، جيڪي ڪنڊن جا جوڙا ٺهن ٿا، اُهي هن ريت آهن: (a) نسبتي ڪنڊون _____ (b) اندريون ڪنڊون _____ (c) _____ ڪنڊون _____ جي _____

(v) جڏهن هڪ ڪپيندڙ ليڪ ٻن پور وچوٽ ليڪن کي ڪپي ٿي تہ (a) _____ ۽ _____ ڪنڊن جا جوڙا يڪسان ٿين ٿا (b) اندرين _____ جا جوڙا جيڪي ڪپيندڙ ليڪ جي ساڳي _____ آهن، اُهي _____ ٿين ٿيون.

(vi) گهڻ ڪندو اُها هڪ بند شڪل هڪ _____ تي آهي، جيڪا _____ يا _____ کان وڌيڪ پاسن تي مشتمل آهي.

(vii) پور وچوٽ پاسو چوڪندو هڪ اُهو چوڪندو آهي جنهن جا آمهون سامهون وارا پاسا _____ ۽ _____ ٿين ٿا.

(viii) اُهو چوڪندو جنهن جا اُريب هڪ ٻئي کي اڌواڌ ڪن ٿا اُهو _____ آهي.

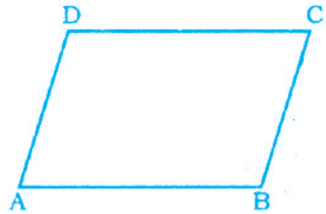
(ix) هڪ پور وچوٽ پاسي چوڪندي ۾ _____ ڪنڊون جيڪي چوڪندي جي پاسن جي ڇيڙن تي ٺهن ٿيون، اُهي سپليمينٽري ڪنڊون آهن.

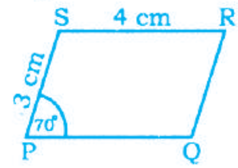
(x) گهڻ ڪندو جنهن ۾ اُن جا سڀ پاسا يڪسان ٿين ٿا، اُن کي _____ گهڻ ڪندو چئبو آهي.

(xi) _____ ٽٻڪن جو اُهو سيٽ آهي، جيڪي ڪنهن مقرر هڪ ٽٻڪي يعني مرڪز کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي.

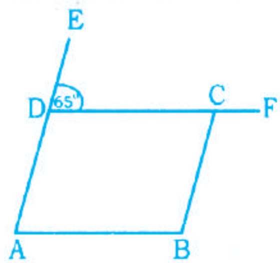
(xii) هڪ ليڪ ٽُڪر جيڪو گول جي ڪن بہ ٻن ٽٻڪن کي ملائي، اُن کي _____ چئجي ٿو.

2. هيٺ ڏنل ٻن پور وچوٽ چوڪندن کي ڏسو.





$\overline{PS} \parallel \overline{AD}$ ۽ $\overline{RS} \parallel \overline{CD}$ $m\,\overline{PS} = 3$ cm, $m\,\overline{RS} = 4$ cm ۽ $m\angle P = 70^\circ$
تہ پور وچوٽ پاسي چوڪندي PQRS جي باقي ڪندن جي ۽ پاسن جي ماپ لهو.
جيڪڏهن پور وچوٽ پاسي چوڪندي ABCD جا پاسا پور وچوٽ پاسي چوڪندي PQRS کان $1\frac{1}{2}$ دفعا وڏا آهن تہ پور وچوٽ پاسي چوڪندي PQRS جي سيني پاسن ۽ ڪندن جي ماپ لهو. چا $\left(m\angle A = \frac{3}{2}\, m\angle P\right)$؟



3. پور وچوٽ پاسي چوڪندي ABCD ۾ پاسي $\overline{AD}$ کي ٽيڪي E تائين ۽ پاسي $\overline{DC}$ کي ٽيڪي F تائين وڌايو ويو آهي ۽ $m\angle CDE = 65^\circ$ تہ باقي رهيل ڪندن جي ۽ هيٺين ڪندن جي جوڙن جي ماپ لهو.

(i) نسبتي ڪنبون **(ii)** متبادل ڪنبون **(iii)** سپليمينٽري ڪندن جا سڀ جوڙا

4. هيٺين اصطلاحن جون شڪليون ٺاهيو ۽ وصفون لکو.

(i) پور وچوٽ ليڪون **(ii)** پور وچوٽ پاسو چوڪندو **(iii)** قوس **(iv)** سيڪنٽ
(v) ڇهٽي ليڪ **(vi)** گولائيءَ وارا ٽيڪا **(vii)** هم مرڪز گول

5. هيٺين گهڻ ڪندن جون وصفون لکو ۽ هر هڪ صورت ۾ اندرين ڪندن جو مُلھ معلوم ڪريو.

(i) پورپاسو پنج ڪندو **(ii)** پورپاسو ڇهہ ڪندو **(iii)** پورپاسو اٺ ڪندو

6. هيٺين سوالن جا جواب ڏيو.

(i) هڪ گول جو نيم قطر 4 س م آهي. انهيءَ گول جي قطر جي ڊيگهہ ماپ ڇا ٿيندي؟
(ii) ٽي هم مرڪز گول ٺاهيا ويا آهن جنهن جو مرڪز O ٽيڪو آهي. انهن ٽنهي گولن جا قطر ترتيبوار 5 س م، 7 س م ۽ 10 س م آهن. ٽنهي گولن جا نيم قطر معلوم ڪريو.
(iii) هيٺين حالتن مان ڪيترا گول ٺاهي سگهجن ٿا:
(a) ٽن غير هم ليڪ ٽيڪن مان (b) چئن گولائيءَ وارن ٽيڪن مان

خلاصو

- ٻه هر سطحي ليڪون جيڪي هڪ ٻئي کي نه ٽيون ڪپين، اُهي پور وچوٽ ليڪون آهن.
- ٻه ليڪون جيڪي هڪ ٽئي ساڳي ليڪ جي پور وچوٽ آهن ته اُهي ٻئي ليڪون پاڻ ۾ هڪ ٻئي جي پور وچوٽ هونديون.
- جيڪڏهن ٽي پور وچوٽ ليڪون آهن، جن کي ٻه ڪپيندڙ ليڪون اهڙي طرح ڪپين ٿيون جو هڪ ڪپيندڙ ليڪ تي ٺهندڙ ٻه ليڪ ٽڪر پاڻ ۾ برابر ٿين ٿا. اهڙي حالت ۾ ٻي ڪپيندڙ ليڪ سان ٺهندڙ ٻه نوان ليڪ ٽڪر به پاڻ ۾ برابر ٿيندا.
- هڪ ليڪ ٽڪر جيڪو ٽِڪنڊي جي هڪ پاسي جي وچين ٽٻڪي مان گذري، ٻي پاسي جي پور وچوٽ وڃي ٿو. اُهو ٽڪنڊي جي ٽئين پاسي کي اڌواڌ ڪري ٿو.
- جڏهن هڪ ڪپيندڙ ليڪ ٻن پور وچوٽ ليڪن کي ڪپي ٿي ته:
  (i) نسبتي ڪنڊن جا جوڙا يڪسان ٿين ٿا.
  (ii) متبادل اندرين ڪنڊن جا جوڙا يڪسان ٿين ٿا.
  (iii) ڪپيندڙ ليڪ جي ساڳي پاسي واريون اندريون ڪنڊون سپليمينٽري ڪنڊون ٿين ٿيون.
- پور وچوٽ پاسو چوڪنڊو هڪ اُهو چوڪنڊو آهي جنهن جا آمهون سامهون وارا پاسا پور وچوٽ ٿين ٿا.
- هڪ گهڻ ڪنڊو هڪ سطح واري بند شڪل ٿئي ٿي جيڪا ٽن يا ٽن کان وڌيڪ پاسن وارن ليڪ ٽڪرن سان ٺهيل ٿئي ٿي.
- پور پاسي گهڻ ڪنڊي ۾ سڀ پاسا ۽ سڀ ڪنڊون پاڻ ۾ يڪسان ٿين ٿيون.
- هڪ گول سطح تي سڀني ٽٻڪن جو اهو سيٽ آهي جنهن ۾ سڀ ٽٻڪا ڪنهن مقرر ٽٻڪي کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهن.
- زهه هڪ ليڪ ٽڪر آهي جنهن جا ڇيڙا گول تي ئي ٿين ٿا.
- سيڪنٽ: هڪ اُها ليڪ آهي جيڪا گول کي ٻن ٽٻڪن تي ڪپي ٿي.
- سيڪٽر گول جي علائقي جو اُهو هڪ حصو آهي جيڪو ٻن رداسي ليڪ ٽڪرن ۽ هڪ قوس سان بند ٿيل ٿئي ٿو.
- چار يا وڌيڪ ٽٻڪا جيڪي گول تي ئي ٿين ٿا، انهن کي گول جا ٽٻڪا چيو وڃي ٿو.
- ٻه يا ٻن کان وڌيڪ گول جيڪي هڪ ساڳي ئي مرڪز جي مختلف نير قطرن سان ٺهجن ٿا، انهن کي هم مرڪز گول چيو وڃي ٿو.
- هڪ ليڪ (يا شعاع يا ليڪ ٽڪر) کي گول جي ڇهڻي ليڪ چئجي ٿو، جيڪا گول کي فقط هڪ ئي ٽٻڪي تي ڇهي.

باب 8

عملي جاميٽري

8.1 چوڪور ٺاهڻ

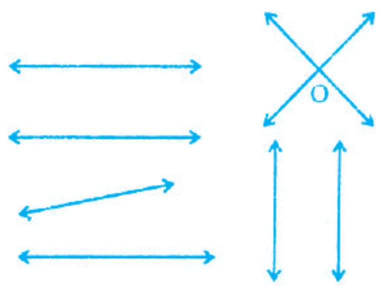
8.1.1 ميلاپ ڏانهن مائل ٿيندڙ (غير پور وچوٽ) ليڪن جي وصف ۽ معائنو (مشاهدو) ۽ اُنهن ليڪن جي وچ واري ڪنڊ جي ماپ بنا ليڪن وڌائڻ جي معلوم ڪرڻ

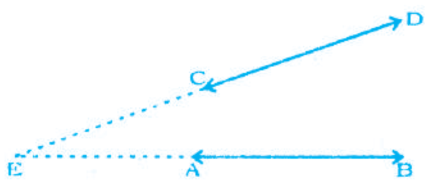
جڏهن اسان ڪنهن بہ مٿاڇري تي ڪي بہ ٻہ ليڪون ٺاهيون ٿا تہ اُهي ليڪون يا تہ

(i) ڪپينديون هڪ ٻئي کي هڪ ٽٻڪي تي

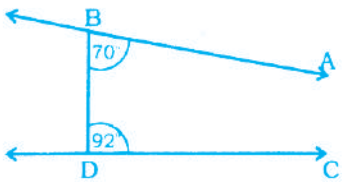
يا (ii) پور وچوٽ هونديون

يا (iii) نہ تہ اُهي پاڻ ۾ هڪ ٻئي کي ڪپينديون ۽ نہ وري اُهي هڪ ٻئي جي پور وچوٽ هونديون. ان حالت ۾ اُهي ليڪون هڪ ٻئي کي تڏهن ڪپينديون جڏهن انهن کي وڌايو وڃي ٿو. اهڙين ٻن ليڪن کي ميلاپ (پاڻ ۾ هڪ ٻي کي ڪپڻ) ڏانهن مائل ٿيندڙ ليڪون چيو وڃي ٿو.





تعريف: ٻہ ليڪون يا ليڪ ٽڪر ڪنهن مٿاچري ۾ جيڪي پاڻ ۾ هڪ ٻئي کي نہ ٿا ڪپين ۽ نہ وري اُهي هڪ ٻئي جي پور وچوٽ آهن پر اُهي هڪ ٻئي کي ضرور ڪپينديون. جڏهن انهن کي وڌايو وڃي ٿو. اهڙين ليڪن کي ميلاپ ڏانهن مائل ليڪون چيو وڃي ٿو.
مٿين شڪل ۾ $\overleftrightarrow{AB}$ ۽ $\overleftrightarrow{CD}$ ميلاپ ڏانهن مائل ليڪون آهن، ڇاڪاڻ تہ جڏهن $\overleftrightarrow{BA}$ ۽ $\overleftrightarrow{DC}$ وڌايون وڃن ٿيون تہ اُهي پاڻ ۾ هڪ ٽٻڪي E تي ملي ڪري هڪ ڪنڊ $\angle AEC$ ٺاهينديون. انهيءَ طريقہ ڪار کي ٽٻڪن وارين ليڪن ذريعي ظاهر ڪيوويو آهي.
ساڳي طرح هاڻي ليڪ l ۽ m بہ هڪ ٻئي کي ڪپينديون جڏهن انهن کي ميلاپ ڏانهن مائل واري پاسي وڌايو ويندو. اها ڳالهہ ڌيان ۾ رکو تہ ميلاپ ڏانهن مائل واريون ليڪون هڪ پاسي تہ هڪ ٻئي ڏانهن مائل يعني هڪ ٻئي ڏانهن ويجهيون ٿينديون وڃن ٿيون جڏهن تہ ٻئي پاسي ڏانهن اِهي غير مائل (Non-Converging) يا ڳليل (Diverging) يعني هڪ ٻئي کان پري ٿينديون وڃن ٿيون. مٿين شڪل ۾ $\overleftrightarrow{AB}$ ۽ $\overleftrightarrow{CD}$ ٽٻڪن A ۽ C واري پاسي مائل ٿينديون وڃن ٿيون جڏهن تہ ٽٻڪن B ۽ D واري پاسي کان اُهي ڳلنديون يعني غير مائل (Non-Converging) ٿينديون وڃن ٿيون.

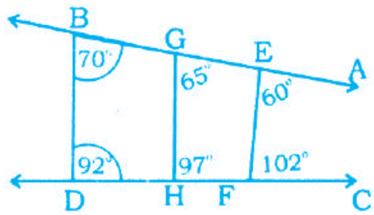


ميلاپ ڏانهن مائل ٻن ليڪن جي وچ ۾ ٺهندڙ ڪنڊ جي ماپ لهڻ ليڪن کي بنا وڌائڻ جي.

مليل: $\overleftrightarrow{AB}$ ۽ $\overleftrightarrow{CD}$ ٻه ميلاپ ڏانهن مائل ليڪون آهن.

گهربل: $\overleftrightarrow{AB}$ ۽ $\overleftrightarrow{CD}$ جي وچ ۾ ٺهندڙ ڪنڊ جي ماپ لهڻ بنا ليڪن وڌائڻ جي.

جوڙجڪ جا ڏاڪا



1. ڪليل پاسي وارن ٽپڪن B ۽ D کي پاڻ ۾ ملائي $\overline{BD}$ ٺاهيو.
2. $\angle ABD$ جي ماپ، ڪنڊ ماپ (Protractor) جي وسيلي لهو. ڏسون ٿا ته $m\angle ABD = 70^o$
3. ساڳي طرح $\angle CDB$ جي به ماپ ڪنڊ ماپ وسيلي لهو. ڏسون ٿا ته $m\angle CDB = 92^o$
4. ٻنهي ميلاپ ڏانهن مائل ليڪن جي وچ واري ڪنڊ فرض ڪيو ته x ماپ جي آهي

$m\angle x = 180^o - (m\angle AGH + m\angle AEF)$	$m\angle x = 180^o - (m\angle ABD + m\angle CDB)$
$= 180^o - (65^o + 97^o)$	$= 180^o - (70^o + 92^o)$
$= 180^o - 162^o$	$= 180^o - 162^o$
$= 18^o$	$= 18^o$

نوٽ: اها ڳالهه ڌيان طلب آهي ته ٻنهي ليڪن جي کليل پاسي، ڪن به ٻن ٽپڪن کي پاڻ ۾ ملائي ليڪ ٺڪر ٺاهينداسين ته ليڪ ٺڪر سان ٺهندڙ ٻنهي ڪنڊن سان جوڙ وري به ساڳيو ئي ٿيندو. جيئن شڪل ۾ $\overleftrightarrow{EF}$ ۽ $\overleftrightarrow{GH}$ ٻڌيو آهي.

8.1.2 ميلاپ ڏانهن مائل ٻن ليڪن جي وچ واري ڪنڊ کي اڌو اڌ ڪرڻ بنا ليڪن وڌائڻ جي.

مليل: $\overleftrightarrow{AB}$ ۽ $\overleftrightarrow{CD}$ ٻه ميلاپ ڏانهن مائل واريون ليڪون آهن.

گهربل: ٻنهي ميلاپ ڏانهن مائل وارين ليڪن سان ٺهندڙ وچ واري ڪنڊ کي اڌواڌ ڪرڻ، بنا ليڪن وڌائڻ جي.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

1. مناسب جاءِ تي، هڪ ڪپيندڙ ليڪ $\overleftrightarrow{AB}$ ۽ $\overleftrightarrow{CD}$ ٽِٻڪي G تي ۽ ٽِٻڪي H تي ٺاهيو.
2. $\angle AGH$ ۽ $\angle CHG$ جا اڌواڌ ڪندڙ ٺاهيو جيڪي هڪ ٻئي کي ٽِٻڪي P تي ڪپين.
3. $\angle BGH$ ۽ $\angle DHG$ جا اڌواڌ ڪندڙ ٺاهيو جيڪي هڪ ٻئي کي ٽِٻڪي Q تي ڪپين.
4. ٽِٻڪن Q ۽ P کي ملائي $\overline{QP}$ ٺاهيو ۽ ان کي ٽِٻڪي E تائين وڌايو. ان ريت ٻن ميلاپ ڏانهن مائل ليڪن کي بنا وڌائڻ جي وچ ۾ نهندڙ ڪنڊ جو، $\overrightarrow{QP}$ گهربل اڌواڌ ڪندڙ آهي.

8.1.3 هڪ چورس ٺاهيو جڏهن:

(a) ان جي اُريب جي ماپ مليل آهي.
(b) هڪ اُريب ۽ هڪ پاسي جو تفاوت مليل آهي.
(c) هڪ اُريب ۽ هڪ پاسي جو جوڙ مليل آهي.

(a) هڪ چورس ٺاهيو جڏهن سندس اُريب جي ماپ مليل آهي.

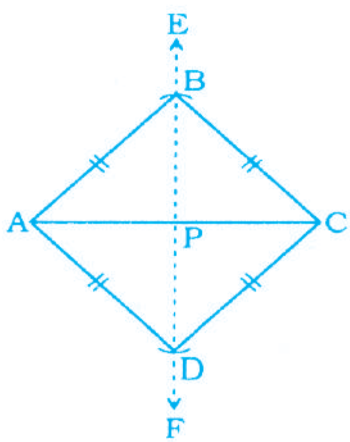
مثال 1. هڪ چورس ABCD ٺاهيو جنهن جي اُريب جي ماپ 6 سينٽي ميٽر آهي.

مليل: هڪ چورس ABCD آهي جنهن ۾ سينٽي ميٽر $m\,\overline{AC} = 6$

گهربل: مليل معلومات مان چورس ABCD ٺاهيو.

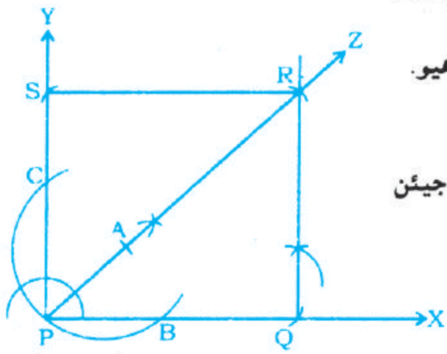
جوڙجڪ جا ڏاڪا:

1. $\overline{AC}$ اهڙي طرح ٺاهيو جو سينٽي ميٽر $m\,\overline{AC} = 6$
2. $\overleftrightarrow{EF}$ اهڙي طرح ٺاهيو جيئن اِها $\overline{AC}$ کي ٽِٻڪي P تي اڌواڌ ڪپي.
3. ٽِٻڪي P کي مرڪز وٺي، $m\,\overline{PA}$ يا $\overline{PC}$ جيتري رداس (نيم قطر) سان ٻه قوس، $\overline{AC}$ جي مٿين ۽ هيٺين ٻنهي پاسي اهڙي طرح ڪيو جيئن اِهي ٻئي قوس $\overleftrightarrow{EF}$ کي ٽِٻڪن B ۽ D تي ڪپين.
4. $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$ ۽ $\overline{DA}$ ٺاهيو. ان ريت ABCD هڪ گهربل چورس آهي.



(b) هڪ چورس ٺاهيو جڏهن ان جي هڪ اُريب ۽ هڪ پاسي جي ماپ ۾ تفاوت مليل آهي.

مثال 2. هڪ چورس PQRS ٺاهيو جڏهن اِن جي اُريب ۽ هڪ پاسي جي ماپ ۾ تفاوت 3 سينٽي ميٽر آهي.



مليل: PQRS چورس ۾ سندس هڪ اُريب ۽ هڪ پاسي جي ماپ ۾ تفاوت 3 سينٽي ميٽر آهي.

گهربل: مليل معلومات مان چورس PQRS ناهيو.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

1. ٽٻڪي P مان هڪ شعاع $\overrightarrow{PX}$ ناهيو.
2. ٽٻڪي P تي هڪ عمود اهڙي طرح ناهيو جيئن $\overrightarrow{PY} \perp \overrightarrow{PX}$
3. $\angle XPY$ جو اڌواڌ ڪندڙ $\overrightarrow{PZ}$ ناهيو.
4. ٽٻڪي P کي مرڪز وٺي $\overrightarrow{PZ}$ مان سينٽي ميٽر $m\,\overline{PA} = 3$ ڪپيو.
5. ٽٻڪي A کي مرڪز وٺي، 3 سينٽي ميٽر رداس سان هڪ قوس ڪليو جيڪو $\overrightarrow{PX}$ ۽ $\overrightarrow{PY}$ کي ترتيبوار ٽٻڪن B ۽ C تي ڪپي.
6. ٽٻڪن B ۽ C کي مرڪز وٺي ساڳي رداس يعني 3 سينٽي ميٽر ماپ سان $\overrightarrow{PX}$ ۽ $\overrightarrow{PY}$ تي ڏار ڏار قوس اهڙي طرح ڪليو جو انهن کي ترتيبوار ٽٻڪن Q ۽ S تي ڪپين.
7. ٽٻڪن Q ۽ S کي مرڪز وٺي $m\,\overline{PQ}$ يا $m\,\overline{PS}$ ماپ جو رداس وٺي ٻه قوس اهڙي طرح ڪليو جيڪي هڪ ٻئي کي ۽ $\overrightarrow{PZ}$ کي ٽٻڪي R تي ڪپي.
8. $\overline{QR}$ ۽ $\overline{SR}$ ناهيو. اهڙي طرح حاصل PQRS هڪ گهربل چورس آهي.

نوٽ: اُريب $\overline{PR}$ ۾ $m\,\overline{AR} = m\,\overline{PQ}$ يا $m\,\overline{PS}$ چورس جي پاسي جي ماپ جي برابر آهي. جڏهن ته $m\,\overline{AP}$ 3 سينٽي ميٽر چورس جي هڪ پاس جي ماپ ۽ اُريب جي ماپ جي وچ ۾ تفاوت جي برابر آهي.

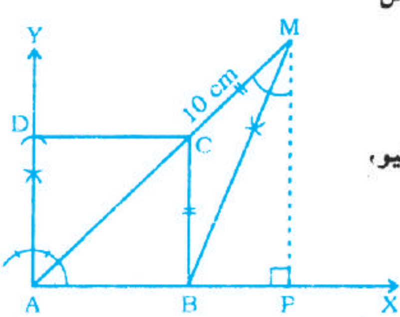
[جڏهن چورس مڪمل ٿي وڃي ته پوءِ ان جي پاسي ۽ اُريب جي ماپ ڪري تصديق ڪئي وڃي]

(c) هڪ چورس ناهيو جڏهن سندس اُريب ۽ هڪ پاسي جي ماپ جو جوڙ مليل آهي.

مثال 3. هڪ چورس ABCD ناهيو، جڏهن ته سندس اُريب ۽ هڪ پاسي جو جوڙ 10 س.م آهي.

مليل: هڪ چورس ABCD ۾ اِن جي اُريب ۽ هڪ پاسي جي ماپ جو جوڙ 10 س.م آهي.

گهربل: مليل معلومات مان هڪ چورس ABCD ناهڻ



جوڙجڪ جا ڏاڪا:

1. هڪ شعاع $\overrightarrow{AX}$ ناهيو.
2. هڪ عمود اهڙي طرح ناهيو جيئن $\overrightarrow{AY} \perp \overrightarrow{AX}$
3. $\angle XAY$ جو اڌواڌ ڪندڙ $\overrightarrow{AM}$ اهڙي طرح ناهيو، جيئن سينٽي ميٽر $m\overline{AM} = 10$
4. هڪ عمود اهڙي طرح ناهيو جيئن $\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{AX}$
5. $\angle AMP$ جو اڌواڌ ڪندڙ $\overrightarrow{MB}$ اهڙي طرح ناهيو جو $\overrightarrow{AP}$ کي ٽٻڪي B وٽ ملي.

6. ٽپڪي B مان $\overline{MP} \parallel \overline{BC}$ اهڙي طرح ڏاهيو جو اِهو $\overline{AM}$ کي ٽپڪي C وٽ ڪپي.
7. $\overline{AY}$ مان $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ ڪپيو.
8. $\overline{CD}$ ڏاهيو.

ان ريت چوڪنڊو ABCD گهربل چورس آهي.

نوٽ: جيئن تہ چورس جي اُريب ۽ هڪ پاسي جو جوڙ 10 سينٽي ميٽر آهي، تنهن ڪري ان کي ٻن حصن ۾ ورهايو ويو آهي.

(i) اُريب $\overline{AC}$ ۽ (ii) $m\overline{MC} = m\overline{BC}$ (چورس جو پاسو)

8.1.4 مستطيل ڏاهڻ

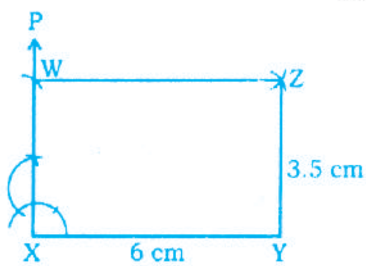
(a) مستطيل ڏاهڻ، جڏهن ٻن پاسن جي ماپ مليل هجي.

مثال 1. مستطيل WXYZ ڏاهيو جنهن ۾ $m\overline{XY} = 6$ cm ۽ $m\overline{YZ} = 3.5$ cm

مليل: هڪ مستطيل WXYZ آهي جنهن جا ٻہ پاسا $m\overline{XY} = 6$ cm, $m\overline{YZ} = 3.5$ cm

گهربل: مليل معلومات مان هڪ مستطيل WXYZ ڏاهيو.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:



1. $\overline{XY}$ ڏاهيو جنهن جي ماپ 6 سينٽي ميٽر آهي.
2. ٽپڪي X تي هڪ عمود اهڙي طرح ڏاهيو جو $\overrightarrow{XP} \perp \overline{XY}$
3. ڪوبہ ٽپڪو X مرڪز وٺو ۽ 3.5 سينٽي ميٽر رداس سان هڪ قوس ڪڍو جيڪو $\overrightarrow{XP}$ کي ٽپڪي W تي ڪپي.
4. ٽپڪو W مرڪز وٺي $m\overline{XY}$ جي رداس سان هڪ قوس ڪڍو.
5. ٽپڪو Y مرڪز وٺي، $m\overline{XW}$ جي رداس سان ٻيو قوس ڪڍو جيڪو پهرين قوس کي ٽپڪي Z تي ڪپي.
6. $\overline{WZ}$ ۽ $\overline{YZ}$ ڏاهيو.

ان ريت هاڻي WXYZ هڪ گهربل مستطيل ٺهيو آهي.

(b) مستطيل ڏاهڻ جڏهن ان جي اُريب ۽ هڪ پاسي جي ماپ مليل هجي

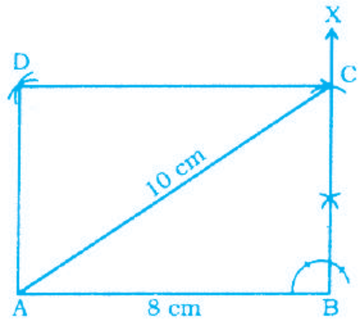
مثال 2. مستطيل ABCD ڏاهيو جنهن ۾ اُريب $m\overline{AC} = 10$ cm ۽ هڪ پاسو $m\overline{AB} = 8$ cm

مليل: ABCD هڪ مستطيل آهي جنهن $m\overline{AB} = 8$ cm (اُريب) $m\overline{AC} = 10$ cm (پاسو)

گهربل: مليل معلومات مان هڪ مستطيل ABCD ڏاهيو.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

1. $\overline{AB}$ ٺاهيو جنهن جي ڊيگهه ماپ 8 سينٽي ميٽر آهي.
2. ٽِبڪي B تي هڪ عمود اهڙي طرح ٺاهيو جيئن $\overrightarrow{BX} \perp \overline{AB}$
3. ٽِبڪي A کي مرڪز وٺي، 10 سينٽي ميٽر رداس سان هڪ قوس اهڙي طرح کيوجيکو $\overrightarrow{BX}$ کي ٽِبڪي C تي ڪپي.
4. ٽِبڪن A ۽ C کي ملائي $\overline{AC}$ ٺاهيو.
5. ٽِبڪي A کي مرڪز وٺي، $m\,\overline{BC}$ جي رداس سان هڪ قوس ڪيو.
6. ٽِبڪي C کي مرڪز، $m\,\overline{AB}$ جي رداس سان هڪ ٻيو قوس ٺاهيو جيڪو پهرين قوس کي ٽِبڪي D تي ڪپي.
7. $\overline{AD}$ ۽ $\overline{CD}$ ٺاهيو.



ان ريت هاڻي ABCD هڪ گهربل مستطيل آهي.

8.1.5 هڪ رامبس (Rhombus) ٺاهڻ

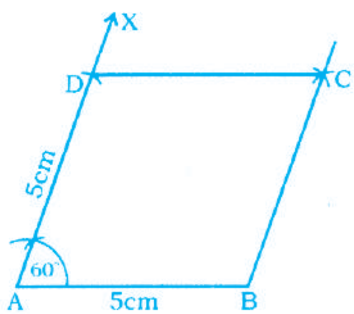
(a) هڪ رامبس ٺاهڻ جڏهن سندس هڪ پاسي ۽ پاسي واري ڪنڊ جي ماپ مليل آهي

مثال 1. ABCD هڪ رامبس ٺاهيو جڏهن سندس هرهڪ پاسي جي ماپ 5 سينٽي ميٽر آهي ۽ پاسي واري ڪنڊ جي ماپ 60° آهي.

مليل: ABCD هڪ رامبس آهي جنهن ۾ $m\,\overline{AB} = 5$ cm ۽ $m\angle A = 60^\circ$

گهربل: مليل معلومات مان رامبس ABCD ٺاهڻ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:



1. $\overline{AB}$ ٺاهيو جنهن جي ڊيگهه 5 سينٽي ميٽر آهي.
2. ٽِبڪي A تي هڪ ڪنڊ $\angle BAX$ اهڙي طرح ٺاهيو جيئن $m\angle BAX = 60^\circ$
3. ٽِبڪي A کي مرڪز وٺي، $m\,\overline{AB}$ جي ماپ جيتري نيم قطر سان هڪ قوس اهڙي طرح ڪيو جيڪو $\overrightarrow{AX}$ کي ٽِبڪي D تي ڪپي.
4. ٽِبڪن B ۽ D کي مرڪز وٺي، $m\,\overline{AB}$ جي ماپ جيتري نيم قطر سان ٻه قوس اهڙي طرح ڪيو جيڪي هڪ ٻئي کي هڪ ٽِبڪي C وٽ ڪپين.
5. $\overline{BC}$ ۽ $\overline{DC}$ ٺاهيو.

اِن ريت ٺهيل چوڪنبو ABCD هڪ گهربل رامبس آهي.

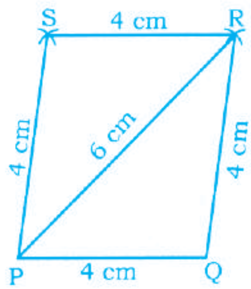
(b) هڪ رامبس ٺاهيو، جڏهن هڪ پاسو ۽ هڪ اُريب مليل آهي.

مثال2. هڪ رامبس PQRS ٺاهيو جڏهن $m\,\overline{PQ} = 4$ cm ۽ $m\,\overline{PR} = 6$ cm

مليل: رامبس PQRS ۾ $m\,\overline{PQ} = 4\text{ cm}$ ۽ $m\,\overline{PR} = 6\text{ cm}$

گهربل: مليل معلومات مان PQRS هڪ رامبس ٺاهيو.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:



1. $\overline{PQ}$، 4 سينٽي ميٽر ماپ جو ٺاهيو.
2. ٽپڪي P کي مرڪز وٺي 6 سينٽي ميٽر ۾ نيم قطر جي ماپ سان هڪ قوس ڪيو.
3. ٽپڪي Q کي مرڪز وٺي $m\,\overline{PQ}$ جي ماپ جيتري نيم قطر سان هڪ ٻيو قوس ٺاهيو جيڪو پهرين قوس کي ٽپڪي R وٽ ڪپي.
4. ٽپڪن P ۽ R کي ملائي $\overline{PR}$ ٺاهيو ۽ ٽپڪن Q ۽ R ملائي $\overline{QR}$ ٺاهيو.
5. ٽپڪن P ۽ R کي مرڪز وٺي $m\,\overline{PQ}$ جي ماپ جيتري نيم قطر سان ٻه قوس ٺاهيو، جيڪي هڪ ٻئي کي هڪ ٽپڪي S تي ڪپين.
6. ٽپڪي S کي ٽپڪن P ۽ R سان ملائي $\overline{PS}$ ۽ $\overline{PR}$ ٺاهيو.

ان ريت ٺهندڙ چوڪنبو PQRS گهربل رامبس آهي.

8.1.6 پور وچوٽ پاسو چوڪنبو ٺاهڻ

(i) پور وچوٽ پاسو چوڪنبو ٺاهيو، جڏهن ٻه اُريب ۽ انهن ٻنهي اُريبن جي وچ ۾ ٺهندڙ ڪنڊ جي ماپ مليل آهي.

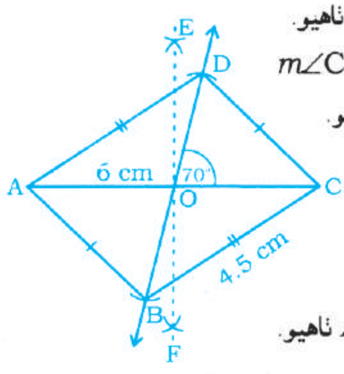
مثال 1. پور وچوٽ پاسو چوڪنبو ABCD ٺاهيو جنهن ۾ $m\overline{AC} = 6\text{ cm}$، $m\overline{BC} = 4.5\text{ cm}$ ۽ $m\angle COD = 70^\circ$

گهربل: مليل معلومات مان پور وچوٽ چوڪنبو ABCD $//^m$ ٺاهيو.

$m\overline{AC} = 6\text{ cm}$، $m\overline{BC} = 4.5\text{ cm}$ ۽ $m\angle COD = 70^\circ$

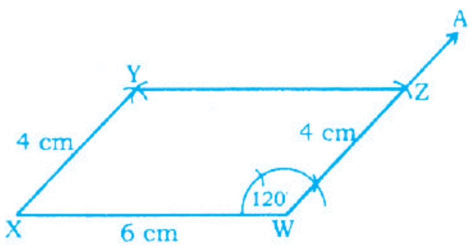
گهربل: مليل معلومات مان پور وچوٽ چوڪنبو ABCD $//^m$ ٺاهيو.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:



1. $\overline{AC}$ ٺاهيو جنهن جي ماپ 6 سينٽي ميٽر آهي.
2. $\overline{AC}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{EF}$ ٺاهيو جيڪو $\overline{AC}$ کي ٽپڪي O تي ڪپي.
3. ٽپڪي O تي ڪنڊ ماپ جي مدد سان 70° جي $\angle COD$ ٺاهيو.
4. ٽپڪي O کي مرڪز وٺي، رداس $= \dfrac{4.5}{2} = 2.25$ سينٽي ميٽر ماپ سان ٻه قوس ڪيو جيڪي $\overline{OD}$ کي ٻن ٽپڪن D ۽ B تي ڪپين.

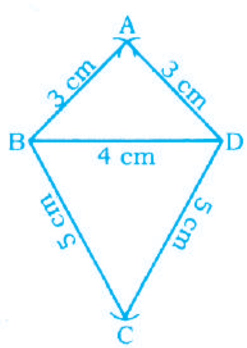
5. $\overline{AB}$، $\overline{AD}$، $\overline{BC}$ ۽ $\overline{CD}$ ٺاهيو.
ان ريت چوڪنڊو ABCD گهربل پورو وچوٽ پاسو چوڪنڊو آهي.
(b) پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو ٺاهيو، جنهن جي ٻن پر وارن پاسن جي ڊيگهه ۽ انهن سان ٺهندڙ وچ واري ڪنڊ جي ماپ مليل آهي.
مثال2. هڪ پورو وچوٽ پاسو چوڪنڊو WXYZ ڪيو جنهن ۾ $m\overline{WX} = 6\ cm$،
$m\overline{WZ} = 4\ cm$ ۽ $m\angle XWZ = 120^\circ$
مليل: $\|^m$ WXYZ جنهن ۾ $m\overline{WX} = 6\ cm$، $m\overline{WZ} = 4\ cm$ ۽ $m\angle XWZ = 120^\circ$
گهربل: مليل ماپن سان $\|^m$ WXYZ ٺاهيو.



جوڙجڪ جا ڏاڪا:
1. $\overline{WX}$ ٺاهيو جنهن جي ڊيگهه 6 سينٽي ميٽر آهي.
2. ٽپڪي W تي ڪنڊ ماپ جي مدد سان $\angle XWA$، 120° جي ماپ جي ٺاهيو.
3. ٽپڪي W کي مرڪز وٺي، 4 سينٽي ميٽر رداس سان هڪ قوس ڪيو جيڪو $\overrightarrow{WA}$ کي ٽپڪي Z تي ڪٽي.
4. ٽپڪي X کي مرڪز وٺي 4 سينٽي ميٽر رداس سان هڪ قوس ڪيو.
5. ٽپڪي Z کي مرڪز وٺي 6 سينٽي ميٽر رداس سان هڪ ٻيو قوس ڪيو جيڪو پهرين قوس کي ٽپڪي Y تي ڪٽي.
6. ٽپڪن Z کي W ۽ Y سان ملائي $\overline{WZ}$ ۽ $\overline{YZ}$ ٺاهيو.

ان ريت هاڻي اسان کي گهربل $\|^m$ WXYZ ملندو.

8.1.7 هڪ لغڙ ٺاهيو جڏهن ٻن اڻ برابر پاسن ۽ هڪ اُريب جي ماپ مليل آهي.
مثال3. هڪ لغڙ ABCD ٺاهيو جنهن ۾ $m\overline{AB} = 3\ cm$، $m\overline{BC} = 5\ cm$ ۽ $m\overline{BD} = 4\ cm$
مليل: هڪ لغڙ ABCD آهي جنهن ۾ $m\overline{AB} = 3\ cm$، $m\overline{BC} = 5\ cm$ ۽ $m\overline{BD} = 4\ cm$
گهربل: مليل معلومات مان لغڙ ABCD ٺاهيو.



جوڙجڪ جا ڏاڪا:
1. $\overline{BD}$ ٺاهيو جنهن جي ماپ 4 سينٽي ميٽر آهي.
2. ٽپڪن B ۽ D کي مرڪز وٺي 3 سينٽي ميٽر رداس سان ٻه قوس اهڙي طرح ٺاهيو جيڪي ٻئي هڪ ٻئي کي ٽپڪي A تي ڪپين.
3. ٻيهر ٻه ٽپڪن B ۽ D کي مرڪز وٺي 5 سينٽي ميٽر رداس سان ٻه قوس اهڙي طرح ٺاهيو جيڪي هڪ ٻئي کي ٽپڪي C تي ڪپين.
4. هاڻي $\overline{AB}$، $\overline{AD}$، $\overline{BC}$ ۽ $\overline{DC}$ ٺاهيو

ان ريت اسان کي گهربل چوڪنڊو يعني لغڙ ABCD ملندو.

8.1.8 پور پاسو پنج ڪنبو ٺاهڻ جڏهن سندس پاسي جي ماپ مليل آهي.

مثال4. پور پاسو پنج ڪنبو ABCDE ٺاهيو جڏهن تہ سندس هرهڪ پاسي جي ماپ 4 س.م آهي.

مليل: هڪ پور پاسو پنج ڪنبو ABCDE آهي جنهن ۾ هرهڪ پاسو $m\,\overline{AB} = 4$ cm ۾

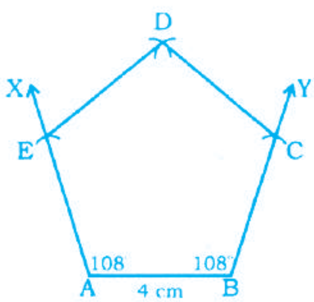
[ڏسو باب 7]

$$m\angle A = m\angle B = \left(\frac{2(5)-4}{5}\right) rt \angle s$$

$$= \left(\frac{10-4}{5}\right) \times 90^\circ = \frac{6}{\cancel{5}} \times \cancel{90}^{18} = 108^\circ$$

گهربل: مليل معلومات مان پور پاسو پنج ڪنبو ABCDE ٺاهيو.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:



1. $\overline{AB}$ ٺاهيو جنهن جي ماپ 4 سينٽي ميٽر آهي.
2. ٽيڪن A ۽ B تي ڪنڊ ماپ جي مدد سان بہ ڪنبون $\angle BAX$ ۽ $\angle ABY$ هرهڪ 108° ماپ جي ٺاهيو.
3. ٽيڪن A ۽ B کي مرڪز وٺي، پاسي $m\,\overline{AB}$ جي ماپ جيتري رداس سان بہ قوس ڪيو جيڪي $\overrightarrow{AX}$ کي ٽيڪي E تي ۽ $\overrightarrow{BY}$ کي ٽيڪي C تي ڪپيو.
4. هاڻي ٽيڪن C ۽ E کي مرڪز وٺي ساڳي رداس سان بہ قوس اهڙي طرح ڪيو جيئن بئي قوس هڪ ٻئي کي هڪ ٽيڪي D تي ڪپين.
5. $\overline{CD}$ ۽ $\overline{ED}$ ٺاهيو.

ان ريت گهڻ ڪنبو ABCDE گهربل پورپاسو پنج ڪنبو آهي.

8.1.9 پور پاسو ڇهہ ڪنبو ٺاهڻ جڏهن ان جي پاسي جي ماپ مليل آهي.

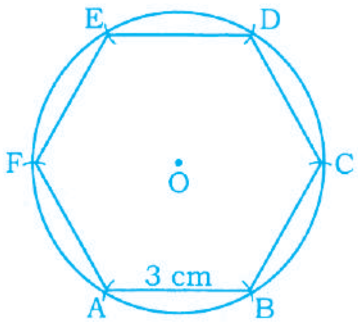
مثال 5. پور پاسو ڇهہ ڪنبو ABCDEF ٺاهيو جڏهن تہ ان جي هرهڪ پاسي جي ماپ 3 سينٽي ميٽر آهي.

مليل: ABCDEF هڪ پور پاسو ڇهہ ڪنبو آهي جنهن ۾ $m\,\overline{AB} = 3$ cm

گهربل: مليل معلومات مان پور پاسو ڇهہ ڪنبو ABCDEF ٺاهيو.

باب 8 عملي جاميٽري

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

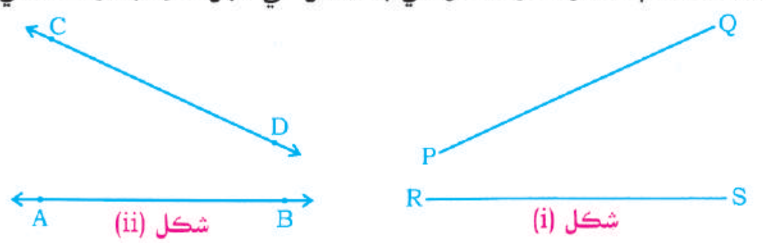


1. مناسب جڳهه تي، ٽٻڪي O کي مرڪز وٺي 3 سينٽي ميٽر رداس سان هڪ گول ٺاهيو.
2. گول تي ڪوبہ ٽٻڪو A وٺو.
3. ٽٻڪي A کي مرڪز وٺي 3 سينٽي ميٽر رداس سان هڪ قوس ڪڍو جيڪو گول کي ٽٻڪي B تي ڪپي.
4. ان کان پوءِ ٽٻڪي B کي مرڪز وٺي ساڳي رداس سان گول تي هڪ قوس ڪڍو جيڪو گول کي C ٽٻڪي تي ڪپي.
5. پيهر ٽٻڪي C کي مرڪز وٺي ساڳي رداس سان گول تي هڪ قوس ڪڍو جيڪو گول کي ٽٻڪي D تي ڪپي.
6. ساڳي طرح انهيءَ ڳالهه کي وري دُهرايو يعني ٽٻڪن D ۽ E کي مرڪز وٺي، ساڳي رداس سان قوس ڪڍو جيئن گول کي ترتيبوار ٽٻڪن E ۽ F تي ڪپي.
7. هاڻي گول جي ٽٻڪن کي ترتيبوار پاڻ ۾ ملائي $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$، $\overline{DE}$، $\overline{EF}$ ۽ $\overline{FA}$ ٺاهيو.
ان طرح گهڻ ڪندو ABCDEF ٺهندو جيڪو گهربل ڇهه ڪندو آهي.

مشق 8.1

1. هيٺ ڏنل ساڳيون ميلاپ ڏانهن مائل ليڪون پنهنجي اسڪول نوٽ بڪ ۾ ٺاهيو.

(i) ميلاپ ڏانهن مائل ليڪن کي بنا وڌائڻ جي انهن سان ٺهندڙ ڪنڊ جو اڌواڌ ڪندڙ ٺاهيو (ii) ميلاپ ڏانهن مائل ليڪن کي بنا وڌائڻ جي انهن سان ٺهندڙ ڪنڊ جي ماپ لکو.



2. (a) چورس ABCD ٺاهيو جڏهن تہ سندس هڪ اُريب جي ماپ هيٺ ڏنل آهي.

(i) $m\overline{AC}$ = 6 cm (ii) $m\overline{BC}$ = 7 cm (iii) $m\overline{AC}$ = 8 cm

(b) چورس PQRS ٺاهيو جڏهن تہ اُن جي اُريب ۽ هڪ پاسي جو تفاوت هيٺين ريت آهي.

(i) 2.5 cm (ii) 3 cm (iii) 3.5 cm (iv) 4.5 cm

(c) چورس WXYZ ناهيو جڏهن سندس اُريب ۾ هڪ پاسي جي ماپ جو جوڙ مليل آهي.

(i) 10 cm (ii) 12 cm (iii) 11 cm

3. (a) مستطيل PQRS ناهيو جڏهن تہ سندس ٻن پاسن جي ماپ مليل آهي.

(i) $m\,\overline{PQ} = 6$ cm, $m\,\overline{QR} = 4$ cm (ii) $m\,\overline{PQ} = 4$ cm, $m\,\overline{QR} = 7$ cm

(b) مستطيل ABCD ناهيو، جڏهن تہ سندس اُريب ۽ هڪ پاسي جي ماپ هيٺ ترتيب ۾ مليل آهي.

(i) $m\,\overline{AC} = 6$ cm, $m\,\overline{AB} = 4$ cm (ii) $m\,\overline{BD} = 7$ cm, $m\,\overline{AB} = 5$ cm

4. (a) رامبس ABCD ناهيو جڏهن تہ هڪ پاسي ۽ پاڇي واري ڪند جي ماپ هيٺين ريت آهي.

(i) $m\,\overline{PQ} = 4$cm, $m\,\angle A = 120^\circ$ (ii) $m\,\overline{AB} = 5$cm, $m\,\angle A = 60^\circ$

(b) رامبس PQRS ناهيو جڏهن تہ سندس هڪ پاسي ۽ اُريب جي ماپ هيٺين ريت آهي.

(i) $m\,\overline{PQ} = 5$cm, $m\,\overline{QS} = 4$cm (ii) $m\,\overline{PQ} = 4.5$cm, $m\,\overline{PR} = 7$cm

5. (a) پور وچوٽ پاسو چوڪنڊو PQRS ناهيو جڏهن تہ سندس ٻن اُريبن ۽ انهن جي ٺهندڙ ڪند جي ماپ هيٺين ريت آهي.

(i) $m\,\overline{QR} = 8$cm, $m\,\overline{QS} = 6$cm, $m\,\angle QOR = 60^\circ$

(ii) $m\,\overline{PR} = 6$cm, $m\,\overline{QS} = 8$cm,$m\,\angle QOR = 120^\circ$

(b) پور وچوٽ پاسو چوڪنڊو ABCD ناهيو جڏهن ٻن پروارون (لاڳيتن) پاسن ۽ انهن ۾ٺهي پاسن سان ٺهندڙ ڪند جي ماپ هيٺين ريت آهي.

(i) $m\,\overline{AB} = 6$cm, $m\,\overline{BC} = 4$cm, $m\,\angle B = 70^\circ$

(ii) $m\,\overline{AB} = 4$cm, $m\,\overline{AD} = 5$cm,$m\,\angle A = 100^\circ$

6. لغڙ ABCD ناهيو جڏهن ٻن اڻ برابر پاسن ۽ هڪ اُريب جي ماپ هيٺين ريت آهي.

(i) $m\,\overline{AB} = 4$cm, $m\,\overline{BC} = 7$cm, $m\,\overline{AC} = 9$ cm

(ii) $m\,\overline{AB} = 4$cm, $m\,\overline{BC} = 6$cm,$m\,\overline{BD} = 4$ cm

7. پور پاسو پنج ڪنڊو ABCDE ناهيو جڏهن سندس هرهڪ پاسي جي ماپ هيٺين ريت آهي.

(i) 3.5 cm (ii) 4 cm (iii) 4.5 cm (iv) 5 cm

8. پور پاسو ڇهہ ڪنڊو ABCDEF ناهيو جڏهن سندس هرهڪ پاسي جي ماپ هيٺين ريت آهي.

(i) 3 cm (ii) 3.5 cm (iii) 2.5 cm (iv) 4 cm

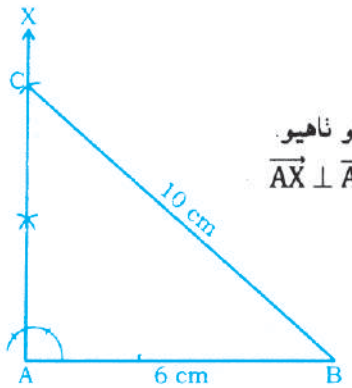
باب 8 عملي جاميٽري

8.2 گوني ڪنڊ ٽڪنبو ٺاهڻ

(a) گوني ڪنڊ ٽڪنبو ٺاهڻ جڏهن سندس هيپاٽينيوز ۽ هڪ پاسي جي ماپ مليل هجي.

مثال 1. گوني ڪنڊ ٽڪنبو ABC ٺاهيو جنهن ۾ سندس هيپاٽينيوز ۽ پاسي جي ترتيبوار ماپ هن طرح آهي. $m\overline{AB} = 6cm$ ۽ $m\overline{BC} = 10cm$

مليل: گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ABC ۾ $m\overline{BC} = 10cm$ ، $m\overline{AB} = 6cm$ ، $m\angle A = 90^\circ$



گهربل: مليل معلومات مان ΔABC ٺاهيو.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

1. اسڪيل جي مدد سان $\overline{AB}$ ، 10 سينٽي ميٽر ماپ جو ٺاهيو.
2. ٽپڪي A تي هڪ عمود اهڙي طرح ٺاهيو جيئن $\overrightarrow{AX} \perp \overline{AB}$
3. ٽپڪي B کي مرڪز وٺي، 10 سينٽي ميٽر رداس سان هڪ قوس ڪيو جيڪو $\overrightarrow{AX}$ کي ٽپڪي C تي ڪپي.
4. ٽپڪن B ۽ C کي ملائي، $\overline{BC}$ ٺاهيو.

ان طرح ΔABC هڪ گهربل گوني ڪنڊ ٽڪنبو آهي.

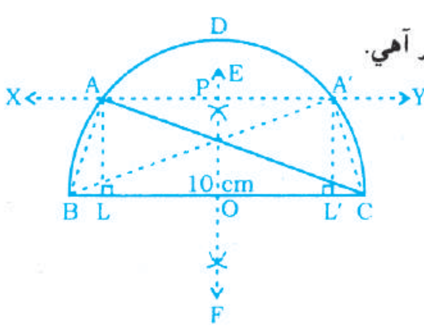
(b) هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنبو ٺاهيو جڏهن سندس هيپاٽينيوز جي ماپ ۽ عمودي اوچائي، ٽڪنڊي جي هڪ چوٽيءَ کان هيپاٽينيوز تي مليل آهي.

مثال 2. گوني ڪنڊ ٽڪنبو ABC ٺاهيو جنهن ۾ هيپاٽينيوز $\overline{BC}$ جي ماپ 10 سينٽي ميٽر آهي ۽ عمودي اوچائي ٽپڪي A کان $\overline{BC}$ تي 3.8 سينٽي ميٽر آهي.

مليل: گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ABC ۾ $m\angle A = 90^\circ$ ، $m\overline{BC} = 10cm$ ، $m\overline{AL} = 3.8cm$ $(\overline{AL} \perp \overline{BC})$

گهربل: مليل معلومات مان ΔABC ٺاهيو.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:



1. $\overline{BC}$ ٺاهيو جنهن جي ڊيگهه 10 سينٽي ميٽر آهي.
2. $\overleftrightarrow{EF}$ هڪ عمودي اڌ ڪندڙ $\overline{BC}$ جو ٺاهيو جيڪو ان کي ٽپڪي O تي ڪپي.
3. ٽپڪي O کي مرڪز وٺي رداس برابر $m\overline{OB}$ يا $m\overline{OC}$ جي ماپ $(\frac{10}{2} = 5\ cm)$ سان هڪ اڌ گول BDC ٺاهيو.

4. $\overrightarrow{OE}$ تي هڪ ٽپڪو P اهڙي طرح وٺو جو $m\,\overline{OP} = 3.8\text{ cm}$

5. ٽپڪي P مان $\overline{BC}$ // $\overleftrightarrow{XY}$ ڻاهيو (يعني $\overleftrightarrow{XY} \perp \overline{OP}$ ڻاهيو) جيڪو گول کي ٽپڪن A ۽ A` تي ڪپي.

6. $\overline{AB}$ ۽ $\overline{AC}$ ڻاهيو ($\overline{A`B}$ ۽ $\overline{A`C}$ پڻ ڻاهيو)

هاڻي ΔABC (۽ $\Delta A`BC$) گهربل گوني ٽڪنڊا آهن جنهن ۾ $m\,\overline{AL} = m\,\overline{A`L`} = 3.8\text{ cm}$

نوٽ: ڪنهن به اڌ گول جي اندر ٺهندڙ ٽڪنڊو هميشه گوني ڪنڊ ٽڪنڊو ٿئي ٿو.

مشق 8.2

هيٺيان گوني ڪنڊ ٽڪنڊا ڻاهيو جڏهن:

(a) هيپاٽينيوز = 10 سينٽي ميٽر ۽ سندس هڪ پاسي جي ماپ = 8 سينٽي ميٽر

(b) هيپاٽينيوز = 13 سينٽي ميٽر ۽ سندس هڪ پاسو = 12 سينٽي ميٽر

(c) هڪ پاسو $\overline{PQ}$ = 5 سينٽي ميٽر ۽ هڪ پاسو $\overline{SQ}$ = 6 سينٽي ميٽر

2. هيٺيان گوني ڪنڊ ٽڪنڊا ڻاهيو جڏهن:

(a) هيپاٽينيوز = 10 س.م ۽ عمودي اوچائي چوٽيءَ کان هيپاٽينيوز تي 3 س.م آهي.

(b) هيپاٽينيوز = 12 س.م ۽ عمودي اوچائي چوٽيءَ کان هيپاٽينيوز تي 4 س.م آهي.

(c) عمودي اوچائي $\overline{PM}$ = 3 س.م ۽ عمودي اوچائي $\overline{SN}$ = 3.5 س.م

3. گوني ڪنڊ ٽڪنڊا ΔABC ۽ ΔDBC هيپاٽينيوز $m\overline{BC} = 10\text{ cm}$ جي ٻنهي طرفن ۾ ڻاهيو، جڏهن:

(a) عمودي اوچائي $\overline{AL}$ = 3.5 س.م ۽ $m\overline{DC} = 5\text{ cm}$

(b) عمودي اوچائي $\overline{AL}$ = 3 س.م ۽ $m\overline{DB} = 6\text{ cm}$

جائزي واري مشق 8

1. هرهڪ بيان لاءِ چار جواب ڏنل آهن. ڪنهن به هڪ درست جواب کي نشان (✓) لڳايو.

(i) ميلاپ ڏانهن مائل ليڪن سان ٺهندڙ ڪنڊ جي ماپ (ٻنا ليڪن وڌائڻ جي) برابر آهي:

(a) ٻنهي ڪنڊن جي ماپ جي تفاوت جي جيڪي ٺهن ٽيون گڏندڙ طرف ۾ ٻنهي ليڪن جي چيڙن ملائڻ سان.

(b) 180° جي تفاوت ۾ ڪلنڊڙ طرف ۾ ٻنهي ليڪن جي چيڙن ڪي ملائڻ سان ٺهندڙ ٻنهي ڪنڊن جي جوڙ جي.

(c) $180^\circ -$ (ڪا ٻه ڪپيندڙ ليڪ جيڪا ٻن ليڪن کي ڪپي ٿي ۽ اُن مان ٺهندڙ ڪنڊن جو جوڙ)

(d) انهن مان ڪوبه نه.

(ii) اُهو گهڻ ڪندو جنهن جي سيني اندرين ڪنڊن جو جوڙ چار گونيون ڪنڊون آهي، اُهو ________ آهي.

(a) ٽڪندو (b) چوڪندو (c) پنج ڪندو (d) ڇهه ڪندو

(iii) هڪ گهڻ ڪندو جنهن جي سيني اندرين ڪنڊن جو جوڙ ٻه گونيون ڪندون آهي، اُهو ______ آهي.

(a) ٽڪندو (b) چوڪندو (c) پنج ڪندو (d) ڇهه ڪندو

(iv) هڪ گهڻ ڪندو جنهن جي سمورين اندرين ڪنڊن جو جوڙ اٺ گونيون ڪندون آهي، اُهو ________ آهي.

(a) ٽڪندو (b) چوڪندو (c) پنج ڪندو (d) ڇهه ڪندو

(v) هڪ گهڻ ڪندو جنهن جي سيني اندرين ڪنڊن جو جوڙ ڇهه گونيون ڪندون آهن، اُهو ________ آهي.

(a) ٽڪندو (b) چوڪندو (c) پنج ڪندو (d) ڇهه ڪندو

(vi) مستطيل ۾ اُريب ____________.

(a) هڪٻئي کي گوني ڪند تي اڌواڌ ڪن ٿا (b) عمود آهن هڪ ٻئي تي

(c) هڪ ٻئي کي وچين ٽپڪي وٽ ڪپين ٿا (d) انهن مان ڪوبه نه

(vii) چوڪندو آهي هڪ ____________.

(a) مستطيل (b) پور پاسو گهڻ ڪندو

(c) اُهو چوڪندو جنهن جا سڀ پاسا برابر نه آهن (d) انهن مان ڪوبه نه

(viii) پور پاسي ڇهه ڪندي جي هرهڪ اندرين ڪند جي ماپ ____________ آهي.

(a) 180° (b) 120° (c) 140° (d) انهن مان ڪوبه نه

2. هيٺيان جاميٽريءَ جي طريقي سان ٺاهيو.

(i) چورس PQRS اهڙي طرح جو سندس هرهڪ پاسو = $m\,\overline{QS} = 6cm$

(ii) چورس WXYZ جڏهن ته سندس اُريب ۽ اُن جي پاسي جي ماپ ۾ تفاوت 2.5 س.م

(iii) چورس ABCD جڏهن ته سندس اُريب ۽ اُن جي پاسي جي ماپ جو جوڙ 12 س.م آهي

(iv) مستطيل ABCD جڏهن $m\,\overline{AB} = 4cm$، $m\,\overline{BC} = 6cm$

(v) رامبس PQRS جڏهن $m\,\overline{PQ} = 5cm$، $m\,\angle P = 110^\circ$

(vi) رامبس ABCD جڏهن $m\,\overline{BC} = 5cm$، $m\,\overline{BD} = 7cm$

(vii) پور وچوٽ پاسو چوڪندو WXYZ جنهن جا اُريب 6 س.م ۽ 9 س.م آهن ۽ انهن جي وچ ۾ ڪنڊ 70° آهي.

(viii) لغڙ ABCD جڏهن $m\,\overline{AB} = 6$ cm، $m\,\overline{BC} = 3$ cm، $m\,\overline{BD} = 4$ cm

(ix) پور پاسو پنج ڪندو PQRST جڏهن $m\,\overline{PQ} = 4cm$

(x) پور پاسو ڇهه ڪندو ABCDEF جڏهن $m\,\overline{AB} = 3.5cm$

3. ميلاپ ڏانهن مائل ٻه ليڪ ٽڪر $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ ٺاهيو. انهن ليڪ ٽڪرن سان نهندڙ ڪند جو اڌواڌ ڪندڙ ٺاهيو، بنا ليڪن وڌائڻ جي.

4. ڪي ٻه ميلاپ ڏانهن مائل ٻه ليڪ ٽڪر $\overline{PQ}$ ۽ $\overline{PS}$ ٺاهيو اهڙي طرح جو اهي ٽٻڪن Q ۽ S ڏانهن مائل هجن.

(a) انهن جي وچ واري ڪند جيڪا ٺاهي سگهجي ٿي اُن جي ماپ لهو.

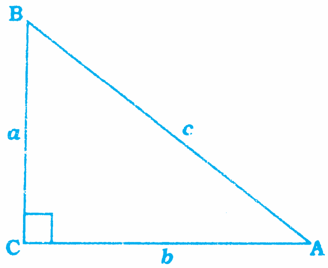
(b) انهيءَ ڪند جو اڌواڌ ڪندڙ ٺاهيو جيڪا ٻڌائي سگهجي ٿي، بنا ليڪن وڌائڻ جي

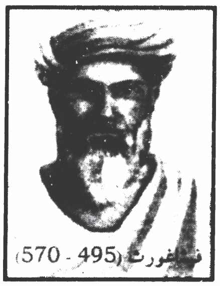
خلاصو

- ميلاپ ڏانهن مائل ليڪون غير پور وچوٽ ليڪون آهن (يا ليڪ ٽڪر آهن) جيڪي پاڻ ۾ هڪ ٻئي کي ڪپينديون جيڪڏهن انهن کي وڌايو ويندو.
- ميلاپ ڏانهن مائل ليڪن جي وچ واري ڪند بنا ليڪن وڌائڻ جي برابر آهي (غير ميلاپ ڏانهن مائل ليڪن جي چيڙن کي ملائڻ سان نهندڙ ڪندن جي جوڙ) - 180°
- ٽڪنڊي جي اندرين مرڪز (In centre) ۽ ٻاهرين مرڪز (Ex-centre) کي پاڻ ۾ ملائڻ سان (جيڪو ٿي تو جيڪڏهن ليڪون وڌايون وڃن) اسان کي ڪند جو اڌواڌ ڪندڙ حاصل ٿيندو ميلاپ ڏانهن مائل ليڪن سان (بنا انهن کي وڌائڻ جي) چاڪاڻ ته ڪندن جا اڌواڌ ڪندڙ انهن ٽٻڪن سان نهڪن ٿا يعني اهي ٽٻڪن سان (Concurrent) آهن.

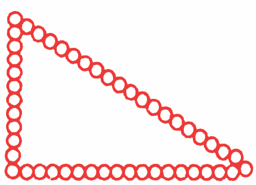
باب 9

ايراضي ۽ مقدار





فيثاغورث (570 - 495)



9.1 فيثاغورث (Pythagoras) جو سڌيان

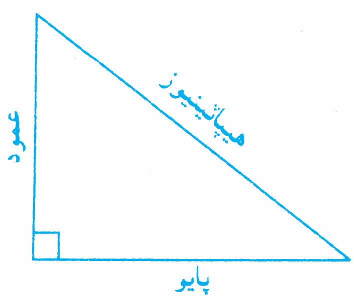
گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي پاسن جو هڪ ٻئي سان هڪ خاص تعلق هوندو آهي.

جيئن تہ هي تعلق سڀ کان پهريائين يونان جي هڪ مشهور رياضيدان "فيثاغورث" تقريباً 2500 سال اڳ دريافت ڪيو هو. ان ڪري انهي کي 'فيثاغورث (Pythagoras) سڌيان' چئبو آهي.

درحقيقت هن ڪي اهو خيال تڏهن آيو جڏهن قديم رومين ڪي نيل درياھ جي ويڪر معلوم ڪرڻ لاءِ اهڙا زنجير استعمال ڪندي ڏٺا جن جي پاسن جي ماپن ۾ 5:4:3 جي نسبت هئي. توڙي فيثاغورث جي ہي ڪا بہ تصنيف ڪتابي صورت ۾ موجود نہ آهي، پر سندس نالو سائنس جي دنيا ۾ هن سڌيان سبب ڪافي مشهور آهي.

9.1.1 فيثاغورث سڌيان جي وصف ۽ سندس غير رسمي ثابتي.

(i) وصف



ڪنهن گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ هيپاٽينيوز جو چورس، باقي ٻن پاسن (پايي ۽ عمود) جي چورسن جي جوڙ اُپت جي برابر ٿيندو آهي.

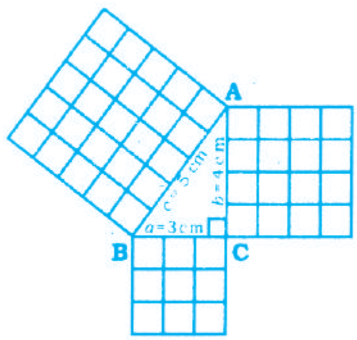
يعني

$$(\text{پايي جي ڊيگهه})^2 + (\text{عمود جي ڊيگهه})^2 = (\text{هيپاٽينيوز جي ڊيگهه})^2$$

(ii) غير رسمي ثابتي

هتي هڪ عملي مشق جي ذريعي هن سڏيان کي سمجهون ۽ ثابت ڪريون ٿا.

سامهون ڏنل شڪل ۾ ٽڪنڊي ABC ۾ڪنڊ C گوني ڪنڊ آهي. سينٽي ميٽر 5 = $m\overline{AB}$، سينٽي ميٽر 4 = $m\overline{AC}$ ۽ سينٽي ميٽر 3 = $m\overline{BC}$



هاڻي $\overline{AC}$ کي چورس جو هڪ پاسو مڃي. 4 سينٽي ميٽر چورس کي ساڄي پاسي مڪمل ڪريو. هن چورس ۾ 1 سينٽي ميٽر پاسن وارا 16 چورس خانا ٺهندا.

اهڙيءَ طرح $\overline{BC}$ کي چورس جو هڪ پاسو مڃي، هيٺين طرف چورس کي مڪمل ڪريو. هن ۾ 1 چورس سينٽي ميٽر جا 9 خانا ٺهندا.

ساڳي طرح $\overline{AB}$ تي بہ مٿين طرف چورس مڪمل ڪريو. هن ۾ 25 چورس خانا ٺهن ٿا.

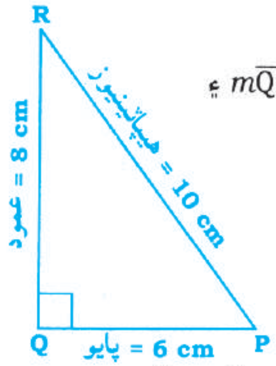
(عمود تي هڪ چورس سينٽي ميٽر خانن جو تعداد) + (پايي تي هڪ چورس سينٽي ميٽر خانن جو تعداد) = 16 + 9 = 25 = (هيپاٽينيوز تي هڪ چورس سينٽي ميٽر جي خانن جو تعداد)

اهڙي طرح فيثاغورث سڏيان ثابت ٿيو تہ ڪنهن بہ گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾

$$(\text{پايي جي ڊيگهہ})^2 + (\text{عمود جي ڊيگهہ})^2 = (\text{هيپاٽينيوز جي ڊيگهہ})^2$$

جيڪڏهن اسين هيپاٽينيوز جي ڊيگهہ کي H سان، پايي جي ڊيگهہ کي B سان ۽ عمود جي ڊيگهہ کيP سان ظاهر ڪريون تہ فيثاغورث جي سڏيان مطابق: $\mathbf{H^2 = P^2 + B^2}$

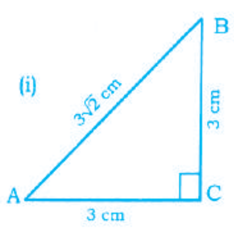
هاڻي مثالن جي ذريعي انهيءَ سڏيان جي وڌيڪ وضاحت ڪريون ٿا.

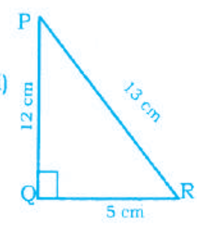


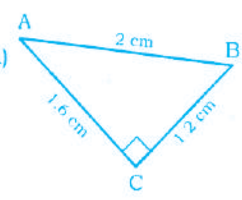
عملي ڪم: PQR هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي جنهن ۾
$m\angle Q = 90^\circ$، $m\overline{PQ}$ (پايو) = 6cm، $m\overline{QR}$ (عمود) = 8cm ۽
$m\overline{PR}$ (هيپاٽينيوز) = 10cm
مٿي ڏنل معلومات مان فيثاغورث سڌيان جي تصديق ڪريو.
تصديق: ڏنل گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ عمود $\overline{QR}$ جي ماپ 8 سينٽي ميٽر آهي.
تنهن ڪري چورس سينٽي ميٽر $P^2 = 8^2 = 64$
پايي $\overline{PQ}$ جي ماپ 6 سينٽي ميٽر آهي، تنهن ڪري $B^2 = 6^2 = 36\ cm^2$
هتي هيپاٽينيوز $\overline{PR}$ جي ماپ 10 سينٽي ميٽر آهي، تنهن ڪري $H^2=10^2=100\ cm^2$
جيئن ته $100 = 36 + 64$
يا $(10)^2 = (6)^2 + 8^2$
يا $H^2 = B^2 + P^2$
ان ريت فيثاغورث سڌيان جي تصديق ٿي وئي.

مشق 9.1

1. هيٺ ڏنل گوني ڪنڊ ٽڪنڊن لاءِ فيثاغورث سڌيان جي تصديق ڪريو.

(i)


(ii)


(iii)


2. هيٺ ڏنل معلومات وسيلي فيثاغورث سڌيان جي تصديق ڪريو.

(i) LMN هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي جنهن ۾ $m\angle M = 90^\circ$،
$m\angle\overline{LN} = 15$ cm، $m\angle\overline{LM} = 9$ cm ۽ $m\angle\overline{MN} = 12$ cm

(ii) PQR هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي جنهن ۾ $m\angle Q = 90^\circ$
$m\overline{PR} = 20\text{ cm},\ m\overline{PQ} = 16\text{ cm}$ ۽ $m\overline{QR} = 12\text{ cm}$

(iii) XYZ هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي جنهن ۾ $m\angle Y = 90^\circ$
$m\overline{XZ} = 25\text{ cm},\ m\overline{XY} = 15\text{ cm}$ ۽ $m\overline{YZ} = 20\text{ cm}$

9.1.2 فيثاغورث سڌيان وسيلي گوني ڪنڊ ٽڪنڊن جو حل

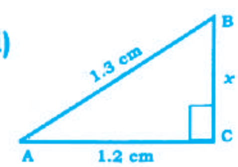
ٽڪنڊي جي ٽن پاسن يعنيٰ عمود، پايي ۽ هيپاٽينيوز مان جيڪڏهن ڪن به ٻن پاسن جون ماپون معلوم هجن ته رهيل ٽئين پاسي جي ماپ هيٺين فارمولا وسيلي لهي سگهون ٿا.

(i) $H^2 = P^2 + B^2$ (ii) $B^2 = H^2 - P^2$ (iii) $P^2 = H^2 - B^2$

مثال **1**. گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ABC جو اڻ ڄاتل پاسو لهو:

(ii)

فيثاغورث سڌيان مطابق:



حل: هتي $m\overline{AC} = 1.2\text{ cm}$
$m\overline{BC} = x = ?,\ m\overline{AB} = 1.3\text{ cm}$

فيثاغورث سڌيان مطابق:

$H^2 = P^2 + B^2$

يا $(m\overline{AB})^2 = (m\overline{BC})^2 + (m\overline{AC})^2$

يعني $(1.3)^2 = x^2 + (1.2)^2$.

$\Rightarrow 1.69 = x^2 + 1.44$

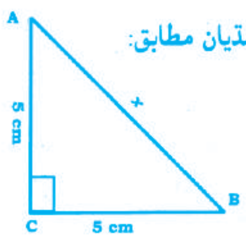
$\Rightarrow 1.69 - 1.44 = x^2 \Rightarrow x^2 = 0.25$

$\Rightarrow x = \sqrt{0.5 \times 0.5} = 0.5\text{cm}$

مطلب ته اڻ ڄاتل پاسو 0.5 cm آهي

(i)

فيثاغورث سڌيان مطابق:



حل: هتي $m\overline{AC} = 5\text{ cm}$
$m\overline{BC} = 5\text{ cm},\ m\overline{AB} = ?$

فيثاغورث سڌيان مطابق:

$H^2 = P^2 + B^2$

يا $(m\overline{AB})^2 = (m\overline{AC})^2 + (m\overline{BC})^2$

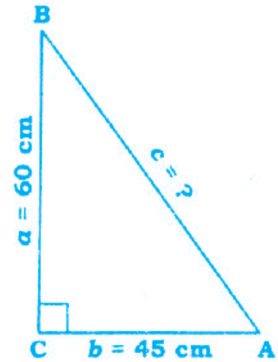
يعني $x^2 = (5)^2 + (5)^2 = 25 + 25 = 50$

$\Rightarrow x^2 = 50 \quad \Rightarrow x = \sqrt{50} = \sqrt{5\times5\times2}$

$\Rightarrow x = 5\sqrt{2}\text{ cm}$

مطلب ته اڻ ڄاتل پاسو $5\sqrt{2}$ cm آهي.

مثال **2**. هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جو عمود 60 سينٽي ميٽر ۽ پايو 45 سينٽي ميٽر آهي. فيثاغورث سڌيان جي مدد سان هيپاٽينيوز جي ماپ لهو.



حل:

$$(\text{پايو})^2 + (\text{عمود})^2 = (\text{هيپاٽينيوز})^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

يا $(m\overline{AB})^2 = (m\overline{BC})^2 + (m\overline{AC})^2$

$$\Rightarrow c^2 = (60)^2 + (45)^2 = 3600 + 2025 = 5625$$

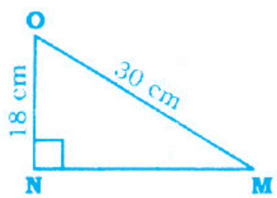
جيئن تہ $\Rightarrow c = \sqrt{5625} = \sqrt{75 \times 75} = 75$

مطلب تہ $c = 75\,\text{cm}$

يعني هيپاٽينيوز جي ڊيگهہ 75 سينٽي ميٽر آهي.

نوٽ: ياد رکو تہ گوني ڪنڊ ٽڪنڊي کي حل ڪرڻ جو مطلب ان جي سڀني پاسن جي ماپ معلوم ڪرڻ آهي.

مثال 3. گوني ڪنڊ ٽڪنڊي MNO کي حل ڪريو جنهن ۾ $m\angle N = 90^\circ$، $m\overline{MO} = 30$ cm ۽ $m\overline{NO} = 18$ cm



حل: ڏنل معلومات مطابق

هيپاٽينيوز $= H = m\overline{MO} = 30$ cm

عمود $= P = m\overline{NO} = 18$ cm

باقي $\overline{MN}$ يعني پايي جي ڊيگهہ معلوم ڪرڻي آهي.

تنهن ڪري: $m(\overline{MN})^2 = B^2 = H^2 - P^2$

$$= (30)^2 - (18)^2$$

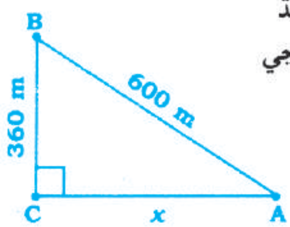
$$= 900 - 324 = 576$$

$$\Rightarrow B = \sqrt{576} = \sqrt{(24)^2} = 24\text{ cm}$$

يعني پايو 24 سينٽي ميٽر آهي.

مثال 4. هڪ پوڙهي عورت پنهنجي گهر (A) کان مارڪيٽ ٽاور (B) تائين پيچري $\overline{AB}$ تان پنڌ ڪيو، پر جيڪڏهن اها عورت ٻيو رستو اختيار ڪري جنهن ۾ پنهنجي گهر کان اڳ ۾ باغ (C) ڏانهن وڃي ۽ پوءِ اُتان ٽاور طرف وڃي تہ ڪيس ڪيترو پنڌ وڌيڪ ڪرڻو پوندو؟

حل: ڏنل شڪل مطابق پوڙهي عورت جڏهن گهر (A) کان سنئو ٽاور (B) طرف وڃي ٿي تہ 600 ميٽر مفاصلو طئي ڪري ٿي.



يعني ميٽر $600 = m(\overline{AB}) = H =$ پهرين رستي وارو پنڌ

پر جيڪڏهن اڳ ۾ باغ ڏانهن وڃي ٿي ۽ پوءِ اُتان مارڪيٽ وڃي ٿي تہ ان جو پنڌ وڌي وڃي ٿو:

$m(\overline{AC}) + m(\overline{CB}) = (x + 360)$ ميٽر

جيئن تہ $m(\overline{AC})$ معلوم نہ آهي ان کي x ڪري لکبو تہ

فيثاغورث سڌيان مطابق: $B^2 = H^2 - P^2$

يعني ^{2}(عمود) $=$ ^{2}(هيپاٽينيوز) $-$ ^{2}(پايو)

$$\Rightarrow x^2 = (600)^2 - (360)^2$$
$$= 360000 - 129600 = 230400$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{230400} = \sqrt{(480)^2} = 480$$

$x = 480$ ميٽر

	480
4	$\overline{23}\,\overline{04}\,\overline{00}$
+4	−16
88	704
+8	−704
960	000
+0	−000
960	0

ٻئي رستي وارو پنڌ $= 480 + 360$

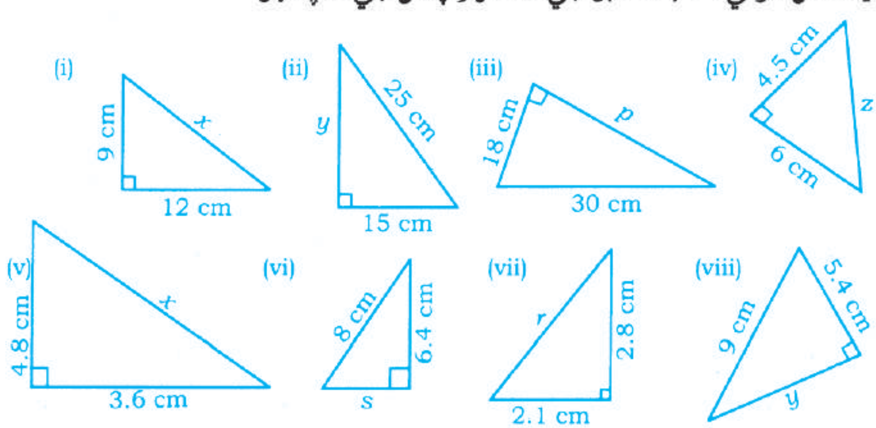
$= 840$ ميٽر

ميٽر $840 - 600 = 240 =$ واڌارو پنڌ

مطلب تہ عورت کي ٻيو رستو اختيار ڪرڻ سان 240 ميٽر پنڌ وڌيڪ ڪرڻو پوندو.

مشق 9.2

1. هيٺ ڏنل ڪوني ڪنڊ ٽڪنڊن جي نامعلوم پاسن جي ماپ لهو:



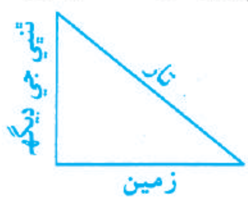
2. l، m ۽ n هڪ ٽڪنڊي LMN جي پاسن جون ماپون آهن.
هيٺ ڏنل معلومات مان فيصلو ڪريو ته ڪهڙين ماپن وارو ٽڪنڊو گوني ڪند ٽڪنڊو آهي ($\angle L$، $\angle M$ ۽ $\angle N$ مان ڪابه هڪ گوني ڪند ٿي سگهي ٿي يا ڪابه نه).

(i) $l = 9, m = 12$ ۽ $n = 15$ (ii) $l = 7, m = 8$ ۽ $n = 9$
(iii) $l = 6, m = 8$ ۽ $n = 10$ (iv) $l = 12, m = 16$ ۽ $n = 20$
(v) $l = 2, m = 4$ ۽ $n = 6$ (vi) $l = 1.5, m = 2$ ۽ $n = 2.5$

3. ٻيورپاسي گوني ڪند ٽڪنڊن جي هيپاٽينيوز جي چورسن جي ماپ هيٺ ڏجي ٿي. سندس هڪ جيترن پاسن جي ڊيگهه لهو.

(i) $H^2 = 50\ cm^2$ (ii) $H^2 = 72\ cm^2$ (iii) $H^2 = 98\ cm^2$
(iv) $H^2 = 128\ cm^2$ (v) $H^2 = 2.42\ cm^2$ (vi) $H^2 = 9.68\ cm^2$
(vii) $H^2 = 4.5\ cm^2$ (viii) $H^2 = 60.5\ cm^2$ (ix) $H^2 = 112\ .\ 5cm^2$

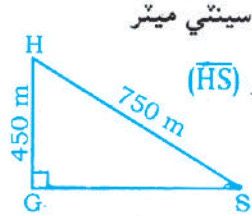
4. هڪ ڏاڪڻ 6.5 ميٽر ڊگهي آهي. ان کي ڀت تي اهڙي طرح رکيو ويو آهي جو اها ڀت کي 5.2 ميٽر اوچائيءَ تي پهچي ٿي. اُن ڏاڪڻ جي پايي جو ڀت جي پاڙ کان مفاصلو لهو.



5. هڪ بجليءَ جو ٿنڀو 12 ميٽر ڊگهو آهي. ٿنڀي جي چوٽيءَ کان زمين تائين 20 ميٽر تار هڪ ڪوڪي سان ٻڌل آهي. ٻڌايو ته ڪوڪي ۽ ٿنڀي جي وچ ۾ ڪيترو فاصلو آهي؟

6. هيٺين مستطيلن جي اُريب جي ڊيگهه لهو، جڏهن ته انهن جي ڊيگهه ۽ ويڪر هيٺين ريت آهي.

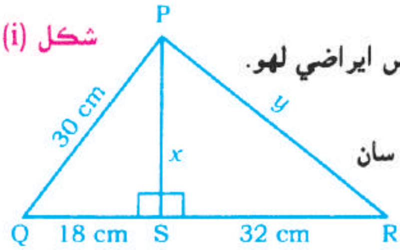
(i) ڊيگهه = 6 سينٽي ميٽر ۽ ويڪر = 8 سينٽي ميٽر
(ii) ڊيگهه = 44 سينٽي ميٽر ۽ ويڪر = 33 سينٽي ميٽر
(iii) ڊيگهه = 5.6 سينٽي ميٽر ۽ ويڪر = 4.2 سينٽي ميٽر
(iv) ڊيگهه = 6.4 سينٽي ميٽر ۽ ويڪر = 4.8 سينٽي ميٽر



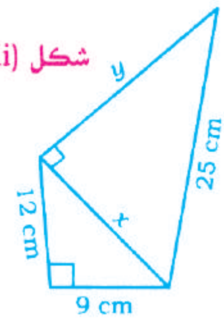
7. هڪ شاگرد گهر (H) کان اسڪول (S) لاءِ شارٽ ڪٽ پيچرو ($\overline{HS}$) استعمال ڪري ٿو. جيڪڏهن اهو شاگرد ڦيرائين گهر کان باغيچي (B) طرف وڃي ۽ پوءِ باغيچي کان اسڪول وڃي ته ڪيس ڪيترو پنڌ وڌيڪ ڪرڻو پوندو؟

8. هڪ مستطيل زمين جي ويڪر 48 ميٽر آهي ۽ سندس اُريب جي ڊيگهه 80 ميٽر آهي. سندس ايراضي لهو.

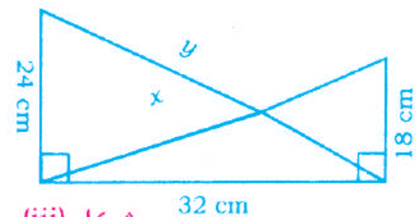
9. سامهون ڏنل شڪلين (i)، (ii) ۽ (iii) کي غور سان ڏسي، نامعلوم مقدارن x ۽ y جون ماپون لهو.



شڪل (i)



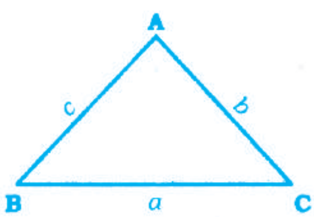
شڪل (ii)



شڪل (iii)

9.2 هيرو جو فارمولا

ٽڪنڊي علائقي جي ايراضي اها جڳهه آهي جيڪا ان جي ٽنهي پاسن سان ڍڪيل آهي. هتي شڪل ۾ شيڊ ٿيل حصو ۽ ٽڪنڊي جا ٽئي پاسا گڏجي ڪري ٽڪنڊي جو علائقو ڏيکارين ٿا.

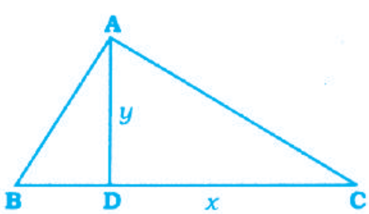


اڳ ۾ اسان سکي آيا آهيون ته جيڪڏهن ڪنهن به ٽڪنڊي جي پايي ۽ عمود جي ماپ معلوم هجي ته ان جي ايراضي لهڻ لاءِ فارمولا آهي:

$\triangle ABC$ = ٽڪنڊي جي ايراضي

$= \frac{1}{2}$ (پايو) $\times$ (عمود)

$= \frac{1}{2}(m\overline{BC}) \times (m\overline{AD}) = \frac{1}{2} x \times y$



جڏهن ته $x =$ (پايو) $m\overline{BC}$ ۽ $y =$ (عمود) $m\overline{AD}$

هاڻي اسان اهڙن ٽڪنڊن جي ايراضي لهڻ سکنداسين جن جو عمود معلوم نه هجي پر ٽنهي پاسن جون ماپون معلوم هجن.

فرض ڪريو ته ڪنهن ٽڪنڊي جي پاسن جي ماپن کي a، b ۽ c سان ظاهر ڪيو ويو آهي. ان صورت ۾ ٽڪنڊي جي ايراضي معلوم ڪرڻ لاءِ هيٺيون فارمولا استعمال ڪيو وڃي ٿو:

ٽڪنڊي ABC جي ايراضي = $\blacktriangle ABC = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

هتي $S = \Delta ABC$ جو پيريميٽر

جيڪڏهن $\frac{1}{2}(a+b+c)$ = (ٽڪنڊي جي ٽنهي پاسن جو جوڙ) $\frac{1}{2} = S$

يا $S = \frac{a+b+c}{2}$

اهڙي طرح ٽڪنڊي جي ايراضي معلوم ڪرڻ واري طريقي کي هيرو جو فارمولو چوندا آهن، جو ته هيرو نالي هڪ رياضيدان ان کي دريافت ڪيو هو.

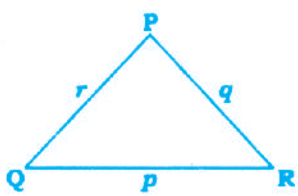
هيرو جي ان ناياب فارمولي کي پوري طرح سمجهڻ کان پوءِ ٽڪنڊي شڪلين، ڪمرن، ويرانڊن يا ٻنين وغيره جي ايراضي، تمام گهڻي سولائيءَ سان معلوم ڪرڻ جي قابل ٿي ويندا.

انهيءَ فارمولي کي سمجهڻ کان پوءِ زمين جي ماپ جي سلسلي ۾ اڪثر ڪري ٻهراڙيءَ جي علائقن ۾ ڪنهن تپيدار وغيره جي مدد وٺڻي نه پوندي. فارمولي جي وضاحت لاءِ مثال ڏسو.

9.2.1 هيرو جي فارمولا کي بيان ڪرڻ ۽ ان کي ٽڪنڊي ۽ چوڪنڊي علائقن جي ايراضين لهڻ لاءِ استعمال ڪرڻ.

(A) هيرو جي فارمولا جو بيان

جيڪڏهن p، q ۽ r ڪنهن ٽڪنڊي PQR جي پاسن جي ڊيگهه ڏيکارن ٿا ته ان ٽڪنڊي جي ايراضي لهڻ لاءِ هيرو جو فارمولا آهي:



$$\blacktriangle PQR = \sqrt{S(S-p)(S-q)(S-r)}$$

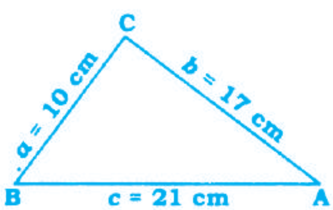
جيئن ته $S = \frac{p+q+r}{2}$

نوٽ: S پيريميٽر جو اڌ آهي.

(B) هيرو جي فارمولا ذريعي ٽڪنڊي جي ايراضي لهڻ

مثال 1. هيرو جي فارمولا ذريعي ٽڪنڊي ABC جي ايراضي لهو.

جڏهن ته ان جي پاسن جي ماپ 10 سينٽي ميٽر، 17 سينٽي ميٽر ۽ 21 سينٽي ميٽر آهي.



حل: شڪل تي غور ڪرڻ سان معلوم ٿيو ته $\angle A$ جي مخالف پاسي کي a سان، $\angle B$ جي مخالف پاسي کي b سان ۽ $\angle C$ جي مخالف پاسي کي c سان ڏيکاريو ويو آهي.

هتي S = 24 سينٽي ميٽر ، $S = \frac{a+b+c}{2} = \frac{10+17+21}{2} = \frac{48}{2} = 24\text{ cm}$

فارمولا ۾ a، b، c ۽ S جا ملهه وجهڻ سان

ٽڪنڊي جي ايراضي $ABC = \blacktriangle ABC = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

$$\blacktriangle ABC = \sqrt{24 \times (24-10) \times (24-17) \times (24-21)}$$

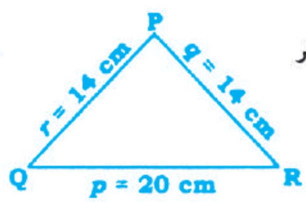
$$= \sqrt{24 \times 14 \times 7 \times 3} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 7 \times 7 \times 3}$$

$$= \sqrt{\underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{7 \times 7}} = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$$

تنهن ڪري Δ ABC جي ايراضي 84 چورس سينٽي ميٽر آهي.

مثال 2. هيرو جي فارمولا وسيلي ٻيورپاسي ٽڪندي PQR جي ايراضي لهو جنهن ۾

$m\overline{PQ} = m\overline{PR} = 14$ سينٽي ميٽر ۽ $m\overline{QR} = 20$ سينٽي ميٽر



حل: فرض ڪريو تہ p، q ۽ r ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪنڊن P، Q ۽ R جا مخالف پاسا آهن.

تہ $m\,\overline{PQ} = r = 14\text{ cm},\ m\,\overline{PR} = q = 14\text{ cm and } m\,\overline{QR} = p = 20\text{ cm}$

هاڻي $S = \frac{p+q+r}{2} = \frac{20+14+14}{2} = \frac{48}{2} = 24\text{ cm}$

$$\blacktriangle PQR = \sqrt{S(S-p)(S-q)(S-r)}$$

$$= \sqrt{24(24-20)(24-14)(24-14)}$$

$$= \sqrt{24 \times 4 \times 10 \times 10} = \sqrt{6 \times \underline{4 \times 4} \times \underline{10 \times 10}}$$

$$= 4 \times 10\sqrt{6} = 40\sqrt{6}\text{ cm}^2$$

$$= 40 \times (2.45) = 98\text{ cm}^2$$

تنهن ڪري ڏنل ٻہ پور پاسي ٽڪندي جي ايراضي 98 چورس سينٽي ميٽر آهي.

مثال 3. هيرو جي فارمولا وسيلي نامعلوم رڪنن (Elements) جو ملهه معلوم ڪريو:

$a = 10\text{ cm},\ b = 12\text{ cm},\ S = 18\text{ cm},\ c = \_\_\_\_,\ \blacktriangle ABC = \_\_\_\_$

حل: اسان کي خبر آهي ته هيرو جي فارمولا ۾

$$\blacktriangle ABC = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}\ ,\quad \left(S = \frac{a+b+c}{2}\right)$$

هتي $S = \dfrac{a+b+c}{2}$ جو ملهه معلوم آهي ته ٽئين پاسي 'c' جو ملهه ملي ويندو.

(فارمولي ۾ S، a ۽ b جا ملهه رکڻ سان)

$$S = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow 18 = \frac{10+12+c}{2}$$
$$\Rightarrow 36 = 22 + c$$
$$\Rightarrow c = 36 - 22 = 14\text{ cm}$$

هاڻي (هيرو جي فارمولا مطابق)

$$\blacktriangle ABC = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

S، a، b ۽ c جي ملهه وجهڻ سان

$$\blacktriangle ABC = \sqrt{18 \times (18-10) \times (18-12) \times (18-14)}$$
$$= \sqrt{18 \times 8 \times 6 \times 4}$$
$$= \sqrt{\underline{3 \times 3} \times 2 \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 2 \times 3 \times \underline{2 \times 2}}$$
$$= 3 \times 2 \times 2 \times 2\sqrt{6} = 24\sqrt{6}\ \text{cm}^2 = 24 \times 2.45\ \text{cm}^2 = 58.8\ \text{cm}^2$$

تنهن ڪري اڻڄاتل رڪن آهن: c = 14 سينٽي ميٽر ۽ $\blacktriangle ABC = 58.8$ چورس سينٽي ميٽر

مشق 9.3

1. هيرو جي فارمولا وسيلي هيٺ ڄاڻايل ٽڪنڊن جي ايراضي لهو، جڏهن انهن جي ٽنهي پاسن جي ماپ مليل آهي:

(i) ΔABC جنهن ۾ $a = 16$ سينٽي ميٽر، $b = 20$ سينٽي ميٽر ۽ $c = 16$ سينٽي ميٽر

(ii) ΔDEF جنهن ۾ $d = 10$ سينٽي ميٽر، $c = 17$ سينٽي ميٽر ۽ $f = 21$ سينٽي ميٽر

(iii) ΔLMN جنهن ۾ $l = 6$ سينٽي ميٽر، $m = 8$ سينٽي ميٽر ۽ $n = 10$ سينٽي ميٽر

(iv) ΔPQR جنهن ۾ $p = 20$ سينٽي ميٽر، $q = 24$ سينٽي ميٽر ۽ $r = 18$ سينٽي ميٽر

(v) ΔXYZ جنهن ۾ $x = 15$ سينٽي ميٽر، $y = 21$ سينٽي ميٽر ۽ $z = 14$ سينٽي ميٽر

2. هيرو جي فارمولا کي استعمال ڪري هيٺ ڏنل ڀپور پاسن ٽڪنڊن جي ايراضي لهو جڏهن تہ سندس پاسن جون ماپون ڏنل آهن.

(i) ΔABC ۾ $a = 10$ سينٽي ميٽر، $b = 10$ سينٽي ميٽر ۽ $c = 12$ سينٽي ميٽر

(ii) ΔDCE ۾ $d = 12$ سينٽي ميٽر، $c = 12$ سينٽي ميٽر ۽ $e = 16$ سينٽي ميٽر

(iii) ΔLMN ۾ $l = 9$ سينٽي ميٽر، $m = 9$ سينٽي ميٽر ۽ $n = 12$ سينٽي ميٽر

(iv) ΔPQR ۾ $p = 24$ سينٽي ميٽر، $q = 24$ سينٽي ميٽر ۽ $r = 40$ سينٽي ميٽر

3. هيرو جي فارمولا ذريعي هڪ ٽپور پاسي ٽڪنڊي جي ايراضي لهو جنهن جي هر هڪ پاسي جي ڊيگھ 'a' سينٽي ميٽر آهي.

4. هيٺ ڏنل ماپن وسيلي باقي رهيل پاسي جي ڊيگھ لهو ۽ ٽڪنڊن جي ايراضي بہ لهو.

(i) $a = 13$ cm, b = 15 cm, S = 20 cm, $c =$ ____ ۽ ▲ABC = ____

(ii) $d = 3.6$ cm, e = 4.5 cm, S = 6.0 cm, $f =$ ____ ۽ ▲DEF = ____

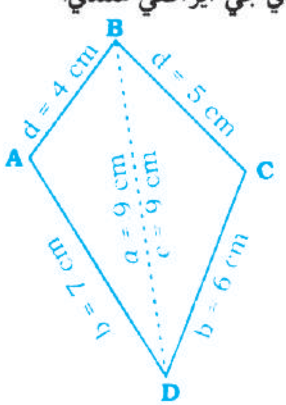
(iii) $l = 7.2$ cm, m = 6.4 cm, S = 10.0 cm, $n =$ ____ ۽ ▲LMN = ____

(iv) $p = 4.5$ cm, q = 4.5 cm, S = 7.0 cm, $r =$ ____ ۽ ▲PQR = ____

B. هيرو جي فارمولا کي چوڪنڊي علائقي جي ايراضي لهڻ لاءِ استعمال ڪرڻ.

اسان ڪنهن ٽڪنڊي علائقي جي ايراضي هيرو جي فارمولا وسيلي معلوم ڪرڻ سکي چڪا آهيون. هاڻي اسان چوڪنڊي جي ايراضي معلوم ڪرڻ سکنداسين.

جيئن تہ چوڪنڊي جو ڪوبہ هڪڙو اُريب ان چوڪنڊي کي ٻن ٽڪنڊن ۾ ورهائيندو آهي ۽ اهو اُريب ٻنهي ٽڪنڊن لاءِ ٽيون پاسو ٿاهيندو آهي، تنهن ڪري هر هڪ ٽڪنڊي جي جدا جدا ايراضي لهي، ٻنهي ايراضين کي جوڙ ڪبو تہ ڏنل چوڪنڊي جي ايراضي ملندي.



نوٽ: چوڪنڊي جي چئني پاسن ۽ ڪنهن بہ هڪ اُريب جي ماپ مليل هوندي تہ هيرو جو فارمولا استعمال ڪري سگھبو.

مثال 1. سامهون ڏيکاريل چوڪنڊي جي ايراضي هيرو جي فارمولا وسيلي لهو.

حل: پهريائين اسان اُريب $\overline{BD}$ ٺاهيو، ان جي ماپ ڪنداسين، (هتي اها ماپ 9 سينٽي ميٽر ڏنل آهي)

اهڙي ريت بہ ٽڪنڊا ΔABD ۽ ΔBCD ٺهي پيا.

(i) $\triangle ABD$: $a = 9$ cm, $b_1 = 7$ cm, $d_1 = 4$ cm

$$S_1 = \frac{a + b_1 + d_1}{2} = \frac{9 + 7 + 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

هيرو جي فارمولا جي مدد سان

$$\triangle ABD = \sqrt{S_1 \ (S_1 - a) \ (S_1 - b_1) \ (S_1 - d_1)}$$

$$= \sqrt{10 \times (10-9) \times (10-7) \times (10-4)}$$

$$= \sqrt{10 \times 1 \times 3 \times 6} = \sqrt{5 \times 2 \times 1 \times 3 \times 3 \times 2}$$

$$= 2 \times 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$= 6 \times 2.4 = 13.44 \text{ cm}^2$$

(ii) $\triangle BCD$: $b_2 = 6$ cm, $c = 9$ cm, $d_2 = 5$ cm

$$S_2 = \frac{6 + 9 + 5}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm}$$

هيرو جي فارمولا جي مدد سان

$$\triangle BCD = \sqrt{S_2 \ (S_2 - b_2) \ (S_2 - c) \ (S_2 - d_2)}$$

$$= \sqrt{10 \times (10-6) \times (10-9) \times (10-5)}$$

$$= \sqrt{10 \times 4 \times 1 \times 5}$$

$$= \sqrt{2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 5}$$

$$= \sqrt{2 \times \underline{5 \times 5} \times \underline{2 \times 2}}$$

$$= 5 \times 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

$= 10 \times 1.41$ (ٻئي مول کي رڳو ڏهائيءَ جي ٻن جاين تائين درست ڪريو)

$= 14.1$ چورس سينٽي ميٽر

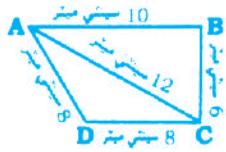
ٻنهي نتيجن کي گڏ ڪرڻ سان اسان کي چوڪنڊي ABCD جي گهربل ايراضي ملندي:

تنهن ڪري چوڪنڊي ABCD جي ڪُل ايراضي = $\triangle ABD + \triangle BCD$

$= 13.44 + 14.1$

$= 27.54$ چورس سينٽي ميٽر

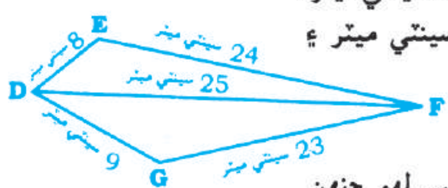
مشق 9.4



1. چوڪنڊي ABCD جي ايراضي لهو، جڏهن ته:
$m\overline{AB} = 10$ سينٽي ميٽر، $m\overline{CD} = 8$ سينٽي ميٽر
$m\overline{AC} = 12$ سينٽي ميٽر، $m\overline{AD} = 8$ سينٽي ميٽر ۽
$m\overline{BC} = 6$ سينٽي ميٽر

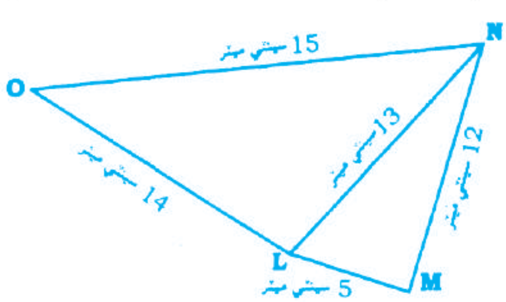
2. چوڪنڊي PQRS جي ايراضي لهو جڏهن ته:
$m\overline{PS} = m\overline{QR} = 4$ سينٽي ميٽر
$m\overline{PR} = 5$ سينٽي ميٽر ۽ $m\overline{PQ} = m\overline{SR} = 3$ سينٽي ميٽر

3. چوڪنڊي DEFG جي ايراضي لهو جڏهن ته:
$m\overline{DE} = 8$ سينٽي ميٽر، $m\overline{EF} = 24$ سينٽي ميٽر،
$m\overline{DF} = 25$ سينٽي ميٽر، $m\overline{DG} = 9$ سينٽي ميٽر ۽
$m\overline{GF} = 23$ سينٽي ميٽر



4. هيٺ ڏيکاريل چوڪنڊي زمين جي ايراضي لهو جنهن جي پاسن جون ماپون شڪل ۾ ڄاڻايل آهن.

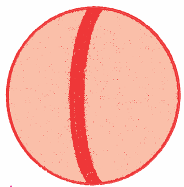
5. LMNO هڪ چوڪنڊو آهي، ان جي ايراضي لهو،
جڏهن ته:
$m\overline{LM} = 5$ سينٽي ميٽر
$m\overline{MN} = 12$ سينٽي ميٽر،
$m\overline{LN} = 13$ سينٽي ميٽر،
$m\overline{LO} = 14$ سينٽي ميٽر
۽ $m\overline{NO} = 15$ سينٽي ميٽر



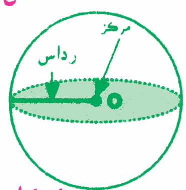
9.3 گولي جو مقدار ۽ مٿاڇري جي ايراضي

گولو:

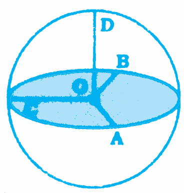
ڪرڪيٽ بال، هاڪي جو بال، والي بال، فوٽ بال وغيره گولي جا مثال آهن. شڪل (i).


شڪل (i)

گولو در حقيقت اهڙي نهري شيءِ آهي جيڪا هڪ مڙيل مٿاڇري سان اهڙيءَ طرح بند ٿيل آهي جو ان جي ٻاهرين مٿاڇري تي موجود سڀني ٽٻڪن جو مفاصلو سندس اندر موجود هڪ مقرر ٽٻڪي کان هڪ جيترو هوندو آهي. ان ٽٻڪي کي گولي جو مرڪز چئبو آهي. سامهون ڏنل شڪل (ii) ۾ ٽٻڪو O گولي جو 'مرڪز' آهي. مرڪز کان ٻاهرين مٿاڇري تائين واري مفاصلي کي گولي جو 'رداس' چئبو آهي. شڪل (iii) ۾ $\overline{OA}$، $\overline{OB}$، $\overline{OC}$، $\overline{OD}$ گولي جا 'رداسي ٽڪرا' يعني رداس آهن. تنهن ڪري $m\overline{OA} = m\overline{OB} = m\overline{OC} = m\overline{OD} = r$ جو تہ ٽٻڪا A، B، C ۽ D گولي جي ٻاهرين مٿاڇري تي آهن.



شڪل (ii)

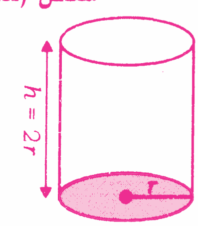


شڪل (iii)

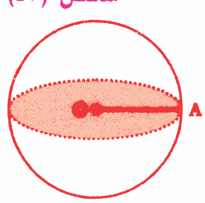
9.3.1 گولي جي مٿاڇري جي ايراضي ۽ مقدار لهڻ

(A) گولي جي مٿاڇري جي ايراضي

ارشميدس نالي هڪ مشهور يوناني سائنسدان معلوم ڪري ورتو تہ ڪنهن بہ گولي جي مٿاڇري جي ايراضي هڪ اهڙي سلينڊر جي مڙيل مٿاڇري واري ايراضيءَ جي برابر آهي جنهن جو رداس گولي جي رداس جيترو هجي ۽ سندس اوچائي گولي جي قطر جي ماپ جيتري هجي.



شڪل (iv)



شڪل (v)

شڪل (v) ۾ گولي جو رداس r آهي. شڪل (iv) ۾ ڏيکاريل سلينڊر جو رداس بہ r آهي ۽ اوچائي $h = 2r$ آهي.

اسان کي خبر آهي تہ سلينڊر جي مڙيل مٿاڇري جي ايراضي = $2\pi rh$

تنهن ڪري گولي جي مٿاڇري جي ايراضي $A = 2\pi r(2r) = 4\pi r^2 \quad (\because h = 2r)$

يعني گولي جي مٿاڇري جي ايراضي آهي: $A = 4\pi r^2$

مثال 1. هڪ گولي جورداس 14 س.م آهي تہ سندس مٿاڇري جي ايراضي لهو، جڏهن $\pi = \frac{22}{7}$

حل: $A = 4\pi r^2 =$ مٿاڇري جي ايراضي

$$A = 4 \times \frac{22}{7} \times (14)^2 = 4 \times \frac{22}{\cancel{7}_1} \times \overset{2}{\cancel{14}} \times 14$$

$$= 8 \times 22 \times 14 = 176 \times 14 = 2464\ \text{cm}^2$$

يعني مليل گولي جي ڪُل ايراضي 2464 چورس سينٽي ميٽر آهي.

مثال 2. هڪ گولي جي مٿاڇري جي ايراضي 5544 چورس سينٽي ميٽر آهي. سندس رداس لهو.

حل: گولي جي مٿاڇري جي ايراضي $= A = 4\pi r^2$ ، $r^2 = \frac{A}{4\pi}$ يا

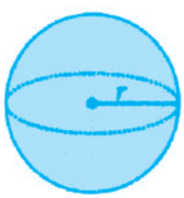
$$r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}} \quad \text{يا}$$

ڏنل گولي جو رداس $= r = \sqrt{\frac{5544 \times 7}{4 \times 22}} = \sqrt{\frac{\overset{\overset{63}{\cancel{693}}}{\overset{\cancel{1386}}{\cancel{5544}}} \times 7}{\underset{1}{\cancel{4}} \times \underset{\cancel{11}}{\cancel{22}}}}$

$$\therefore r = \sqrt{63 \times 7} \Rightarrow r = \sqrt{\underline{3 \times 3} \times \underline{7 \times 7}} \Rightarrow r = 3 \times 7 = 21\text{cm}$$

يعني ڏنل گولي جو رداس 21 سينٽي ميٽر آهي.

(B) گولي جو مقدار (Volume)



فرض ڪيو تہ هڪ گولي جو رداس r آهي ۽ هڪ سلينڊر جو رداس r ۽ اوچائي $h = 2r$ آهي (ان سلينڊر جو مقدار $= \pi r^2 h$) r جا ڪيئي ملهہ بدلائي تجربن وسيلي معلوم ٿيو تہ گولي جو مقدار V اهڙي سيلنڊر جي مقدار جي ٻہ ٽياگي ٽي حصي جي برابر آهي يعني

$$V = \frac{2}{3} \times \pi r^2 h = \frac{2}{3}\ \pi r^2 (2r) = \frac{4}{3}\ \pi r^3$$

مطلب تہ گولي جو مقدار آهي $V = \frac{4}{3} \times \pi r^3$

مثال 1. اهڙن ٻن گولن جا مقدار لهوجن جو رداس آهي

(i) $r = 7$ cm (ii) $r = 2.1$ m

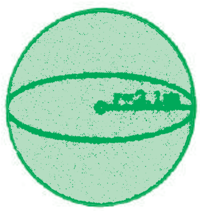
حل (i): گولي جو مقدار آهي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$V = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (7)^3 = \frac{4 \times 22 \times \overset{1}{\cancel{7}} \times 7 \times 7}{3 \times \cancel{7}_1}$$

$$= (\frac{4}{3} \times 22 \times 1 \times 7 \times 7)\text{cm}^3 = \frac{4312}{3}\ \text{cm}^3 = 1437.33\text{cm}^3$$

مطلب تہ گولي جو مقدار 1437.33 چورس سينٽي ميٽر آهي.

حل (ii): گولي جو مقدار $= V = \frac{4}{3}\pi r^3$

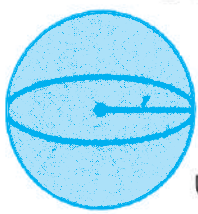


$$V = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (2.1)^3 m^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{21}{10}\right)^3$$

$$= \frac{4}{\cancel{3}_1} \times \frac{22}{\cancel{7}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{\overset{7}{\cancel{21}}}}}{10} \times \frac{21}{10} \times \frac{21}{10}$$

$$= \frac{4 \times 22 \times 21 \times 21}{10 \times 10 \times 10} = \frac{38808}{1000} m^3 = 38.808 m^3$$

مثال 2. هڪ گولي جي مٿاڇري جي ايراضي 5544 چورس سينٽي ميٽر آهي ته سندس مقدار لهو.



حل: فرض ڪيو گولي جو رداس r آهي.

تنهن ڪري گولي جي مٿاڇري جي ايراضي $= A = 4\pi r^2$

يا $r^2 = \frac{A}{4\pi} \Rightarrow r^2 = \frac{5544}{4\pi} = \frac{5544}{4 \times \frac{22}{7}} = \frac{5544 \times 7}{4 \times 22}$

يا $r^2 = \frac{\overset{63}{\cancel{\overset{693}{\cancel{\overset{1386}{\cancel{5544}}}}}} \times 7}{\cancel{4}_1 \times \cancel{22}_{\cancel{11}_1}} = 63 \times 7 = 3 \times 3 \times 7 \times 7 = 3^2 \times 7^2$

$$r = \sqrt{3^2 \times 7^2} = 3 \times 7 = 21 \text{ cm} = \frac{21}{100} \text{m} = 0.21 \text{m}$$

تنهن ڪري $r = 0.21$ m

اسان ڄاڻون ٿا ته گولي جو مقدار (گنجائش) $= V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\therefore \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \left[\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (0.21)^3\right]$$

يا $V = \left[\frac{4 \times 22 \times \overset{0.1}{\cancel{\overset{0.7}{\cancel{0.21}}}} \times 0.21 \times 0.21}{\cancel{3} \times \cancel{7}_1}\right]$

يا $V = (88 \times 0.1 \times 0.21 \times 0.21) m^3 = 0.038808 m^3$

نوٽ: اسان ڄاڻون ٿا ته 1 چورس ميٽر = 1000 لٽر

انهيءَ لاءِ گولي جو مقدار (گنجائش) = 0.038808 چورس ميٽر

= (0.038808 × 1000) لٽر = 38.808 لٽر

مطلب ته گولي جي گنجائش 38.808 لٽر آهي.

مشق 9.5

1. هيٺ ڄاڻايل ريڊيئسن وارن گولن جي مٿاڇري جي ايراضي لهو.

(i) 35 cm (ii) 56 cm (iii) 0.42 cm (iv) 0.63 cm (v) 0.98 cm

2. هيٺ ڄاڻايل گولن جا ريڊيئس لهو، جڏهن انهن جي مٿاڇري جي ايراضي آهي:

(i) 616 cm^2 (ii) 2464 cm^2 (iii) 88,704 cm^2 (iv) 985.6 m^2 (v) 154 m^2

3. هيٺ ڄاڻايل ريڊيئسن وارن گولن جو مقدار لهو:

(i) 21cm (ii) 49 cm (iii) 2.8 m (iv) 77 cm (v) 3.5 m

4. هيٺ ڄاڻايل هرهڪ گولي ۾ ڪيترا لٽر پاڻيءَ جا اچي سگهندا جيڪڏهن سندس ريڊيئس آهي:

(i) 70 cm (ii) 105 cm (iii) 2.8 m (iv) 175 cm (v) 2.45 m

5. هيٺ ڄاڻايل گولي جو مقدار لهو ۽ ٻڌايو ته ان ۾ ڪيترا لٽر پاڻي ماپندو جڏهن ته ان جي مٿاڇري جي ايراضي آهي:

(i) 2464 cm^2 (ii) 9856 cm^2 (iii) 29.8144 m^2
(iv) 43.12 m^2 (v) 13.86 m^2

6. جيڪڏهن ڪنهن گولي جو ريڊيئس ٻيڻو ڪجي ته ان جي (a) مٿاڇري جي ايراضي ۽ (b) مقدار ۾ ڪيتري تبديلي ايندي؟

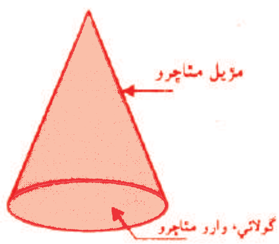
7. گولي A جو ريڊيئس، گولي B جي ريڊيئس کان ٽيڻو آهي، انهن ٻنهي گولن جي (i) مٿاڇرن جي ايراضين جي پاڻ ۾ نسبت لهو. (ii) مقدارن جي پاڻ ۾ نسبت لهو.

8. هڪ لوهه جي گولي جي مٿاڇري جي ايراضي 77,000 چورس سينٽي ميٽر آهي. جيڪڏهن ان کي رجايو وڃي ته ان مان حاصل ٿيندڙ لوهه جو مقدار ڪيترو ملندو؟ ان لوهه مان 1 سينٽي ميٽر ريڊيئس جا گهٽا ننڍا گولا ٺاهي سگهبا؟

9. هڪ 7 سينٽي ميٽر ريڊيئس جي ٽامي جي نهري گولي کي رجائي حاصل ٿيندڙ ٽامي مان تار ٺاهي وئي آهي. جيڪڏهن تار جي قطر جي ماپ 0.7 سينٽي ميٽر آهي ته تار جي ڊيگهه لهو.

10. 12 سينٽي ميٽر ريڊيئس واري فوٽ بال جو مقدار لهو.

9.3.2 مخروط جي مٿاڇري جي ايراضي ۽ مقدار

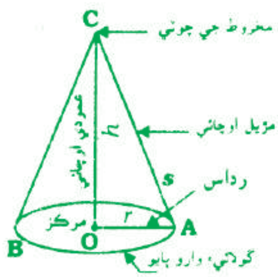


وصف: سامهون واري شڪل هڪ مخروط (Cone) جي آهي.
غور سان ڏسڻ سان معلوم ٿئي ٿو ته مخروط جا ٻه مٿاڇرا ٿيندا آهن.

(i) مڙيل مٿاڇرو: اهو چوٽي کان شروع ٿي تري واري گولائي علائقي تي ختم ٿئي ٿو.

(ii) گولائي وارو مٿاڇرو: اهو مخروط جو ترو يا پايو آهي

ڪنهن به مخروط جا هيٺيان پنج رڪن يا جزا آهن:

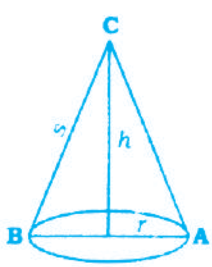


1. مخروط جي چوٽي ٽڪو C آهي.
2. گولائي واري تري جو مرڪز وارو ٽڪو O آهي.
3. گولائي واري پايي جو رداس = $r = m\overline{OA}$
4. مڙيل اوچائي = $m\overline{BC}$ يا $m\overline{AC}$
5. عمودي اوچائي = $h = m\overline{OC}$

(A) مخروط جي مٿاڇري جي ايراضي لهڻ

اسان کي خبر آهي ته مخروط جي مٿاڇري جي ڪل ايراضي معلوم ڪرڻ لاءِ اسان کي مخروط جي گولي واري حصي ۽ مڙيل مٿاڇري جي ايراضي معلوم ڪرڻي پوندي، يعني
مڙيل مٿاڇري جي ايراضي + گولائيءِ واري حصي جي ايراضي
= مخروط جي مٿاڇري جي ڪل ايراضي

شڪل (i)

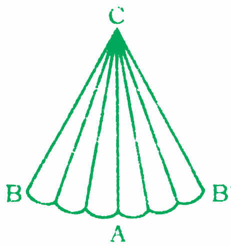


اسان کي خبر آهي ته:

گولائيءِ واري حصي جي ايراضي = πr^2 ، r گول جو رداس آهي)

هاڻي اسين مخروط جي مڙيل مٿاڇري جي ايراضي معلوم ڪريون ٿا.

فرض ڪريو ته مخروط جي عمودي اوچائي h ۽ ليٽيل يعني مڙيل اوچائي s آهي.

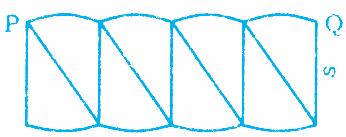


شڪل (ii)

جيڪڏهن مخروط کي قئنچي جي مدد سان ٽيڪي C (چوٽي) کان ٽيڪي B جي سڌائيءَ ۾ ڪٽيون ۽ ان کان پوءِ ستو ڪريون ته هڪڙو سيڪٽر CBB ملندو. انهيءَ جو مرڪز C ۽ رداس ليٽيل يا مڙيل اوچائي s جي برابر هوندو.

جيڪڏهن انهيءَ سيڪٽر کي تمام ننڍن ننڍن حصن ۾ اهڙيءَ طرح ورهايون جو هر حصو ٽڪنڊي جهڙو ٿي پوي ته پوءِ C هر ٽڪنڊي جي چوٽي هوندي.

انهن ٽڪنڊي شڪل وارن حصن کي هڪ ٻي سان گڏ، اهڙيءَ طرح رکو جو هڪ ٽڪنڊي جي چوٽي مٿي ۽ ٻي ٽڪنڊي جي چوٽي هيٺ هجي. ان ريت اسان کي هڪ مستطيل جهڙي شڪل حاصل ٿيندي. شڪل (i) ۾ مخروط جي پايي جو گهيرو $2\pi r$ آهي.



شڪل (iii)

اهڙي طرح شڪل (ii) ۾ سيڪٽر جي قوس جي ڊيگهه $2\pi r$ آهي.

شڪل (iii) ۾ $(2\pi r)$ جو اڌ يعني $\overline{PQ}$ مستطيل نما شڪل جي ڊيگهه آهي:

$$\text{ڊيگهه} = L = \frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r$$

$$\text{(جڏهن ته } s \text{ مستطيل نما جي ويڪر آهي)} = B = \text{ويڪر}$$

$$\text{مستطيل شڪل جي ايراضي} = A = \text{ويڪر} \times \text{ڊيگهه} = s \times m\overline{PQ} = \pi rs$$

اهڙي طرح πrs مخروط جي مڙيل متاڇري جي ايراضي آهي.

اسان ڄاڻون ٿا ته مخروط جي گولائيءَ واري حصي جي ايراضي $= \pi r$

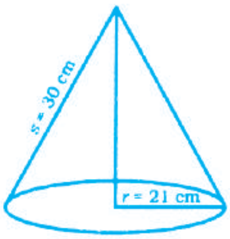
تنهن ڪري مخروط شڪل جي ڪل ايراضي = مڙيل متاڇري جي ايراضي + گولائيءَ واري حصي جي ايراضي يعني ڪل متاڇري جي ايراضي آهي.

$$\pi r(s + r) = \pi r^2 + \pi rs =$$

جڏهن r مخروط جي گولائيءَ جو رداس آهي ۽ s مخروط جي مڙيل يا ليٽيل حصي جي اوچائي آهي.

مليل مخروط شڪل جي مڙيل متاڇري جي ايراضي $\pi r(r + s)$ چورس سينٽي ميٽر آهي.

مثال 1. هڪ مخروط شڪل جي گولائيءَ واري پايي جو رداس 21 سينٽي ميٽر ۽ ليٽيل اوچائي 30 سينٽي ميٽر آهي، ته انهيءَ جي مڙيل مٿاڇري جي ايراضي معلوم ڪريو.



پايي جو رداس $= r = 21$ سينٽي ميٽر

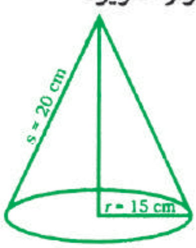
ليٽيل يا مڙيل اوچائي $= s = 30$ سينٽي ميٽر

مڙيل مٿاڇري جي ايراضي $= \pi r s$

$$= \frac{22}{7}\times 21\times 30 = \frac{22}{\cancel{7}_1}\times \cancel{21}^{3}\times 30$$

$= 22\times 3\times 30 = 1980$ چورس سينٽي ميٽر

مثال 2. مخروط جي پايي جو رداس 15 سينٽي ميٽر ۽ مڙيل مٿاڇري جي اوچائي 20 سينٽي ميٽر آهي، انهيءَ مخروط جي مٿاڇري جي ڪل ايراضي معلوم ڪريو.



حل: مخروط جي پايي جو رداس $= r = 15$ سينٽي ميٽر

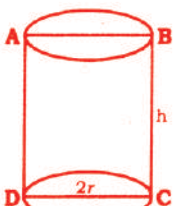
مخروط جي مڙيل اوچائي $= s = 20$ سينٽي ميٽر

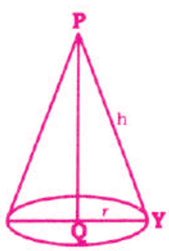
مٿاڇري جي ڪل ايراضي $= \pi r(r+s)$

$$= \frac{22}{7}\times 15\times(15+20) = \frac{22\times 15}{\cancel{7}_1}\times \cancel{35}^{5}$$

$= 22\times 75 = 1650$ چورس سينٽي ميٽر

(B) مخروط جو مقدار





اچو ته مخروط جو مقدار هڪ عملي ڪم جي ذريعي معلوم ڪريون ٿا. مخروط جو مقدار معلوم ڪرڻ جا ٻيا به طريقا آهن. پر اُهي توهان مٿين ڪلاس ۾ سکندا.

عملي ڪم: هڪ ڪوڪلو يعني خالي سلينڊر جيڪو هڪ طرف کان کليل هجي ۽ هڪ مخروط کڻو. مخروط جو پايو سلينڊر جي پايي جي برابر هجي ۽ عمودي اوچائي به ٻنهي جسمن جي پاڻ ۾ برابر هجي. سامهون ڏنل ٻنهي شڪلين کي غور سان ڏسون. معلوم ٿئي ٿو ته

يعني $m\overline{AB} = m\overline{CD} = m\overline{XY} = 2r$ ۽ $m\overline{CB} = m\overline{AD} = m\overline{PY} = h$

هتي r سيلنڊر ۽ مخروط جي گولائي واري مٿاڇري جي رداس کي ۽ h اوچائي کي ظاهر ڪري ٿي.

هاڻي مخروط کي واريءَ يا پاڻيءَ سان ڀريو ۽ انهيءَ کي سلينڊر ۾ وجهو. اهوئي عمل ٻيهر ۽ پوءِ ٽيون دفعو به ڪريو. ڏسندا ته سلينڊر پاڻيءَ يا واريءَ سان ڀرجي وڃي ٿو. انهيءَ مان اهو نتيجو ڪيون ٿا ته سلينڊر ۾ مخروط کان ٽيڻو پاڻي يا واري ڀري سگهجي ٿي.

اسين اهو چئي سگهون ٿا ته مخروط جو مقدار سلينڊر جي مقدار جي ٽين حصي جي برابر آهي.

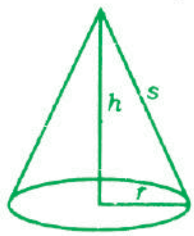
اهڙي طرح $\frac{1}{3} \times$ (سلينڊر جو مقدار) = مخروط جو مقدار

پر اسين ڄاڻون ٿا تہ $\pi r^2 h$ = سلينڊر جو مقدار

تنهنڪري مخروط جو مقدار = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

جڏهن تہ r مخروط جي رداس ۽ h مخروط جي اوچائيءَ کي ظاهر ڪري ٿي.

مثال 1. مخروط جي پايي جو رداس 2.7 ميٽر ۽ اوچائي 3.5 ميٽر آهي، تہ ان جو مقدار لهو.



حل: ميٽر $r = 2.7$ = مخروط جي پايي جو رداس

ميٽر $h = 3.5$ = مخروط جي بلندي (اوچائي)

مخروط جو مقدار $= V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (2.7)^2 \times (3.5)$$

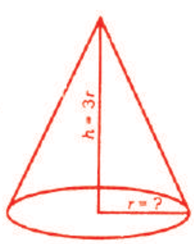
$$= \frac{1 \times 22 \times \overset{0.9}{\cancel{2.7}} \times 2.7 \times \overset{0.5}{\cancel{3.5}}}{{}_1\cancel{3} \times \cancel{7}_1}$$

$$= 22 \times 0.9 \times 2.7 \times 0.5 \quad = 26.73 \text{ m}^3$$

مطلب تہ مليل مخروط شڪل جو مقدار 26.73 ڪعب ميٽر آهي.

مثال 2. هڪ مخروط جي پايي جي ايراضي 154 چورس سينٽي ميٽر آهي. جيڪڏهن ان جي اوچائي سندس رداس کان ٽيڻي آهي تہ ان جو مقدار لهو.

حل: جيئن تہ مخروط جي پايي جي ايراضي ڏنل آهي جيڪا 154 چورس سينٽي ميٽر آهي. اسان ڄاڻون ٿا تہ ايراضي جو فارمولا آهي $A = \pi r^2$



$A = \pi r^2$ يا $154 = \frac{22}{7} r^2$

يا $r^2 = 154 \times \frac{7}{22}$

يا $r^2 = \frac{154 \times 7}{22}$ يا $r^2 = \frac{\overset{7}{\cancel{\overset{77}{\cancel{154}}}} \times 7}{\cancel{\cancel{22}}_{\cancel{11}_1}} = 49$

يا $r^2 = 7 \times 7$ يا $r^2 = 7^2$

يا $r = 7\text{cm}$

تنهنڪري رداس = 7 سينٽي ميٽر ۽ اوچائي $h = 3r = 3 \times 7 = 21$ سينٽي ميٽر

مخروط جو مقدار: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $(r = 7\text{ cm}, h = 21\text{ cm})$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7^2 \times 21 = \frac{1 \times 22 \times 7 \times 7 \times \cancel{21}^{\cancel{7}^{1}}}{{}_1\cancel{3} \times \cancel{7}_1}$$

$$= 22 \times 49 = 1078\text{ cm}^3.$$

مطلب تہ مليل مخروط شڪل جومقدار 1078 ڪعب سينٽي ميٽر آهي.

مشق 9.6

1. هيٺ ڏنل چارٽ ۾ مخروط بابت نامعلوم مقدار معلوم ڪريو.

نمبر شمار	ريڊاس r	اوچائي h	ليٽيل يا مُڙيل اوچائي $s=\sqrt{h^2+r^2}$	گولائي واري متاچري جي ايراضي $A_1=\pi r^2$	مڙيل متاچري جي ايراضي $A_2=\pi rs$	متاچري جي ڪل ايراضي $A=\pi r(r+s)$
(i)	21 س.م	28 س.م				
(ii)		56 س.م	70 س.م			
(iii)			32 س.م			
(iv)		84 س.م				
(v)	84 س.م					33264 چورس س.م

2. هيٺ ڏنل چارٽ ۾ مخروط بابت اڻ ڄاتل رڪن لهو.

نمبر شمار	مخروط جو ريڊاس (r)	مخروط جي اوچائي (h)	ليٽيل يا مُڙيل اوچائي ($s=\sqrt{h^2+r^2}$)	مقدار ($V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$)
(i)	3 س.م	h = 7 س.م		
(ii)	3.5 س.م	h = 6 س.م		
(iii)		28 س.م	35 س.م	
(iv)		14 س.م		154 س.م
(v)	6.3 س.م		105 س.م	

3. هڪ مخروط جي پايي يعني تري واري گولائي جي ايراضي 2464 چورس سينٽي ميٽر آهي. جيڪڏهن سندس اوچائي پايي يعني تري واري گولائي جي رداس کان ٽيڻي هجي ته سندس مقدار لهو.

4. هڪ مخروط جو مقدار 352 چورس سينٽي ميٽر آهي. جيڪڏهن سندس پايي يعني تري جو رداس 4 سينٽي ميٽر آهي ته مخروط جي عمودي اوچائي لهو.

5. جيڪڏهن مخروط جو رداس 3.5 ميٽر آهي ۽ اوچائي 6 ميٽر آهي ته سندس مقدار لهو.

9.3.3 روزمره جي زندگيءَ ۾ گول شين ۽ مخروط نما شين جي مٿاڇري واري ايراضي ۽ مقدار بابت مسئلا حل ڪرڻ.

مثال 1. ٽامي جي هڪ نهري گولي جو رداس 21 سينٽي ميٽر آهي، ان کي ڳاري 0.42 cm قطر واري بجلي جي تار ٺاهي وئي، تار جي ڊيگهه لهو.

حل: (مليل آهي) سينٽي ميٽر 21 = گولي جو رداس

$$\text{گولي جو مقدار} = V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{\cancel{3}_1} \times \frac{22}{\cancel{7}_1} \times \overset{1}{\cancel{3}}\cancel{21} \times 21 \times 21 = 88 \times 441 = 38,808\ cm^3$$

(رداس = $\frac{\text{قطر جي ماپ}}{2}$)   تار جي گولائيءَ واري حصي جي ايراضي $A = 4\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$

$$A = 4 \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{0.42}{2}\right)^2 = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \times 22 \times 0.42 \times \overset{0.06}{\cancel{0.42}}}{\cancel{7}_1 \times \cancel{2}_1 \times \cancel{2}_1}$$

$$= 22 \times 0.42 \times 0.06 = 0.5544\ cm^2$$

$$\text{تار جي ڊيگهه} = \frac{\text{ٽامي جي تار جو مقدار}}{\text{تار جي گولائيءَ واري حصي جي ايراضي}}$$

$$= \frac{38808}{0.5544} = 70000\ cm = (\because\ 1m = 100\ cm)$$

$$= \left(\frac{70000}{100}\right) m = 700\ m$$

يعني تار جي ڪُل ڊيگهه 700 ميٽر آهي.

مثال 2. هڪ مخروطي شڪل جي تنبوءَ جي اوچائي 14 ميٽر ۽ سندس گولائي واري پايي يعني تري جو رداس 10.5 ميٽر آهي. ان تنبوءَ ٺاهڻ لاءِ ڪتب آيل ڪينواس ڪپڙي جي ايراضي لهو ۽ ان ڪپڙي مان ٺهيل مخروط شڪل جي تنبوءَ جو مقدار به لهو.

حل: هتي ميٽر $r = 10.5$ ۽ ميٽر $h = 14$

مخروط جي مڙيل مٿاڇري جي ايراضي $= A = \pi rs = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$

$$A = \left(\frac{22}{7} \times (10.5) \times \sqrt{(14)^2 + (10.5)^2}\right)$$

$$= \left(\frac{22}{7} \times 10.5 \times \sqrt{196 + 110.25}\right)$$

$$= \left(\frac{22}{7} \times 10.5 \times \sqrt{306.25}\right) m^2 = \left(\frac{22}{7} \times 10.5 \times 17.5\right)$$

$$= \left(\frac{22 \times \overset{1.5}{\cancel{10.5}} \times 17.5}{\cancel{7}_1}\right) m^2 = (33 \times 17.5) m^2 = 577.5\, m^2$$

مخروط شڪل جو مقدار $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \left(\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (10.5)^2 \times 14\right) m^3$

$$= \left(\frac{1 \times 22 \times \overset{\overset{0.5}{\cancel{3.5}}}{\cancel{10.5}} \times 10.5 \times 14}{\cancel{3}_1 \times \cancel{7}_1}\right) m^3$$

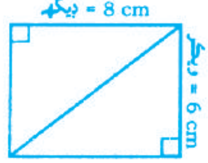
$$= \left[(22 \times 0.5) \times (10.5 \times 14)\right] m^3 = (11 \times 147)\, m^3 = 1617\, m^3$$

تنهن ڪري گھربل ڪينواس ڪپڙي جي ايراضي 577.5 ڪعب ميٽر آهي ۽ ان ڪپڙي مان ٺهيل مخروط شڪل جي تنبوءَ جو مقدار 1617 ڪعب ميٽر آهي.

مشق 9.7

1. هڪ گولي جو رداس 7 سينٽي ميٽر آهي ٻڌايو تہ سندس مقدار ڪيترو آهي؟
2. هڪ مخروطي پيالو آئيس ڪريم سان ڀريل آهي جيڪڏهن ان پيالي جو رداس ۽ اوچائي ترتيبوار 6 سينٽي ميٽر ۽ 10.5 سينٽي ميٽر آهن تہ ٻڌايو تہ ان ۾ آئيس ڪريم جو ڪيترو مقدار آهي؟
3. هڪ مخروطي شڪل ۾ تنبوءَ جي اوچائي 4.2 ميٽر آهي ۽ سندس پايي جي گولائي جو رداس 5.6 ميٽر آهي. ان مخروطي شڪل واري تنبوءَ اندر موجود هوا جو مقدار لهو.
4. هڪ مخروطي شڪل جي ٿانو جي اوچائي 7 ميٽر ۽ رداس 6 ميٽر آهي. ٻڌايو تہ ان ۾ ڪيتري ڪڻڪ پئجي سگهندي، جيڪڏهن 1 چورس ميٽر مقدار اندر 100 ڪلوگرام ڪڻڪ اچي سگهي ٿي.
5. هڪ مخروطي شڪل واري پاڻي جي ٽانڪي اهڙيءَ طرح ٺاهي وئي آهي جو ان جي پايي وارو گولائي وارو حصو ڌرتيءَ جي مٿاڇري جي سطح تي آهي. ان ٽانڪيءَ جي گهرائي 7 ميٽر ۽ گولائي حصي جو رداس 3 ميٽر آهي تہ ان ۾ ڪيترا لٽر پاڻي جمع ڪري سگهبو؟
6. هڪ مخروطي شڪل واري پاڻي جي ٽانڪي 6.3 ميٽر اوچي آهي ۽ ان جي پايي جي گولائيءَ جو رداس 8.4 ميٽر آهي. ٻڌايو تہ ان ٽانڪيءَ جو مقدار ڪيترو آهي؟
7. هڪ ڦوڪڻو هوا سان ڀريل گولي وانگر آهي. جيڪڏهن ان جو مقدار $\frac{9\pi}{16}$ ڪعب سينٽي ميٽر آهي تہ سندس رداس ڪيترو آهي؟

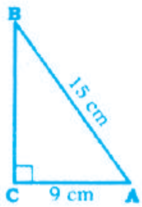
جائزي جي مشق 9



درست جواب ڳوليو:

1. سامهون ڏيکاريل مستطيل جي ڊيگهہ 8 سينٽي ميٽر ۽ ويڪر 6 سينٽي ميٽر آهي. سندس اُريب جي ڊيگهہ ________ آهي.

(i) 12 س.م (ii) 16 س.م (iii) 10 س.م (iv) 14 س.م



2. سامهون ڏيکاريل شڪل گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ABC جي آهي. ان جي عمود جي ڊيگهہ ________ آهي:

(i) 10 س.م (ii) 12 س.م (iii) 14 س.م (iv) 16 س.م

3. هيرو جي فارمولا مطابق:

(i) $\triangle = \sqrt{S(S+a)(S+b)(S+c)}$ (ii) $\triangle = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

(iii) $\triangle = \sqrt{S+(S-a)+(S-b)+(S-c)}$ (iv) $\triangle = \sqrt{S(S-a-b-c)}$

4. هيرو جي فارمولا ۾ استعمال ٿيندڙ S جو ملهه ________________ آهي:

(i) $S = \dfrac{a-b-c}{2}$ (ii) $S = \dfrac{a+b-c}{2}$ (iii) $S = \dfrac{a+b+c}{2}$ (iv) $S = \dfrac{a+b+c}{3}$

5. گولي جي مٿاڇري جي ايراضي لهڻ لاءِ فارمولا ________________ آهي:

(i) $A = \pi r^2$ (ii) $A = 3\pi r^2$ (iii) $A = 2\pi r^2$ (iv) $A = 4\pi r^2$

6. گولي جي مقدار لهڻ لاءِ فارمولا ________________ آهي:

(i) $V = \dfrac{2}{3}\pi r^2$ (ii) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^2$ (iii) $V = \dfrac{3}{4}\pi r^3$ (iv) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

7. π جو ملهه گڏيل اٽپور ۾ ________________ آهي.

(i) $3\dfrac{1}{7}$ (ii) $3\dfrac{2}{7}$ (iii) $3\dfrac{3}{7}$ (iv) $3\dfrac{4}{7}$

8. جيڪڏهن ڪنهن مخروط شڪل جو $r = 1$ ۽ $h = 3$ ته سندس مقدار ________ آهي:

(i) $\pi\,m^3$ (ii) $\pi\,m^2$ (iii) $\pi\,m$ (iv) π

9. ڪنهن مخروط شڪل جو رداس 1 ميٽر آهي ته ان جي گولائي واري حصي جي ايراضي ________________ آهي:

(i) $\pi\,m$ (ii) $\pi\,m^2$ (iii) $\pi\,m^3$ (iv) π

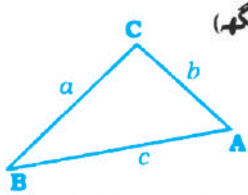
10. هڪ مخروط شڪل جي لينبل يعني مُڙيل اوچائي 5 ميٽر ۽ رداس 2 ميٽر آهي ته سندس مٿاڇري جي ڪل ايراضي ________________ آهي:

(i) 11 ڪعب ميٽر (ii) 22 ڪعب ميٽر (iii) 33 ڪعب ميٽر (iv) 44 ڪعب ميٽر

خلاصو

- فيثاغورث سڏيان مطابق ڪنهن گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ هيپاٽينيوز جو چورس، باقي ٻن پاسن (پايي ۽ عمود) جي چورسن جي جوڙ اُپت جي برابر ٿيندو آهي.

يعني ^{2}(پايي جي ڊيگهه) + ^{2}(عمود جي ڊيگهه) = ^{2}(هيپاٽينيوز جي ڊيگهه)



- ڪنهن بہ گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي ٻن پاسن جي ڊيگهه معلوم هجي تہ سندس ٽئين پاسي جي ڊيگهه معلوم ڪري سگهبي.

(i) $H^2 = P^2 + B^2$ (ii) $P^2 = H^2 - B^2$ (iii) $B^2 = H^2 - P^2$

- جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جي ٽن پاسن جي ماپ ترتيبوار a، b، c هجي تہ ان ٽڪنڊي جي ايراضي 'هيرو' جي فارمولي وسيلي معلوم ڪري سگهبي.

$$\blacktriangle ABC = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} \quad , \quad S = \frac{a+b+c}{2}$$

- هيرو جي فارمولا وسيلي ڪنهن بہ چوڪنڊي جي ايراضي معلوم ڪري سگهبي جيڪڏهن ان جي چئني پاسن جي ڊيگهه ڏنل هجي.
- گولي جي مٿاڇري جي ايراضي لهڻ لاءِ فارمولا آهي: $A = 4\pi r^2$

جڏهن تہ r گولي جو رداس آهي.

- گولي جي مقدار (Volume) لهڻ لاءِ فارمولا آهي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

جڏهن تہ r گولي جو رداس آهي.

- مخروط جا ٻہ حصا ٿيندا آهن (i) گولائي وارو حصو (ii) مڙيل مٿاڇرو
- مخروط جي گولائي واري حصي جي ايراضي = πr^2
- مخروط جي مڙيل مٿاڇري جي ايراضي = πrs جڏهن تہ (s مخروط جي ليٽيل يعني مُڙيل اوچائي آهي)
- مخروط جي مٿاڇري جي ڪل ايراضي = گولائي واري حصي جي ايراضي + مڙيل مٿاڇري جي ايراضي = $\pi r^2 + \pi rs = \pi r(r+s)$
- مخروط جو مقدار = $\frac{1}{3}\times$ (گولائي واري حصي جي ايراضي) $\times$ (عمودي اوچائي)

يعني $V = \frac{1}{3}\times \pi r^2 \times h$ يا $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

باب
10
ثابت ٽيندڙ جاميٽري

10.1 ثابت ٽيندڙ جاميٽري (Demonstrative Geometry)

(i) ثابت ٽيندڙ جاميٽريءَ جي وصف

ثابت ٽيندڙ جاميٽري (Demonstrative Geometry) رياضيءَ جي اُها شاخ آهي جنهن ۾ جاميٽريءَ جي شڪلين متعلق بيان جن کي سِٽيان چيو وڃي ٿو، اُهي حقيقي دليلن يا سببن ذريعي ثابت ڪيا وڃن ٿا. 'Demonstrate' يوناني ٻوليءَ جي لفظ 'Demonstratum' مان ڪنيو ويو آهي جنهن جو مطلب آهي يقيني طور "تصديق ذريعي ثابت ڪرڻ" (To prove with certainty)

10.1.1 دليل (Reasoning)

(ii) دليلن يا سببن متعلق بنيادي ڳالهين جو ذڪر

دراصل ڪنهن بہ مسئلي کي صحيح طور سمجهي فيصلي جي شڪل ڏيڻ لاءِ سوچڻ، دليل يا سبب ڏيڻ اهو هڪ بنيادي طريقہ ڪار آهي. دليل يا سبب ڏيڻ جا ٻہ نمونا ٿين ٿا.

(i) استقرائي طريقو (Inductive Method)

(ii) استخراجي طريقو (Deductive Method).

روزمره جي زندگيءَ ۾ اسين پنهنجي مشاهدي يا تجربي جي بنياد تي ڪي نتيجا حاصل ڪندا آهيون. مثال طور اسان ڪنهن نئين ملڪ جو معائنو ڪري ڏٺوسين تہ اُتي اسڪول جي ٻارن جي هرهڪ بس يعني گاڏيءَ جو رنگ پيلو آهي. جڏهن اسان واپس پنهنجي وطن آياسين ۽ اِها ڳالهہ نتيجي طور بيان ڪئي تہ:

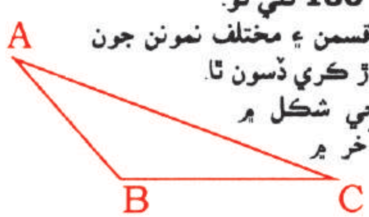
"انهيءَ سڄي ملڪ ۾ سڀني اسڪولن جي ٻارن جي بسن جو رنگ پيلو آهي".

اهڙو دليل جنهن ۾ اسان پنهنجي خاص مشاهدي کي عام ڪري عالمي حقيقت ٻڌايون. انهيءَ طريقي کي استقرائي دليل (Inductive Reasoning) چيو وڃي ٿو.

استقرائي دليل ۾ جيڪا مُشڪلات درپيش اچي ٿي اُها هيءَ آهي تہ نتيجو ڪيترو بہ مجبل يا زوردار حقيقت تي مبني چو نہ هجي، پر ان هوندي بہ اُن جي سچائي جي ضمانت نہ ٿي ڏئي سگهجي. جيئن مٿي مثال ۾ ٿي سگهي ٿو تہ ڪا ورلي اهڙي بس بہ اسڪول جي ٻارن جي هوندي جنهن جو رنگ ڳاڙهو آهي، جيڪا اسان پنهنجي سڄي معائني جي وقت نہ ڏٺي آهي.

اچو تہ هاڻي هيٺين بيان تي غور ڪريون.

"ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪُنڊن جو جوڙ 180° ٿئي ٿو."



انهيءَ بيان کي ثابت ڪرڻ لاءِ اسان ٽڪنڊن جي مختلف قسمن ۽ مختلف نمونن جون شڪليون ٺاهي، انهن جي ٽنهي ڪنڊن کي ماپي ۽ پوءِ جوڙ ڪري ڏسون ٿا.

عملي ڪم: فرض ڪريو تہ سامهون ڏنل ٽڪنڊي جي شڪل ۾ ٽنهي ڪنڊن کي هر هڪ ٻار پنهنجي سِرِ ماپي ۽ آخر ۾ ٽنهي ڪنڊن جي ماپن کي جوڙ ڪري ٿو.

$\angle A$ جي ماپ = ________،

$\angle B$ جي ماپ = ________، $\angle C$ جي ماپ = ________، ٽنهي ڪنڊن جو جوڙ: ________

اسان نتيجا ڏسنداسين تہ ڪجهہ شاگردن جوڙ 179° ڏنو آهي ۽ ڪجهہ 181° ڏنو آهي.
تمام ٿورن شاگردن ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪندن جو جوڙ 180° بہ ڏنو آهي. هڪ يا ٻن شاگردن تہ جوڙ 178° يا 182° بہ ڏيکاريو آهي.
انهيءَ عملي ڪم مان اسان انهيءَ نتيجي تي پهچون ٿا تہ استقرائي دليلن (Inductive Reasoning) وارو طريقو اڪثر ڪري گهڻ مجيو وڃي ٿو. انهيءَ طريقہ ڪار ۾ اسان کي تمام گهڻا احتياط ۽ اُپاءَ بہ وٺڻا پون ٿا. هي طريقو تمام وقت وڃائيندڙ آهي. ان جي برعڪس ٻيو طريقو استخراجي دليلن وارو طريقو آهي، جنهن ۾ اسان عام مشاهدن مان خاص نتيجا اخذ ڪريون ٿا. انهيءَ لاءِ اسان پهريائين انهن بيانن جا سيٽ پيش ڪيون ٿا جن کي عام طور سچو ۽ حقيقي تسليم ڪيو وڃي ٿو. انهيءَ طرح اسان ڪجهہ نوان بيان ۽ انهن جون ڪجهہ ثابتيون پڻ تيار ڪريون ٿا.
مطلب تہ اسان جاميٽريءَ جي ابياس ۾ استخراجي دليلن واري طريقي کي اهميت ڏيون ٿا. ڇاڪاڻ تہ انهيءَ طريقي سان ڪيترائي نت نوان نتيجا حقيقت تي مبني حاصل ڪري سگهون ٿا. تمام گهڻن نتيجن کي حاصل ڪرڻ کان پوءِ چئي سگهون ٿا تہ استخراجي دليلن واري طريقہ ڪار ۾ هيٺيان چار عنصر اهم آهن جن کي بنيادي دليل سڏيون ٿا.

1. بنا وصف وارا اصطلاح (Undefined Terms)

جاميٽريءَ جي ڪجهہ تصورن کي بغير وصف جي مجيو وڃي ٿو. انهن کي بنا وصف وارا اصطلاح چئبو آهي. مثال طور جاميٽريءَ ۾ ٽپڪو، ليڪ، مٿاڇرو (Plane)، مڪان (Space) وغيره بنا وصف وارا تصور آهن.

2. وصف وارا اصطلاح (Defined Terms)

بنا وصف وارن اصطلاحن جي مدد سان اسان ٻيا ڪيترائي نوان جاميٽريءَ جا اصطلاح حاصل ڪيا آهن. مثال طور ليڪ ٽڪر، شعاع، ڪند، ٽڪنڊو، عمود، اڏواڌ ڪندڙ وغيره وصف وارا اصطلاح آهن. انهن مان ڪيترائي اسان هيٺين ڪلاسن ۾ پڙهي آيا آهيون.

3. بنيادي مفروضا (Assumptions)

رياضيءَ جي ڪجهہ بيانن کي بنا ثابتيءَ جي قبول ڪيو ويندو آهي. اهڙن بيانن کي بنيادي مفروضا (Fundamental Agreements) چئبو آهي. مثال طور 'هر عدد پنهنجي پاڻ جي برابر ٿيندو آهي' يا بہ ٽپڪا هڪ ليڪ جو تعين ڪن ٿا. هيٺ آرٽيڪل 10.1.2 ۾ اها ڳالهہ واضح ڪئي ويندي تہ بنيادي مفروضا ٻن قسمن جا ٿين ٿا. انهن جي سمجهاڻي ۽ وضاحت وغيره پڻ اڳتي بيان ڪئي ويندي.

4. سڌيان **(Propositions)**: جاميٽريءَ جي وصف وارن خواه بنا وصف وارن اصطلاحن ۽ بنيادي مفروضن جي مدد سان ڪجهه ڪارائتا نتيجا ۽ بيان حاصل ڪري سگهون ٿا. اهڙن مڪيه نتيجن ۽ بيانن کي سڌيان (Proposition) چئبو آهي. انهن کي منطقي دليلن وسيلي صحيح يا غلط قرار ڏئي سگهجي ٿو. صحيح قرار ڏنل بيانن کي وري ثابت بہ ڪري سگهجي ٿو. اهڙن بيانن کي سڌيان (Theorem) چئبو آهي.

10.1.2 اصول متعارف (Axiom)، اصول موضوعہ (Postulate) ۽ سڌيان (Theorem)

بنيادي مفروضن جا قسم: اصول متعارف ۽ اصول موضوعہ

بنيادي مفروضا ٻن قسمن جا ٿين ٿا.

1. اصول متعارف **(Axiom)**: هي اهڙا بنيادي مفروضا آهن جن جو تعلق عددن سان آهي. هيٺ ڏنل اصول متعارف (Axioms) ڏجن ٿا جيڪي اسان هن ڪلاس ۾ استعمال ڪنداسين.

اصول متعارف **1.** هر عدد پنهنجي پاڻ جي برابر ٿيندو آهي.

(مساواتن جي عڪسي خاصيت (Reflexive Property of Equation

مثلاً هر هڪ حقيقي عدد لاءِ $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $\quad x = x$

يا (ذاتي يڪسانيت) $\quad \angle A \cong \angle A$

نوٽ: علامت $\forall$ مان مراد "هرهڪ يا "For Every" يا سڀئي " "For All" آهي.

اصول متعارف **2.** مساواتن جي هر شڪلي خاصيت (Symmetric Property of Equation)

مثلاً $\quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad x = y \Rightarrow y = x$

اصول متعارف **3.** مساواتن جي متعدي خاصيت (Transitive Property)

مثلاً $\quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R} \quad x = y \wedge y = z \;\Rightarrow\; x = z$

اصول متعارف **4.** مساواتن جي جوڙ واري خاصيت ڪن بہ ٽن حقيقي عددن x، y ۽ z لاءِ پنهي پاسن ۾ ساڳيو عدد جوڙ ڪرڻ سان برابريءَ وارو تعلق تبديل نہ ٿو ٿئي.

$$x = y \Rightarrow x + z = y + z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$$

اصول متعارف **5.** مساواتن جي ڪٽ واري خاصيت

ٻنهي پاسن مان ساڳيو عدد ڪٽ ڪرڻ سان برابريءَ وارو تعلق تبديل نہ ٿو ٿئي ڪن بہ ٽن حقيقي عددن x، y ۽ z لاءِ

$$x = y \Rightarrow x - z = y - z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$$

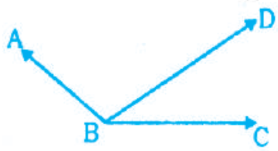
اصول متعارف **6.** مساواتن جي ضرب واري خاصيت

مساواتن جي ٻنهي پاسن کي ساڳي عدد سان ضرب ڪرڻ سان برابريءَ وارو تعلق قائم رهي ٿو. جيڪڏهن x، y ۽ z کي بہ ٽي حقيقي عدد هجن تہ:

$$x = y \Rightarrow xy = yz \qquad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$$

اصول متعارفہ 7. مساواتن جي ونڊ واري خاصيت، مساواتن جي ٻنهي پاسن کي ساڳي عدد سان ونڊ ڪرڻ سان برابري وارو تعلق قائم رهي ٿو. جيڪڏهن x، y ۽ z ڪي بہ ٽي حقيقي عدد هجن تہ: $x = y\ ,\ z \neq 0 \ \Rightarrow \ \frac{x}{z} = \frac{y}{z}\ ,\ \forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$

اصول متعارفہ 8. سڄو عدد وڏو آهي، پنهنجي ڪنهن بہ حصي کان

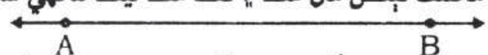


سامهون شڪل ڏسو. $m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle CBD$

$\Rightarrow m\angle ABC > m\angle ABD,\ m\angle ABC > m\angle CBD$

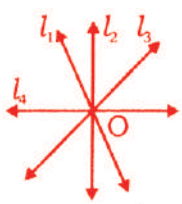
2. اصول موضوع (Postulate): هي اهڙا بنيادي مفروضا آهن جن جو تعلق جاميٽريءَ جي شڪلين سان آهي.

اصول موضوع 1. ٻن مختلف ٽٻڪن مان هڪ ۽ فقط هڪ ليڪ لنگهي سگهي ٿي.



اهو موضوع هن طرح بہ بيان ڪري سگهجي ٿو تہ "ڪي بہ ٻہ ٽٻڪا هڪ ليڪ جو تعين ڪن ٿا."

اصول موضوع 2. هڪ ٽٻڪي مان لامحدود ليڪون لنگهي سگهن ٿيون.



ليڪون l_1، l_2، l_3، ... l_n وغيره ساڳي ٽٻڪي O مان گذرن ٿيون.

اصول موضوع 3. ٽن هر ليڪ ٽٻڪن مان هڪ ۽ فقط هڪ مٿاڇرو يعني پلين ٿو لنگهي سگهي.

اصول موضوع 4. جيڪڏهن ڪنهن ليڪ l جا ڪي بہ ٻہ ٽٻڪا هڪ مٿاڇري يعني پلين (Plane) تي هجن تہ چئبو تہ پوري ليڪ پلين تي اچي ٿي.

[انهيءَ موضوع مطابق ڪنهن بہ پلين جو مٿاڇرو سڌو (Smooth) ٽينڊو آهي ۽ اهو هر طرف کان لامحدود ٽينڊو آهي.]

اصول موضوع 5. مفاصلي جو موضوع:

جيڪڏهن A ۽ B ڪنهن مٿاڇري يعني پلين (Plane) جا ٻہ جدا جدا ٽٻڪا هجن تہ پوءِ مفاصلو ٻنهي ٽٻڪن جي وچ ۾ ٽينڊو:

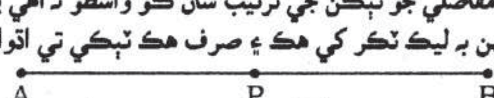
(i) 0 (ٻڙي) جيڪڏهن ٽٻڪو A ، ٽٻڪي B جي مٿان آهي. يعني $A = B$

[انهيءَ کي پڙهبو تہ ٽٻڪو A، ٽٻڪي B تي ٺهڪي ٿو.]

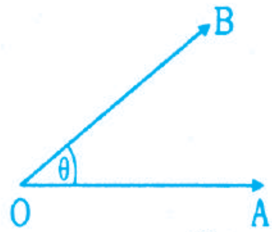
(ii) هڪ واڌو حقيقي عدد جڏهن A ۽ B بہ مختلف ٽٻڪا آهن.

ٽٻڪن A ۽ B جي وچين مفاصلي کي $|\overline{AB}|$ يا $m\overline{AB}$ سان ڏيکاربو آهي. هتي m انگريزي لفظ measure جو پهريون اکر آهي. ياد رهي تہ مفاصلي کي $|\overline{AB}|$ سان بہ ڏيکاربو آهي. واضح رهي تہ ٻن ٽٻڪن جي وچ ۾ مفاصلي جو ٽٻڪن جي ترتيب سان ڪو واسطو نہ آهي يا $|\overline{AB}| = |\overline{BA}|$

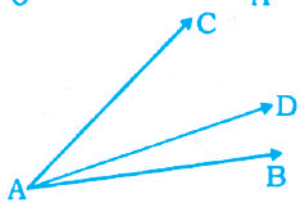
اصول موضوع 6. ڪنهن بہ ليڪ ٽڪر کي هڪ ۽ صرف هڪ ٽٻڪي تي اڌواڌ ڪري سگهجي ٿو.



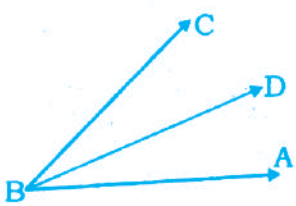
[هي موضوع اسان کي ٻڌائي ٿو تہ $\overline{AB}$ تي صرف ٽٻڪو P، ٽٻڪن A ۽ B جي وچ تي اهڙو موجود آهي جو $m\,\overline{AP} = m\,\overline{BP}$]



اصول موضوع **7**. (ڪنڊ جي ناهڻ جو موضوع) جيڪڏهن ڪنهن ڪنڊ جي ڪا هڪ ٻانهن مليل آهي ته ڪنهن هڪ ڇيڙي مان هڪ ۽ صرف هڪ شعاع ناهي سگهجي ٿو، جيڪو هڪ اهڙي ڪنڊ θ (Theta) ماپ جي ناهيندو جيڪا ماپ ۾ $0°$ کان $180°$ جي وچ ۾ هوندي يعني $0° < θ < 180°$



اصول موضوع **8**. (ڪنڊن جي جوڙ جو موضوع)
"ڪن ٻن پر وارين ڪنڊن جي ماپ جو جوڙ هڪ اهڙي ڪنڊ جي ماپ جي برابر آهي،جيڪا ڏنل ڪنڊن جي غير مشترڪ ٻانهن ذريعي ٺهي ٿي. سامهون ڏنل شڪل ۾ $\angle BAD$ ۽ $\angle CAD$ ٻه پر واريون ڪنڊيون آهن.
تنهنڪري: $m\angle BAD + m\angle CAD = m\angle BAC$
(يا $m\angle CAB$)



اصول موضوع **9**. (ڪنڊ جو واحد اڌواڌ ڪندڙ موضوع) "ڪنهن به ڪنڊ کي هڪ ۽ صرف هڪ شعاع اڌواڌ ڪندو آهي. سامهون شڪل ۾ $\overrightarrow{BD}$ هڪ اڌواڌ ڪندڙ آهي $\angle ABD$ جو.

تنهنڪري: $m\angle ABD = m\angle CBD = \frac{1}{2}\, m\angle ABC$

اصول موضوع **10**. ڪنهن به هڪڙي نقطي وٽان هڪ ليڪ يا ليڪ ٽڪر تي صرف هڪ عمود ڪڍي سگهجي ٿو.

اصول موضوع **11**. جاميٽريءَ جون شڪليون جيڪي هڪ ٻئي تي ٺهڪي اچن ٿيون،اُهي هڪ ٻئي جي يڪسان آهن.

اصول موضوع **12**. جاميٽريءَ جي هڪ شڪل کي هڪ جڳهه کان ٻي جڳهه ڏانهن چوري سگهجي ٿو بنا شڪل شبيهه يا ماپ ۾ تبديليءَ جي.

اصول موضوع **13**. ڪنهن به هڪ نقطي مان جيڪو هڪ ليڪ تي نه آهي، ان مان هڪ ۽ صرف هڪ ليڪ ڪڍي سگهجي ٿي، جيڪا اُن ليڪ جي پور وڇوٽ ٿئي ٿي. انهيءَ کي هن ريت به بيان ڪري سگهجي ٿو.
ٻه ڪپيندڙ ليڪون ڪنهن ٽين ليڪ جي پور وڇوٽ نه ٿيون ٿي سگهن.

(iv) مفروضن جي حصن جو بيان

جڏهن ڪنهن بيان کي جاميٽريءَ جي ڪنهن موضوع لاءِ بحث هيٺ آڻجي ٿو ته اُن کي مفروضو چئجي ٿو. عام طور تي مفروضو هڪ سٽيان يا مسئلو به آهي جنهن کي ڪارائتو نتيجو پڙ چئي سگهجي ٿو. سٽيان جا ٻه حصا ٿين ٿا.

(i) پهريون اهو حصو جنهن کي دعويٰ يا بيان (Hypothesis) چيو وڃي ٿو، جنهن کي حقيقت پڻ سمجهيو وڃي ٿو.

(ii) بيو اُهو حصو يعني نتيجو آهي، جنهن کي ثابت ڪيو وڃي ٿو.

(v) جاميٽريءَ جي ستيان (Theorem)، ستيان جو شامل نتيجو (Corollary) ۽ ستيان جو اُبتڙ يا عڪس (Converse of a theorem) وضاحت

(a) ستيان: هي جاميٽريءَ جي بنيادي تصورن وسيلي نڪتل ڪاراتتا نتيجا آهن. ستيان جو عام اظهار هڪ بيان يا دعويٰ آهي جيئن: ”جيڪڏهن ٻہ ليڪون هڪ ٻئي کي ڪپين تہ ٺهندڙ چوٽيءَ واريون ڪنڊون پاڻ ۾ يڪسان ٿينديون.“

ستيان جو بيان يا شرط مٿي ڏنل آهي: ”جيڪڏهن ٻہ ليڪون هڪ ٻئي کي ڪپين“ ۽ انهيءَ ستيان جو نتيجو آهي: ”تہ ٺهندڙ چوٽيءَ واريون ڪنڊون پاڻ ۾ يڪسان ٿينديون.“

مطلب تہ ستيان جو پهريون حصو، بيان يا شرط ٿيندو آهي جيڪو لفظ ”جيڪڏهن“ سان شروع ٿئي ٿو ۽ ستيان جو ٻيو حصو شرط پوري ٿيڻ جو نتيجو آهي جيڪو ”تہ“ لفظ سان ظاهر ٿئي ٿو. ڪڏهن ڪڏهن ”جيڪڏهن“ ۽ ”تہ“ جا لفظ استعمال نہ بہ ٿيندا آهن پر مطلب اهو ئي هوندو آهي. مثال: ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪنڊن جو جوڙ 180° آهي.

هتي ستيان جو بيان يا شرط (Hypothesis) هي آهي ”جيڪڏهن ٽڪنڊي جون ٽي ڪنڊون آهن“. اهڙي طرح انهيءَ ستيان جو نتيجو (Conclusion) هي آهي: تہ پوءِ ٽنهي ڪنڊن جو جوڙ 180° آهي.

(b) شامل نتيجو ستيان جو (Corollary)

ستيان جو شامل نتيجو يعني Corollary آهي جنهن جو ننيو اڪر Cor آهي. اهو ثابت ٿيل نتيجي جو هڪ نمونو آهي، جنهن کي ڏار نئون ستيان نٿو چئجي. البتہ اِهو ستيان مان نڪتل نتيجي جي عڪاسي ڪري ٿو.

(c) ستيان جو اُبتڙ يا عڪس (Converse of Theorem)

هڪ ستيان کي اُن جو اُبتڙ يا عڪس چئجي ٿو، جڏهن مليل ستيان جي بيان کي نتيجو ۽ نتيجي کي بيان بڻايو وڃي. اوهان اڳتي هلي هن ڪتاب ۾ ڏسندا تہ ستيان (1) ۽ (2) هڪ ٻئي جا اُبتڙ يعني عڪس آهن. ساڳي طرح ستيان (7) ۽ (8) بہ هڪ ٻئي جا اُبتڙ يا عڪس آهن.

ستيان يا مفروضي وغيره کي ثابت ڪرڻ لاءِ هيٺيان قدم کڻڻا پون ٿا.

1. **شڪل:** ڏنل ستيان جي عام بيان جي روشنيءَ ۾ اهڙي شڪل ڪيبي آهي، جيڪا ضروري ٺهڪن، ليڪن ۽ ڪنڊن وغيره جي مدد سان وضاحت ڪندي آهي. اهڙي طرح جو ڏنل شرط ۽ گهربل نتيجا سولائيءَ سان حل ڪري سگهجن.

2. معلوم يا مليل (Given or Data): سٽيان جي ڏنل تمام بيان ۾ اُن مطابق ڪڍيل شڪل جي عڪاسي مليل (Data) ذريعي ڪئي وڃي ٿي.

3. گھربل (Required to prove): ٻڌايل شڪل مطابق سٽيان جي بيان جي ٻئي حصي کي هتي واضح ڪري لکبو تہ اِهو ثابت ڪرڻو آهي.

4. جوڙجڪ (Construction): ڪڏهن ڪڏهن سٽيان کي ثابت ڪرڻ لاءِ ٺاهيل شڪل ۾ مناسب واڌاري جي ضرورت پوندي آهي. انهيءَ عمل کي جوڙجڪ چئبو آهي.

5. ثابتي (Proof): سٽيان کي ثابت ڪرڻ لاءِ هيءُ آخري قدم آهي. وصفن، موضوعن ۽ اڳ ۾ ثابت ٿيل نتيجن جي مدد سان منطقي دليلن ذريعي-بيان جو گھربل حصو ثابت ڪبو آهي. نتيجا اخذ ڪرڻ لاءِ اسان کي سبب ڄاڻائڻا پوندا آهن. گھڻو ڪري ثابتي لاءِ هڪ ڪالم ۾ نتيجا بيان ڪندا آهيون ۽ ٻئي ڪالم ۾ انهن جا سبب ڄاڻائيندا آهيون.

6. ثابتيءَ جي آخر ۾ Q.E.D (Quod Erat Demonstrandum) لکبو آهي جنهن جي معنيٰ آهي "اهو ثابت ڪرڻو هو".

مشق 10.1

1. مناسب لفظن سان هيٺيان خال ڀريو.

(a) ثابت ٽيندڙ جاميٽري رياضيءَ جي _______ آهي، جنهن ۾ جاميٽريءَ جا _______ ثابت ڪيا وڃن ٿا _______ ذريعي.

(b) دليل يا سببن جا ٻہ نمونا آهن _______ يا _______.

(c) _______ طريقي ۾ مشاهدي کي عام ڪري حقيقت ٻڌايون ٿا.

(d) _______ طريقي ۾ اسان خاص نتيجا عام نتيجن مان اخذ ڪريون ٿا ۽ _______ کي استعمال ڪري نوان بيان ثابت ڪريون ٿا.

(e) بنيادي مفروضا اُهي يقيني بيان جن کي _______ جي تسليم ڪيو ويندو آهي.

(f) بنيادي مفروضا ٻن قسمن جا آهن (1) _______ (2) _______

(g) _______ اهڙا بنيادي مفروضا آهن جن جو تعلق جاميٽريءَ جي شڪلين سان آهي.

(h) دليلن واري طريقہ ڪار ۾ چار عنصر اهم آهن:

(1) _______ (2) _______ (3) _______ (4) _______

2. هيٺين بيانن تي غور ڪريو، هر هڪ لاءِ صحيح يا غلط لکو.

(a) ٽن مختلف ٽپڪن مان هڪ ۽ فقط هڪ ليڪ لنگهي سگهي ٿي.

(b) جڏهن ٻه ٽپڪا P ۽ Q هڪ ٻئي تي نهڪي اچن ٿا، علامتي طور انهن کي لکون ٿا $P = Q$

(c) ٻه ٽپڪا هڪ ليڪ کي نه ٿا ظاهر ڪن.

(d) اصول موضوع 4 مطابق سطح (Plane) جو متاچرو لسو آهي ۽ اهو سيني پاسن ۾ لامحدود آهي.

(e) ڪنڊ x^{o} جي ڪامپليمينٽ $(90-x)^{o}$ آهي.

(f) جيڪڏهن ڪي ٻه ٻه مقدار ڪنهن ساڳي مقدار جي برابر آهن ته اُهي ٻئي پاڻ ۾ برابر ٿيندا، اِها مساواتن جي متعدي خاصيت آهي.

3. سڌيان ۾ سمايل ٻن حصن جا نالا لکو.

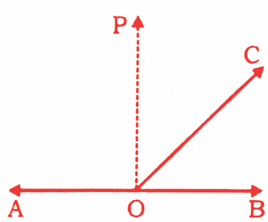
10.2 سڌيان

جاميٽريءَ جا سڌيان ۾ انهن جا شامل نتيجا جيڪي سڌيانن جي عڪاسي ڪن ٿا انهن کي ثابت ڪرڻ ۽ انهن سڌيانن جي وسيلي مناسب مسئلن کي پڻ حل ڪرڻ.

هتي اسان سليبس يعني ڪورس مطابق ڏنل سڌيانن ۾ انهن سڌيانن جي عڪاسي ڪن ٿا انهن کي ثابت ڪيو ويندو. ان سان گڏوگڏ سڌيانن جي وسيلي پڻ مناسب مسئلن جو حل ڏيکاريو ويندو.

سڌيان 1

جيڪڏهن هڪ سڌي ليڪ ٻي سڌي ليڪ تي بيهي ٿي ته اهڙي طرح سان ٺهندڙ ٻن ڪن جو جوڙ ٻه ڳونيون ڪنڊون ٿئي ٿو.



مليل: $\overrightarrow{OC}$ ، ليڪ AB جي هڪ ٽپڪي O تي بيٺي آهي.

گهربل: $m\angle AOC + m\angle BOC =$ ٻه ڳونيون ڪنڊون يا 180^{o}.

جوڙجڪ: ٽپڪي O مان $\overleftrightarrow{AB}$ تي هڪ عمود $\overrightarrow{OP}$ ناهيو.

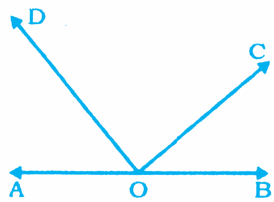
يعني $m\angle BOP =$ هڪ ڳوني ڪنڊ $= m\angle AOP$

ثابتي:

بيان	دليل يا سبب
1. $m\angle AOC = m\angle AOP + m\angle POC$	i. ڪنڊن جي جوڙ وارو اصول موضوع
2. $m\angle BOC = m\angle BOP - m\angle POC$	ii. جوته $m\angle BOC + m\angle POC = m\angle BOP$
3. تنهنڪري	iii. (1) ۽ (2) کي جوڙ ڪرڻ سان
$\therefore m\angle AOC + m\angle BOC = \angle AOP + m\angle BOP$	ٻڙي $= m\angle POC - m\angle POC$
1 ڳوني ڪنڊ + 1 ڳوني ڪنڊ =	
= 2 ڳونيون ڪنڊون (يا 180^{o})	

Q.E.D

ستيان جو شامل نتيجو (Cor. 1). ڪنهن به هڪ ٽپڪي وٽ ٺهندڙ هڪ سڌيءَ ليڪ جي ساڳي هڪ پاسي تي سڀني ڪنڊن جو جوڙ به گونيون ڪنڊون ٿئي ٿو.



مليل: $\overrightarrow{AB}$ جي ساڳي هڪ پاسي $\overrightarrow{OC}$ ۽ $\overrightarrow{OD}$ ان تي بيٺا آهن. تنهنڪري $\angle AOD$، $\angle DOC$ ۽ $\angle BOC$ ٺهندا.

گهربل: $m\angle AOD + m\angle DOC + m\angle BOC = 180^\circ$

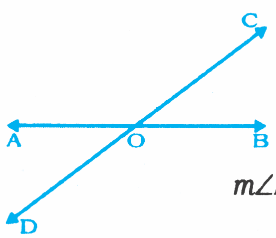
نوٽ: هر هڪ سڌيان ۾ بيان واري ڪالم ۾ ڏنل سيريل نمبر 1،2، 3 وغيره جي سامهون سبب واري ڪالم ۾ سيريل نمبر ترتيبوار i، ii، iii وغيره رومن عددن ۾ ڏنل آهن.

ثابتي:

سبب	بيان
i. ستيان 1 مطابق.	1. $m\angle AOC + m\angle BOC = 180^\circ$
ii. ڪنڊن جي جوڙ واري اصول موضوع مطابق.	2. $m\angle AOC = m\angle AOD + m\angle DOC$
iii. $m\angle AOC$ جو ملهه جيڪو مساوات (2) ۾ مليو آهي اُن کي مساوات (1) ۾ رکڻ سان.	3. $\therefore m\angle AOD+m\angle DOC+m\angle BOC= 180^\circ$

Q.E.D

شامل نتيجو (Cor. 2). جيڪڏهن ٻه ليڪون هڪ ٻئي کي هڪ ٽپڪي تي ڪپين، ته ٺهندڙ چئن ڪنڊن جو جوڙ برابر چار گونيون ڪنڊون آهي يعني 360°



مليل: $\overleftrightarrow{AB}$ ۽ $\overleftrightarrow{CD}$ هڪ ٻئي کي هڪ ٽپڪي O تي ڪپين ٿيون.

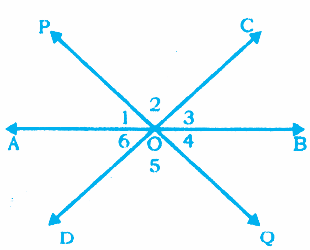
گهربل: $m\angle AOC + m\angle BOC + m\angle BOD + m\angle AOD = 360^\circ$

ثابتي:

سبب	بيان
i. ستيان 1 مطابق.	1. $m\angle AOC + m\angle BOC = 180^\circ$
ii. ستيان 1 مطابق.	2. $m\angle BOD + m\angle AOD = 180^\circ$
iii. نتيجن (1) ۽ (2) کي جوڙ ڪرڻ سان.	3. $\therefore\ m\angle AOC+m\angle BOC+m\angle BOD + m\angle AOD = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$

Q.E.D

شامل نتيجو (Cor. 3): سڌين ليڪن جو ڪجهه تعداد پاڻ ۾ هڪ ٽپڪي تي ملي ٿو. اهڙي طرح سان سڀني ٺهندڙ ڪنڊن جو جوڙ چار گونيون ڪنڊون ٿئي ٿو. يعني 360°



مليل: $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{CD}$ ۽ $\overleftrightarrow{PQ}$ پاڻ ۾ هڪ ٻئي کي هڪ ٽپڪي O تي ڪپين ٿيون.

گهربل: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6$

$= 360^\circ$ = 4 گونيون ڪنڊون

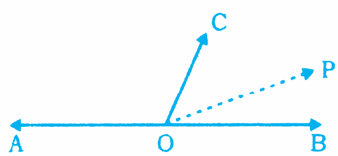
ثابتي:

سبب	بيان
i. ستيان 1 ۾ شامل نتيجو (Cor. 1) مطابق.	1. $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$
ii. ستيان 1 ۾ شامل نتيجو (Cor. 1) مطابق	2. $m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 = 180^\circ$
iii. نتيجن (1) ۽ (2) کي جوڙ ڪرڻ سان.	3. $\therefore m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4$ $+ m\angle 5 + m\angle 6 = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$ = 4 گونيون ڪنبون

Q.E.D

ستيان 2

جيڪڏهن ٻن پر وارين ڪندن جو جوڙ ٻه گونيون ڪنبون آهي ته ڪندن جون ٻاهريون ٻانهون هڪ سڌي ليڪ ۾ آهن.



مليل: ٻه پر واريون ڪنبون $\angle AOC$ ۽ $\angle BOC$ اهڙي طرح آهن جو:

$m\angle AOC + m\angle BOC = 180^\circ =$ 2 گونيون ڪنبون

گهربل: $\overrightarrow{OA}$ ۽ $\overrightarrow{OB}$ هڪ سڌي ليڪ ۾ آهن يا AOB هڪ ئي سڌي ليڪ آهي.

جوڙجڪ: فرض ڪيو جيڪڏهن $\overrightarrow{OB}$ سڌي ليڪ ۾ نه آهي $\overrightarrow{OA}$ جي ته پوءِ $\overrightarrow{AO}$ کي ٽيڪي P تائين وڌايو. (جيئن AOP هڪ ليڪ ٿئي)

ثابتي:

سبب	بيان
i. جيئن ته AOP هڪ ليڪ آهي جنهن تي $\overrightarrow{OC}$ بيٺل آهي.	1. جوڙجڪ مطابق، فرض ڪيو آهي: $\therefore m\angle AOC + m\angle POC = 180^\circ$ پر
ii. ستيان 1 مطابق.	2. $m\angle AOC + m\angle BOC = 180^\circ$ تنهنڪري:
iii. مفروضو.	3. $m\angle AOC + m\angle POC = m\angle AOC + m\angle BOC$ يا
iv. اصول متعارف 3 $m\angle AOC$ کي ٻنهي پاسي ڪٽيون ٿا.	4. $m\angle POC = m\angle BOC$
v. اسان جو فرض ڪيل جوڙجڪ غلط ٿيو يعني ڏنل مواد بلڪل درست آهي.	5. اهو ناممڪن آهي جيستائين $\overrightarrow{OP}$ ۽ $\overrightarrow{OB}$ هڪ ٻئي سان نهڪن. مطلب ته $\overrightarrow{OA}$ ۽ $\overrightarrow{OB}$ هڪ ساڳي سڌي ليڪ ۾ آهن.

Q.E.D

نوٽ: اسان مٿي سڌيان جي ثابتيءَ ۾ برهان الخلف جو طريقو (Reduction Ad Absurdum Method) استعمال ڪيو آهي. هن طريقي جي ڄاڻ اقليدس جي مشهور ڪتاب Elements ۾ ملي ٿي. هي طريقو ارسطو جي طريقي جي بنياد تي آهي.

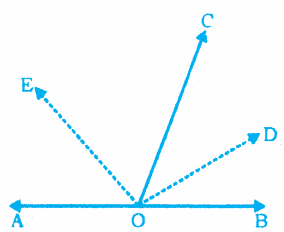
مشق 10.2

1. سڌيان 1 جي شڪل کي ڏسو:
(i) انهيءَ ڪنڊ جو نالو ٻڌايو جيڪا ∠BOC سان سپليمينٽ آهي.
(ii) انهيءَ ڪنڊ جو نالو ٻڌايو جيڪا ∠BOC سان ڪامپليمينٽ آهي.
(iii) جيڪڏهن $m\angle BOC = 50^\circ$ ، انهيءَ ڪنڊ جي ڪامپليمينٽ ۽ سپليمينٽ لهو.

2. سڌيان 1 جي شامل نتيجي (Cor.1) جي شڪل ۾ فرض ڪريو ته $m\angle BOC = 45^\circ$ ، $m\angle AOD = 2x$ ۽ $m\angle COD = 3x$ ته ∠AOC ۽ ∠COD جي ماپ لهو.
[اشارو: مساوات $2x + 3x + 45 = 180$ مان x جي قيمت معلوم ڪريو.]

3. سڌيان 1 جي شامل نتيجي **(Cor.2)** جي شڪل کي ڏسو:
(a) فرض ڪريو $m\angle BOC = x = 40^\circ$ ، ته باقي رهيل ڪنڊن جي ماپ لهو.
[اشارو: فرض ڪريو $m\angle AOC = y$ ، $m\angle AOD = z$ ، $m\angle BOD = w$ ته باقي رهيل سيني ڪنڊن جي ماپ لهو. هاڻي حل ڪريو $w + 40^\circ = 180^\circ$ ، $y + 40^\circ = 180^\circ$ ، $z + 140^\circ = 180^\circ$ ڇو؟]
(b) فرض ڪريو $m\angle BOC = x = 45^\circ$ ته
باقي رهيل سيني ڪنڊن جي ماپ لهو.

4. ٻن پر وارين سپليمينٽري ڪنڊن جا اڌواڌ ڪندڙ هڪ ٻئي تي عمود آهن.



مليل: $\overrightarrow{OD}$ ۽ $\overrightarrow{OE}$ ٻن پر وارين ڪنڊن BOC ۽ AOC جا اڌواڌ ڪندڙ آهن.
گهربل: $\overrightarrow{OE} \perp \overrightarrow{OD}$
ثابتي:

بيان	سبب
1. $m\angle AOC + m\angle BOC = 180^\circ$	i. مليل (ٻه پر واريون ڪنڊون سپليمينٽري آهن)
2. $\frac{1}{2} m\angle AOC + \frac{1}{2} m\angle BOC = \frac{1}{2}(180^\circ)$	ii. مٿي ڏنل مساوات (1) جي ٻنهي پاسن کي $\frac{1}{2}$ سان ضرب ڪرڻ سان
3. $m\angle COE + m\angle COD = 90^\circ$ يا	iii. $\frac{1}{2} m\angle AOC = m\angle COE$, $\frac{1}{2} m\angle BOC = m\angle COD$
4. $m\angle EOD = 90^\circ$ يا	iv. ڪنڊن جي جوڙ جو اصول موضوع 8
5. $\overrightarrow{OE} \perp \overrightarrow{OD}$ يا	v. ٻه شعاع اُهي هڪ گوني ڪنڊ ناهين ٿا.

Q.E.D

5. جيڪڏهن ٻن پر وارين ڪندن جا اڌواڌ ڪندڙ هڪ ٻئي تي عمود آهن، ته ٻئي پر واريون ڪندون سپليمينٽري آهن.(سوال 4 ۾ ڏنل مسئلي جو اُبتڙ آهي)

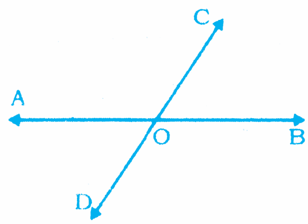
[اشارو: جيئن ته هو سوال 4 جي مسئلي جو اُبتڙ آهي، تنهنڪري سوال 4 جي حل کي هيٺيان کان ڪٽي مٿي شروعات تائين پهچنداسين، ٿوري ردوبدل به ڪرڻي پوندي، مثلاً قدم (3) ۾ 2 سان ضرب ڪرڻي پوندي.]

6. سوال 4 جي مسئلي ۾ سپني ڪامپليمينٽري ڪندن جي جوڙن جا نالا لکو.

ستيان 3

جيڪڏهن ٻه ليڪون هڪ ٻئي کي ڪپين ته نهندڙ چوٽيءِ واريون آمهون سامهون واريون ڪندون يڪسان ٿينديون.

مليل: ٻه ليڪون $\overleftrightarrow{AB}$ ۽ $\overleftrightarrow{CD}$ هڪ ٻئي کي ٽبڪي O تي اهڙي ريت ڪپين ٿيون جيئن $(\angle AOC \cong \angle BOD)$ ۽ $(\angle BOC \cong \angle AOD)$ چوٽيءِ وارين آمهون سامهون وارين ڪندن جا ٻه جوڙا ٺهن ٿا.



گهربل: (i) $\angle BOC \cong \angle AOD$

(ii) $\angle AOC \cong \angle BOD$

ثابتي:

بيان	سبب
1. $m\angle AOC + m\angle BOC = 180°$	i. ستيان 1 جي مطابق.
2. $m\angle AOD + m\angle AOC = 180°$	ii. ستيان 1 جي مطابق.
3. $\therefore\ m\angle AOC + m\angle BOC = m\angle AOD + m\angle AOC$	iii. مساواتن جي متعدي خاصيت
4. تنهنڪري $m\angle BOC = m\angle AOD$ يا	iv. $m\angle AOC$ کي مساوات جي ٻنهي پاسي کان ڪٽڻ سان.
5. $\therefore\ \angle BOC \cong \angle AOD$	v. جيڪڏهن ٻه ڪندون پاڻ ۾ ماپ جي لحاظ سان برابر آهن ته اُهي يڪسان چئبيون.
6. ساڳي طرح اسان ثابت ڪري سگهون ٿا: $\angle AOC \cong \angle BOD$	vi. ساڳي مٿين طريقه ڪار سان

Q.E.D

مشق 10.3

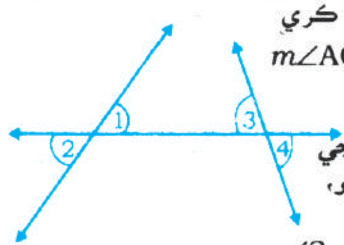
1. ستيان 3 جي شڪل ۾ جيڪڏهن $m\angle BOC = 70°$ ته باقي رهيل ڪندن جي ماپ لهو.

[اشارو: اڳين مشق ۾ اسان ستيان 1 کي استعمال ڪندي باقي رهيل ڪندن جون ماپون معلوم ڪيون آهن، جاڪاڻ ته ان وقت ستيان 3 جي ڄاڻ نه هئي. پر هاڻي اسان ستيان 3 ۽ ستيان 1 ٻنهي کي استعمال ڪنداسين.]

حل: $m\angle AOD = m\angle BOC = 70^\circ$ (سڌيان 3 جي مطابق) شڪل مان ظاهر آهي ته $m\angle AOC$ جي سپليمينٽ $m\angle BOC$ آهي. تنهن ڪري

(سڌيان 1 مطابق) $m\angle AOC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

۽ (سڌيان 3 مطابق) $m\angle BOD = 110^\circ$



2. اهڙيون ٻه ليڪون ٺاهيو جيڪي هڪ ٻئي کي 30° جي ڪنڊ تي ڪپين. باقي رهيل سيني ڪندن جي ماپ لهو، جيئن مٿي سکي آيا آهيون.

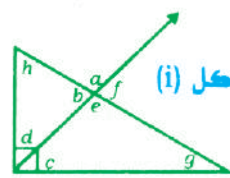
3. سامهون شڪل ۾ $\angle 3 \cong \angle 1$ ثابت ڪريو ته $\angle 2 \cong \angle 4$

[اشارو: پهريائين سڌيان 1 مطابق ثابت ڪريو $\angle 1 \cong \angle 2$ ۽ $\angle 3 \cong \angle 4$ ان کان پوءِ اصول متعارف 3 استعمال ڪريو جيئن ته $\angle 3 \cong \angle 1$ مليل آهي.]

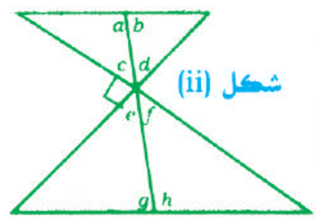
4. هڪ يڪسان ڪندن جي جوڙي جا اڏ ڪندڙ جن کي ساڳي چوٽي آهي اُهي ٻه مخالف شعاع آهن ته پوءِ ڪندن جا پاسا ٻه ڪپيندڙ ليڪون آهن.

5. هيٺين شڪلين ۾، ڪامپليمينٽري ڪندن، سپليمينٽري ڪندن ۽ چوٽيءَ وارين آمهون سامهون وارين ڪندن جي جوڙن جا نالا لکو.

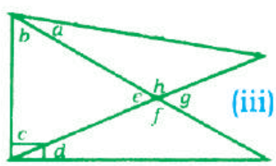
شڪل (i)



شڪل (ii)

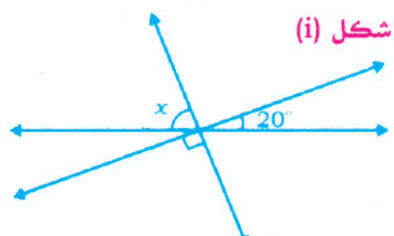


شڪل (iii)

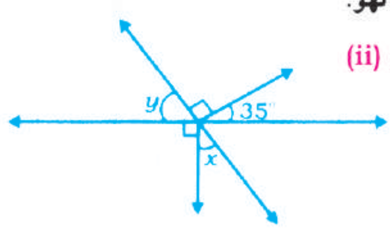


6. هيٺين شڪلين ۾ x، y ۽ z ڪندن جي ماپ لهو.

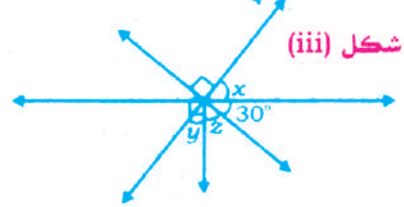
شڪل (i)



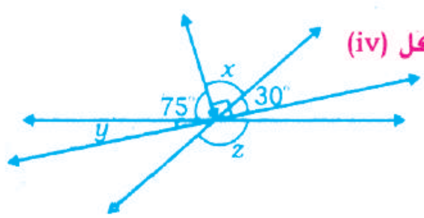
شڪل (ii)



شڪل (iii)

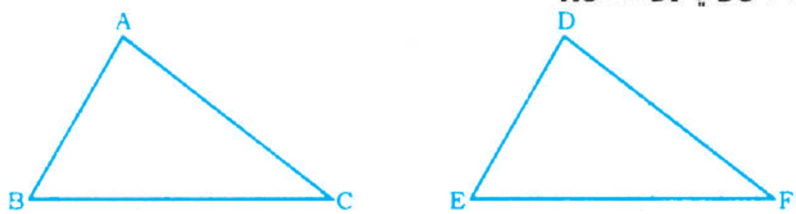


شڪل (iv)



تعريف: ٻن ٽڪنڊن جي وچ ۾ (1-1) مطابقت

جيئن تہ هر ٽڪنڊي جا ٽي پاسا ۽ ٽي چوٽيون ٿين ٿيون. تنهنڪري اهو هميشہ ممڪن آهي تہ ٻن ٽڪنڊن جي پاسن، ڪنڊن ۽ چوٽين جي پاڻ ۾ (1-1) مطابقت قائم ڪري سگهجي ٿي. (1-1) مطابقت جي نشاني '$\leftrightarrow$' آهي. سامهون شڪل ۾ ٻہ ٽڪنڊا ڏيکاريل آهن. انهن ٻنهي ٽڪنڊن ۾ 1-1 مطابقت کي هن طرح ظاهر ڪجي ٿو. '$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$' جنهن جو مطلب آهي تہ ٽپڪا $A \leftrightarrow D$ (ٽپڪو A، ٽپڪو D سان نسبت رکي ٿو) ٽپڪو B نسبت رکي ٿو. ٽپڪي E سان ۽ ٽپڪو C نسبت رکي ٿو ٽپڪي F سان ۽
اهڙي طرح $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{DE}$ (پاسو $\overline{AB}$ ، پاسو $\overline{DE}$ سان نسبت رکي ٿي)
$\overline{BC} \leftrightarrow \overline{EF}$ ۽ $\overline{AC} \leftrightarrow \overline{DF}$



نوٽ: ان ڳالهہ تي غور ڪندا تہ $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta EDF$ ۽ $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ ٻئي ساڳيون مطابقتون نہ آهن. ڇاڪاڻ تہ $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta EDF$ ۾ ٽپڪو A نسبت رکي ٿو ٽپڪي E سان، ٽپڪو B رکي ٿو D سان ۽ ٽپڪو C رکي ٿو ٽپڪي F سان وغيره.

ٽڪنڊن جي يڪسانيت (Congruence of Triangles)

ٻہ ٽڪنڊا پاڻ ۾ يڪسان چئي سگهجن ٿا،جيڪڏهن سندن نسبتي ڪنڊون ۽ پاسا پاڻ ۾ يڪسان آهن. ان جي برعڪس جيڪڏهن ٻہ ٽڪنڊا پاڻ ۾ يڪسان آهن،تہ پوءِ سندن نسبتي ڪنڊون ۽ پاسا پاڻ ۾ يڪسان ٿيندا يڪسانيت جي نشاني $\cong$ آهي.

نوٽ 1. جيڪڏهن هڪ مطابقت ۾ ٻہ ٽڪنڊا پاڻ ۾ يڪسان آهن تہ اهو ضروري نہ آهي تہ ٻين مطابقتن ۾ بہ اهي ٻئي ٽڪنڊا پاڻ ۾ يڪسان ٿين.

نوٽ 2. هر ٽڪنڊو پنهنجو پاڻ سان يڪسان ٿئي ٿو. ان کي ذاتي يڪسانيت (Identity Congruence) چيو وڃي ٿو. مثال طور

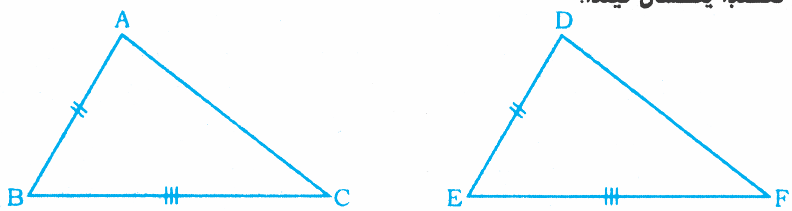
$$\Delta ABC \cong \Delta ABC$$

نوٽ 3. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ اهو پڻ اها ڳالهہ بہ ظاهر ڪري ٿو تہ $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ جنهن کي يڪسانيت جي نهڪڻ واري خاصيت (Symmetric Property of Congruence) چئجي ٿو.

نوٽ 4. جيڪڏهن $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ ۽ $\Delta DEF \cong \Delta PQR$ تہ پوءِ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ ان خاصيت کي يڪسانيت جي متعدي خاصيت (Transitive Property of Congruency) چيو وڃي ٿو.

ستيان 4

ٻن ٽڪنڊن جي ڪهڙي بہ مطابقت ۾ جيڪڏهن هڪ ٽڪنڊي جا ٻہ پاسا ۽ سندن وچين ڪنڊ ٻئي ٽڪنڊي جي مطابقت رکندڙ ٻن پاسن ۽ سندن وچين ڪنڊ سان ترتيبوار يڪسان آهن تہ پوءِ ٻئي ٽڪنڊا يڪسان ٿيندا.



مليل: $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ ۾:

(i) $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ (ii) $\angle B \cong \angle E$ (iii) $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

گهربل: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

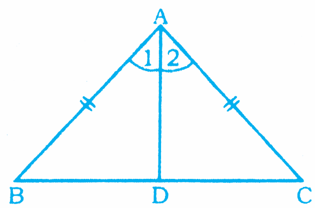
ثابتي:

بيان	سبب
1. ΔABC کي ΔDEF جي مٿان اهڙي ريت رکو جيئن ٽڪو B بلڪل، ٽڪي E تي ٺهڪي اچي ۽ پاسو $\overline{BC}$ وري پاسي $\overline{EF}$ جي مٿان پوري طرح ٺهڪي اچي.	i. اصول موضوع 12
2. $\because \overline{BC} \cong \overline{EF}$	ii. مليل
3. تنهنڪري ٽڪو C ٺهڪندو ٽڪي F سان.	iii. يڪسانيت جي وصف جي لحاظ کان.
4. $\because \angle B \cong \angle E$	iv. مليل
5. تنهنڪري پاسو $\overline{BA}$ پوري طرح ٺهڪندو پاسي $\overline{ED}$ تي.	v. ڪنڊ جي بناوت وارو اصول موضوع.
6. $\because \overline{AB} \cong \overline{DE}$	vi. مليل
7. تنهنڪري ٽڪو A پوري طرح ٺهڪندو ٽڪي D جي مٿان.	vii. يڪسانيت جي وصف جي لحاظ کان.
8. اهڙي طرح ΔABC پوري طرح ٺهڪندو ΔDEF جي مٿان.	viii. جيئن مٿي ثابت ڪري آيا آهيون.
9. مطلب تہ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	ix. اصول موضوع 11.
Q.E.D	

نوٽ: مٿين ستيان 4 کي مختصر نموني هيئن بہ لکبو آهي S.A.S ≅ S.A.S
(پ.ڪ.پ ≅ پ.ڪ.پ)

ستيان 5

جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جا ٻه پاسا يڪسان آهن ته سندن سامهون واريون ڪنڊون ٻه يڪسان ٿينديون.



مليل: ABC ۾ $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

گهربل: $\angle B \cong \angle C$

جوڙجڪ: $\angle A$ جو اڌ ڪندڙ $\overline{AD}$ ٺاهيو، جيڪو ٽڪنڊي جي پاسي $\overline{BC}$ کي ٽپڪي D تي ملي.

ثابتي:

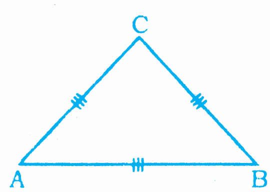
بيان	سبب
1. $\Delta ABD \leftrightarrow \Delta ACD$ ۾ :	i: ٻنهي ڪندن جي 1-1 مطابقت آهي.
(i) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	(a) مليل
(ii) $\angle 1 \cong \angle 2$	(b) جوڙجڪ
(iii) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	(c) عام پاسو (ذاتي يڪسانيت)
2. $\Delta ABD \cong \Delta ACD$	ii. S.A.S ≅ S.A.S (پ.ڪ.پ ≅ پ.ڪ.پ)
3. تنهنڪري $\therefore\ \angle B \cong \angle C$	iii. ٽڪنڊن جي يڪسانيت جي وصف جي لحاظ کان

Q.E.D

نوٽ: مٿي ڏنل ستيان 5 کي هن طرح ٻه بيان ڪري سگهجي ٿو:

"ٻپور پاسي ٽڪنڊي جي پاپي واريون ڪنڊون يڪسان هونديون آهن."

شامل نتيجو Cor.1: ٽپور پاسي ٽڪنڊي جون ٽيئي ڪندون يڪسان ٿين ٿيون.



مليل: ΔABC آهي جنهن ۾ $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$

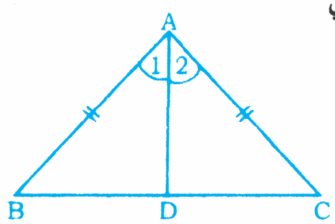
گهربل: $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$

ثابتي:

بيان	سبب
1. ΔABC ۾ $\overline{BC} \cong \overline{AC}$	i. مليل
2. تنهنڪري $\angle A \cong \angle B$	ii. ستيان 5 جي مطابق.
3. ساڳي طرح $\angle B \cong \angle C$	iii. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
4. تنهنڪري $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$	iv. نتيجن (2) ۽ (3) کي گڏ ڪرڻ سان.

Q.E.D

شامل نتيجو **Cor.2**. ٻيور پاسي ٽڪنڊي ۾ چوٽيءَ واري ڪنڊ جو اڌ ڪندڙ پايي جو عمودي اڌ ڪندڙ هوندو آهي.



مليل: ΔABC ۾ $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ ۽ $\overline{AD}$ ڪند A جو اڌواڌ ڪندڙ آهي، جيڪو پاسي $\overline{BC}$ کي ٽپڪي D تي ملي ٿو.

گهربل: $\overline{CD} \cong \overline{BD}$ ۽ $\overline{BC} \perp \overline{AD}$

ثابتي:

بيان	سبب
1. $\Delta ACD \leftrightarrow \Delta ABD$ ۾	i. ٻنهي ٽڪنڊن جي 1-1 مطابقت آهي.
(i) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	(a) مليل
(ii) $\angle 1 \cong \angle 2$	(b) مليل
(iii) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	(c) عام پاسو (ذاتي يڪسانيت)
2. تنهڪري $\Delta ABD \cong \Delta ACD$	ii. S.A.S ≅ S.A.S
3. تنهڪري $\overline{BD} \cong \overline{CD}$ ۽ $\angle ADB \cong \angle ADC$	iii ٽڪنڊن جي يڪسانيت جي وصف جي لحاظ کان.
4. پر $m\angle ADB + m\angle ADC = 180^\circ$	iv سٽيان 1 مطابق.
5. تنهڪري $m\angle ADB = 90^\circ = m\angle ADC$	v. ڳوني ڪند جي وصف جي لحاظ کان
6. يعني $\overline{AD} \perp \overline{BC}$	vi. عمود جي وصف جي لحاظ کان.
7. تنهڪري $\overline{AD}$ عمودي اڌ ڪندڙ آهي پاسي $\overline{BC}$ جو.	vii. ڇاڪاڻ ته $\overline{AD}$ اڌواڌ ڪري ٿو پاسي $\overline{BC}$ کي ڳوني ڪند تي.

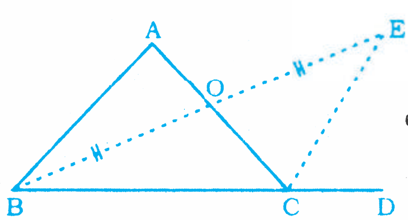
Q.E.D

سٽيان 6

ڪنهن به ٽڪنڊي جي ٻاهرين ڪند ماپ ۾ وڏي آهي، انهيءَ ٽڪنڊي جي سامهون وارين هر هڪ اندرين ڪند کان.

مليل: ABC ۾ ڪند ACD ٻاهرين ڪند آهي.

گهربل: $m\angle ACD > m\angle A$ ۽ $m\angle ACD > m\angle B$



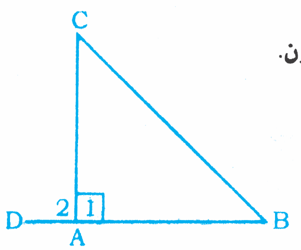
جوڙجڪ: فرض ڪريو ته پاسي $\overline{AC}$ جو وچون ٽپڪو O آهي. $\overline{BO}$ ناهيو ۽ ان کي ٽپڪي E تائين وڌايو. اهڙي طرح جيئن $m\overline{BO} = m\overline{OE}$ ٽپڪن C ۽ E کي ملائي $\overline{CE}$ ناهيو.

ثابتي:

بيان	سبب
1. $\Delta AOB \leftrightarrow \Delta COE$ ۾	i. ٻنهي ڪندن جي 1-1 مطابقت آهي.
(i) $\overline{BO} \cong \overline{EO}$	(a) جوڙجڪ مطابق
(ii) $\angle AOB \cong \angle COE$	(b) عمودي ڪنڊون آهن.
(iii) $\overline{AO} \cong \overline{CO}$	(c) جوڙجڪ مطابق
2. تنهنڪري $\Delta AOB \cong \Delta COE$	ii. S.A.S ≅ S.A.S
3. هاڻي چئي سگهجي ٿو $m\angle A \cong m\angle ACE$	iii. ٽڪنڊن جي يڪسانيت جي وصف جي لحاظ کان.
4. پر $m\angle ACD = m\angle ACE + m\angle ECD$	iv. ڪندن جي جوڙ جي موضوع مطابق.
5. تنهنڪري $m\angle ACD > m\angle ACE$	v. سڄو يا مڪمل وڏو آهي ان جي حصي کان.
6. تنهنڪري $m\angle ACD > m\angle A$	vi. $m\angle A = m\angle ACE$ (اڳ ۾ ثابت ٿيل آهي)
7. ساڳي طرح $\therefore m\angle ACD > m\angle B$	vii. مٿيون عمل ورجائڻ سان

Q.E.D

شامل نتيجو Cor.1. هڪ ٽڪنڊي ۾ جيڪڏهن هڪ ڪنڊ گوني ڪنڊ آهي ته ٻيون ٻہ ڪنڊون سوڙهيون ڪنڊون ٿينديون.



مليل: ΔABC هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي ڪنڊ A تي.

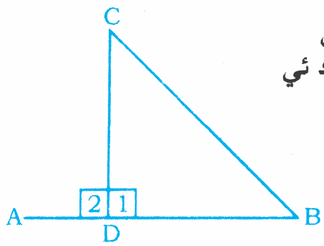
گهربل: $m\angle B < 90^\circ$ ۽ $m\angle C < 90^\circ$

جوڙجڪ: پاسي $\overline{BA}$ کي ٽپڪي D تائين وڌايو.

ثابتي:

بيان	سبب
1. $m\angle 2 = 90^\circ$	i. $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$ ۽ $m\angle 1 = 90^\circ$
2. پر $\angle 2$ ، ABC جي ٻاهرين ڪنڊ آهي.	ii. وصف جي مطابق.
3. تنهنڪري $\therefore m\angle B < m\angle 2 \Rightarrow m\angle B < 90^\circ$	iii. سٽيان 6 جي مطابق.
4. ساڳي طرح ثابت ڪري سگهون ٿا $m\angle C < 90^\circ$	iv. مٿي ڏنل طريقہ ڪار ورجائڻ سان.

Q.E.D



شامل نتيجو **Cor.2** مليل ليڪ تي ڪنهن به هڪ ٽپڪي
ڪان جيڪو مليل ليڪ تي نہ هجي ان مان هڪ ۽ فقط هڪ ئي
عمود ڪڍي سگهجي ٿو.

مليل: مليل ٽپڪو C، مليل $\overleftrightarrow{AB}$ کان ٻاهر اهڙي طرح
آهي جو $\overline{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

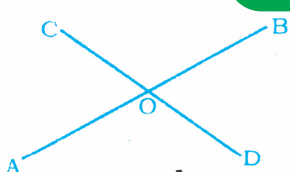
گهربل: ٽپڪي C مان $\overline{CD}$ هڪ ۽ فقط هڪ ئي
عمود ڻاهي سگهجي ٿو.

ثابتي:

سبب	بيان
i. فرض ڪيو آهي.	1. ٽپڪي C مان جيڪڏهن $\overline{CD}$ فقط هڪ عمود نہ آهي تہ سمجهبو تہ ٽپڪي C مان ٻيو هڪ عمود $\overline{CB}$ ٻڌايو وڃي ٿو جيڪو $\overleftrightarrow{AB}$ تي عمود آهي.
ii. ٿيئري 6 مطابق.	2. پر ΔDBC ۾ $m\angle B < m\angle 2$
iii. $m\angle 2 = 90^{\circ}$	3. $\Rightarrow m\angle B < 90^{\circ}$
iv. اسان جيڪو فرض ڪيو آهي اُهو غلط آهي.	4. تنهنڪري $\overline{CB}$ عمود نہ آهي $\overleftrightarrow{AB}$ تي.
v. جيئن مٿي ثابت ڪيوسين.	5. انهيءَ ڪري چئبو تہ $\overline{CD}$ ئي فقط هڪ عمود آهي $\overleftrightarrow{AB}$ تي.

Q.E.D

مشق 10.4

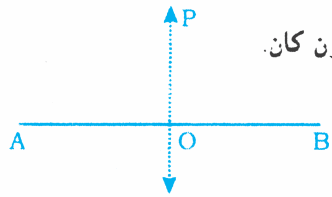


1. سامهون ڏنل شڪل ۾ ٽپڪو O وچون ٽپڪو آهي ليڪ
ٽڪرن $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ جو. ثابت ڪريو تہ $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ -
[اشارو: ٽپڪي A کي ٽپڪي C سان ملائي $\overline{AC}$ ۽
ٽپڪي B کي ٽپڪي D سان ملائي $\overline{BD}$ ڻاهيو.
ان کان پوءِ ثابت $\Delta AOC \cong \Delta BOD$ (S.A.S ≅ S.A.S) مطابق]

2. جيڪڏهن ٻہ ليڪ ٽڪر جيڪي هڪ ٻئي کي اڌواڌ ڪن ٿا. ثابت ڪريو تہ انهن ٻنهي ليڪ ٽڪرن جا ڇيڙا ملائڻ سان جيڪي ليڪ ٽڪر ٺهن ٿا اُهي پاڻ ۾ يڪسان ٿيندا.
[اهامٽي ڏنل مشق 10.4 جي سوال 1 جو عام بيان آهي]

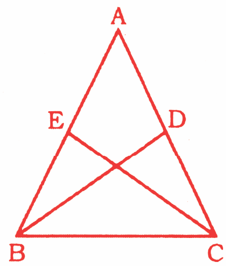
3. ثابت ڪريو تہ مستطيل جا اُريب هڪ ٻئي ۾ يڪسان آهن.
[اشارو: فرض ڪريو مستطيل ABCD جا ٻہ اُريب $\overline{CD}$ ۽ $\overline{BD}$ آهن. ثابت ڪريو تہ $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (S.A.S ٿيئري مطابق)]

4. ٻيہر پاسي ٽڪنڊي ۾ چوٽيءَ واري ڪنڊ جو اڌواڌ ڪندڙ مليل ٽڪنڊي جي پايي جو عمودي اڌ ڪندڙ آهي. ثابت ڪريو.



5. هڪ ليڪ ٽڪر جي عمودي اڌ ڪندڙ جو هرهڪ ٽپڪو هڪ جيتري مفاصلي تي آهي. مليل ليڪ ٽڪر جي ڇيڙن کان.

[هتي $\overrightarrow{OP}$ عمودي اڌ ڪندڙ آهي $\overline{AB}$ جو.
اسان کي ثابت ڪرڻو آهي ته
$\overline{AP} \cong \overline{BP}$ تنهنڪري ٽپڪي A کي P سان ۽ B کي P سان پاڻ ۾ ملائي $\overline{AP}$ ۽ $\overline{BP}$ ڳاهيو.
ان کان پوءِ ثابت ڪريو ته $\Delta AOP \cong \Delta BOP$
(S.A.S ≅ S.A.S جي سڌيان مطابق)]



6. ثابت ڪريو ته ٻيور پاسي ٽڪنڊي جي يڪسان پاسن جا ميڊيان به پاڻ ۾ يڪسان ٿيندا.

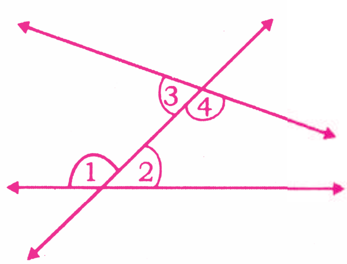
مليل: ΔABC ۾ $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ۽ ($\overline{BD}$، $\overline{CE}$) ٻنهي يڪسان پاسن جا ميڊيان (Median) آهن.

گهربل: $\overline{BD} \cong \overline{CE}$

ثابتي:

بيان	سبب
1. $\Delta ABD \leftrightarrow \Delta ACE$	i. ٻنهي ٽڪنڊن جي 1-1 مطابقت آهي.
(i) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	(a) مليل
(ii) $\angle A \cong \angle A$	(b) عام پاسو (ذاتي يڪسانيت)
(iii) $\overline{AD} \cong \overline{AE}$	(c) يڪسان پاسن جا اڌ به يڪسان آهن.
2. تنهنڪري $\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACE$	ii. S.A.S ≅ S.A.S جي مطابق
3. انهيءَ ڪري $\therefore \overline{BD} \cong \overline{CE}$	iii. ٽڪنڊن جي يڪسانيت جي وصف جي لحاظ کان

Q.E.D



7. ڪنهن مليل ليڪ تي ڪنهن به ٻاهرين ٽپڪي کان هڪ ۽ فقط هڪ ئي عمود ڪيڏي سگهجي ٿو، ان مليل ليڪ تي.

8. هيٺ سامهون ڏنل شڪل تي غور ڪريو ۽ پنهنجي ڪلاس جي ساٿين سان هيٺين بيانن تي بحث ڪري پڇيل سوالن جا جواب ڏيو.

(i) ($\angle 1$، $\angle 2$) ۽ ($\angle 3$، $\angle 4$) جي ڪنڊن جي جوڙن جو پاڻ ۾ ڪهڙو تعلق آهي؟

(ii) ڇا $\angle 1$ ۽ $\angle 4$ پاڻ ۾ يڪسان آهن؟ ڇا $\angle 3$ ۽ $\angle 2$ پاڻ ۾ يڪسان آهن؟ جيڪڏهن نه ته ڇو؟ ڪهڙين حالتن ۾ اِهي پاڻ ۾ يڪسان ٿي سگهن ٿا؟

(iii) ڇا $\angle 2$ ۽ $\angle 3$ يڪسان آهن؟ اهو به ٻڌايو ته ميلاپ ڏانهن مائل ليڪن جو ڇا ٿيندو؟

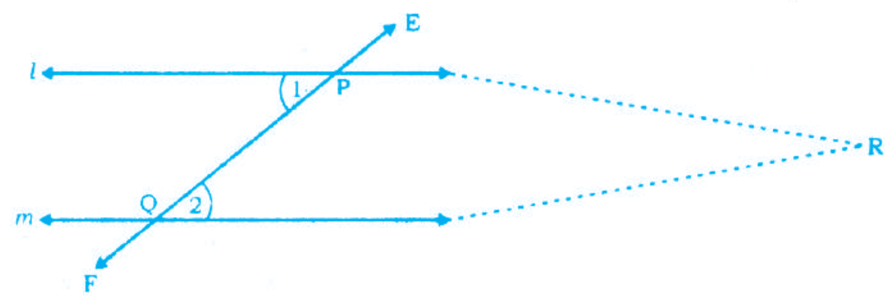
(iv) ($\angle 1$، $\angle 2$) ۽ ($\angle 3$، $\angle 4$) سپليمينٽري ڪنڊن جا جوڙا آهن. ڇا اوهان انهيءَ بيان سان متفق آهيو. سبب ڏيو. ڇا ($\angle 1$، $\angle 3$) ۽ ($\angle 2$، $\angle 4$) پڻ سپليمينٽري ڪنڊن جا جوڙا آهن؟ جيڪڏهن نه ته اُها حالت بيان ڪريو جنهن مطابق اهي سپليمينٽري ڪنڊن جا جوڙا بڻجن.

(v) اُها حالت بيان ڪريو جڏهن اندرين ڪنڊن جا جوڙا ڪپيندڙ ليڪ جي ساڳي پاسي سپليمينٽري بڻجن.

(vi) جيڪڏهن ميلاپ ڏانهن مائل ليڪن کي وڌايو وڃي، اُهي ڪنهن ٽپڪي تي پاڻ ۾ ملنديون. ٻڌايو ڪهڙي قسم جي نئين شڪل ٺهندي؟ ميلاپ ڏانهن مائل ليڪن تي ڇئن اندرين ڪنڊن مان ڪهڙيون ٻه ڪنڊون ٽڪنڊي جون ٻاهريون ڪنڊون ٿينديون؟ ٻڌايو ته ڪهڙي ٻاهرين ڪنڊ وڏي آهي $m\angle 2$ کان ۽ ڪهڙي ٻاهرين ڪنڊ وڏي آهي $m\angle 4$ کان؟ اسان کي انهن سوالن جا صحيح جواب ستيان 7 ۽ 8 سکڻ کان پوءِ ئي ملندا. تنهنڪري انهن سوالن کي ستيان 7 ۽ 8 سکڻ کان پوءِ هڪ دفعو ورجي به ڏسندا ته جيئن اهڙن سوالن کي حل ڪرڻ جي اوهان کي مهارت حاصل ٿئي.

ستيان 7

جيڪڏهن ڪا ڪپيندڙ ليڪ ساڳئي مٿاڇري وارين ٻن ليڪن کي اهڙيءَ طرح ڪپي جو ٺهندڙ متبادل ڪنڊون يڪسان هجن ته جيڪڏهن ڪا ڪپيندڙ ليڪ ساڳي مٿاڇري (Plane) وارين ٻن ليڪن کي اهڙيءَ طرح ڪپي جو ٺهندڙ متبادل ڪنڊون يڪسان هجن ته مليل ٻئي ليڪون پاڻ ۾ پور وڇوٽ هونديون.



مليل: l ۽ m ساڳي مٿاڇري واريون ٻه ليڪون آهن. انهن کي $\overleftrightarrow{EF}$ ٻن ٽپڪن P ۽ Q تي اهڙي طرح ڪپي ٿي جو

(متبادل ڪنڊن جو جوڙو آهي) $\angle 1 \cong \angle 2$

گهربل: $l \parallel m$

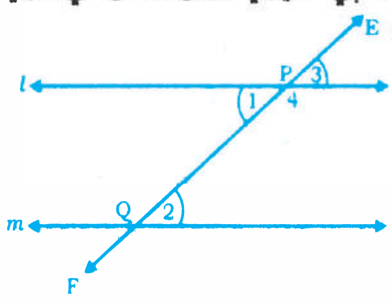
ثابتي: فرض ڪريو ته l ۽ m ٻه ساڳي مٿاڇري واريون پور وڇوٽ ليڪون آهن. ان صورت ۾ اُهي هڪ ٻئي سان ٽپڪي R وٽ ملنديون (جو ته ساڳي مٿاڇري تي آهن) ۽ ٽڪنڊو PQR ٺهي پوندو.

ثابتي:

بيان	سبب
1. ΔPQR ۾ $\angle 1$ ٻاهرين ڪنڊ آهي ۽ $\angle 2$ اندرين سامهون واري ڪنڊ آهي.	i. وصف مطابق.
2. تنهنڪري $m\angle 1 > m\angle 2$	ii. ستيان 6 مطابق.
3. پر $m\angle 1 = m\angle 2$	iii. مليل
4. جيئن ته بيان (2) ۽ (3) ساڳي وقت برابر نه ٿا ٿي سگهن.	iv. حقيقي عددن جي ٽِه رُخي خاصيت.
5. ان ڪري $m\angle 1 = m\angle 2$ درست آهي ۽ l ، m ليڪون هڪ ٻئي کي نٿيون ڪپي سگهن.	v. اسان جو مفروضو غلط آهي.
6. ڇٻهو ته $l \parallel m$	vi. ڇاڪاڻ ته اهي ليڪون ساڳي متاچري ۾ آهن، پر هڪ ٻئي کي نه ٿيون ڪپين.

Q.E.D

شامل نتيجو Cor.1 جيڪڏهن ڪا ڪپيندڙ ليڪ ساڳي متاچري وارين ليڪن کي اهڙي طرح ڪپي جو ٺهندڙ نسبتي ڪنڊون يڪسان هجن ته اهي ٻئي ليڪون پاڻ ۾ پور وچوٽ هونديون.



مليل: l ۽ m ٻه ساڳي متاچري واريون ليڪون آهن. انهن کي ليڪ $\overleftrightarrow{EF}$ ترتيبوار ٻن ٽٻڪن P ۽ Q تي اهڙي طرح ڪپي ٿي جيڪڏهن (نسبتي ڪنڊن جو جوڙو آهي) $\angle 2 \cong \angle 3$

گهربل: $l \parallel m$

ثابتي:

بيان	سبب
1. $\angle 1 \cong \angle 3$	i. ستيان 3 مطابق.
2. پر $\angle 3 \cong \angle 2$	ii. مليل
3. تنهنڪري $\angle 1 \cong \angle 2$	iii. مساواتن جي متعدي خاصيت.
4. پر اهي متبادل ڪنڊون آهن. تنهنڪري $l \parallel m$	iv. ستيان 7 مطابق.

Q.E.D

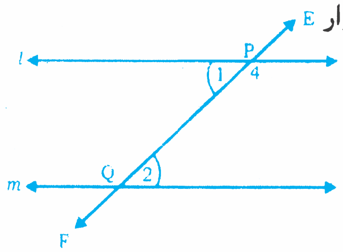
شامل نتيجو Cor.2 جيڪڏهن ٻن ساڳي متاچري وارين ليڪن کي هڪ ڪپيندڙ ليڪ اهڙي طرح ڪپي جو ڪپيندڙ ليڪ جي ساڳي طرف واريون ڪنڊون سپليمينٽري هجن ته اُهي ليڪون پور وچوٽ هونديون.

مليل: l ۽ m بہ ساڳي متاچري (Plane) واريون ليڪون آهن.

انهن کي هڪ ڪپيندڙ $\overleftrightarrow{EF}$ بن ٽپڪن P ۽ Q تي ترتيبوار

اهڙيءَ طرح ڪپي ٿي جو $m\angle 2 + m\angle 4 = 180^\circ$

(سپليمينٽري ڪندن جو جوڙو آهي).



گهربل: $l \parallel m$

ثابتي:

بيان	سبب
1. $\angle 4$ جي سپليمينٽ $\angle 1$ آهي.	i. ستيان 1 جي مطابق.
2. $\angle 4$ جي سپليمينٽ $\angle 2$ آهي.	ii. مليل
3. تنهنڪري $m\angle 1 = m\angle 2$	iii. ساڳي ڪند جون سپليمينٽ ڪندون پاڻ ۾ يڪسان ٿين ٿيون.
4. پر اهي متبادل ڪندون آهن. $\therefore\ l \parallel m$	iv. ستيان 7 جي مطابق.

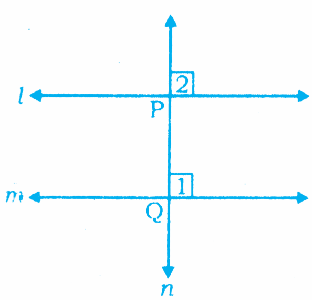
Q.E.D

شامل نتيجو Cor.3. ساڳي متاچري (Plane) ۾ جيڪڏهن هڪ ليڪ بن ليڪن تي عمود هجي تہ اهي ٻئي ليڪون پاڻ ۾ پور وچوٽ هونديون.

مليل: l ۽ m بہ ساڳي متاچري (Plane) واريون ليڪون آهن.

انهن کي هڪ ڪپيندڙ ليڪ $\overleftrightarrow{EF}$ ترتيبوار بن ٽپڪن P ۽ Q

تي اهڙي طرح ڪپي ٿي جو $m\angle 1 = 90^\circ = m\angle 2$



گهربل: $l \parallel m$

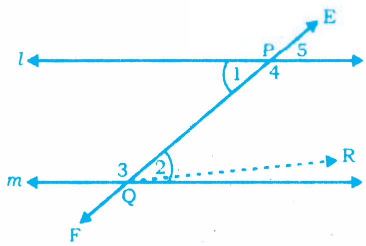
ثابتي:

بيان	سبب
1. $m\angle 1 = m\angle 2$	i. هرهڪ گوني ڪند آهي (مليل)
2. پر اهي ٻئي نسبتي ڪندون آهن $l \parallel m$	ii. ستيان 7 جي مطابق: نسبتي ڪندون

Q.E.D

سڌيان 8

جيڪڏهن ٻن پور وچوٽ ليڪن کي هڪ ليڪ ڪٽي ته اهڙي ريت ٺهندڙ متبادل ڪنڊون يڪسان ٿينديون.



مليل: l ۽ m ٻه پور وچوٽ ليڪون آهن ۽ هڪ ڪپيندڙ $\overleftrightarrow{EF}$ انهن کي ترتيبوار ٻن ٽپڪن P ۽ Q تي ڪٽي ٿي.

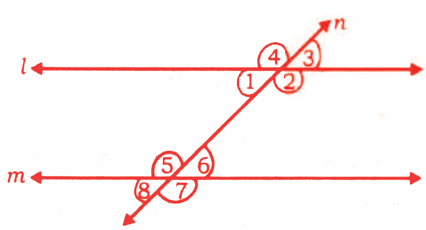
گهربل: $\angle 2 \cong \angle 1$ ۽ $\angle 4 \cong \angle 3$

ثابتي: فرض ڪريو ته $\angle 1$ يڪسان نه آهي $\angle 2$ جي پر $\angle PQR \cong \angle 1$ جڏهن ته $\overleftrightarrow{QR}$ ليڪ m تي واقع نه آهي.

بيان	سبب
1. جيئن ته $\angle PQR \cong \angle 1$	i. فرض ڪيو آهي.
2. تنهنڪري $\overleftrightarrow{QR} \parallel l$	ii. سڌيان 7 مطابق.
3. تنهن ڪري ليڪ l پور وچوٽ آهي ٻن ليڪن m ۽ $\overleftrightarrow{QR}$ جي،جيڪو ناممڪن آهي.	iii. پلي فيئر (Axiom) جو اصول متعارف
	iv. اسان جو مفروضو يعني فرض ڪيل غلط ثابت ٿيو.
4. تنهنڪري $\angle 2 \cong \angle 1$	
5. ساڳي طرح $\angle 4 \cong \angle 3$	v. مٿي ڏنل طريقہ ڪار موجب.

Q.E.D

شامل نتيجو **Cor. 1**. جيڪڏهن ٻن پور وچوٽ ليڪن کي هڪ ڪپيندڙ ليڪ اهڙي طرح ڪٽي جو ان سان ٺهندڙ نسبتي ڪنڊن جو هرهڪ جوڙو يڪسان ٿيندو.



مليل: l ۽ m ۽ هڪ ڪپيندڙ ليڪ n ٻنهي پور وچوٽ ليڪن کي اهڙي طرح ڪٽي ٿي جو اٺ ڪنڊون ٺهن ٿيون، جيڪي سامهون شڪل ۾ ڏيکاريل آهن.

گهربل: $\angle 4 \cong \angle 5$ ، $\angle 3 \cong \angle 6$، $\angle 2 \cong \angle 7$ ، $\angle 8 \cong \angle 1$

(اهي سڀ نسبتي ڪندن جا چار جوڙا آهن.)

ثابتي:

بيان	سبب
1. $m \parallel l$ ۽ ليڪ n انهن کي ڪپي ٿي. 2. تنهنڪري $\angle 1 \cong \angle 6$ 3. پر $\angle 1 \cong \angle 3$ 4. $\therefore \angle 6 \cong \angle 3$ 5. ساڳي طرح اسان ثابت ڪري سگهون ٿا $\angle 8 \cong \angle 1$، $\angle 2 \cong \angle 7$ ۽ $\angle 4 \cong \angle 5$	i. مليل ii. متبادل ڪنڊن جو جوڙو آهي (ستيان 8) iii. چوٽيءَ وارين مخالف ڪنڊن جو جوڙو آهي. iv. مساواتن جي متعدي خاصيت موجب v. ساڳيئي مٿين ڏنل طريقہ ڪار موجب.

Q.E.D

شامل نتيجو Cor.2 جيڪڏهن ٻن پور وچوٽ ليڪن کي ڪا ڪپيندڙ ليڪ اهڙي طرح ڪپي جو ڪپيندڙ ليڪ جي ساڳئي پاسي واريون اندريون ڪندون سپليمينٽري ٿين ٿيون.

مليل: $m \parallel l$ ۽ هڪ ڪپيندڙ ليڪ n ٻنهي پور وچوٽ ليڪن $\angle 1$ يا $\angle 8$ کي اهڙي طرح ڪپي ٿي جو اٺ ڪندون ٺهن ٿيون، جيڪي شڪل ۾ ڏيکاريل آهن.

(مٿي ڏنل شامل نتيجي Cor.1 ۾ ڏنل شڪل کي ڏسو)

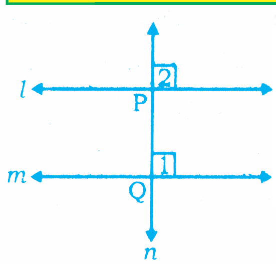
گهربل: $m\angle 2 + m\angle 6 = 180^\circ$ ۽ $m\angle 1 + m\angle 5 = 180^\circ$

ثابتي:

بيان	سبب
1. $m \parallel l$ ۽ ليڪ n انهن کي ڪپي ٿي. 2. $\therefore \angle 6 \cong \angle 1$ 3. $m\angle 6 + m\angle 2 = m\angle 1 + m\angle 2$ يا 4. تنهنڪري $m\angle 6 + m\angle 2 = 180^\circ$ 5. ساڳي طرح $m\angle 1 + m\angle 5 = 180^\circ$	i. مليل ii. متبادل ڪندن جو جوڙو آهي (ستيان 8 موجب) iii. مٿي (2) ۾ حاصل ٿيل مساوات جي ٻنهي پاسن ۾ $m\angle 2$ جوڙ ڪرڻ سان. iv. $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$ (ستيان 1 موجب) v. ساڳي مٿي ڏنل طريقہ ڪار موجب.

Q.E.D

شامل نتيجو Cor.3 هڪ مٿاڇري (Plane) ۾ جيڪڏهن ڪا ليڪ ٻن وچوٽ ليڪن مان ڪنهن بہ هڪ تي عمود آهي تہ اها ٻيءَ پور وچوٽ ليڪ تي بہ عمود هوندي.



مليل: $m \parallel l$ ۽ ليڪ n عمود آهي ليڪ m تي.

گهربل: ليڪ n، ليڪ l تي بہ عمود آهي.

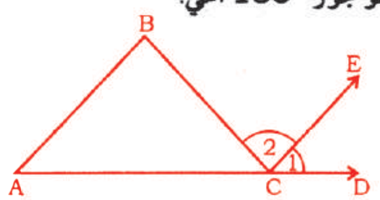
ثابتي:

بيان	سبب
1. $m \parallel l$ ۽ ليڪ n، ليڪ m تي عمود آهي.	i. مليل
2. $\angle 1 \cong \angle 2$ (انهيءَ نتيجي مان ملي ٿو ته $\angle 2$ هڪ ڳوني ڪنڊ آهي)	ii. سٽيان 8 شامل نتيجو Cor.1 موجب نسبتي ڪنڊن جو جوڙو آهي.
3. تنهنڪري ليڪ n، پڻ عمود آهي ليڪ l تي.	iii. جيئن ته ثابت ڪيو ويو آهي ته $\angle 2$ هڪ ڳوني ڪنڊ آهي.

Q.E.D

سٽيان 9

ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪنڊن جي ماپن جو جوڙ 180° آهي.



مليل: ABC هڪ ٽڪنڊو آهي.

گهربل: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$

جوڙجڪ: $\overline{AC}$ کي ٽپڪي D تائين وڌايو. $\overrightarrow{CE}$ پرر وچوٽ $\overline{AB}$ جي ڪاهيو.

ثابتي:

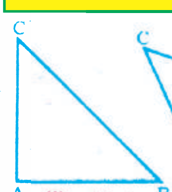
بيان	سبب
1. $\overrightarrow{CE} \parallel \overline{AB}$ ۽ $\overrightarrow{AD}$ پنهي پرر وچوٽ ليڪن کي ڪپي ٿو.	i. جوڙجڪ
2. تنهنڪري $m\angle A = m\angle 1$	ii. نسبتي ڪنڊون آهن.
3. $\overrightarrow{CE} \parallel \overline{AB}$ ۽ $\overline{BC}$ ڪپيندڙ ليڪ آهي	iii. جوڙجڪ
4. $m\angle B = m\angle 2$	iv. متبادل ڪنڊن جو جوڙو آهي.
5. ۽ $m\angle A + m\angle B = m\angle 1 + m\angle 2$ $= m\angle BCD$	v. حاصل نتيجن (2) ۽ (4) کي جوڙ ڪرڻ سان (ڪنڊن جي جوڙ وارو اصول موضوع)
6. حاصل نتيجي (5) ۾ $m\angle ACB$ کي پنهي پاسن ۾ جوڙ ڪرڻ سان. $m\angle A + m\angle B + m\angle ACB =$ $m\angle BCD + m\angle ACB$	vi. مساواتن جي جوڙواري خاصيت.
7. يا $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$	7. $m\angle BCD + m\angle ACB = 180^\circ$

Q.E.D

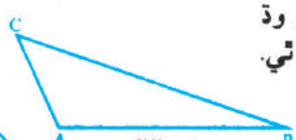
شامل نتيجو **Cor.1** ڪهڙي به ٽڪنڊي ۾ وڌ ۾ وڌ هڪ ڳوني ڪنڊ يا هڪ ويڪري ڪنڊ ٿي سگهي ٿي.

مليل: ΔABC ۾ $m\angle A = 90^\circ$ يا $m\angle A > 90^\circ$

گهربل: ΔABC کي نقط هڪ ڳوني ڪنڊ آهي يا نقط هڪ ويڪري ڪنڊ آهي.



شڪل (i)



شڪل (ii)

ثابتي:

بيان	سبب
1. شڪل (i) ۾ $m\angle A = 90^\circ$	i. مليل
2. تنهنڪري $m\angle B+m\angle C=180^\circ-90^\circ=90^\circ$ يعني $\angle B$ ۽ $\angle C$ ڪامپليمينٽري ڪنڊون آهن.	ii. سڌيان 9 جي مطابق ۽ ڪامپليمينٽري ڪنڊن جي وصف جي لحاظ کان.
3. تنهنڪري $\angle B$ ۽ $\angle C$ مان هرهڪ جي ماپ هڪ گوني ڪنڊ کان گهٽ آهي يا ΔABC کي فقط هڪ گوني ڪنڊ آهي.	iii. چاڪاڻ ته ٻنهي ڪندن جي ماپن جو جوڙ 90° آهي.
4. شڪل (ii) مطابق $m\angle A > 90^\circ$	iv. مليل
5. تنهنڪري $m\angle B + m\angle C < 90^\circ$	v. ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪندن جي ماپن جو جوڙ 180° آهي.
6. يعني $\angle B$ ۽ $\angle C$ مان هرهڪ ماپ ۾ گوني ڪنڊ 90° کان ننڍي آهي يا ΔABC کی فقط هڪ ويڪري ڪنڊ آهي.	vi. چاڪاڻ ته انهن ٻنهي ڪندن جي ماپن جو جوڙ 90° کان گهٽ آهي.

Q.E.D

شامل نتيجو Cor.2 هرهڪ ٽڪنڊي کي گهٽ ۾ گهٽ ٻه سوڙهيون ڪندون ٿين ٿيون.

مليل: ΔABC آهي (سڌيان 9 شامل نتيجو Cor.1 واري شڪل استعمال ۾ ايندي)

گهربل: ΔABC کي گهٽ ۾ گهٽ ٻه سوڙهيون ڪندون آهن.

ثابتي:

بيان	سبب
1. جيڪڏهن ΔABC کي فقط هڪ گوني ڪنڊ آهي يا فقط هڪ ويڪري ڪنڊ آهي ته پوءِ انهيءَ ٽڪنڊي ABC کي ٻه سوڙهيون ڪندون آهن.	i. سڌيان 9 شامل نتيجو Cor.1 مطابق.
2. جيڪڏهن ΔABC کي ڪابه گوني ڪنڊ نه آهي ۽ نه وري ڪا ويڪري ڪنڊ آهي ته ΔABC جون ٽيئي ڪندون سوڙهيون ڪندون آهن.	ii. چاڪاڻ ته هرهڪ ٽڪنڊي کي ٽي ڪندون آهن.
3. تنهنڪري چئي سگهجي ٿو ته هرهڪ ٽڪنڊي کي گهٽ ۾ گهٽ ٻه سوڙهيون ڪندون آهن.	iii. جيئن مٿي ثابت ڪري آيا آهيون.

Q.E.D

شامل نتيجو Cor.3 گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ سوڙهيون ڪندون ڪامپليمينٽري هونديون آهن.

[اشارو: هي پهريائين سڌيان 6 جي شامل نتيجو Cor.2 ۾ ثابت ڪيل آهي.]

شامل نتيجو Cor.4 ڪنهن ليڪ تي ٻاهرين ٽٻڪي کان فقط هڪ ئي عمود ڪيڏي سگهجي ٿو.

[هي پهريائين سڌيان 6 جي شامل نتيجي Cor.2 ۾ ثابت ڪيل آهي.]

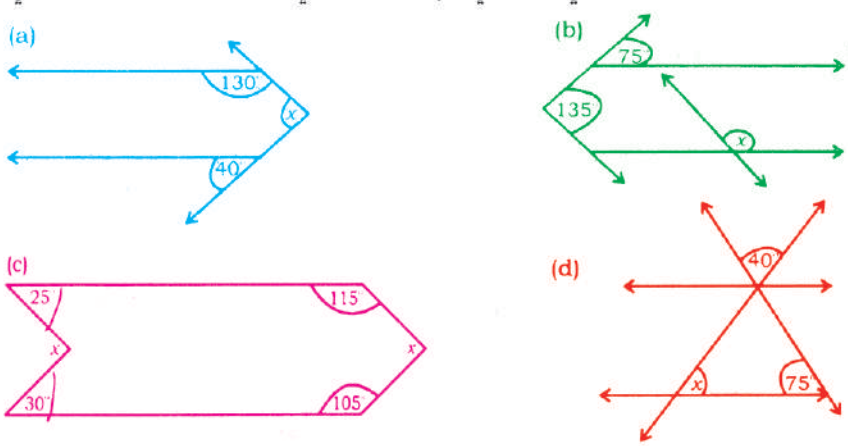
شامل نتيجو Cor.5. ڪنهن به ٽڪنڊي جي ٻاهرين ڪنڊ جي ماپ، اندرين سامهون وارين ڪندن جي ماپن جي جوڙ جي برابر ٿيندي آهي.

[اشارو: ان جي حل لاءِ سڌيان 9 واري شڪل ناهي، مليل، گهربل وغيره لکي پوءِ ثابتي وارا ڪجھ بيان نوٽ ڪري ان مطابق ثابتي مڪمل ڪريو.]

شامل نتيجو Cor.6. جيڪڏهن هڪ ٽڪنڊي جون ٻه ڪندون ترتيبوار ٻئي ٽڪنڊي جي ٻن ڪندن جي برابر هجن ته سندن رهيل ڪندون به يڪسان ٿينديون. [شاگردن کي گهرجي ته پاڻ انهيءَ جي حل لاءِ جُستجو ڪن.]

مشق 10.5

1. هيٺ ڏنل هرهڪ شڪل ۾ انهيءَ ڪنڊ جي ماپ لهو، جنهن کي x عدد سان ظاهر ڪيو ويو آهي.

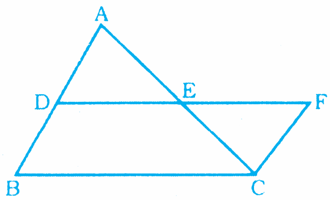


[اشارو: سوال (a) کان (c) تائين ڪنڊ x (يا 135°) جي چوٽيءَ واري ٽٻڪي مان گذرندڙ هڪ ليڪ باقي ٻن ليڪن جي پور وچوٽ ناهيو.]

2. جيڪڏهن ٻه ليڪ ٽڪر $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ هڪ ٻئي کي هڪ ٽٻڪي O تي اڌوڌ ڪن ٿا. ثابت ڪريو ته $\overline{AC}$ ۽ $\overline{BD}$ پور وچوٽ آهي $\overline{AD}$ ۽ $\overline{BC}$ جي.

[هي مسئلو اڳ ۾ حل ٿيل آهي. پهريائين ٻن ٽڪنڊن کي يڪسان ثابت ڪريو ۽ پوءِ سڌيان 7 مطابق متبادل ڪندون برابر ڏيکاري ثابت ڪريو ته ليڪون پور وچوٽ آهن.]

3. ٽڪنڊي ΔABC جي ٻن پاسن $\overline{AB}$ ۽ $\overline{AC}$ جا وچان ٽٻڪا ترتيبوار D ۽ E آهن. جيڪڏهن $\overline{DE}$ کي ٽٻڪي F تائين اهڙي ريت وڌايو وڃي جو $\overline{EF}\cong\overline{DE}$. ثابت ڪريو ته $\overline{CF} \parallel \overline{AB}$ ۽ $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$



مليل: ΔABC ۾ ٻن پاسن $\overline{AB}$ ۽ $\overline{AC}$ جا وچان ٽبڪا ترتيبوار D ۽ E آهن. پاسي $\overline{DE}$ کي ٽبڪي F تائين اهڙي وڌايو آهي جيئن $\overline{EF} \cong \overline{DE}$

گھربل: $\overline{CF} \parallel \overline{AB}$ ۽ $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

ثابتي:

بيان	سبب
1. $\Delta ADE \leftrightarrow \Delta CEF$ ۾	i. ٻن ٽڪنڊن جي وچ ۾ 1-1 مطابقت آهي.
(i) $\overline{AE} \cong \overline{CE}$	(a) مليل (ٽبڪو E وچون ٽبڪو آهي.)
(ii) $\angle AED \cong \angle CEF$	(b) چوٽيءَ واريون مخالف ڪنڊون
(iii) $\overline{DE} \cong \overline{EF}$	(c) مليل
2. $\therefore \Delta AED \cong \Delta CEF$	ii. S.A.S ≅ S.A.S
3. تنهنڪري $\overline{CF} \cong \overline{AD} \cong \overline{BD}$ ۽ $\angle A \cong \angle ECF$	iii. ٽڪنڊن جي يڪسانيت جي لحاظ کان
4. پر $\angle A$ ۽ $\angle ECF$ متبادل ڪنڊون آهن $\overline{CF} \parallel \overline{AB}$ ۽ $\overline{CF} \parallel \overline{BD}$	iv. ستيان 7 موجب
5. $\overline{CF} \parallel \overline{BD}$ ۽ $\overline{CF} \parallel \overline{BD}$	v. مٿي ثابت ڪيو آهي.
6. تنهنڪري BCFD هڪ پور وچوٽ پاسو چوڪنبو آهي.	vi. چوڪنڊي جنِ مخالف پاسن جو هڪ جوڙو پور وچوٽ ۽ يڪسان آهي ته اهو پور وچوٽ پاسو چوڪنڊو سڏبو.
7. $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$ يا $\therefore \overline{DE} \parallel \overline{BC}$	vii. پور وچوٽ پاسي چوڪنڊي جا آمهون سامهون وارا پاسا پور وچوٽ آهن.
8. يا $\overline{CF} \parallel \overline{AB}$ ۽ $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$	viii. جيئن مٿي ثابت ڪيو آهي.

Q.E.D

4. ثابت ڪريو ته پور وچوٽ پاسي چوڪنڊي جون آمهون سامهون واريون ڪنڊون يڪسان آهن.

[اشارو: ستيان 8 جو شامل نتيجو Cor.2 استعمال ڪريو يعني $m\angle A + m\angle B = 180^\circ$]

5. ٽپور پاسي ٽڪنڊي ۾ هرهڪ ڪنڊ جي ماپ ڪيتري ٿئي ٿي؟

6. ڪنهن ٽڪنڊي جي هڪ ڪنڊ، باقي ٻن ڪنڊن جي جوڙ جي برابر ڪهڙي صورت ۾ ٿي سگهي ٿي؟

[اشارو: ستيان 9 ۾ شامل نتيجي 3 مطابق ٽڪنڊي جي باقي ٻن ڪنڊن جو جوڙ 90° آهي تنهنڪري ٽين ڪنڊ 90° جي آهي.]

7. ڪنهن به چوڪنڊي جي اندرين ڪنڊن جو جوڙ چار گونيون ڪنڊون ٿئي ٿو.

[اشارو: چوڪنڊي جو ڪوبه هڪ اُريب ناهيو. ستيان 9 جي استعمال سان ٻن ٽڪنڊن جي سڀني ڪنڊ جو جوڙ، 2 گونيون ڪنڊون + 2 گونيون ڪنڊون = 4 گونيون ڪنڊون آهي]

جائزي واري مشق 10

1. ثابت ٽيندڙ جاميٽري رياضي جي هڪ شاخ آهي. انهيءَ شاخ جو اهم ڪم ڇا آهي.
2. هيٺ ڏنل اصطلاحن جي باري ۾ اوهان ڇا ڄاڻو ٿا:
   (a) بنا وصف وارا اصطلاح (b) بنيادي مفروضا
   (c) سڌيان (d) اصول موضوع
   (e) اصول متعارف (f) شامل نتيجا
3. سببن (Reasoning) جون چار بنيادي خاصيتون بيان ڪريو.
4. (a) سڌيان 1 جو بيان لکو ۽ ان کي ثابت ڪريو.
   (b) ڪنهن به ليڪ جي هڪ ٽبڪي تي ليڪ جي ساڄي پاسي تي ٺهندڙ سمورين ڪنڊن جو جوڙ 2 ڳونيون ڪنڊون آهي. ثابت ڪريو.
5. (a) ثابت ڪريو، جيڪڏهن ٻه ليڪون هڪ ٻئي کي ڪپين ٿيون ته چوٽيءَ واريون آمهون سامهون واريون ڪنڊون پاڻ ۾ يڪسان ٿين ٿيون.
   (b) ٽه پور پاسي ٽڪنڊي ۾ ٽيئي ڪنڊون پاڻ ۾ يڪسان ٿين ٿيون.
6. (a) ڪنهن به ٽبڪي مان جيڪو ليڪ تي نه آهي، ان مان هڪ ۽ فقط هڪ عمود ان مليل ليڪ تي ڪاهي سگهجي ٿو.
   (b) جيڪڏهن ٻن پور وچوٽ ليڪن کي ڪا ڪپيندڙ ليڪ ڪپي ٿي ته ان سان ٺهندڙ متبادل ڪنڊن جا جوڙا پاڻ ۾ يڪسان ٿيندا.
7. (a) ڪنهن به ٽڪنڊي جي ٻاهرين ڪنڊ جي ماپ سندس غير پر وارين اندرين ڪنڊن جي ماپن جي جوڙ جي برابر ٿئي ٿي.
   (b) سڌيان 5 جو بيان لکو ۽ ان کي ثابت ڪريو.
8. (a) هيٺ بيان جملن کي غور سان پڙهي غلط يا درست قرار ڏيو.
   (i) جيڪڏهن ٻه ليڪون پاڻ ۾ هڪٻئي کي ڪپين ته چوٽيءَ واريون پر واريون ڪنڊون پاڻ ۾ يڪسان ٿين ٿيون.
   (ii) ڪنهن به هڪ ٽبڪي مان جيڪو ليڪ کان ٻاهر آهي، ان مان هڪ ۽ فقط هڪ ليڪ مليل ليڪ جي پور وچوٽ ڪڍي سگهجي ٿي.
   (iii) ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪنڊن جو جوڙ 180^o ٿي سگهي ٿو.
   (iv) جيڪڏهن ڪنهن ليڪ تي هڪ ٽبڪي مان هڪ شعاع ڪاهجي ته أن سان ٺهندڙ ٻه پر واريون ڪنڊون ڪامپليمينٽري ڪنڊون ٿين ٿيون.
   (v) هڪ ڳوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ سوڙهيون ڪنڊون ڪامپليمينٽري ڪنڊون ٿين ٿيون.

(ب) هيٺيان مناسب لفظن سان خال ڀريو

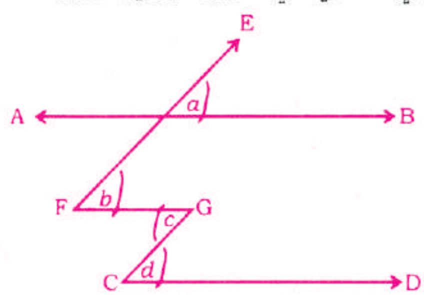
(i) ٽي غير هم ليڪ ٽپڪا هڪ __________ جو تعين ڪن ٿا

(ii) ٻه مختلف ٽپڪا هڪ __________ جو تعين ڪن ٿا.

(iii) هڪ ۽ فقط هڪ __________ ٺاهي سگهجي ٿو، هڪ ٽپڪي مان جيڪو ليڪ تي نه آهي

(iv) جيڪڏهن ڪا ليڪ، ٻن پور وچوٽ ليڪن کي ڪپي ٿي ته پوءِ ٺهندڙ هرهڪ جوڙو __________ ڪنڊن جو ۽ هرهڪ جوڙو __________ ڪنڊن جو پاڻ ۾ يڪسان ٿئي ٿو.

(v) ٽڪنڊي جي ٻاهرين ڪنڊ جي ماپ برابر آهي ٽڪنڊي جي اندرين غير پر وارين ڪنڊن جي __________.

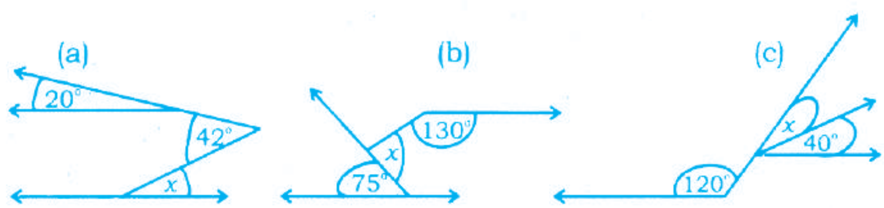


9. (i) سامهون ڏنل شڪل ۾

$m\angle a = m\angle b = m\angle c = m\angle d$

ته پور وچوٽ ليڪن جا چار جوڙا لکو

(ii) هيٺ ڏنل هرهڪ شڪل ۾ x سان ظاهر ٿيل ڪنڊ جي ماپ لکو.



خلاصو

- ثابت ٽيندڙ جاميٽري رياضيءَ جي اُها هڪ شاخ آهي جنهن ۾ جاميٽريءَ جي شڪلين سان واسطو رکندڙ بيانن کي حقيقي راين ۽ سببن سان ثابت ڪيو وڃي ٿو.
- سبب يا رايا هڪ طريقه ڪار آهي خيالن ۽ اظهارن جو جنهن سان ڪنهن به مسئلي بابت سوچي ويچاري ڪنهن خاص نتيجي يا فيصلي واري حد تي پهچجي ٿو.

ثابت ٽينڊرڊ جاميٽري

- روزمره جي زندگيءَ ۾ اسين پنهنجي مشاهدي يا تجربي جي بنياد تي ڪي نتيجا حاصل ڪندا آهيون انهيءَ طرح مشاهدي ۽ تجربي جي بنياد تي عام نتيجن تي پهچڻ جي طريقي کي استقرائي طريقو (Inductive Reasoning) چيو وڃي ٿو.
- علم رياضيءَ جي سڀني شاخن ۾ خاص طور جاميٽريءَ ۾ استخراجي طريقو (Deductive Method) استعمال ٿئي ٿو. هن طريقي ۾ اسان عام بيانن يا نتيجن مان ڪنهن خاص بيان يا نتيجي تي پهچون ٿا استخراجي طريقي ۾ هميشه يقين جو عنصر موجود هوندو آهي، جيڪو پهريائين ثابت ٿيل بيان جو نتيجو هوندو آهي.

استخراجي طريقه ڪار ۾ بنيادي طور هيٺيان چار خاص عنصر مڃيا وڃن ٿا:

1. غير وصف وارا اصطلاح
2. وصف وارا اصطلاح
3. بنيادي مفروضا
4. خاص نتيجا يعني سڌيان

- بنيادي مفروضا ٻن قسمن جا ٿين ٿا. (i) اصول متعارف (ii) اصول موضوع
- اصول متعارف: هي أهي بنيادي مفروضا آهن جن جو تعلق عددن سان آهي.
- اصول موضوع: هي أهي بنيادي مفروضا آهن جن جو تعلق جاميٽريءَ جي شڪلين سان آهي.
- بنيادي اصطلاحن ۽ واسطيدار دعوائن جي سلسلي ۾ بحث جي لاءِ تجويزون ڏنيون وڃن ٿيون.
- مفروضو (Proposition) هڪ حقيقت آهي. ان جا ٽي نمونا آهن: (i) سڌيان (Theorem) (ii) شامل نتيجو (Problems) (iii) مسئلو (Rider)
- جاميٽريءَ جي ڪن مفروضن ۽ بنيادي تصورن جي مدد سان ڪارائتا نتيجا ڪڍيا وڃن ٿا جن کي سڌيان چيو وڃي ٿو.
- سڌيان جا ٻه حصا ٿين ٿا: پهريون حصو شرط (Hypothesis) ۽ ٻيو حصو شرط پوري ٿيڻ جو نتيجو (Conclusion) هوندو آهي.
- شامل نتيجو (Corollary): اِها ثابت ٿيل سڌيان جي سئين سڌي هڪ حقيقت هوندي آهي، جيڪا عملي ڪم سرانجام ڏيندي آهي.
- هڪسڌيان ٻئي جو اُبتڙ يعني عڪس سڏيو وڃي ٿو، اهو ان حالت ۾ جڏهن هڪ سڌيان جو پهريون حصو يعني شرط (Hypothesis) ٻئي سڌيان جو ٻيو حصو شرط پوري ٿيڻ جو نتيجو (Conclusion) بڻجي پوي ٿو.
- سڌيان جو عام اظهار: هن کي سڌيان جو عام بيان يا دعوي (Enconciation of the Theorem) چئبو آهي.
- مليل (Data): سڌيان جي عام بيان کي شڪل مطابق واضح ڪري لکبو آهي.
- گهربل (Required to prove): ٻڌايل شڪل مطابق سڌيان جي ٻئي حصي کي جنهن کي ثابت ڪرڻو هوندو آهي، اُهو واضح ڪري لکبو آهي.
- جوڙجڪ (Construction): ڪڏهن ڪڏهن سڌيان کي ثابت ڪرڻ لاءِ ڏاهيل شڪل ۾ مناسب واڌاري جي ضرورت هوندي آهي.
- ثابتي (Proof): سڌيان کي ثابت ڪرڻ لاءِ هي آخري قدم (Step) آهي. وصفن، موضوعن ۽ اڳ ۾ ثابت ٿيل نتيجن جي مدد سان منطقي سببن ذريعي بيان جو گهربل حصو ثابت ڪبو آهي. ٻه ڪالم ڏاهبا آهن. هڪ ۾ بيان ۽ ٻئي ۾ سبب ڄاڻائبا آهن.

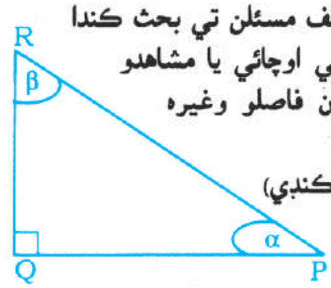
باب
11
ٽرگناميٽري

11.1 ٽرگناميٽري

11.1.1 ٽرگناميٽري جي وصف

لفظ ٽرگناميٽري يوناني ٻولي جو هڪ لفظ آهي جنهن جي معنيٰ ٽڪنڊن جي ماپ آهي. هيءُ رياضي جي هڪ اهم شاخ آهي. ٽرگناميٽري ۾ ٽڪنڊي جي پاسن ۽ ڪنڊن جي ماپن ۾ تعلق معلوم ڪيو ويندو آهي.

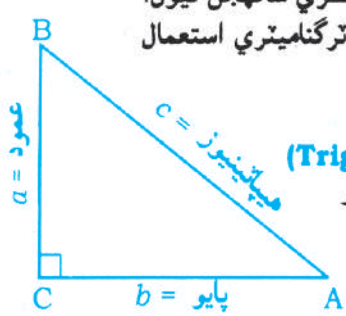
ٽرگناميٽري جهاز راني، نقشي سازي ۽ برقي انجنيئرنگ ۽ طبيعياتي سائنس جي گهڻن ئي شاخن ۾ اهم ڪردار ادا ڪري ٿي.



ٽرگناميٽري ۾ اسان ٽڪنڊن جي حل ۽ ان سان لاڳاپيل مختلف مسئلن تي بحث ڪندا آهيون، جيڪي ستوسنئون ماپ مثلاً ڪنهن ٿنڀي ۽ وڻ جي اوچائي يا مشاهدو ڪندڙ (Observer) جو بحري جهاز يا هوائي جهاز کان فاصلو وغيره معلوم ڪرڻ ۾ تمام گهڻو مددگار ٿيندا آهن.

هن باب ۾ اسان صرف ڪوني ڪنڊ ٽڪنڊي (يا صرف ڪوني ٽڪنڊي) کي بحث هيٺ آڻينداسين.

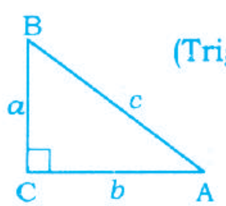
ٽڪنڊي جون ٽئي ڪنڊون ۽ ٽئي پاسا ٽڪنڊي جا جزا ٿيندا آهن، تنهن ڪري ٽڪنڊي جا ڇهه جزا ٿيندا آهن. جيڪڏهن ٽن جزن مان گهٽ ۾ گهٽ هڪ پاسي جي ماپ معلوم هجي ته بين جزن جون ماپون معلوم ڪري سگهجن ٿيون. ٽڪنڊي جي نامعلوم جزن جي ماپ معلوم ڪرڻ لاءِ اسان ٽرگناميٽري استعمال ڪندا آهيون.



11.1.2 سوڙهين ڪنڊن جون ٽرگناميٽري نسبتون
(Trigonometric Ratios of Acute Angles)

سامهون واري شڪل ۾ ABC هڪ ڪوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي، جنهن ۾ ڪنڊ C ڪوني ڪنڊ آهي. $\angle A$، $\angle B$ ۽ $\angle C$ جي سامهون وارن پاسن جون مقدارون ترتيبوار a، b ۽ c سان ظاهر ڪيون ويون آهن. يعني

$$m\,\overline{BC} = a,\ m\,\overline{CA} = b\ ,\ m\,\overline{AB} = c$$



ڪنهن ڪوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي سوڙهي ڪنڊ لاءِ ڪن ٻه ٻن پاسن جي نسبت کي ٽرگناميٽري جي نسبت جو تعلق (Trigonometric Ratio) سڏيو ويندو آهي. سوڙهي ڪنڊ لاءِ اسان وٽ ڇهه ممڪن نسبتون آهن. جن کي هيٺ بيان ڪيو ويو آهي.

نوٽ: اختصار خاطر اسان پاسن جي ماپ جي بدلي صرف پاسو لکنداسين.

گوني ٽڪنڊي ACB جي ڪنڊ A جي مقدار لاءِ

(i) Sine of $m\angle A$ = Sin $(m\angle A)$ $= \dfrac{\text{ڪنڊ A جي سامهون وارو پاسو}}{\text{هيپاٽينيوز}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{AB}} = \dfrac{a}{c}$

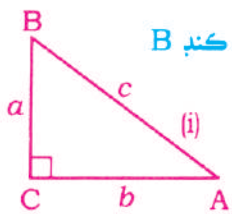
(ii) Cosine of $m\angle A$ = Cos $(m\angle A)$ $= \dfrac{\text{ڪنڊ A جي پر وارو پاسو}}{\text{هيپاٽينيوز}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}} = \dfrac{b}{c}$

(iii) Tangent of $m\angle A$ = Tan$(m\angle A)$ $= \dfrac{\text{ڪنڊ A جي سامهون وارو پاسو}}{\text{ڪنڊ A جي پر وارو پاسو}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{AC}} = \dfrac{a}{b}$

(iv) Cotangent of $m\angle A$ = Cot $(m\angle A)$ $= \dfrac{\text{ڪنڊ A جي پر وارو پاسو}}{\text{ڪنڊ A جي سامهون وارو پاسو}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{BC}} = \dfrac{b}{a}$

(v) Secant of $m\angle A$ = Sec $(m\angle A)$ $= \dfrac{\text{هيپاٽينيوز}}{\text{ڪنڊ A جي پر وارو پاسو}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}} = \dfrac{c}{b}$

(vi) Cosecant of $m\angle A$ = Cosec $m\angle A$ $= \dfrac{\text{هيپاٽينيوز}}{\text{ڪنڊ A جي سامهون وارو پاسو}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}} = \dfrac{c}{a}$



عملي ڪم: بلڪل ساڳيءَ طرح اسان ٽڪنڊي جي ٻي سوڙهي ڪنڊ B جي مقدار لاءِ ڇهه ٽرگناميٽري نسبتون معلوم ڪري سگهون ٿا.

(i) Sine of $m\angle B$ = Sin $(m\angle B)$ $= \dfrac{\angle B \text{ جي سامهون وارو پاسو}}{\text{هيپاٽينيوز}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}} = \underline{\qquad}$

(ii) Cosine of $m\angle B$ = Cos $(m\angle B)$ $= \dfrac{\angle B \text{ جي پر وارو پاسو}}{\text{هيپاٽينيوز}} = \underline{\qquad} = \dfrac{a}{c}$

(iii) Tangent of $m\angle B$ = Tan$(m\angle B)$ $= \dfrac{\angle B \text{ جي سامهون وارو پاسو}}{\underline{\qquad}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{BC}} = \dfrac{b}{a}$

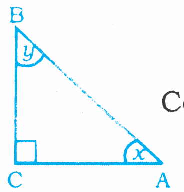
(iv) Cotangent of $m\angle B$ = Cot $(m\angle B)$ $= \dfrac{\underline{\qquad}}{\angle B \text{ جي سامهون وارو پاسو}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{AC}} = \underline{\qquad}$

(v) Secant of $m\angle B$ = Sec $(m\angle B)$ $= \underline{\qquad} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}} = \dfrac{c}{a}$

(vi) Cosecant of $m\angle B$ = Cosec $(m\angle B)$ $= \dfrac{\text{هيپاٽينيوز}}{\angle B \text{ جي سامهون وارو پاسو}} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

نوٽ: Cosec θ کي Csc θ سان بہ ظاهر ڪِري سگهجي ٿو.

باب 11 ٽرگناميٽري



مٿين نسبتن کي ڏسندي معلوم ٿيو ته:

(i) $\text{Sin } m\angle A = \dfrac{1}{\text{Cosec } m\angle A}$ ؛ $\text{Cosec } m\angle B = \dfrac{1}{\text{Sin } m\angle B}$

(ii) $\text{Cos } m\angle A = \dfrac{1}{\text{Sec } m\angle A}$ ؛ $\text{Sec } m\angle B = \dfrac{1}{\text{Cos } m\angle B}$

(iii) $\text{Tan } m\angle A = \dfrac{1}{\text{Cot } m\angle A}$ ؛ $\text{Cot } m\angle B = \dfrac{1}{\text{Tan } m\angle B}$

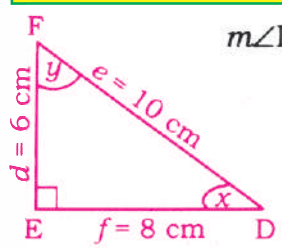
اهو به معلوم ٿيو ته:

(a) $\dfrac{\text{Sin } m\angle A}{\text{Cos } m\angle A} = \text{Tan } m\angle A$ يا $\dfrac{\text{Sin } x}{\text{Cos } x} = \text{Tan } x$

(b) $\dfrac{\text{Cos } m\angle B}{\text{Sin } m\angle B} = \text{Cot } m\angle B$ يا $\dfrac{\text{Cos } y}{\text{Sin } y} = \text{Cot } y$

مٿين نتيجن مان معلوم ٿيو ته:

(iv)	$\text{Sin } m\angle A \ \text{Cosec } m\angle A = 1$	يا	$\text{Sin } x \ \text{Cosec } x = 1$
(v)	$\text{Cos } m\angle A \ \text{Sec } m\angle A = 1$	يا	$\text{Cos } x \ \text{Sec } x = 1$
(vi)	$\text{Tan } m\angle A \ \text{Cot } m\angle A = 1$	يا	$\text{Tan } x \ \text{Cot } x = 1$



مثال 1. سامهون ڏيکاريل ڳوني ڪنڊ ٽڪنڊي DEF ۾ $m\angle D = x$ ۽ $m\angle F = y$ ٻنهي سوڙهين ڪنڊن جي ماپن لاءِ سمورين ٽرگناميٽري نسبتون لهو.

حل:

(i) $\text{Sin } x = \dfrac{\angle X \text{ جو سامهون وارو پاسو}}{\text{هيپاٽينيوز}} = \dfrac{m\overline{EF}}{m\overline{DF}} = \dfrac{d}{e} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

(ii) $\text{Cos } x = \dfrac{\angle X \text{ جو پر وارو پاسو}}{\text{هيپاٽينيوز}} = \dfrac{m\overline{DE}}{m\overline{DF}} = \dfrac{f}{e} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

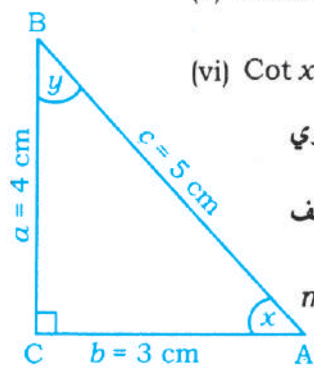
(iii) $\text{Tan } x = \dfrac{\angle X \text{ جو سامهون وارو پاسو}}{\angle X \text{ جو پر وارو پاسو}} = \dfrac{m\overline{EF}}{m\overline{DE}} = \dfrac{d}{f} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

(iv) $\text{Cosec}\ x = \dfrac{1}{\text{Sin}\ x} = \dfrac{e}{d} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$

(v) $\text{Sec}\ x = \dfrac{1}{\text{Cos}\ x} = \dfrac{e}{f} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$

(vi) $\text{Cot}\ x = \dfrac{1}{\text{Tan}\ x} = \dfrac{f}{d} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

نوٽ: شاگردن کي گھرجي تہ y جي لاءِ سموريون ٽرگناميٽري نسبتون پاڻ لھن.



مثال 2. سامھون ڏنل ڳوني ڪنڊ ٽڪنڊي ABC لاءِ مختلف ٽرگناميٽري جي نسبتن جي وچ ۾ ھيٺين تعلقن جي تصديق ڪريو: $m\angle C = 90^\circ, m\angle A = x, m\angle B = y$

$m\overline{AC} = 3$ cm, $m\overline{BC} = 4$ cm, $m\overline{AB} = 5$ cm

(i) $\dfrac{\text{Cos}\ x}{\text{Sin}\ x} = \text{Cot}\ x$ **(ii)** $\dfrac{\text{Sin}\ y}{\text{Cos}\ y} = \text{Tan}\ y$ **(iii)** $\text{Tan}\ x\ \text{Cot}\ x = 1$

حل: **(i)** $\dfrac{\text{Cos}\ x}{\text{Sin}\ x} = \text{Cot}\ x$

ھاٽي کابي پاسي جي مقدار:

$$\text{L.H.S} = \frac{\text{Cos}\ x}{\text{Sin}\ x} = \frac{\text{ھيپاٽينيوز / } \angle x \text{ جو پر وارو پاسو}}{\text{ھيپاٽينيوز / } \angle x \text{ جو سامھون وارو پاسو}} = \frac{(m\overline{AC}/m\overline{AB})}{(m\overline{BC}/m\overline{AB})}$$

$$= \frac{b/c}{a/c} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{\cancel{5}_1} \times \frac{\cancel{5}^1}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{....I}$$

۽ ھاٽي ساڄي پاسي جي مقدار:

$$\text{R.H.S} = \text{Cot}\ x = \frac{\angle x \text{ جو پر وارو پاسو}}{\angle x \text{ جو سامھون وارو پاسو}} = \frac{m\ \overline{AC}}{m\ \overline{BC}} = \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \quad \text{....II}$$

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S} \Rightarrow \frac{\text{Cos}\ x}{\text{Sin}\ x} = \text{Cot}\ x \quad \text{(I ۽ II جي پيٽ)}$$

(ii) $\dfrac{\text{Sin}\ y}{\text{Cos}\ y} = \text{Tan}\ y$

$$\text{L.H.S} = \frac{\text{Sin}\ y}{\text{Cos}\ y} = \frac{\text{ھيپاٽينيوز / } \angle y \text{ جو سامھون وارو پاسو}}{\text{ھيپاٽينيوز / } \angle y \text{ جو پر وارو پاسو}} = \frac{(m\overline{AC}/m\overline{AB})}{(m\overline{BC}/m\overline{AB})}$$

$$= \frac{b/c}{a/c} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{\cancel{5}_1} \times \frac{\cancel{5}^1}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{...III}$$

$$\text{R.H.S} = \text{Tan } y = \frac{\angle y \text{ جو سامهون وارو پاسو}}{\angle y \text{ جو پر وارو پاسو}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{BC}} = \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \quad \text{....IV}$$

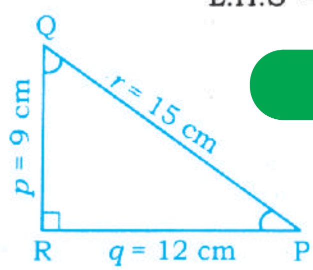
$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S} \Rightarrow \frac{\text{Sin } y}{\text{Cos } y} = \text{Tan } y$$ (III ۽ IV جي ڀيٽ سان)

(iii) $\text{Tan } x \,\text{Cot } x = 1$

$$\text{L.H.S} = \text{Tan } x \;\text{Cot } x = \frac{\angle x \text{ جو سامهون وارو پاسو}}{\angle x \text{ جو پر وارو پاسو}} \times \frac{\angle x \text{ جو پر وارو پاسو}}{\angle x \text{ جو سامهون وارو پاسو}}$$

$$= \frac{m\overline{BC}}{m\overline{AC}} \times \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{3}_{1}} \times \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{4}_{1}} = \frac{1}{1} = 1$$

تنهن ڪري $\text{L.H.S} = \text{R.H.S.} \Rightarrow \text{Tan } x \,.\, \text{Cot } x = 1$



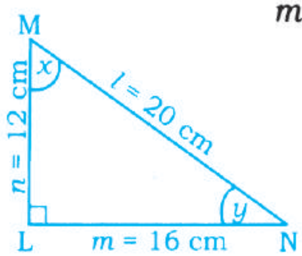
مشق 11.1

1. سامهون ڏنل گوني ڪنڊ ٽڪنڊي PQR ۾ ٻنهي

مطلب $m\angle P$ ۽ $m\angle Q$

سوڙهين ڪنڊن جون ٽرگناميٽري نسبتون معلوم ڪريو.

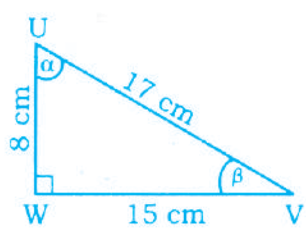
$m\overline{PQ} = 15$ cm, $m\overline{PR} = 12$ cm, $m\overline{QR} = 9$ cm



2. سامهون ڏنل گوني ڪنڊ ٽڪنڊي LMN لاءِ هيٺين نسبتن جو ملهه لهو:

(i) Sin x	(ii) Cos y	(iii) Tan x
(iv) Cosec y	(v) Sec x	(vi) Cot y
(vii) Cos x	(viii) Sin y	(ix) Cot x
(x) Sec y	(xi) Cosec x	(xii) Tan y

ٻڌايو تہ انهن نسبتن مان ڪهڙيون هڪ ٻئي جي برابر آهن.



3. سامهون ڏنل گوني ڪنڊ ٽڪنڊي UVW لاءِ هيٺين جي تصديق ڪريو.

$m\angle W = 90^\circ$, $m\angle U = \alpha$, $m\angle V = \beta$

(i) $\text{Sin }\alpha . \text{Cosec }\alpha = 1$ (ii) $\text{Sec }\beta . \text{Cos}\beta = 1$ (iii) $\text{Tan }\alpha . \text{Cot }\alpha = 1$

(iv) $\frac{\text{Sin } \beta}{\text{Cos } \beta} = \text{Tan } \beta$ (v) $\frac{\text{Cos } \alpha}{\text{Sin } \alpha} = \text{Cot } \alpha$ (vi) $\text{Cos } \alpha . \text{Cosec } \alpha = \text{Cot } \alpha$

(vii) $\frac{\text{Sec } \beta}{\text{Cosec } \beta} = \text{Tan } \beta$ (viii) $\frac{\text{Tan } \alpha}{\text{Cot } \beta} = 1$

4. گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ABC ۾ $\angle C$ گوني ڪنڊ آهي جيڪڏهن $m\angle A = x$ ۽ $m\angle B = y$ ته هيٺيان ثابت ڪريو:

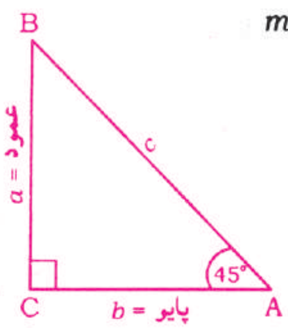
(i) $\text{Sin } x = \text{Cos } y$ (ii) $\text{Tan } y = \text{Cot } x$
(iii) $\text{Sec } x = \text{Cosec } y$ (iv) $\text{Cos } x = \text{Sin } y$
(v) $\text{Cot } y = \text{Tan } x$ (vi) $\text{Cosec } x = \text{Sec } y$

11.2 سوڙهين ڪنڊن جون ٽرگناميٽري نسبتون

11.2.1 $30°$، $45°$ ۽ $60°$ جي ڪنڊن جي ٽرگناميٽري نسبتن جون قيمتون لهڻ

(a) $45°$ جي ڪنڊ جي ٽرگناميٽري نسبتن جو ملهه لهڻ

سامهون شڪل ۾ ABC هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي جنهن ۾ $m\angle C = 90°$ ۽ $m\angle A = 45°$ اسان کي خبر آهي ته گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ سوڙهيون ڪنڊون هڪٻئي جون ڪامپليمينٽري ڪنڊون ٿينديون آهن.



تنهن ڪري $m\angle B = 90° - m\angle A = 90° - 45° = 45°$

اسان کي خبر آهي ته جيڪڏهن ٽڪنڊي جي ٻن ڪنڊن جون مقدارون پاڻ ۾ برابر هجن ته انهن ٻنهي ڪنڊن جي سامهون وارن پاسن جون مقدارون به پاڻ ۾ برابر ٿينديون آهن.

جيئن ته $m\angle A = m\angle B = 45°$

تنهن ڪري $m\overline{BC} = m\overline{AC}$ يا $a = b$

(يعني عمود = پايو)

فيثا غورث (Pythagoras) سڌيان موجب

(هيپاٽينيوز)^2 = (پايو)^2 + (عمود)^2

تنهنڪري

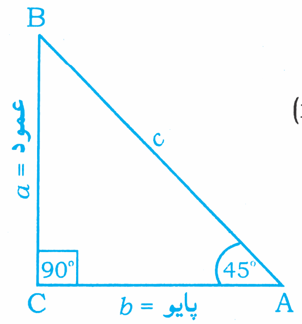
$c^2 = a^2 + b^2$ يا

$c^2 = b^2 + b^2 = 2b^2$ $(\because a = b)$ يا

$(c)^2 = (\sqrt{2b})^2$, i.e., $c = \sqrt{2}\ b$.

باب 11 ٽرگناميٽري

متي ڏيکاريل گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي پاسن جي ماپ جي لحاظ کان ٽرگناميٽريءَ جون نسبتون هيٺين ريت ٿينديون:



(i) $\text{Sin } 45^\circ = \text{Sin } m\angle A = \dfrac{\angle A \text{ جو سامهون وارو پاسو}}{\text{هيپاٽينيوز}} = \dfrac{a}{c}$

$= \dfrac{b}{\sqrt{2}\,b} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

يا $\text{Sin } 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\text{Cos } 45^\circ = \text{Cos } m\angle A = \dfrac{\angle A \text{ جو پر وارو پاسو}}{\text{هيپاٽينيوز}} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{b}{\sqrt{2}\,b} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

يا $\text{Cos } 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(iii) $\text{Tan } 45^\circ = \text{Tan } m\angle A = \dfrac{\angle A \text{ جو سامهون وارو پاسو}}{\angle A \text{ جو پر وارو پاسو}} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{b} = 1$ يا $\text{Tan } 45^\circ = 1$

(iv) $\text{Cot } 45^\circ = \text{Cot } m\angle A = \dfrac{\angle A \text{ جو پر وارو پاسو}}{\angle A \text{ جو سامهون وارو پاسو}} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{b}{b} = 1$ يا $\text{Cot } 45^\circ = 1$

(v) $\text{Sec } 45^\circ = \text{Sec } m\angle A = \dfrac{\text{هيپاٽينيوز}}{\angle A \text{ جو پر وارو پاسو}} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\sqrt{2}\,b}{b} = \sqrt{2}$

يا $\text{Sec } 45^\circ = \sqrt{2}$

(vi) $\text{Cosec } m\angle A = \dfrac{\text{هيپاٽينيوز}}{\angle A \text{ جو سامهون وارو پاسو}} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\sqrt{2}\,b}{b} = \sqrt{2}$

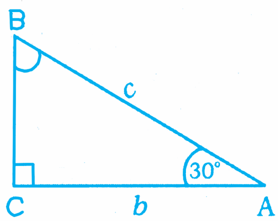
يا $\text{Cosec } 45^\circ = \sqrt{2}$

ٿنهنڪري

$\text{Sin } 45^\circ$	$\text{Cos } 45^\circ$	$\text{Tan } 45^\circ$	$\text{Cot } 45^\circ$	$\text{Sec } 45^\circ$	$\text{Cosec } 45^\circ$
$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

(b) 30° جي ڪنڊ جي ٽرگناميٽري نسبتن جي قيمت معلوم ڪرڻ

سامهون شڪل ۾ ٽڪنڊو ABC هڪ ڳوني ٽڪنڊو آهي، جنهن ۾



$m\angle C = 90^\circ$ ۽ $m\angle A = 30^\circ$

سوڙهيون ڪندون هڪ ٻئي جون ڪامپليمينٽري ٿين ٿيون.

يعني $\angle B = 90^\circ - m\angle A = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

جيئن تہ ڳوني ٽڪنڊي ۾ $m\angle A = 30^\circ$

اسان کي خبر آهي تہ ڳوني ٽڪنڊي جون 30° جي سوڙهي ڪنڊ لاءِ هيپاٽينيوز جي ماپ هن طرح ٿيندي: $c = 2a$

($\angle A$ جي سامهون واري پاسي جي ماپ $\times 2$ = هيپاٽينيوز جي ماپ)

فيثا غورث (Pythagoras Theorem) سڏيان موجب $c^2 = a^2 + b^2$

$$(2a)^2 = a^2 + b^2 \quad (\because c = 2a)$$

$$\Rightarrow 4a^2 - a^2 = b^2 \quad \Rightarrow 3a^2 = b^2 \quad \Rightarrow b = \sqrt{3}\,a$$

(i) $\text{Sin } 30^\circ = \dfrac{\angle 30^\circ \text{ جو سامهون وارو پاسو}}{\text{هيپاٽينيوز}} = \dfrac{m\,\overline{BC}}{m\,\overline{AB}} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

(ii) $\text{Cos } 30^\circ = \dfrac{\angle 30^\circ \text{ جو پرو وارو پاسو}}{\text{هيپاٽينيوز}} = \dfrac{m\,\overline{AC}}{m\,\overline{AB}} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\sqrt{3}\,a}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(iii) $\text{Tan } 30^\circ = \dfrac{\angle 30^\circ \text{ جو سامهون وارو پاسو}}{\angle 30^\circ \text{ جو پرو وارو پاسو}} = \dfrac{m\,\overline{BC}}{m\,\overline{AC}} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{\sqrt{3}\,a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

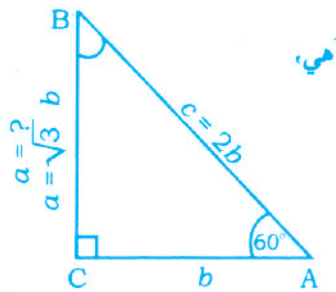
(iv) $\text{Cot } 30^\circ = \dfrac{\angle 30^\circ \text{ جو پرو وارو پاسو}}{\angle 30^\circ \text{ جو سامهون وارو پاسو}} = \dfrac{m\,\overline{AC}}{m\,\overline{BC}} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\sqrt{3}\,a}{a} = \sqrt{3}$

(v) $\text{Sec } 30^\circ = \dfrac{\text{هيپاٽينيوز}}{\angle 30^\circ \text{ جو پرو وارو پاسو}} = \dfrac{m\,\overline{AB}}{m\,\overline{AC}} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{2\,a}{\sqrt{3}\,a} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(vi) $\text{Cosec } 30^\circ = \dfrac{\text{هيپاٽينيوز}}{\angle 30^\circ \text{ جو سامهون وارو پاسو}} = \dfrac{m\,\overline{AB}}{m\,\overline{BC}} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\,a}{a} = 2$

تنهن ڪري

Sin 30°	Cos 30°	Tan 30°	Cot 30°	Sec 30°	Cosec 30°
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2



(c) 60° جي ڪنڊ جي ٽرگناميٽري نسبتن جو ملهه لهڻ

سامهون شڪل ۾ ٽڪنڊو ABC هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي،

جنهن ۾ $m\angle C = 90^\circ$ ۽ $m\angle A = 60^\circ$

تنهن ڪري

$$m\angle B = 90^\circ - m\angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$m\angle A = 60^\circ\ ,\ m\angle B = 30^\circ\ ,\ m\angle C = 90^\circ$$

اسان مٿي ڏسي چڪا آهيون تہ جيڪڏهن ڪنڊ ماپ جو مقدار 30° هجي ۽ ان جي سامهون واري پاسي جو مقدار b هجي تہ

هيپاٽينيوز جو مقدار $= c = 2b$

فيثاغورث (Pythagoras) سڌيان مطابق

$$(\text{عمود})^2 + (\text{پايو})^2 = (\text{هيپاٽينيوز})^2$$

$$c^2 = b^2 + a^2$$

$$(2b)^2 = b^2 + a^2 \quad (c = 2b \text{ رکڻ سان})$$

يا $4\ b^2 - b^2 = a^2$

يا $3\ b^2 = a^2$

يا $\sqrt{3b^2} = \sqrt{a^2}$

يا $a = \sqrt{3}\ b$

(i) $\text{Sin}\ m\angle A = \text{Sin}\ 60^\circ = \dfrac{\angle 60^\circ \text{ جو سامهون وارو پاسو}}{\text{هيپاٽينيوز}} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\sqrt{3}\ b}{2b} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(ii) $\text{Cos}\ m\angle A = \text{Cos}\ 60^\circ = \dfrac{\angle 60^\circ \text{ جو پر وارو پاسو}}{\text{هيپاٽينيوز}} = \dfrac{b}{2b} = \dfrac{1}{2}$

(iii) $\text{Tan}\ m\angle A = \text{Tan}\ 60^\circ = \dfrac{\angle 60^\circ \text{ جو سامهون وارو پاسو}}{\angle 60^\circ \text{ جو پر وارو پاسو}} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{3}\ b}{b} = \sqrt{3}$

(iv) $\text{Cot}\ m\angle A = \text{Cot}\ 60^\circ = \dfrac{\angle 60^\circ \text{ جو پر وارو پاسو}}{\angle 60^\circ \text{ جو سامهون وارو پاسو}} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{b}{\sqrt{3}\ b} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(v) $\text{Sec}\ m\angle A = \text{Sec}\ 60^\circ = \dfrac{\text{هيپاٽينيوز}}{\angle 60^\circ \text{ جو پر وارو پاسو}} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{2b}{b} = 2$

(vi) $\text{Cosec}\ m\angle A = \text{Cosec}\ 60^\circ = \dfrac{\text{هيپاٽينيوز}}{\angle 60^\circ \text{ جو سامهون وارو پاسو}} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\ b}{\sqrt{3}\ b} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

تنهن ڪري 60° واري ڪنڊ جي ٽرگناميٽري نسبتن جي ملهہ جي جدول آهي.

Sin 60°	Cos 60°	Tan 60°	Cot 60°	Sec 60°	Cosec 60°
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

نوٽ: گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ هڪ پاسي جي ماپ ڪيتري بہ هجي سندس ڪنهن بہ سوڙهي ڪنڊ جي ٽرگناميٽري نسبتن جي ماپ هميشہ ساڳي رهندي.

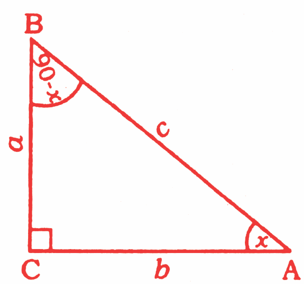
ڪنڊ / θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	Sec θ	Cosec θ
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

11.2.4 ڪامپليمينٽري ڪندن جي ٽرگناميٽري نسبتن جو پاڻ ۾ تعلق

اسان کي اڳ ۾ ان ڳالهہ جي ڄاڻ آهي تہ گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ABC جون سوڙهيون ڪندون ڪامپليمينٽري آهن يعني $m\angle C = 90^\circ$ جڏهن تہ $m\angle A + m\angle B = 90^\circ$

جيڪڏهن $m\angle A = x$

تہ $m\angle B = 90^\circ - m\angle A = 90^\circ - x$



سامهون ڏنل گوني ڪنڊ ٽڪنڊي تي غور ڪريو.

جيڪڏهن $x = 30^\circ$ تہ $m\angle B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

هاڻي اسان پنهي سوڙهين ڪندن $\angle A$ ۽ $\angle B$ جون ٽرگناميٽري نسبتون معلوم ڪريون ٿا.

تنهن ڪري:

$$\text{(i) } \sin x = \frac{a}{c} = \cos(90 - x) \Rightarrow \sin x = \cos(90 - x)$$

$$\text{(ii) } \cos x = \frac{b}{c} = \sin(90 - x) \Rightarrow \cos x = \sin(90 - x)$$

مٿي ڏنل جدول ۾ حاصل ٿيل نتيجن کي گڏ ڪري هيٺ لکي سگهجن ٿا

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \cos(90 - 30)^\circ \Rightarrow \sin 30^\circ = \cos 60^\circ$$

۽ $$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(90 - 30)^\circ \Rightarrow \cos 30^\circ = \sin 60^\circ$$

مٿئين بحث مطابق هيٺيان نتيجا نڪرن ٿا:

(a) ڪامپليمينٽري ڪنڊن جي مقدارن جي Sin ۽ Cos پاڻ ۾ برابر ٿيندا آهن.

ساڳي طرح

(b) ڪامپليمينٽري ڪنڊن جي مقدارن جي Tan ۽ Cot به پاڻ ۾ برابر ٿيندا آهن.

مثال:

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot(90-30)^\circ \Rightarrow \tan 30^\circ = \cot 60^\circ$$

$$\cot 30^\circ = \sqrt{3} = \tan(90-30)^\circ \Rightarrow \cot 30^\circ = \tan 60^\circ.$$

(c) ڪامپليمينٽري ڪنڊن جي مقدارن جا Sec ۽ Cosec به پاڻ ۾ برابر ٿيندا آهن.

مثال: $\sec x = \text{Cosec}(90-x)$ and $\text{Cosec } x = \sec(90-x)$.

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \text{Cosec}(90-30)^\circ \Rightarrow \sec 30^\circ = \text{Cosec } 60^\circ.$$

$$\sec 60^\circ = 2 = \text{Cosec}(90-60)^\circ \Rightarrow \sec 60^\circ = \text{Cosec } 30^\circ.$$

تنهن ڪري چئي سگهون ٿا

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot 60^\circ$$

$$\cot 30^\circ = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$$

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \text{Cosec } 60^\circ$$

$$\text{Cosec } 30^\circ = 2 = \sec 60^\circ$$

اهڙي ريت

$$\sin 40^\circ = \cos 50^\circ$$

$$\cos 70^\circ = \sin 20^\circ$$

$$\tan 10^\circ = \cot 80^\circ$$

$$\cot 20^\circ = \tan 70^\circ$$

$$\sec 50^\circ = \text{Cosec } 40^\circ$$

$$\text{Cosec } 20^\circ = \sec 70^\circ$$

مثال 1. هيٺين جو ملهه لهو:

(i) $\sin 30^\circ \times \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \times \sin 45^\circ$

(ii) $\text{Tan } 30^\circ \times \text{Cot } 60^\circ + \text{Cot } 30^\circ \times \text{Tan } 60^\circ$

(iii) $\text{Sec } 30^\circ \times \text{Cosec } 45^\circ + \text{Sec } 45^\circ \times \text{Cosec } 60^\circ$

حل (i):

(i) $\text{Sin } 30^\circ \times \text{Cos } 45^\circ + \text{Cos } 60^\circ \times \text{Sin } 45^\circ$

چارٽ ۾ ڏنل ملهه وجهڻ سان

$$\text{Sin } 30^\circ \times \text{Cos } 45^\circ + \text{Cos } 60^\circ \times \text{Sin } 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\cancel{2}}{\underset{1}{\cancel{2}}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(ii) $\text{Tan } 30^\circ \times \text{Cot } 60^\circ + \text{Cot } 30^\circ \times \text{Tan } 60^\circ$

(ii) اسان کي خبر آهي تہ:

$$\text{Tan } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ Tan } 60^\circ = \sqrt{3}, \text{ Cot } 30^\circ = \sqrt{3}, \text{ Cot } 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3 \times 3}} + \sqrt{3 \times 3}$$

تنهن ڪري

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{1} = \frac{1+9}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} = 3.333$$

(iii) $\text{Sec } 30^\circ \times \text{Cosec } 45^\circ + \text{Sec } 45^\circ \times \text{Cosec } 60^\circ$

(iii) جيئن تہ

$$\text{Sec } 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \text{Cosec } 60^\circ, \text{ Cosec } 45^\circ = \sqrt{2} = \text{Sec } 45^\circ.$$

تنهن ڪري

$$\text{Sec } 30^\circ \times \text{Cosec } 45^\circ + \text{Sec } 45^\circ \times \text{Cosec } 60^\circ$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{1} = \frac{2 \times 2}{\sqrt{3 \times 3}} + \frac{\sqrt{2 \times 2}}{1}$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{2}{1} = \frac{4+6}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} = 3.333$$

مثال 2. معلوم ڪريو: (a) x جو ملهه جڏهن $\text{Sin } x = \frac{1}{2}$

(b) y جو ملهه جڏهن $\text{Tan } y = 1$

حل (a): اسان کي ڄاڻ آهي تہ $\text{Sin } 30^\circ = \frac{1}{2}$ [جدول جي مطابق]

پر هتي $\text{Sin } x = \frac{1}{2}$ [سوال ۾ ڏنل معلومات مطابق]

تنهن ڪري $\text{Sin } x = \text{Sin } 30^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$

(b) اسان کي اها به ڄاڻ آهي ته: $\text{Tan } 45^\circ = 1$ [جدول جي مطابق]

ٴ $\text{Tan } y = 1 \Rightarrow \text{Tan } y = \text{Tan } 45^\circ \Rightarrow y = 45^\circ$ [ڏنل آهي]

مشق 11.2

1. x جو ملهه جڏهن $\text{Cos } x$ جو ملهه آهي:

(i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{1}{2}$

2. y جو ملهه لهو جڏهن $\text{Tan } y$ جو ملهه آهي:

(i) $\sqrt{3}$ (ii) 1 (iii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. $\angle A$ جو ملهه لهو جڏهن $\text{Cosec } m\angle A$ آهي.

(i) $\frac{2}{1}$ (ii) $\sqrt{2}$ (iii) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

4. هيٺين جو ملهه لهو.

(i) $\text{Sin } 30^\circ \times \text{Sin } 60^\circ + \text{Cos } 30^\circ \times \text{Cos } 60^\circ$

(ii) $\text{Sec } 30^\circ \times \text{Cosec } 60^\circ + \text{Tan } 60^\circ \times \text{Cot } 30^\circ$

(iii) $\text{Cos } 30^\circ \times \text{Sin } 30^\circ + \text{Cosec } 30^\circ \times \text{Sec } 30^\circ$

(iv) $\text{Sin } 60^\circ \times \text{Sin } 45^\circ - \text{Cos } 30^\circ \times \text{Cos } 45^\circ$

(v) $\text{Tan } 30^\circ \times \text{Cot } 60^\circ - \text{Sin } 45^\circ \times \text{Cos } 45^\circ$

(vi) $\text{Sec } 45^\circ \times \text{Cosec } 45^\circ + \text{Sec } 30^\circ \times \text{Cosec } 60^\circ$

(vii) $\text{Cot } 60^\circ \times \text{Sec } 30^\circ - \text{Cosec } 60^\circ \times \text{Tan } 30^\circ$

5. هيٺ ڏنل مساواتن مان هر هڪ لاءِ x جو ملهه لهو.

(i) $\text{Sin } 30^\circ = \text{Cos } x$ (ii) $\text{Tan } 60^\circ = \text{Cot } x$ (iii) $\text{Sec } x = \text{Cosec } 45^\circ$

(iv) $\text{Cos } x = \text{Sin } 70^\circ$ (v) $\text{Sec } 40^\circ = \text{Cosec } x$ (vi) $\text{Cot } x = \text{Tan } 55^\circ$

(vii) $\text{Cosec } 10^\circ = \text{Sec } x$ (viii) $\text{Tan } x = \text{Cot } 65^\circ$ (ix) $\text{Sin } x = \text{Cos } 35^\circ$

6. هيٺيان خال پريو.

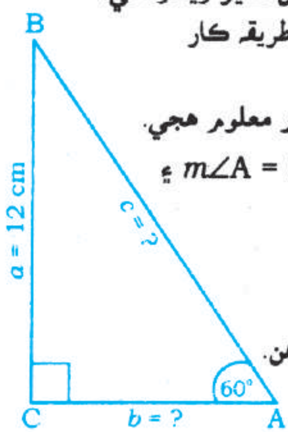
(i) $\text{Sin } 35^\circ = \text{Cos}$ ____ (ii) $\text{Tan } 65^\circ = \text{Cot}$ ____ (iii) $\text{Sec } 20^\circ = \text{Cosec}$ ____

(iv) $\text{Cot } 53^\circ = \text{Tan}$ ____ (v) $\text{Cos } 56^\circ = \text{Sin}$ ____ (vi) $\text{Cosec } 75^\circ = \text{Sec}$ ____

11.2.5 ٽرگناميٽري نسبتن جي استعمال سان گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جو حل

اسان کي خبر آهي ته ٽڪنڊي جا ڪل ڇهه جزا ٿيندا آهن. جيڪڏهن انهن مان ڪي به ٽي جزا جن ۾ گهٽ ۾ گهٽ هڪ پاسي، جي مقدار جي خبر هجي ته باقي بين جزن جون مقدارون معلوم ڪري سگهجن ٿيون. اهڙيءَ ريت ٽڪنڊي جي نامعلوم جزن کي معلوم ڪرڻ جي طريقه ڪار کي ”ٽڪنڊي جو حل“ چوندا آهن.

هاڻي اسان اهو سکنداسين ته گوني ڪنڊ ٽڪنڊي کي ڪيئن حل ڪيو ويندو آهي.



هيٺ ڏنل مثالن جي مدد سان گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي حل جي طريقه ڪار جي وضاحت ڪئي ٿي وڃي.

پهرين صورت: جڏهن هڪ پاسي ۽ هڪ سوڙهي ڪنڊ جو مقدار معلوم هجي.

مثال 1. ΔABC حل ڪريو جڏهن ته $m\angle C = 90^\circ$ ، $m\angle A = 60^\circ$ ۽ ڪنڊ A جو سامهون وارو پاسو 12 س.م آهي.

حل: جيئن ته $m\angle C = 90^\circ$ ، $m\angle A = 60^\circ$

۽ $a = 12\text{ cm}$

نامعلوم جزا $m\angle B = ?$ ، $b = ?$ ۽ $c = ?$ معلوم ڪرڻا آهن.

اسان کي خبر آهي ته گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جون سوڙهيون ڪنڊون ڪمپليمينٽري ٿينديون آهن.

$$m\angle B = 90^\circ - m\angle A\ 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

هتي

$$\text{Tan } m\angle A = \text{Tan } 60^\circ = \frac{\text{جو سامهون وارو پاسو } \angle A}{\text{جو پر وارو پاسو } \angle A} = \frac{a}{b} = \frac{12}{b}$$

يا

$$\sqrt{3} = \frac{12}{b} \Rightarrow b = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow b = 4 \quad 3 = 4 \times 1.732 = 6.928 = 6.9\text{ cm}$$

تنهن ڪري

$$\text{Sin m } \angle A = \text{Sin } 60^\circ = \frac{a}{c} = \frac{12}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12}{c} \quad \Rightarrow c\sqrt{3} = 12 \times 2$$

يعني

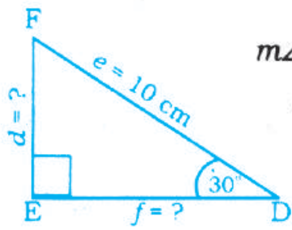
$$\Rightarrow c = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{24 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3} = 8 \times 1.732 = 13.856 = 13.8$$

تنهن ڪري $m\angle B = 60^\circ, m\overline{AC} = 6.9\text{ cm}, m\overline{AB} = 13.8\text{ cm}$

ٻي صورت: جڏهن هيپاٽينيوز ۽ هڪ ڳوني ڪنڊ جو مقدار ڏنل هجي.

مثال 2. ڳوني ڪنڊ ٽڪنڊي DEF ڪي حل ڪريو جنهن ۾

هيپاٽينيوز $m\overline{DF} = 10$ cm ،$m\angle D = 30^\circ$ ،$m\angle E = 90^\circ$



حل: اسان کي ? = $m\overline{EF}$ ، ? = $m\overline{DF}$ ۽ ? = $m\angle F$ جوملهه لهڻو آهي.

اسان کي معلوم آهي ته ڳوني ڪنڊ ٽڪنڊي

DEF ۾ $m\angle E = 90^\circ$ ،$m\angle D = 30^\circ$ ۽ هيپاٽينيوز $m\overline{DF} = 10$ cm

اسان ڄاڻون ٿا ته: $\frac{d}{10} = \frac{d}{e} = \frac{\text{جو سامهون وارو پاسو } \angle D}{\text{هيپاٽينيوز}} = \text{Sin } m\angle D = \text{Sin } 30^\circ$

تنهن ڪري $\text{Sin } 30^\circ = \frac{d}{10}$

$$\frac{1}{2} = \frac{d}{10} \Rightarrow d = 5 \text{ cm}$$

جيئن ته $\frac{f}{e} = \text{Cos } 30^\circ \quad \frac{f}{e} = \text{Cos } m\angle D \Rightarrow$

يا $\Rightarrow \frac{f}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow f = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} = 5 \times 1.732 = 8.660$ cm

(ڪامپليمينٽري ڪنڊون) $m\angle D + m\angle F = 90^\circ$

تنهن ڪري $m\angle F = 90^\circ - m\angle D = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

مطلب ته ΔDEF جو حل آهي: $m\angle F = 60^\circ,\ m\overline{DE} = 8.7$ cm , $m\overline{EF} = 5$ cm

ٽين صورت: جڏهن ٻن پاسن جي ماپ ڏنل هجي

مثال 3. ڳوني ڪنڊ ٽڪنڊي PQR کي حل ڪريو جنهن ۾

$m\angle Q = 90^\circ$ ، عمود $4\sqrt{3}$ سينٽي ميٽر ۽ پايو 4 سينٽي ميٽر آهي.

حل: ڳوني ڪنڊ ٽڪنڊي PQR ۾ $m\angle Q = 90^\circ$,

$m\overline{PQ} = 4$ cm, $m\overline{QR} = 4\sqrt{3}$

اسان کي معلوم ڪرڻا آهن:

$m\angle P = ?,\ m\angle R = ?,\ m\overline{PR} = ?$

فيثاغورث (Pythagoras) سڌيان جي مطابق:

$(\text{عمود})^2 + (\text{بنياد})^2 = (\text{هيپاٽينيوز})^2$

$$q^2 = r^2 + p^2$$
$$(q)^2 = (4)^2 + (4\sqrt{3})^2$$
$$= 16 + 48 = 64$$

هيپاٽينيوز $= q = \sqrt{64} = 8\text{cm.} \quad \Rightarrow m\overline{PR} = 8 \text{ cm.}$

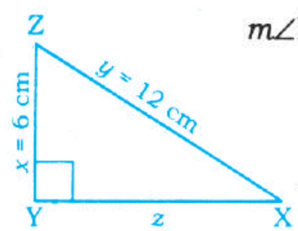
جيئن ته $\text{Tan } m\angle P = \dfrac{\angle P \text{ جو سامهون وارو پاسو}}{\angle P \text{ جو پر وارو پاسو}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\,.$

$$\therefore \quad m\angle P = 60^\circ$$
$$\Rightarrow \quad m\angle R = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

تنهن ڪري ڏنل ڳوني ڪند ٽڪنڊي PQR جو حل آهي.

هيپاٽينيوز = 8 سينٽي ميٽر، $m\angle P = 60^\circ$ ، $m\angle R = 30^\circ$

چوٿين صورت: جڏهن هڪ پاسو ۽ هيپاٽينيوز مليل آهن:



مثال 4. XYZ ڪي حل ڪريو جنهن پر $m\angle Y = 90^\circ$ ،
عمود = 6 سينٽي ميٽر ۽ هيپاٽينيوز 12 سينٽي ميٽر آهي.

حل: هتي اسان کي هيٺيان نامعلوم جزا لهڻا آهن:

$$m\angle X = ?,\ m\overline{YZ} = ?,\ m\angle Z = ?\ ,\ m\overline{XY} = ?$$

جيئن ته $\text{Sin } m\angle X = \dfrac{\angle P \text{ جو سامهون وارو پاسو}}{\text{هيپاٽينيوز}} = \dfrac{m\overline{YZ}}{m\overline{XZ}} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

$$\text{Sin } m\angle X = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad m\angle X = 30^\circ.$$
$$m\ \angle Y = 90^\circ - m\angle X = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

هاڻي $\dfrac{z}{y} = \text{Cos } m\angle X \quad \Rightarrow \dfrac{z}{12} = \text{Cos } 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow z = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}$$

مطلب ته ڳوني ڪند ٽڪنڊي XYZ جو حل هن ريت آهي:

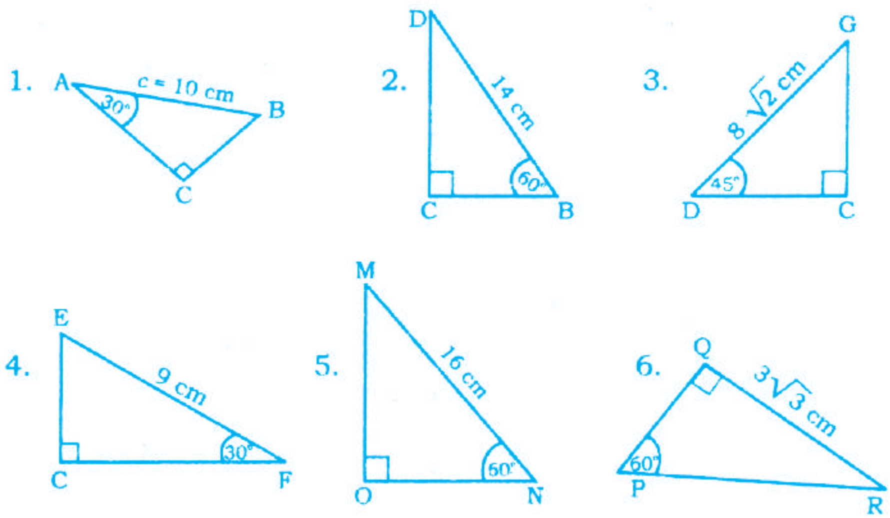
$$m\angle X = 30^\circ,\ m\angle Z = 60^\circ\ ,\ m\overline{XY} = 6\sqrt{3}\text{ cm}\ .$$

مشق 11.3

A. هيٺين گوني ڪنڊ ٽڪنڊن کي حل ڪريو.

1. ΔABC, $m\angle C = 90^\circ$, $m\angle A = 30^\circ$, $m\overline{BC} = 3\text{cm}$ (عمود)
2. ΔDEF, $m\angle E = 90^\circ$, $m\angle D = 60^\circ$., $m\overline{DE} = 4\text{cm}$ (پايو)
3. ΔLMN, $m\angle M = 90^\circ$, $m\angle N = 45^\circ$, $m\overline{ML} = 8\text{cm}$ (عمود)

B. هيٺ ڏنل گوني ڪنڊ ٽڪنڊن ۾ نامعلوم جزن جو ملهه معلوم ڪريو.



C. هيٺ ڏنل گوني ڪنڊ ٽڪنڊن کي حل ڪريو.

1. ΔLMN, $m\angle M=90^\circ$, $l = 4$ cm, $n = 4\sqrt{3}$
2. ΔPQR, $m\angle Q=90^\circ$, $p = 6\sqrt{3}$ cm, $r = 6$ cm
3. ΔXYZ, $m\angle Y=90^\circ$, $x = z = 7$ cm.

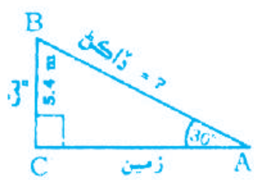
D. هيٺ ڏنل گوني ڪنڊ ٽڪنڊن کي حل ڪريو.

1. ΔACB, $m\angle C = 90^\circ$, $a = 5$ cm, $c = 10$ cm
2. ΔDEF, $m\angle F = 90^\circ$, $d = 7\sqrt{3}$ cm, $f = 14$ cm
3. ΔLMN, $m\angle L = 90^\circ$, $m = 8$ cm, $l = 8\sqrt{2}$ cm

11.2.6 حقيقي زندگيءَ ۾ اوچائي ۽ مفاصلن جا مسئلا حل ڪرڻ

شين جي اوچائي ۽ مفاصلا لهڻ جا مسئلا ايئن آهن جيئن ڪنڊ ٽڪندا حل ڪرڻ. اهڙين صورتن ۾ اسان کي اڳ ۾ شڪل ٺاهڻي پوندي آهي. گهڻو ڪري ان شڪل ۾ مسئلي بابت هڪ ٽڪنڊو نهي پوندو آهي يا نئين سر ٺاهڻو پوندو آهي.
تہ جيئن اسان کي ٽڪنڊي جا پاسا ۽ گهربل نسبتون درست نموني ملن.

مثال 1. درين جي صفائي ڪندڙ هڪ شخص وٽ ڏاڪڻ آهي.
اها ڏاڪڻ ڀت سان اهڙي طرح لڳائي وئي آهي جو اها زمين کان 30° جي ڪنڊ ٺاهي ٿي ۽ ڀت تي 5.4 ميٽر اوچائي تي پهچي ٿي. ان ڏاڪڻ جي ڊيگهہ معلوم ڪريو.

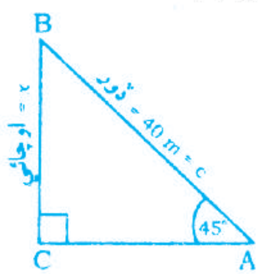


حل: ڦهريائين اسان ڏنل بيان مطابق هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊو ABC ٺاهينداسين.
هاڻي

$$\text{Sin}\ m\angle A \Rightarrow \frac{5.4}{c} = \text{Sin}\ 30^\circ \Rightarrow \frac{5.4}{c} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c \times 1 = 2 \times 5.4 \Rightarrow c = 10.8\text{m}$$

ان جو مطلب تہ ڏاڪڻ 10.8 ميٽر ڊگهي آهي.



مثال 2: هڪ ڇوڪرو 40 ميٽر ڊگهي ڏور سان لغڙ اُڏاري ٿو.
جيڪڏهن اها ڏور زمين جي مٿاڇري سان 45° جي ڪنڊ ٺاهي ٿي تہ زمين کان مٿي لغڙ جي اوچائي معلوم ڪريو.
حل: ڦهريان اسان ڏنل بيان مطابق شڪل ٺاهينداسين جيڪا هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي.

$$\frac{x}{c} = \frac{\angle 45^\circ \text{ جو سامهون وارو پاسو}}{\text{هيپاٽينيوز}} \Rightarrow \frac{x}{c} = \text{Sin}\ 45^\circ \Rightarrow \frac{x}{40} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 40 = 0.707 \times 40 \Rightarrow x = 28.28 = 28.3 \text{ ميٽر (تقريباً)}$$

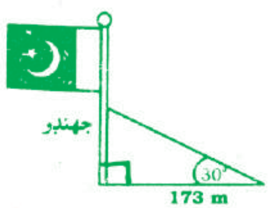
ان جو مطلب تہ لغڙ 28.3 ميٽر جي اوچائي تي آهي

مشق 11.4

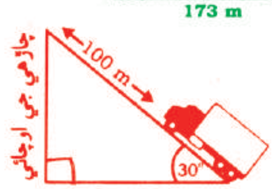
1. هڪ ڏاڪڻ پٽ سان لڳايل آهي جيئن سامهون شڪل ۾ ڏيکاريل آهي. اها فرش سان 60° جي ڪنڊ ٺاهي ٿي. جيڪڏهن ان ڏاڪڻ جو هيٺيون ڇيڙو پٽ کان 3 ميٽر پري آهي ته ڏاڪڻ جي ڊيگهه لهو.

2. هڪ ٽنبي جو پايو زمين جي هڪ هنڌ کان 200 ميٽر جي فاصلي تي آهي. ان هنڌ کان ٽنبي جي چوٽي جي اوچائي واري ڪنڊ 45° جي آهي. ٽنبي جي اوچائي معلوم ڪريو.

3. سمنڊ جي ڪناري تي 170 ميٽر اوچو روشنيءَ جو مينار آهي. سمنڊ ۾ بيٺل هڪ بحري جهاز کان مينار جي چوٽي 30° جي ڪنڊ ٺاهي ٿي، جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي. مينار جي پايي ۽ جهاز جي وچ ۾ فاصلو معلوم ڪريو.



4. هڪ جهنڊو شڪل ۾ ڏيکاريل آهي. اُن جي اوچائي لهو.



5. هڪ ٽرڪ 100 ميٽر جي اهڙي چاڙهي تي چڙهي ٿي جنهن جي ڪنڊ 30° جي آهي. ٻڌايو ته ٽرڪ عمودي طور ڪيتري اوچائي چڙهي آهي.

جائزي جي مشق 11

1. چڪاس ڪريو تہ:

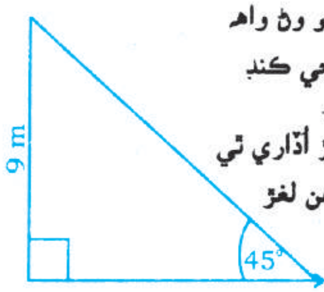
(i) $2\ \text{Sin}\ 45^\circ + \frac{1}{2}\ \text{Cosec}\ 45^\circ = \frac{3}{\sqrt{2}}$

(ii) $\text{Cos}\ 60^\circ . \text{Cos}\ 30^\circ - \text{Sin}\ 60^\circ\ \text{Sin}\ 30^\circ = 0$

(iii) $\text{Sin}\ 60^\circ\ \text{Cos}\ 30^\circ - \text{Cos}\ 60^\circ\ \text{Sin}\ 30^\circ = \frac{1}{2}$

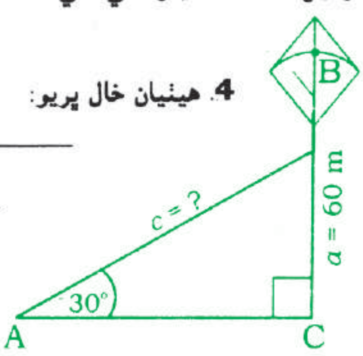
(iv) $(\text{Cos}\ 30^\circ - \text{Sin}\ 30^\circ) \times (\text{Cos}\ 30^\circ + \text{Sin}\ 30^\circ) = \frac{1}{2}$

(v) $\text{Sin}\ 45^\circ \times \text{Cos}\ 45^\circ + \text{Sin}\ 30^\circ \times \text{Cos}\ 60^\circ = \frac{3}{4}$



2. هڪ وڻ واهہ جي ڪناري تي 9 ميٽر اوچو بيٺو آهي. اهو وڻ واهہ جي ٻئي ڪناري تي بلڪل سامهون واري جڳهہ کان 45° جي ڪنڊ ٺاهي ٿو. جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي. واهہ جي ويڪر لهو.

3. هڪ لغڙ سان ڏگهي ڏور ٻڌل آهي. هڪ ڇوڪري اهو لغڙ اڏاري ٿي تہ زمين سان 30° جي اوچائي واري ڪنڊ ٺهي ٿي. جيڪڏهن لغڙ زمين کان 60 ميٽر مٿي آهي تہ ڏور جي ڊيگهہ لهو.



4. هيٺيان خال ڀريو:

(i) $\text{Cosec}\ 30^\circ =$ ________ (ii) $\text{Cot}\ 60^\circ =$ ________

(iii) $\text{Cos}\ 45^\circ =$ _____ (iv) $\text{Sec}\ 30^\circ =$ _______

(v) $\text{Tan}\ m\angle C =$ ________ جو اُبتڙ

(vi) $\text{Sin}\ m\angle A =$ $\angle A$ جو سامهون وارو پاسو

....

(vii) $\text{Cos}\ (90 - m\angle A) = \text{Sin}$ ________ (viii) $\text{Tan}\ 30^\circ = \text{Cot}$ ________

(ix) $\text{Cosec}\ 10^\circ = \text{Sec}$ _______ (x) $\text{Sec}\ (90 - \theta) = \text{Cosec}$ _______

5. درست جواب چونڊيو

(i) $\text{Cos } 60^\circ =$ ______

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\text{Cos } 30^\circ =$ ______

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) 1 (c) $\sqrt{3}$

(iii) $\text{Tan } 45^\circ =$ ______

(a) 2 (b) $\sqrt{2}$ (c) 1

(iv) $\text{Cos}^2\, 30^\circ =$ ______

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(v) $\text{Cosec } 60^\circ =$ ______

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{1}{2}$

(vi) $\text{Sin}^2\, 45^\circ =$ ______

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) 2 (c) $\frac{1}{2}$

(vii) $\text{Cosec}^2\, 60^\circ =$ ______

(a) 2 (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

6. صحيح لاءِ 'ص' لکو ۽ غلط لاءِ 'غ' لکو.

(i) $\text{Cos}\,\theta = \frac{1}{\text{Sin}\,\theta}$ (ii) $\text{Cosec}\,\theta = \frac{1}{\text{Sec}\,\theta}$ (iii) $\text{Sec}\,\beta = \frac{1}{\text{Cosec}\,\beta}$.

(iv) $\text{Tan}\,\theta.\ \text{Cot}\,\theta = 1$ (v) $\text{Tan}\,x.\ \text{Cot}\,x = 1$ (vi) $\frac{\angle A \text{ جو پر وارو پاسو}}{\text{هيپاٽينيوز}} = \text{Sin } m\angle A$

(vii) $\text{Cot}\,x = \frac{\text{Cos}\,x}{\text{Sin}\,x}$ (viii) $\text{Sin } 20^\circ = \text{Cosec } 70^\circ$

(ix) $\text{Sin}\,x = \text{Cosec}\,x$ جو ابتڙ (x) $\text{Cos}\,(90^\circ - 30^\circ) = \text{Sec } 60^\circ$

خلاصو

- ٽرگناميٽري ٽڪنڊي جي جزن جي وچ ۾ تعلق بابت ڄاڻ ڏيندي آهي.
- ڪل ڇهه ٽرگناميٽري نسبتون ٿينديون آهن:

Sine, Cosine, Tangent, Cotangent, Secant and Cosecant.

- ٽرگناميٽري نسبتن ذريعي گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي ڪنڊ جي ماپ کي سندس پاسن جي ڏيگهه سان ظاهر ڪبو آهي.
- ٽي مشهور ٽرگناميٽري نسبتون آهن.

(i) $\text{Sin}\ \theta = \dfrac{\angle\theta \text{ جو سامهون واروپاسو}}{\text{هيپاٽينيوز}}$

(ii) $\text{Cos}\ \theta = \dfrac{\angle\theta \text{ جو پر وارو پاسو}}{\text{هيپاٽينيوز}}$

(iii) $\text{Tan}\ \theta = \dfrac{\angle\theta \text{ جو سامهون واروپاسو}}{\angle\theta \text{ جو پر وارو پاسو}}$

- ڪنڊن جي مختلف ماپن لاءِ ٽرگناميٽري نسبتن جي ملهه جي جدول:

$\text{Sin}\ \theta = \dfrac{1}{\text{Cosec}\ \theta}$, $\text{Cos}\ \theta = \dfrac{1}{\text{Sec}\ \theta}$, $\text{Tan}\ \theta = \dfrac{1}{\text{Cot}\ \theta}$

- ڪمپليمينٽري ڪنڊن جون نسبتون هيٺ ڏجن ٿيون:

  - $\text{Sin}\ (90^\circ - \theta) = \text{Cos}\ \theta$, $\text{Cos}\ (90^\circ - \theta) = \text{Sin}\ \theta$
  - $\text{Tan}\ (90^\circ - \theta) = \text{Cot}\ \theta$, $\text{Cot}\ (90^\circ - \theta) = \text{Tan}\ \theta$
  - $\text{Sec}\ (90^\circ - \theta) = \text{Cosec}\ \theta$, $\text{Cosec}\ (90^\circ - \theta) = \text{Sec}\ \theta$

θ	Sin	Cos	Tan	Cot	Sec	Cosec
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

باب
12

معلومات سهيڙڻ

معلومات سهيڙڻ شماريات جي مضمون جو هڪ حصو آهي.

شماريات انهن اصولن ۽ طريقن جو مطالعو آهي جن ذريعي مواد يا معلومات کي گڏ ڪري جماعت بندي/ جدول بندي تجزيو ڪري نتيجا وندي ورچي حاصل ڪجن ٿا.

هيٺين ڪلاسن ۾ اسان بارگراف، جماعتي حدون، حقيقي جماعتي حدون، جماعتي تعدد، وسعت ۽ جماعت جي ويڪر بابت ڄاڻي چڪا آهيون.

دؤر جي مشق

1. هيٺ ڏنل جدول مان جماعتي تعدد، جماعتي حدون، حقيقي جماعتي حدون، مٿيون جماعتي حدون ۽ جماعتي ويڪر معلوم ڪريو:

ڪنيل مارڪون	24-28	29-33	38-34	39-43	44-48
شاگردن جو تعداد	03	16	12	23	16

2. هڪ ڪلاس جا 30 شاگرد هڪ امتحان ۾ ويٺا. 10 مارڪن مان سندن ڪنيل مارڪون هيٺ ڏجن ٿيون.

4	3	3	0	2	2	4	3	3	5
2	2	4	3	5	1	0	3	5	4
3	4	4	0	3	2	3	6	0	1

(i) مٿي ڏنل معلومات مان هڪ تعددي چارٽ ٺاهيو.

(ii) ڏنل مواد جي وسعت لکو.

(iii) ڪيترين مارڪون سڀ کان وڌيڪ شاگردن حاصل ڪيون؟

(iv) ڪيترين مارڪون سڀ کان گهٽ شاگردن حاصل ڪيون؟

گهربل: فيس جي اسٽاف ميمبرن کان پڇيو ويو ته هو پنهنجن ٻارڙن سان ڪيترو وقت روزانو گڏ گذاريندا آهن. هيٺيان جواب حاصل ٿيا.

4	3	1	6	2	2	3	1	4
5	3	4	1	2	5	3	2	2
3	2	2	3	1	1	4	2	3

(i) ڏنل معلومات مان هڪ تعددي چارٽ ٺاهيو. ٻڌايو تہ،
(ii) هن سروي ۾ ڪل ڪيترا ميمبر شريڪ ٿيا؟
(iii) ٻارڙن سان گڏ گذارڻ جو سڀ کان وڌيڪ وقت ڪيترو آهي؟
(iv) ڪيترن ميمبرن ٻارڙن سان وڌ کان وڌ وقت گذاريو؟

4. هڪ اداري جي 150 ماڻهن کان 10 مارڪن جي هڪ ٽيسٽ ورتي وئي. انهيءَ نتيجي کي هيٺينءَ ريت ظاهر ڪيو ويو آهي.

ڪنيل مارڪون	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
تعدد	6	12	15	21	35	24	20	10	6	1

(i) ڪيترن ماڻهن سڀ کان وڌيڪ مارڪون ڪنيون؟
(ii) ڪيترن ماڻهن سڀ کان گهٽ مارڪون ڪنيون؟
(iii) ڪيتريون مارڪون سڀ کان گهڻن ماڻهن حاصل ڪيون؟

12.1 تعددي تقسيم (Frequency Distribution)

12.1.1 تعددي ۽ تعددي تقسيم جي وصف بيان ڪرڻ.

(a) تعدد: جڏهن مواد کي گڏ ڪيو ويندو آهي تہ ڪي رقمون (ملهہ يا عدد) بار بار اينديون آهن. ڪابہ رقم جيترا دفعا اچي ان تعداد کي سندس تعدد (Frequency) چئبو آهي ۽ ان کي 'f' سان ظاهر ڪبو آهي.

(b) تعددي تقسيم يا ورهاست: هڪ ڏگهي ابتدائي مواد کي سهيڙڻ ۽ آسان شڪل ۾ آڻڻ لاءِ ان جي مختلف جماعتن ۾ ورڇ ڪندا آهيون. ڪنهن بہ جماعت ۾ شامل رقمن جي تعداد کي ان جماعت جو تعدد چئبو آهي.

12.1.2 تعددي جدول ٺاهڻ

تعددي جدول ٺاهڻ لاءِ اسان کي هيٺين ريت عمل ڪرڻو پوندو.

قدم 1: مليل غير گروهي مواد مان وسعت (Range) ۽ جماعتي وقفي جي ويڪر (Class size) معلوم ڪريون ٿا.

$$\text{جماعتي وقفي جي ويڪر} = \frac{\text{(مليل مواد جو نندي ۾ ننڍو ملهه − مليل مواد جو وڏي ۾ وڏو ملهه)}}{\text{جماعتن جو تعداد}}$$

قدم 2: جماعتي وقفا هڪ جيتري ماپ جا لکو.

قدم 3: جدول جو خاڪو بڻايو جنهن ۾ هيٺين ريت ڪالم ۾ لکو:

(i) جماعتي وقفو (ii) ٽيلي نشان (iii) تعدد

جماعتي وقفو	ٽيلي نشان	تعدد
45 - 51		
52 - 58		
59 - 65		
66 - 72		

پهريائين فقط جماعتي وقفا جدول جي پهرين ڪالم ۾ داخل ڪيا ۽ ٻيا ٻه ڪالم خالي رکيا.

قدم 4: هاڻي ٽيلي نشان جي مدد سان تعدد (Frequency) لهو.

ٽيلي نشان لڳائڻ جو طريقو: غير گروهي مواد مان هرهڪ رُڪن کي ترتيبوار نشان (✓) لڳايون ٿا ۽ ان جي بدران ٽيلي ڪالم ۾ (عمودي ليڪ ٽڪر جو) اُبو نشان ڏيون ٿا، اُن جماعتي وقفي واري خاني جي سامهون جنهن ۾ اُهو ٺهڪي ٿو. صفحي 235 جي مثال 1. کي هيٺ ڏنل خاڪي ۾ وضاحت طور پيش ڪيل آهي.

جماعتي وقفو	ٽيلي نشان	تعدد
45 - 51	~~IIII~~ IIII	
52 - 58	IIII	
59 - 65	~~IIII~~ II	
66 - 72	~~IIII~~ II	

مثال 1. هيٺ ڄاڻايل نتيجو 27 شاگردن جو رياضيءَ جي ڪنهن آزمائشي ٽيسٽ ۾ 100 مان ڪنيل مارڪون ڏيکاريل آهن: 67، 45، 68، 56، 69، 50، 65، 51، 66، 51، 53، 54، 65، 53، 48، 54، 63، 62، 61، 59، 67، 45، 68، 50، 69، 50، 65. انهيءَ غير گروهي مواد جو تعددي جدول ٺاهيو، جيڪو هڪ جيتري جماعتي وقفي 4 سان ٺهيل هجي.

حل: (تقريباً) $6 = \frac{23}{4} = \frac{69-45}{4} =$ جماعتي وقفي جي سائيز

ان طرح چار جماعتي وقفا هن طرح ٺهن ٿا:

41-45، 52-58، 59-65 ۽ 66-72 پوءِ اسان ٽيلي نشان تعدد (Frequency) هيٺين طريقي سان لکون ٿا.

پهريون مقدار غير گروهي مواد جو 67 آهي. ان تي نشان (67) انهيءَ طرح لڳايون ٿا ۽ ٽيلي نشان جماعتي وقفي 45-51 واري خاني جي سامهون اُڀو عمودي نشان (|) لڳايون ٿا.

هاڻي ٻيو نمبر مقدار جيڪو غير گروهي مواد جو آهي (45)، انهيءَ کي بہ ساڳي جماعتي وقفي (45-51) واري خاني جي سامهون ٽيلي نشان واري ڪالم ۾ ٻيو اُڀو نشان ڏيون ٿا. هاڻي اسان وري غير گروهي مواد جي ڏنل مواد مان ٽئين نمبر مقدار (68) کي ڪٽون ٿا اُن جو ٽيلي نشان انهيءَ سائيز واري وقفي ۾ رکون ٿا، جيڪو ان سان ٺهڪي ٿو. يعني (66-72) واري خاني جي سامهون جيئن جدول جي خاڪي ۾ ڏيکاريل آهي. انهيءَ طرح اسان ساڳي طريقہ ڪار کي ورجايون ٿا، جيستائين غير گروهي مواد جو آخري مقدار اچي.

لاڳيتا اُڀا عمودي طرح ٽيلي نشانن (||||) ڏيڻ کان پوءِ جڏهن پنجون ٽيلي نشان ساڳي قطار ۾ اچي ٿو تہ اُريبي طرح لڳايون ٿا، جيڪو انهن چئن اُڀن نشانن کي هن طرح ڪٽي ٿو (~~||||~~).

اُهو پنجن پنجن گروپن وارو ٽيلي نشان ڳڻڻ ۾ آساني ڪري ٿو. انهيءَ طرح آخر ۾ اسان جدول جي خاڪي ۾ تعدد (Frequency) جو عدد ٽيلي نشان ڳڻي لکي ڪري جدول مڪمل ڪريون ٿا. ان طرح مڪمل جدول هن طرح بڻجي ٿي، جيڪا هيٺ واضح ڪري ڏيکاريل آهي.

تعدد	ٽيلي نشان	جماعتي وقفو
9	~~||||~~ ||||	45 - 51
4	||||	52 - 58
7	~~||||~~ ||	59 - 65
7	~~||||~~ ||	66 - 72
27	ڪُل	

12.1.3 تعددي جدول لاءِ ڪالمي نقشو

تعددي جدول مان ڪالمي نقشو ناهبو آهي. ان نقشي ۾ هر جماعت لاءِ هڪ مستطيل هوندو آهي. انهن مستطيلن جي وچ ۾ ڪاٻه وٿي نه هوندي آهي. سندن ويڪر هڪ جيتري پر اوچائي مختلف هوندي آهي. ڇو تہ جماعتي وقفو هڪ جيترو پر جماعتي تعدد مختلف هوندو آهي.

گروهي مواد مان ڪالمي نقشو ناهڻ لاءِ هيٺ ڏنل طريقو استعمال ڪبو آهي:

(i) X- محور ۽ Y- محور ڪيو.

(ii) X– محور تي حقيقي جماعتي حدن جا نشان لڳايو.

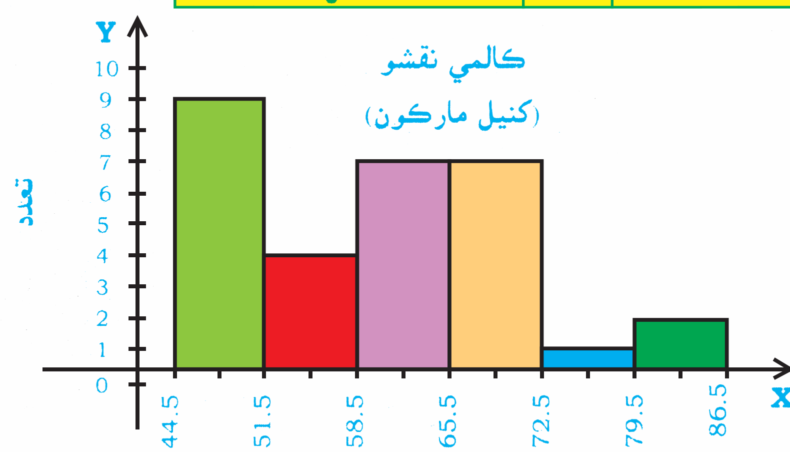
(iii) Y– محور تي جماعتي تعدد جا نشان لڳايو.

(iv) هر هڪ جماعت لاءِ اهڙي مستطيل ناهيو جنهن جي اوچائي سندس جماعتي تعدد جي برابر هجي.

مثال طور... ڏنل مواد لاءِ

67, 45, 68, 56, 69, 50, 65, 51, 66, 51, 53, 54, 65, 53, 48, 54, 63, 62, 61, 59, 75, 45, 68, 50, 69, 50 65, 76, 83, 83

وچيون نقطو (x)	f	حقيقي جماعتي حدون
48	9	44.5 - 51.5
55	4	51.5 - 58.5
62	7	58.5 - 65.5
69	7	65.5 - 72.5
76	1	72.5 - 79.5
83	2	79.5 - 86.5
--	**30**	ڪُل



مثال 2. انين ڪلاس جي 26 شاگردن رياضيءَ جي ٽيسٽ ۾ 20 مارڪن مان هيٺينءَ ريت مارڪون ڪنيون:

4	10	12	16	2	8	14	16	18	20	13	4	12
6	8	10	14	16	15	16	16	14	8	12	10	11

فرض ڪريو ته شاگردن کي هيٺينءَ ريت گريڊ ڏجن ٿا:

16 -20 مارڪن لاءِ گريڊ - A، 11-15 مارڪن لاءِ گريڊ- B

06 -10 مارڪن لاءِ گريڊ- C، 01 -05 مارڪن لاءِ گريڊ- D.

ڪالمي نقشو ٺاهيو ۽ هيٺين سوالن جا جواب ڏيو:

(a) ڪيترن شاگردن گريڊ- A ڪنيو؟

(b) ڪيترن شاگردن گريڊ- B ڪنيو؟

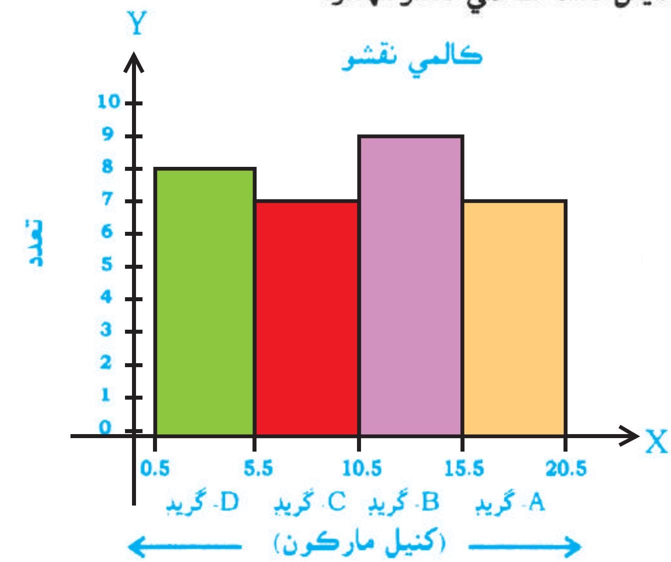
(c) ڪهڙو گريڊ گهٽ کان گهٽ شاگردن ڪنيو؟

حل: جيئن ته ڏنل مواد غير گروهي آهي تنهن ڪري اسان تعددي جدول ٺاهي حقيقي جماعتي حدون لهنداسين. جماعتي وقفا ته اڳ ۾ ئي مواد ۾ ڏنل آهن. جدول هيٺ ڏجي ٿي.

تعددي جدول

حقيقي جماعتي حدون	تعدد	مطابقت جا نشان	جماعتي وقفو
0.5 - 5.5	3	𝍷𝍷𝍷	1 - 5
5.5 - 10.5	7	𝍸 𝍷𝍷	6 - 10
10.5 - 15.5	9	𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	11 - 15
15.5 - 20.5	7	𝍸 𝍷𝍷	16 - 20

مٿي ڏنل هدايتن تحت ڪالمي نقشو ٺهندو.



مستطيلن جي اوچائي مان ظاهر آهي ته،

(a) 7 شاگردن گريڊ – A ڪنيو.

(b) 9 شاگردن گريڊ B ڪنيو؟

(c) گهٽ ڪان گهٽ شاگردن گريڊ- B ڪنيو؟

نوٽ: ڪالمي نقشو ڏسڻ ۾ بارگراف وانگر لڳندو آهي، پر ٻنهي ۾ ڪجهه فرق آهي جو ته، بارگراف ۾ ڏيڪاريل بارن جي وچ ۾ وٿي هوندي آهي ۽ انهن مان هرهڪ جي اوچائي صرف هڪ رقم کي ظاهر ڪندي آهي، پر ڪالمي نقشي ۾ ڏيڪاريل بار هڪ ٻئي سان لاڳيتا هوندا آهن ۽ انهن جي اوچائي جماعتي تعدد کي ظاهر ڪندي آهي.

مشق 12.1

1. مختلف اسڪولن مان چونڊيل 30 بوائز اسڪائوٽس جو وزن ڪلوگرامن ۾ هن ريت آهي: 39، 40، 36، 32، 38، 40، 42، 35، 41، 29، 40، 42، 43، 39، 37، 35، 33، 31، 32، 34، 36، 42، 45، 43، 45، 47، 42، 44، 46، 40. مطابقت جي طريقي سان 5 درجن واري تعددي ورهاست ٺاهيو ۽ ڪالمي نقشو پڻ ٺاهيو.

2. هڪ ڪالونيءَ جي 25 گهرن ۾ استعمال ٿيل بجلي جا يونٽ ترتيبوار هيٺ ڏجن ٿا.
700، 720، 750، 740، 750، 730، 690، 695، 690، 695، 700،
710، 705، 690، 685، 695، 690، 705، 710، 700، 680، 677،
720، 725، 730. مطابقت جي طريقي سان 5 درجن واري تعددي ورهاست ٺاهيو ۽ پوءِ ڪالمي نقشو ڪيو.

3. اٺين ڪلاس جا 28 شاگرد رياضيءَ جي ماهوار ٽيسٽ ۾ وينا ۽ هيٺينءَ ريت مارڪون ڪنيائون: 67, 70, 63, 60, 64, 67, 67, 65, 59, 61, 62, 58, 60, 60, 59, 54, 52, 56, 55, 45, 50, 82, 71, 78, 79, 80, 70, 69. مطابقت جي طريقي سان 4 درجن واري تعددي ورهاست ٺاهيو ۽ پوءِ ڪالمي نقشو ڪيو.

4. گذريل 25 سالن دوران پيل برسات جو رڪارڊ سينٽي ميٽرن ۾ هيٺينءَ ريت آهي: 5, 5, 3, 22, 11, 4, 23, 21, 14, 7, 5, 9, 18, 16, 25, 15, 24, 9, 7, 26, 5, 17, 13, 25, 12.
برسات جي رڪارڊ کي 5 درجن واري تعددي ورهاست ۾ ڏيکاريو ۽ ان جو ڪالمي نقشو به ٺاهيو.

5. ڪامرس جي شاگردن پاران ڪمپيوٽر ليب ۾ ڪنيل مارڪن جي تعددي ورهاست آهي:

ڪنيل مارڪون	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55
شاگردن جو تعداد	05	17	13	24	15	14

مٿي ڏنل تعددي ورهاست لاءِ ڪالمي نقشو ٺاهيو.

6. مزدورن جي روزاني ڪمائي (رپين ۾) جي تعددي ورهاست لاءِ ڪالمي نقشو ٺاهيو.

ڪمائي	501-600	601-700	701-800	801-900	901-1000	1001-1100
مزدورن جو تعداد	10	15	20	25	30	35

12.2 مرڪزي رجحان جون ماپون

اسان ڄاڻون ٿا ته خام مواد کي تعددي ورهاست ۾ تبديل ڪرڻ سان ان معلومات کي سمجهڻ آسان ٿيو پوي. ڏنل معلومات کي اڃان به وڌيڪ مختصر ڪري صرف هڪ مرڪزي قيمت جي صورت ۾ آڻي سگهجي ٿو. جيئن ته اها قيمت ڏنل مواد جي مرڪز ۾ هوندي آهي. تنهن ڪري ان کي مرڪزي رجحان جي ماپ چئبو آهي.

12.2.1 مرڪزي رجحان جي ماپن جو بيان

هتي اسان هيٺين چئن مرڪزي رجحان جي ماپن بابت بيان ڪنداسين:

(i) حسابي سراسري (ii) قدري سراسري (iii) مڌيان (iv) ڪثرتي سراسري

12.2.2 غير گروهي مواد مان حسابي سراسري، قدري سراسري، مڌيان ۽ ڪثرتي سراسري لهڻ.

(A) حسابي سراسري: حسابي سراسري زياده استعمال ۾ ايندڙ ۽ آسان سراسري آهي. مثلاً هڪ شهر جو مئي مهيني ۾ سراسري گرمي پد $39^{o}C$ آهي ته ان جو مطلب آهي ته مئي مهيني جي ڪن ڏينهن ۾ گرمي پد $39^{o}C$ کان وڌيڪ هوندو ته ڪن ۾ گهٽ.

ساڳيءَ طرح هڪ مزدور جي ماهوار سراسري آمدني 30,000 رپيا آهي جو مطلب آهي ته مهيني جي ڪن ڏينهن ۾ سندس آمدني روزانو 1,000 رپين کان وڌيڪ هوندي ته ڪن ڏينهن ۾ گهٽ.

حسابي سراسري لهڻ لاءِ سيني قيمتن جي جوڙ کي مشاهدن جي تعداد سان ونڊ ڪبي آهي. حسابي سراسري معلوم ڪرڻ جو فارمولا هي آهي:

$$\frac{\text{رقمن جو جوڙ}}{\text{رقمن جو تعداد}} = \text{حسابي سراسري} \qquad \text{يا}$$

$$= \frac{\text{سيني مشاهدن جي رقمن جو جوڙ}}{\text{مشاهدن جو تعداد}}$$

نوٽ: حسابي سراسري کي $\bar{X}$ سان ظاهر ڪجي ۽ $\sum$ رقمن جي جوڙ اُپت لاءِ نشاني

هجي ته: $\bar{X} = \frac{\sum x_{i=1}^{n}}{n}$

مشاهدا:

(i) عددن 1، 3، 5، 7، 9 جي حسابي سراسري آهي 5.

(ii) عددن 6، 8، 10، 12، 14 جي حسابي سراسري آهي 10 (هرهڪ رقم ۾ 5 جوڙ ڪريون ٿا.)

(iii) عددن 0، 2، 4، 6، 8 جي حسابي سراسري آهي 4 (هرهڪ رقم مان 1 ڪٽ ڪريون ٿا.)

(iv) عددن 5، 15، 25، 35، 45 جي حسابي سراسري آهي 25 (ڇو؟)

(v) عددن 1، 3، 4، 5، 6، 7، 9 جي حسابي سراسري آهي 5.

(iv) عددن 2، 4، 5، 6، 8 جو حسابي سراسري آهي 5 (ڇو؟)

مثال 1. هڪ شاگرد انين ڪلاس جي ساليانِي امتحان ۾ انن مختلف مضمونن ۾ هيٺ ڏيڪاريل مارڪون ڪنيون: 52، 40، 50، 74، 60، 72، 90، 84
سندس حسابي سراسري مارڪون لهو.

حل: $\dfrac{\text{سڀني مضمونن ۾ ڪنيل مارڪن جو جوڙ}}{\text{مضمونن جو تعداد}} = \dfrac{\sum x_i}{n} =$ حسابي سراسري

نوٽ 1: هن مواد جي حسابي سراسري 64 آهي پر اها مواد ۾ شامل نہ آهي.
در حقيقت حسابي سراسري جو مواد ۾ هجڻ ضروري نہ آهي.

نوٽ 2: $\overline{X}$، $\sum x$ ۽ n مٿي ڄاڻايل فارمولا جا ٽي رڪن آهن. انهن مان ڪي بہ ٻہ مليل هوندا تہ ٽيون رڪن لهي سگهبو.

مثال 2 (i): جيڪڏهن حسابي سراسري 6 آهي ۽ $\sum x = 18$ تہ n لهو.

حل: تنهنڪري $\overline{X} = \dfrac{\sum x}{n}$ انهيءَ لاءِ: $n = \dfrac{\sum x}{\overline{X}}$

مثال 2 (ii): جيڪڏهن $\overline{X} = 4$ ۽ $n = 5$ تہ $\sum x$ لهو.

حل: $\because \overline{X} = \dfrac{\sum x}{n} \Rightarrow \sum x = n\overline{X} = 5\,(4) = 20$

مثال 2 (iii). جيڪڏهن $\overline{X} = 6$ ، $n = 4$ ۽ مواد ۾ 3 رقمون 2، 8 ۽ 10 موجود آهن تہ چوٿين نامعلوم رقم لهو.

حل: هتي $\overline{X} = 6$ ، $n = 4$ ۽ $\sum x = 2 + 8 + 10 + x_4 = 20 + x_4$

$2 + 8 + 10 + x = 24 \Rightarrow 20 + x = 24 \Rightarrow x = 24 - 20 = 4$

يعنيٰ چوٿين نامعلون رقم 4 آهي.

مثال 2 (iv). انين ڪلاس جي شاگردن جي سراسري عمر آهي 13 سال. جيڪڏهن رياضيءَ جي استاد جي عمر بہ شامل ڪجي تہ سراسري عمر وڌي 14 سال ٿئي ٿي. جيڪڏهن شاگردن جو تعداد 30 آهي تہ استاد جي عمر ٻڌايو.

حل: شاگردن لاءِ: $\overline{X}_s = 13,\ n_s = 30$

سال $\sum x = n_s\overline{X}_s = 30\,(13) = 390$ = شاگردن جي عمرين جو جوڙ

شاگردن ۽ رياضيءَ جي استاد لاءِ: $\overline{X}_{s+t} = 14,\ n_{s+t} = 31$

سال $\sum x = n_{s+t}\overline{X}_{s+t} = 31\,(14) = 434$ = شاگردن ۽ استادن جي عمرين جو جوڙ

تنهن ڪري استاد جي عمر = $(434 - 390) = 44$ سال

مطلب تہ استاد جي عمر 44 سال آهي.

(B) قدري سراسري.

جڏهن ڏنل مواد جي هر رقم کي هڪجيتري اهميت هجي ته حسابي سراسري استعمال ڪبي آهي پر جيڪڏهن مختلف رقمن جي اهميت جدا جدا هجي ته اهميت کي مدنظر رکندي قدري سراسري استعمال ٿيندي آهي.

مثال (i).

(ii)

فرض ڪريو ته، رقمن x_1، x_2، x_3، ....، x_n جا قدر (اهميت) w_1، w_2، w_3،....، w_n آهن ته پوءِ وزني سراسري لاءِ:

$$\text{قدري سراسري} = \frac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots x_nw_n}{w_1+w_2+\ldots+w_n} = \frac{\sum x_iw_i}{\sum w_i} = \bar{X}_w$$

نوٽ 1: رياضيءَ جي اهميت (W_{Math}) تاريخ جي اهميت ($W_{History}$) کان وڌيڪ ۽ انگريزيءَ جي اهميت (W_{Eng}) ڊرائنگ جي اهميت کان وڌيڪ آهي).

نوٽ 2: اهميت بدلڻ سان قدري سراسري به بدلبي.

مثال 3. انين ڪلاس جي شاگردن مختلف مضمونن جا ڪتاب خريد ڪيا. انهن جي قيمت ۽ تعداد جا تفصيل هيٺ جدول ۾ ڏجن ٿا:

مضمون	رياضي	سائنس	انگريزي	اردو	سماجي اڀياس
قيمت في ڪتاب (رپيا)	72	80	60	40	50
ڪتابن جو تعداد	5	4	6	3	2

ڪتابن جي قيمت جي قدري سراسري لهو (هتي تعداد کي اهميت آهي).

حل: $\bar{X}_w = \frac{\sum x_iw_i}{\sum w_i}$ = قدري سراسري قيمت

$$= \frac{(72\times5)+(80\times4)+(60\times6)+(40\times3)+(50\times2)}{5+4+6+3+2}$$

$$= \frac{360+320+360+120+100}{20} = \frac{1260}{20} = 63$$

تنهن ڪري ڪتابن جي قدري سراسري قيمت 63 رپيا آهي.

(C) مڌيان

مڌيان اها رقم آهي جيڪا مواد کي ٻن حصن ۾ ورهائي ٿي. يعني مواد جون اڌ رقمون مڌيان کان اڳ ۾ ۽ اڌ رقمون پوءِ هونديون آهن. مڌيان معلوم ڪرڻ لاءِ پهرينئين اسان غير گروهي مواد جي سڀني رقمن کي وڌ ننڍائي يا ننڍ وڏائي ترتيب ۾ لکندا سين.

(i) جيڪڏهن ڏنل رقمن جو تعداد (n) اڪي هجي ته وچين رقم مڌيان آهي يعني $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ واري رقم

(ii) جيڪڏهن ڏنل رقمن جو تعداد ٻڌي هجي ته وچين ٻن رقمن جي حسابي سراسري مڌيان آهي.

مثال 4. عددن 2، 10، 6، 8، 9، 5، 3، 7، 4 جو مڌيان لهو.

حل: ڏنل مواد کي ننڍي وڏائي ۾ لکبو ته ملندا 2، 3، 4، 5، $\boxed{6}$ ، 7، 8، 9، 10

هتي ڏنل مواد ۾ ڪُل 9 رقمون آهن ۽ 9 هڪ اڪي عدد آهي.

تنهن ڪري وچون عدد آهي $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ رقم آهي يعني $n = 9$

تنهن ڪري 6 = مڌيان

مثال 5. عددن 7، 10، 11، 13، 4، 8، 14، 12، 6، 3 جو مڌيان لهو.

حل: ڏنل مواد کي وڏ ننڍائي ۾ لکبو ته ملندا

3، 4، 6، 7، $\boxed{8، 10}$ ، 11، 12،13، 14

هن مواد ۾ ڪُل 10 رقمون آهن ۽ 10 هڪ ٻڌي عدد آهي. تنهن ڪري وچيان ٻه عدد آهن پنجون نمبر ۽ ڇهون نمبر. ان صورت ۾ مڌيان لاءِ پنجين نمبر ۽ ڇهين نمبر جي رقمن جي سراسري لهبي.

$9 = \frac{18}{2} = \frac{10+8}{2}$ = مڌيان. يعنيٰ ڏنل مواد جو مڌيان 9 آهي.

نوٽ: ڏنل مواد کي ننڍ وڏائي ترتيب ۾ رکجي يا وڏ ننڍائي ۾ مڌيان ٻنهي صورتن ۾ ساڳيو رهندو.

مشاهدا:

(i) عددن 3، 5، $\boxed{7}$ ، 10، 15 جو مڌيان آهي 7.

(ii) عددن 13، 15، $\boxed{17}$ ، 20، 25 جو مڌيان آهي 17 (10 جوڙ ڪرڻ سان)

(iii) عددن 1، 3، $\boxed{5}$ ، 8، 13 جو مڌيان آهي 5 (2 ڪٽ ڪرڻ سان)

(iv) عددن 30، 50، $\boxed{70}$ ، 100، 150 جو مڌيان آهي 70 (ڇو؟)

(v) عددن 2، 4، $\boxed{7}$ ، 20، 25 جو مڌيان آهي 7 (نتيجو ؟)

(vi) عددن 1، 3، 5، $\boxed{7}$ ، 10، 11، 15 جو مڌيان آهي 7 (نتيجو ؟)

نوٽ: ڪنهن به ڏنل مواد جو مڌيان هڪڙو عدد هوندو پر اهو عدد ڪيترن ئي مختلف موادن جو مڌيان ٿي سگهي ٿو (ڏسو مواد (i)، (v)، (vi))

(D) ڪثرتي سراسري:

اها رقم جنهن جو تعداد ڪنهن مواد ۾ موجود ٻين سڀني رقمن کان وڌيڪ هجي ان کي مواد جي ڪثرتي سراسري چئبو آهي. گروهي مواد ۾ اها جماعت جنهن جو تعدد ٻين جماعتن کان وڌيڪ هجي ته ان کي ڪثرتي جماعت چئبو آهي. جيڪڏهن ڪابہ رقم دهرايل نہ آهي تہ چئبو تہ ان مواد کي ڪثرتي سراسري نہ آهي. ڪڏهن وري هڪ کان وڌيڪ رقمون هڪ جيترا دفعا دهرايل هونديون آهن تہ ان مواد کي هڪ کان وڌيڪ ڪثرتي سراسريون آهن.

مثال 6. 12 شاگردن جي ٽولي جون مارڪون هي آهن: 70، 50، 40، 65، 45، 65، 70، 65، 50، 45، 70، 65. انهن مارڪن جي ڪثرتي سراسري لهو.

حل: ڳڻڻ ۾ سولائي خاطر ڏنل مواد کي ننڍي وڏائي ترتيب ۾ رکڻ سان:

$\underbrace{40,45,45}_{\text{2 دفعا}}, \underbrace{50,50}_{\text{2 دفعا}}, \underbrace{65,65,65,65}_{\text{4 دفعا}}, \underbrace{70,70,70}_{\text{3 دفعا}}$

عدد 65 چار دفعا آيو آهي جڏهن ته ٻيا عدد ان کان گهٽ دفعا آيا آهن.
تنهن ڪري شاگردن جي مارڪن جي ڪثرتي سراسري 65 آهي.

مثال 7. 11 رانديگرن پاران ڳاهيل رنسن جو اسڪور هي آهي: 13، 18، 12، 17، 13، 12، 16، 12، 13، 13، 12. رنسن جي ڪثرتي سراسري لهو.

حل: ڏنل مواد کي وڏ ننڍائي جي ترتيب ۾ رکڻ سان:

$\underline{18,17,16}, \underbrace{13,13,13,13}_{\text{4 دفعا}}, \underbrace{12,12,12,12}_{\text{4 دفعا}}$

اسڪور 12 ۽ 13 ٻئي هڪ جيترا دفعا (4 دفعا) مواد ۾ موجود آهن.
تنهن ڪري ٻه ڪثرتي سراسريون 12 ۽ 13 آهن.

نوٽ 1. حسابي سراسري ۾ مديان فقط هڪڙو عدد هوندو آهي.

نوٽ 2. ڪثرتي سراسري ڪڏهن موجود ٿي نه هوندي آهي ته ڪڏهن ٻه يا وڌيڪ به هونديون آهن.

نوٽ 3. ساڳيو عدد مختلف موادن جي ڪثرتي سراسري ٿي سگهي ٿو.

نوٽ 4. خاصيتي مواد جي حسابي سراسري ۽ مديان نه لهي سگهبا آهن پر ڪثرتي سراسري معلوم ڪري سگهجي ٿي.

مثال: B = {1, 2, 5} ۾ ڪا به ڪثرتي سراسري نه آهي.
C = {1, 2, 2, 2, 5, 5, 5} ۾ ٻه ڪثرتي سراسريون آهن (2 ۽ 5)
D = {هوشيار، چالاڪ، چالاڪ، سادو، غريب} ۾ ڪثرتي سراسري آهي چالاڪ، پر ان جي حسابي سراسري ۽ مديان نه ٿا لهي سگهجن.

مشق 12.2

1. هيٺ ڏنل موادن مان هرهڪ جي حسابي سراسري معلوم ڪريو.

(i) 3، 8، 5، 4، 6، 0، 7، 1، 2
(ii) 11، 13، 15، 7، 9، 1، 3، 5
(iii) 11، 16، 13، 17، 10، 15، 18، 14، 12
(iv) 4، 16، 32، 8، 40، 12، 20، 28، 24، 36
(v) 1.2، 2.4، 3.6، 4.8، 5.1، 6.3، 7.5، 8.7

1. B. نامعلوم رُڪن جو ملھ لھو:

(i) $\overline{X}=12, \Sigma x_i=132, n=?$ (ii) $n=15, \Sigma x_i=75, \overline{X}=?$

(iii) $\Sigma x_i=96, \overline{X}=8, n=?$ (Iv) $\overline{X}=13, n=11, \Sigma x_i=?$

2. هيٺ ڏنل جدول وسيلي قدري سراسري لھو:

(i)

عدد (x)	10	20	30	40	50	60	70
وزن (w)	1	2	1	1	2	2	1

(ii)

عدد (x)	0	2	4	6	8	10	12
وزن (w)	1	2	3	4	5	3	2

(iii)

عدد (x)	1	3	5	7	9	11
وزن (w)	3	2	1	1	2	1

(iv)

عدد (x)	5	15	25	15	35	45
وزن (w)	2	1	2	1	2	2

3. هيٺ ڏنل موادن مان هرهڪ جو متيان لھو:

(i) 17، 19، 11، 5، 3، 7، 9، 13، 15

(ii) 45، 5، 15، 20، 35، 40، 10، 25، 30

(iii) 22، 2، 20، 4، 18، 6، 16، 8، 14، 10، 12

(iv) 35، 21، 49، 77، 45، 27، 33، 55، 63، 81، 99

(v) 39، 78، 91، 75، 104، 105، 19، 29، 99، 79، 89

(vi) 2.5، 3.5، 1.5، 4.5، 5.5، 5.0، 9.9، 9.5، 10.5، 11.5، 6.5، 7.5، 5.5

4. A. هيٺ ڏنل مواد مان هرهڪ جي ڪثرتي سراسري لھو:

(i) 14، 21، 27، 14، 28، 29

(ii) 24، 31، 37، 24، 38، 39

(iii) 23، 29، 41، 23، 29، 77، 55، 29

(iv) 20، 26، 38، 20، 26، 74، 52، 26

(v) 71، 51، 81، 71، 51، 57، 71، 81، 93، 51، 71

(vi) 93، 75، 85، 89، 77، 55، 33

(vii) 930، 750، 850، 890، 770، 550، 330

4. B. هيٺيان خال پريو:

(i) 3، 3، 4، 4، 5، 8، 7، 8، ____، 9 جيڪڏهن ڪثرتي سراسري 8 آهي.

(ii) 4، 5، 8، 10، 20، ____، 15 جيڪڏهن متيان 8 آهي.

(iii) 6، 9، 7، 10، ____، 4 جيڪڏهن حسابي سراسري 8 آهي.

5. ڪن انگن جو جوڙ 30 آهي ۽ حسابي سراسري 5 آهي، ٻڌايو تہ ڪُل انگ ڪيترا آهن.

6. ڇئن انگن جي حسابي سراسري 45 آهي. انهن مان پهريان 2 انگ آهن 64 ۽ 36 جڏهن تہ آخري 2 انگ x جي برابر آهن. x جو ملھ لهو.

7. جيڪڏهن مڌيان 5 آهي تہ هيٺيان خال پريو:

(i) 1، 2، 5، ___، 11   (ii) 2، ___، 5، 8، 11

(iii) 1، 2، 5، ___، 11، 20   (iv) 1، 2، 4، ___، 11، 20

8. جيڪڏهن ڪثرتي سراسري 5 آهي تہ هيٺيان خال پريو:

(i) 1، 2، 5، ___، 11   (ii) 2، ___، 5، 8، 11

(iii) 1، 2، 5، ___، 11، 20   (iv) 1، 2، 5، 5، ___، 11

(v) 1، 2، 2، 5، 5، ___، 11

(گھربل عدد 1، 2، 11 جي برابر ناهي) يعني 11، 2، 1 کان علاوه ڪوبہ جواب ٿي سگھي ٿو.

12.2.3 عملي زندگي جي مسئلن ۾ حسابي سراسري، قدري سراسري، مڌيان ۽ ڪثرتي سراسري حل ڪرڻ/ لهڻ.

مثال 1. هڪ واپاري سنڌڙي انبن جا 125 ڪريٽ ميرپورخاص کان ڪراچي موڪليا. هيٺ ڏنل جدول مطابق ڪريٽن جي سڙيل انبن جي قدري سراسري لهو.

سڙيل انبن جو تعداد (x) في ڪريٽ	0	1	2	3	4	5	6	7
ڪريٽن جو تعداد (w)	14	25	29	28	20	15	5	2

حل: $\frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i} = \bar{X}_w =$ قدري سراسري

$$= \frac{0\times14+1\times25+2\times29+3\times28+4\times20+5\times15+6\times5+7\times2}{14+25+29+28+20+15+5+2}$$

$$= \frac{0+25+58+84+80+75+30+14}{138} = \frac{366}{138} = 2.65$$

تنهن ڪري سڙيل انبن جي قدري سراسري في ڪريٽ 3 آهي.

مثال 2. 20 شاگردن جو وزن (ڪلوگرام ۾) هيٺ ڏجي ٿو:

60، 61، 67، 68، 59، 58، 55، 58، 59، 56، 60، 61، 66، 65، 64، 63، 60، 59، 58، 56.

شاگردن جي وزن لاءِ (i) حسابي سراسري لهو (ii) متيان لهو (iii) ڪثرتي سراسري لهو.
حل: پهريائين اسان ڏنل معلومات کي گهٽجندڙ ترتيب ۾ لکنداسين:

68,67,66,65,64,63,62, $\underbrace{61,61}_{\text{دفعا 2}}$, $\underbrace{\boxed{60,60,60}}_{\text{دفعا3}}$, $\underbrace{59,59,59}_{\text{دفعا3}}$, $\underbrace{58,58,58}_{\text{دفعا3}}$, $\underbrace{56,56}_{\text{دفعا2}}$

(i) گڏيل = 68+66+65+64+63+62+2(61)+3(60)+3(59)+3(58)+2(58) = 1220

$$\therefore \quad \bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{1220}{20} = 61$$

يعنيٰ شاگردن جو سراسري وزن 61 ڪلوگرام آهي.
(ii) هتي $n = 20$ ۽ جيئن تہ 20 هڪ بڌي عدد آهي تنهن ڪري ان جا 2 وچيان عدد آهن ڏهون ۽ يارهون جن جو ملھ آهي 60 ۽ 60.
(ii) متيان = 60, 59, 58 (ٻنهي ملهن جي سراسري)
يعنيٰ شاگردن جي وزن جو متيان 60 ڪلوگرام آهي.
(iii) ڏنل مواد ۾ ٽي ڪثرتي سراسريون آهن 60 ڪلوگرام، 59 ڪلوگرام ۽ 58 ڪلوگرام، جو تہ انهن مان هرهڪ 3 دفعا آيل آهي.

(iii) ڪثرتي سراسري = $\frac{60+60}{2} = 60$

نوٽ: ڪثرتي سراسري ≥ متيان ≥ حسابي سراسري

مشق 12.3

1. هڪ گراهڪ ڪجھ سبزيون خريد ڪيون جن جو وزن ۽ رقم (رپين ۾) هيٺينءَ ريت آهي:

سبزي جو قسم	وزن (ڪلوگرام)	اگھ/ رقم في ڪلوگرام (رپين ۾)
(i) پٽاٽا	12	25
(ii) بصر	8	30
(iii) ٽماٽا	5	60
(iv) گجرون	3	40
(v) پيندبيون	4	80

سبزين جي .... سراسري قيمت في ڪلوگرام لهو.

2. انين ڪلاس جي 20 شاگردن جو قد (سينٽي ميٽرن ۾) هيٺ ڏجي ٿو.

130، 135، 140، 145، 142، 141، 140، 135، 136، 137، 132،
134، 136، 138، 140، 142، 144، 143، 139، 138

شاگردن جي قد جي حسابي سراسري، مڌيان ۽ ڪثرتي سراسري لهو.

چا غير مساوات ڪثرتي سراسري ≥ مڌيان ≥ حسابي سراسري درست آهي

3. سنڌڙي انبن جا 20 ڪريٽ (ڪوڪا) حيدرآباد کان سکر موڪليا ويا. ڪريٽن ۾ موجود سڙيل انبن جو تعداد ترتيب وار هيٺ ڏجي ٿو:

0، 2، 1، 0، 3، 2، 1، 0، 4، 1، 2، 3، 0، 2، 3، 4، 1، 2، 3، 3.

سڙيل انبن جي تعداد جي حسابي سراسري، ڪثرتي سراسري ۽ مڌيان لهي معلوم ڪريو تہ چا ڪثرتي سراسري ≥ مڌيان ≥ حسابي سراسري

4. 45 شاگردن سائنس ۽ رياضي جي ٽيسٽ ڏني. انهن جي ڪنيل مارڪن جي تعددي ورهاست هيٺ ڏجي ٿي:

ڪنيل مارڪون	10	20	30	40	50	60	70	80	90
رياضي جي مضمون جا شاگرد	5	4	7	8	6	6	4	5	3
سائنس جي مضمون جا شاگرد	4	4	8	8	5	3	2	7	4

هرهڪ مضمون ۾ ڪنيل مارڪن جي سراسري لهو. ان بنياد تي ٻڌايو تہ ڪهڙي مضمون ۾ شاگردن وڌيڪ سٺي ڪارڪردگي ڏيکاري.

5. 100 خاندانن جي ٻاتين جي تعداد جي جدول هيٺ ڏنل آهي:

في خاندان ٻاتي	2	3	4	5	6	7	8	9	10
خاندانن جو تعداد	24	32	20	10	5	4	2	2	1

ٻاتين جي تعداد جي سراسري لهو.

جائزي واري مشق 12

1. هيٺ ڏنل هر بيان ۾ صحيح جواب کي گول لڳايو.

(i) 7، 6، 5، 5، 0، 1 جي حسابي سراسري آهي:

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

(ii) 2، 3، 4، 3، 5، 3 جي ڪثرتي سراسري آهي:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(iii) 2، 3، 4، 5، 10 جو مڌيان آهي:

(a) 4 (b) 3 (c) 2 (d) 5

(iv) 0، 2، 4، 8، 6، 2 جو مڌيان آهي:

(a) 2 (b) 0 (c) 4 (d) 3

(v) 2، 4، 6، 6، 8، 2، 2، 4 ۾ ڪثرتي سراسرين جو تعداد آهي:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(vi) حسابي سراسري لهڻ جو فارمولا آهي:

(a) $\bar{X} = \frac{\sum x}{n}$ (b) $\bar{X} = \frac{n}{\sum x}$ (c) $\bar{X} = \sum x.n$ (d) $n = \frac{\bar{X}}{\sum x}$

(vii) اها قيمت جيڪا ڏنل مواد ۾ ٻين قيمتن کان گهڻا دفعا موجود هجي ان کي چئبو:

(a) حسابي سراسري (b) مڌيان (c) تعددي ورهاست (d) ڪثرتي سراسري

(viii) جيڪڏهن $\bar{X} = 6$ ۽ $n = 5$ ته $\sum x$ برابر آهي:

(a) 5 (b) 6 (c) 30 (d) $\frac{5}{6}$

(ix) خام مواد کي مختصر ۽ منظم نموني پيش ڪرڻ جي طريقي کي چئبو آهي:

(a) تعددي ورهاست (b) حسابي سراسري

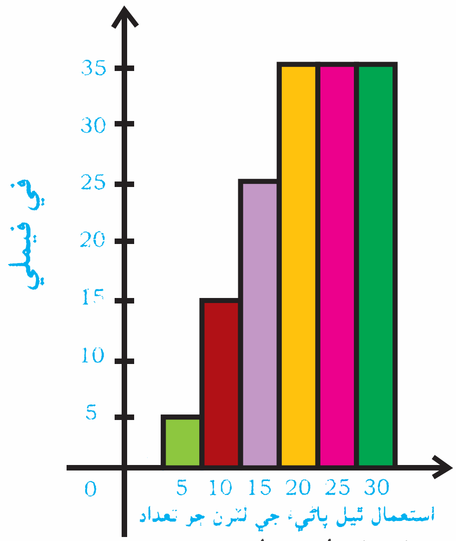
(c) مڌيان (d) ڪثرتي سراسري

(x) خاصيتي مواد جو مرڪزي رجحان ڏيندو:

(a) تعددي تقسيم (b) حسابي سراسري

(c) ڪثرتي سراسري (d) مڌيان

2. کنهن پلازه ۾ 110 خاندان رهن ٿا. سامهون ڪالمي گراف ڪي شڪل ۾ پيئڻ واري پاڻيءَ جي هرهڪ ۾ فيملي ۾ استعمال ٿيل لٽرن جو تعداد ڏيکاريل آهي.



(i) گراف کي ڏسي ٻڌايو ته پيئڻ واري پاڻيءَ جو استعمال لٽرن ۾ جيڪو ڏيکاريل آهن ان جو موڊل نمبر (Model) ڇا آهي.

(ii) حسابي سراسري في فيملي معلوم ڪريو.

(iii) ميڊيان (Median) پڻ انهيءَ ڪالمي گراف ۾ استعمال ٿيل لٽرن جو في فيملي معلوم ڪريو.

3. هڪ ڪلاس جا 30 شاگرد ڪنهن امتحان ۾ ويٺا. ڪل 40 مارڪن مان سندن ڪنيل مارڪون آهن:

18	24	10	3	14	26	22	18	25	11	29	17	16	11	25
11	14	15	4	22	13	23	29	10	27	18	10	25	13	14

(i) متي ڏنل خام مواد مان پنجن جماعتن تي مشتمل تعددي ورهاست ٺاهيو.

(ii) ڪهڙيون مارڪون سڀ کان وڌيڪ شاگردن ڪنيون؟

(iii) متين تعددي ورهاست لاءِ ڪالمي نقشو ٺاهيو.

4. سڌي طريقي ۽ مطابقت جي طريقي سان هيٺ ڏنل مواد لاءِ تعددي تقسيم جي جوڙجڪ ڪريو جيڪا ڇهن جماعتن تي مشتمل هجي ۽ ان جو ڪالمي نقشو به ٺاهيو.

67، 73، 60، 66، 68، 67، 66، 62، 60، 60، 55، 50، 60، 63، 64،
63، 70، 69، 70، 60، 50، 59، 59، 69، 72، 70، 65

خلاصو

- معلومات سهيڙڻ شماريات جي مضمون جو هڪ حصو آهي.
- شماريات انهن اصولن ۽ طريقن جو مطالعو آهي جيڪي معلومات گڏ ڪرڻ ۽ تجزيو ڪرڻ ۾ ڪم اچن ٿا.
- مواد کي گڏ ڪرڻ وقت ڪي رقمون بار بار اينديون آهن. ڪابه رقم جيترا دفعا اچي ان عدد کي انهيءَ رقم جو تعدد (Frequency) چئبو آهي.
- ابتدائي مواد کي منظم ۽ مختصر طريقي سان پيش ڪرڻ جي عمل کي تعددي ورهاست (Frequency Distribution) چئبو آهي.
- مرڪزي رجحان معلوم ڪرڻ لاءِ عام طرح چار طريقا استعمال ڪيا وڃن ٿا. حسابي سراسري، قدري سراسري، ڪثرتي سراسري ۽ مڌيان.
- غير گروهي مواد جي حسابي سراسري لاءِ فارمولا: $\overline{X} = \frac{\sum x}{n}$

$$\text{يعني حسابي سراسري} = \frac{\text{سڀني رقمن جو جوڙ}}{\text{رقمن جو تعداد}}$$

- ڪثرتي سراسري اها رقم آهي جيڪا مواد ۾ سڀ کان وڌيڪ ڀيرا موجود هجي.
- مڌيان اها رقم آهي جيڪا مواد کي پورن ٻن حصن ۾ ورهائي.
- مڌيان معلوم ڪرڻ لاءِ اسان ڏنل رقمن کي وڌندڙ يا گهٽجندڙ ترتيب ۾ لکندا آهيون.
- (i) جيڪڏهن مواد ۾ موجود رقمن جو تعداد اڪي هوندو ته وچين رقم مڌيان آهي.
- (ii) جيڪڏهن رقمن جو تعداد ٻڌي هوندو ته وچين ٻن رقمن جي سراسري مڌيان ٿيندي.
- هسٽوگرام يا ڪالمي نقشو هڪ اهڙو عمودي بارگراف آهي جنهن ۾ پٽين يا بارن (Bars) جي وچ ۾ ڪابه وٿي نه آهي.
- ڪالمي نقشي ۾ لاڳيتو ٿهيل مستطيل هوندا آهن جن جي ويڪر هڪ جيتري پر اوچائي مختلف هوندي آهي. اهي تعددي جدولن جي مدد سان ٺاهي سگهون ٿا.
- مرڪزي رجحان اها اڪيلي رقم آهي جيڪا پوري مواد ۾ موجود رقمن جي تقريباً مرڪز ۾ هوندي آهي.

رياضيءَ ۾ استعمال ٿيندڙ نشانيون ۽ مخفف

∅	Null set, Empty set يا void set = خالي سيٽ
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$	Set of Natural Numbers = قدرتي عددن جو سيٽ
$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3,...\}$	Set of Whole Numbers = مڪمل عددن جو سيٽ
$\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, ...\}$	Set of Integers = سجن عددن جو سيٽ
$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q}, p \wedge q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$	Set of Rational Numbers = ناطق عددن جو سيٽ
$\mathbb{E} = \{0, \pm2, \pm4, \pm6, ...\}$	Set of Even Integers = ٻڌي سجن عددن جو سيٽ
$\mathbb{O} = \{\pm1, \pm3, \pm5,...\}$	Set of Odd Integers = اِڪي سجن عددن جو سيٽ
$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7,...\}$	Set of Prime Numbers = مفرد عددن جو سيٽ
$\subseteq$ =	Subset = ماتحت سيٽ
$\subset$ =	Proper subset = واجب ماتحت سيٽ
P (A) =	Power set of a set A, Set of all possible subsets of set A = قوت سيٽ
$\cap$ =	Intersection = ڪاٽ
$\cup$ =	Union = ميلاپ
$\wedge$ =	And = ۽
$\mathbb{U}$ =	Universal Set = ڪائناتي سيٽ
$A' = \mathbb{U} - A$ =	Complement of Set A = سيٽ A جو ڪامپليمينٽ
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ =	Set of Real Numbers = حقيقي عددن جو سيٽ
$\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ =	Set of Irrational Numbers = غير ناطق عددن جو سيٽ
$\sqrt{\ }$ =	Square Root = ٻيو مول
$\sqrt[3]{\ }$ =	Cube Root = ٽيون مول
0 and 1 =	Binary Digits = ٻہ بنياد وارا انگ
0,1,2,3 and 4 =	Numerals of base 5 = پنج بنياد وارا انگ
0,1,2,3,4,5,6 and 7 =	Numerals of base 8 or octal system = 8 بنياد وارا انگ
0,1,2,3,4,5,6,7,8 and 9 =	Numerals of base 10, Decimal System = ڏهائي سرشتو
ATM =	Automated Teller Machine = آٽوميٽيڊ ٽيلر مشين
\$ =	US Dollars = آمريڪي ڊالر
£ =	Pound Stierling = برطانوي پائونڊ
ريال =	Saudi Riyal = سعودي ريال
Rs =	Rupees (Pakistani) = پاڪستاني رپيو
€ =	Euro = يورو
¥ =	Yuan (Chinese) = يان (چين)
¥ =	Yen (Japanees) = ين (جاپان)
I = PRT =	Profit = Principal × Rate × Time = نفعو = وقت × شرح × اصل رقم
C.P =	Cost Price = خريدي قيمت
S.P =	Selling Price = وڪري واري قيمت

رياضيءَ ۾ استعمال ٿيندڙ نشانيون ۽ مخفف

M.P	=	Marked Price = لکيل قيمت
$\overline{AB}$	=	Line Segment AB = AB ليک ٽڪر
$\overleftrightarrow{AB}$	=	Line AB = AB ليک
$\perp$	=	Perpendicular = عمود
$\parallel$	=	Parallel = پور وچوٽ
m$\overline{AB}$	=	Measure (Length) of line segment AB = ليک ٽڪر AB جي ماپ
m$\angle$A	=	Measure of Angle A = ڪنڊ A جي ماپ
$\parallel^m$	=	Parallelogram = پور وچوٽ پاسو چوڪنبو
a, b, c; $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$		Sides of a $\triangle$ABC = ٽڪنڊي جا پاسا
$\triangle$	=	Triangle = ٽڪنڊو
$\blacktriangle$	=	Area of Triangle = ٽڪنڊي جي ايراضي
S	=	Semi-perimeter of a Triangle = ٽڪنڊي جي احاطي جو اڌ
s	=	Height of slant side of a cone = مخروط جي مڙيل پاسي جي اوچائي
r	=	Raduis of a circle or sphere = گولي يا گول جو رداس
h	=	Height of a cylinder = سلينڊر جي اوچائي
V	=	Volume = مقدار
π	Pi =	$\frac{22}{7}$ (approximately) = تقريباً $\frac{22}{7}$
Q.E.D	=	Quod Erat Demonstrandum = "Meaning 'which was to be proved."= اهو ئي ثابت ڪرڻو هو
$\leftrightarrow$	=	One-One (or 1-1) correspondence = هڪ-هڪ (1-1) مطابقت آهي
$\cong$	=	Congruence = يڪسان
S.A.S	=	Side Angle Side = پاسو ڪنڊ پاسو
Sin θ	=	Sine of the Angle θ (Theta) = Sin ڪنڊ θ جو
Cos θ	=	Cosine of the Angle θ = Cosine ڪنڊ θ جو
Tan θ	=	Tangent of the Angle θ = Tan ڪنڊ θ جو
Cot θ	=	Cotangent of the Angle θ = Cot ڪنڊ θ جو
Sec θ	=	Secant of the Angle θ = Sec ڪنڊ θ جو
Cosec θ or Csc θ	=	Cosecant of the Angle θ = Cosec ڪنڊ θ جو
f	=	Frequency = تعدد
$\overline{X}$	=	Mean = سراسري
Σx_i	=	Sum of Measures = ماپن جو جوڙ
n	=	Number of Measures = ماپن جو تعداد
$\overline{X}_\omega$	=	Weighted Mean = وزني سراسري
𝍸	=	Tally Marks , 5 = ٽيلي نشان

جواب

دؤر جي مشق I

1. (i) $A=\{1,2,3,4\ 5\}$, $A=\{x|x\in\mathbb{N}\wedge x\leq 5\}$

(ii) $B=\{-1,0,1,2\}$, $B=\{x|x\in\mathbb{Z}\wedge -2<x<3\}$

(iii) $C=\{11,13,17,19,23,29\}$, $C=\{x|x\in\mathbb{P}\wedge 10<x<30\}$

2. A ۽ C محدود سيٽ   B,D ۽ E لامحدود سيٽ

مشق 1.1

1. (i) $A\subseteq B$ (ii) $C\subseteq D$ (iii) $S\subseteq T$

2. (i) $\{a\},\{a,e\},\{a,e,i\}$ (ii) $\{\ \},\{x\},\{y\}$

3. (i) واجب ماتحت سيٽ : $\{2\}$, $\{4\}$,

غير واجب ماتحت سيٽ : $\{2,4\}$

(ii) واجب ماتحت سيٽ : $\{2\}$, $\{3\}$;

غير واجب ماتحت سيٽ : $\{2,3\}$

4. (i) $\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\ \{1,2,3\}$

(ii) $\{\ \}, \{2\}$ (iii) $\{\ \}, \{3\}, \{5\}, \{3,5\}$

(iv) $\{\ \}, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1,0\}, \{-1,1\}, \{0,1\}, \{-1,0,1\}$

(v) $\{\ \}, \{2\}, \{4\}, \{0\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}, \{2,4,6\}$

5. (i) $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}\}$

(ii) $P(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$ (iii) $P(C) = \{\varnothing\}$

6. أهو سيٽ جنهن جو فقط هڪ رُڪن آهي،
مثال طور $\{a\}$

7. خالي سيٽ

8. (i) $\{1,3,5,7\}$ (ii) $\{2,3,5,7,11\}$

9. (i) $A = \{20,30,40,50,60,80,100\}$

(ii) $B = \{40,80\}$

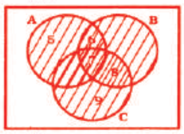
(iii) $C = \{30,50\}$ (iv) $D = \{50,100\}$

10. (i) $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}$ (ii) $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$ (iii) $\mathbb{P}\subseteq\mathbb{N}$

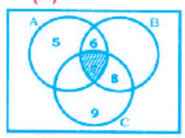
(iv) $\mathbb{E}\subseteq\mathbb{Z}$ (v) $\mathbb{O}\subseteq\mathbb{Q}$ (vi) $\mathbb{E}\subseteq\mathbb{Q}$

مشق 1.3

1. (i)

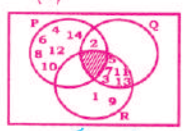


(ii)



2. (i)

(ii)



شاگردن کي گهرجي ته 4. ۽ 3. جون وين شڪليون پاڻ ناهين.

جائزي جي مشق 1

1. (i) (b) (ii) (c) (iii) (c) (iv) (b)

2. $P(A) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{x,z\}, \{y,z\}, \{x,y,z\}\}$

5. (i) (b) (ii) (d) (iii) (c)

6. (iv), $\{x, y\}$; (vi) $\varnothing$

مشق 2.1

A. ناطق عدد: 1,2,3,4,6,8,11

غير ناطق عدد: 5,7,9,10,12

B. ڪٽندڙ ڏهائي اٽپور : 3,6,8,9,11,12

اڻ ڪٽندڙ ڏهائي اٽپور: 1,2,4,5,7,10

مشق 2.2

A. **1.** 25 **2.** 169. **3.** 361 **4.** 1521 **5.** 2025 **6.** 3354 **7.** 3969 **8.** 6241 **9.** 9409 **10.** 11664

B. **1.** 16, 25 **2.** 25, 36, 49 **3.** 49, 64 **4.** 81

C. **1.** $7^2 = 1+2+\ldots+7+6\ldots+1=49$

2. $9^2 = 1+2+\ldots+9+8\ldots+1=81$

جواب

3. $15^2 = 1+2+...+15+14+...+1=225$
4. $11^2 = 1+2+...+11+10+...+1=121$
5. $13^2 = 1+2+...+13+12+...+1=169$
6. $8^2 = 1+2+...7+8+7+...+1=64$
7. $12^2 = 1+2+...+12+11+...+1=144$
8. $16^2 = 1+2+...+16+15+...+1=256$
9. $20^2 = 1+2+...+20+19+...+1=400$
10. $27^2 = 1+2+...+27+26+...+1=729$

مشق 2.3

A. **1.** 31 **2.** 36 **3.** 587 **4.** 904
5. $\frac{9}{11}$ **6.** $\frac{11}{14}$ **7.** $\frac{21}{44}$ **8.** $1\frac{4}{121}$
9. 15.8 **10.** 0.64 **11.** 54.6 **12.** 11.45

B. **1.** 32 **2.** 119 **3.** 998 **4.** 3214
5. $\frac{13}{17}$ **6.** $\frac{35}{53}$ **7.** $\frac{171}{236}$ **8.** $1\frac{1}{4}$
9. 25.47 **10.** 13.45 **11.** 26.98
12. 87.256

مشق 2.4

A. **1.** 1.41 **2.** 2.23 **3.** 3.60
4. 11.87 **5.** 13.41 **6.** 1.58
7. 12.36 **8.** 0.11 **9.** 4.80
10. 11.18

B. **1.** 2.449 **2.** 2.828 **3.** 3.316
4. 12.449 **5.** 14.317 **6.** 2.701
7. 11.215 **8.** 38.326 **9.** 359.232
10. 57.924

مشق 2.5

1. 2 **2.** 3 **3.** 3 **4.** 3
5. 3 **6.** 4 **7.** 4 **8.** 5
9. 4 **10.** 4 **11.** 5 **12.** 5

مشق 2.6

1. 92 رپيا **2.** 104 ميٽر **3.** 34
4. 60 ميٽر **5.** 2500 ميٽر

مشق 2.7

A. **1.** 1,000 **2.** 8,000 **3.** 27,000
4. 64,000 **5.** 125,000 **6.** 216,000
7. 512 **8.** 1,728 **9.** 3,375
10. 5,832 **11.** 13,824 **12.** 15,625

B. **1.** $\frac{1}{8}$ **2.** $\frac{8}{27}$ **3.** $\frac{27}{64}$
4. $\frac{64}{125}$ **5.** $2\frac{10}{27}$ **6.** $15\frac{5}{8}$
7. $1\frac{61}{64}$ **8.** $10\frac{37}{216}$ **9.** $1\frac{331}{1000}$
10. $9\frac{7507}{8000}$ **11.** $1\frac{271}{729}$ **12.** $37\frac{1}{27}$

C. **1.** 0.064 **2.** 0.729 **3.** 1.729
4. 4.096 **5.** 9.261 **6.** 15.625
7. 0.000001 **8.** 0.000008
9. 0.000125 **10.** 1.404928
11. 1.157625 **12.** 1.030301

D. **1.** هائو **2.** هائو **3.** هائو **4.** هائو
5. هائو **6.** هائو **7.** هائو **8.** هائو
9. هائو **10.** هائو **11.** هائو **12.** هائو

مشق 2.8

1. 4 **2.** 7 **3.** 11 **4.** 8
5. 9 **6.** 42 **7.** 15 **8.** 24
9. 25 **10.** 33 **11.** $\frac{1}{2}$ **12.** $1\frac{1}{3}$
13. $1\frac{1}{4}$ **14.** $1\frac{1}{5}$ **15.** $\frac{7}{9}$

جائزي جي مشق 2

1. (i) (c) (ii) (c) (iii) (c) (iv) (b)
(v) (c) (vi) (a) (vii) (a) (viii) (c)
(ix) (a) (x) (c) (xi) (a) (xii) (c)

2. (i) 3 (ii) 3 (iii) 4

3. (i) $4\frac{3}{17}$ (ii) $5\frac{1}{3}$ (iii) $10\frac{1}{13}$

جواب

(iv) 0.231 (v) 0.452 (vi) 8.1

4. 402 m

5. (i) 15 (ii) 12 (iii) $\frac{7}{8}$ (iv) $1\frac{2}{9}$

مشق 3.1

1. **(i)** جنهن سرشتي ۾ ٻه انگ 0، 1 استعمال ٿين ٿا اهو ٻہ بنياد سرشتو آهي.

$0_2, 1_2, 10_2, 11_2, 100_2, 101_2, 110_2, 111_2$

(ii) جنهن سرشتي ۾ پنج انگ 0، 1، 2، 3، 4 استعمال ٿين ٿا، اهو پنج بنياد وارو سرشتو آهي.

$0_5, 1_5, 2_5, 3_5, 4_5, 10_5, 11_5, 12_5, 13_5, 14_5, 20_5, 21_5$

(iii) جنهن سرشتي ۾ فقط اٺ انگ 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7 استعمال ٿين ٿا، اهو اٺ بنياد سرشتو آهي.

$0_8, 1_8, 2_8, 3_8, 4_8, 5_8, 6_8, 7_8, 10_8, 11_8, 12_8, 13_8, 14_8, 15_8, 16_8, 17_8$

(iv) جنهن سرشتي ۾ فقط ڏهہ انگ 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9 استعمال ٿين ٿا، اهو ڏهائي سرشتو آهي.

مثال: 34, 57, 63

2. **(i)** $1\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0$
(ii) $1\times2^3 + 1\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0$
(iii) $1\times2^4 + 0\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0$
(iv) $1\times2^4 + 1\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0$
(v) $1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$
(vi) $1\times2^5 + 1\times2^4 + 0\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2$
1×2^0
(vii) $1\times2^5 + 1\times2^4 + 1\times2^3 + 1\times2^2 + 1\times2$
1×2^0

3. **(i)** $2\times5^1 + 3\times5^0$ **(ii)** $4\times5^1 + 4\times5^0$
(iii) $1\times5^2 + 2\times5^1 + 4\times5^0$
(iv) $1\times5^2 + 4\times5 + 2\times5^0$
(v) $2\times5^2 + 1\times5^1 + 4\times5^0$
(vi) $3\times5^2 + 0\times5 + 3\times5^0$
(vii) $3\times5^2 + 4\times5 + 4\times5^0$
(viii) $4\times5^2 + 0\times5 + 4\times5^0$

4. **(i)** $3\times8^1 + 6\times8^0$ **(ii)** $7\times8^1 + 1\times8^0$
(iii) $1\times8^2 + 1\times8^1 + 6\times8^0$
(iv) $1\times8^2 + 4\times8 + 2\times8^0$
(v) $1\times8^2 + 6\times8 + 2\times8^0$
(vi) $3\times8^2 + 4\times8 + 1\times8^0$
(vii) $5\times8^2 + 2\times8 + 4\times8^0$

5. **(i)** $2\times10^2 + 0\times10^1 + 1\times10^0$
(ii) $3\times10^2 + 1\times10^1 + 9\times10^0$
(iii) $4\times10^3 + 0\times10^2 + 7\times10^1 + 5\times10^0$
(iv) $5\times10^4+6\times10^3+9\times10^2+7\times10^1+0\times10^0$
(v) $9\times10^5 + 8\times10^4 + 0\times10^3 + 7\times10^2 + 6\times10^1 + 2\times10^0$

مشق 3.2

A. **1.** 100100_2 **2.** 1001101_2
3. 1011001_2 **4.** 10011100_2
5. 100011000_2 **6.** 111101001_2
7. 1010001110_2 **8.** 1100010010_2
9. 1111100111_2 **10.** 11001000000_2
11. 11010101001_2
12. 111000100002_2 **13.** 10001001000_2
14. 11111010001_2 **15.** 11111100100_2

باقي رهيل سوالن جا جواب شاگرد پاڻ حل ڪن.

B. **1.** 322_5 **2.** 343_5 **3.** 1134_5
4. 1310_5 **5.** 2440_5 **6.** 3234_5
7. 10131_5 **8.** 13242_5 **9.** 31012_5
10. 101313_5 **11.** 130010_5
12. 130200_5 **13.** 130031_5
14. 134402_5 **15.** 134010_5

C. **1.** 770_8 **2.** 3345_8 **3.** 134010_5
4. 101575_8 **5.** 136350_8
6. 142657_8 **7.** 167536_8
8. 232416_8 **9.** 235755_8
10. 301433_8 **11.** 257631_8
12. 301301_8 **13.** 300715_8
14. 277421_8 **15.** 303237_8

مشق 3.3

A. **1.** 13 **2.** 27 **3.** 23 **4.** 53

جواب

5. 43　6. 119　7. 102　8. 103
9. 214　10. 253　11. 146　12. 197

B. 1. 11　2. 15　3. 20　4. 7
5. 12　6. 41　7. 122　8. 67
9. 101　10. 115　11. 205　12. 611
13. 337　14. 508　15. 579

C. 1. 39　2. 14　3. 32　4. 48
5. 56　6. 84　7. 162　8. 196
9. 296　10. 448　11. 1542　12. 556
13. 3456　14. 2309　15. 2595

مشق 3.4

A. 1. 1001_2　2. 1111_2　3. 10101_2
4. 110100_2　5. 11011_2　6. 1010_2
7. 11100_2　8. 11001_2　9. 1010110_2
10. 110000_2　11. 110000_2　12. 1001011_2

B. 1. 1010_2　2. 10_2　3. 1000_2
4. 10101_2　5. 101010_2　6. 1110_2
7. 111_2　8. 111_2　9. 10001_2
10. 10101_2

C. 1. 1101_2　2. 10100_2　3. 1010_2
4. 0_2

D. 1. 1111_2　2. 11110_2
3. 111100_2　4. 1001110_2
5. 100011_2　6. 11010010_2
7. 10010110_2　8. 101101_2
9. 111100_2　10. 110000001_2
11. 11010010_2　12. 100010100_2

مشق 3.5

A. 1. 1121_5　2. 10203_5
3. 10231_5　4. 112_5
5. 113434_5　6. 241_5
7. 10001_5　8. 4402_5
9. 10341_5　10. 22333_5
11. 30230_5　12. 100122_5

B. 1. 330_5　2. 133_5
3. 1311_5　4. 1014_5
5. 3032_5　6. 1422_5
7. 334_5　8. 13123_5

C. 1. 1000_5　2. 10111_5
3. 2000_5　4. 43124_5
5. 20324_5　6. 3144_5
7. 2334_5　8. 111_5

D. 1. 302333_5　2. 242_5
3. 320042_5　4. 3204003_5
5. 203124_5　6. 220034_5
7. 114012_5　8. 2224222_5
9. 2312120_5　10. 431440_5
11. 10340220_5　12. 2243214_5

مشق 3.6

1. (i) 445_8　(ii) 13755_8
(iii) 73647_8　(iv) 156344_8
(v) 726447_8

2. (i) 25_8　(ii) 5_8
(iii) 352_8　(iv) 7673_8
(v) 63744_8

3. (i) 3763_8　(ii) 66075_8
(iii) 10323050_8　(iv) 11771530_8
(v) 377645061_8

مشق 3.7

1. (i) 111101_2　(ii) 10010010_2
(iii) 10000101_2　(iv) 1001000_2　(v) 1100111_2

2. (i) 33_5　(ii) 131_5
(iii) 34_5　(iv) 241_5
(v) 11200_5

3. (i) 202103_5 and 1100110000000_2
(ii) 141244_5 and 1011011000000_2
(iii) 214314200_5 ۽ 11100011101001001001_2

4. 110000111010_2, 100010_5 and 6072_8

5. 111101101101111_2, 2002344_5 ۽ 75557_8

جائزي جي مشق 3

1. (i) $9\times10^6+8\times10^5+7\times10^4+6\times10^3$
$+5\times10^2+2\times10^1+1\times10^0$

جواب

1. (i) 486 ۽ 746_8 (ii) 3092 ۽ 6024_8
(iii) 16954_{10} ۽ 41072_8

2. (i) 65345 (ii) 9867
(iii) 369635 (iv) 230400

3. (i) 10000101111_2, 13241_5 ۽ 2057_8
(ii) 110001_2, 144_5 ۽ 61_8
(iii) 1110110100111100_2,
3420412_5 ۽ 166474_8
(iv) 110010110010000_2,
1313000_5 ۽ 62620_8

4. (i) 130_5 ۽ 50_8 (ii) 312_5 ۽ 122_8
(iii) 42 ۽ 52_8 (iv) 50_{10} ۽ 200_5
(v) 453 ۽ 3303_5

5. (i) ڏهه (ii) اَٺ (iii) پنج
(iv) پنج (v) اَٺ (vi) ڏهه

6. (i) $4\times8^0=4\times1=4$ ۽ $4\times10^0=4\times1=4$
(ii) $3\times5^1=3\times5=15$ ۽ $3\times10^1=30$
(iii) $0\times8^2=0$ ۽ $0\times10^2=0$
(iv) $2\times5^3=250$ ۽ $2\times8^3=1024$
(v) $1\times5^4=625$ ۽ $1\times10^4=10000$

دؤر جي مشق IV

1. (i) 8 (ii) 22 (iii) 9 (iv) 5.4
2. 33
3. 2,700 رپيا
4. 52.6 ميٽر
5. 122 ڏينهن
6. 84 منٽ
7. 60 ميٽر
8. 150 ماڻهو
9. 15 ڏينهن
10. 40 ماڻهو

مشق 4.1

1. 12رپيا
2. 9,000 ماڻهو
3. 18,864رپيا
4. 200 سائيڪلون
5. 40 ڏينهن
6. 4 ڪلاڪ
7. 15 ماڻهو
8. 4,000 ڪلوگرام
9. 24 ڏينهن
10. 8 ڪلاڪ

مشق 4.2

1. 9,000 رپيا، مريم جي منافعي جو حصو
12,000 رپيا، عارف جي منافعي جو حصو
2. 16,800 رپيا، اڪرم جي منافعي جو حصو
7,200رپيا، اسلم جي منافعي جو حصو
4,800رپيا، اصغر جي منافعي جو حصو
3. 15,000 رپيا، علي جو منافعو
10,500 رپيا، زين جو منافعو
12,000 سعاد جو منافعو
4. (ii) 2:3 ; 24,000 رپيا ; 36,000 رپيا
(iii) 1:2 ; 20,000 رپيا ; 40,000 رپيا
(iv) 75,000 رپيا ; 24,000 رپيا ; 36,000 رپيا
5. 180,000 رپيا، ڌيءُ جو حصو
360,000 رپيا، پٽ جو حصو
6. 100,000 رپيا، هرهڪ بيواهه جو حصو
560,000 رپيا، هرهڪ پُٽ جو حصو
280,000 رپيا، هرهڪ ڌيءُ جو حصو
7. 240,000 رپيا، ماءُ جو حصو
180,000 رپيا، بيواهه جو حصو
204,000 رپيا، هرهڪ پُٽ جو حصو
102,000 رپيا، هرهڪ ڌيءُ جو حصو
8. 100,000 رپيا، هرهڪ پُٽ جو حصو
9. (ii) 320,000 رپيا ; 160,000 رپيا
(iii) 4; 4; 200,000 رپيا ; 100,000 رپيا
(iv) 1; 6; 200,000 رپيا ; 100,000 رپيا
(v) 4; 6; 160,000 رپيا ; 80,000 رپيا
(vi) 1; 6; 200,000 رپيا ; 100,000 رپيا

مشق 4.3

1. (i) 5.538.5 يان
(ii) 31,250 هندوستاني رپيا
(iii) 15,290 پاڪستاني رپيا (iv) 31,500 پاڪستاني رپيا

جواب

(v) 1500 ليرا (ترڪش)

2. 176,475 پاڪستاني رپيا **3.** 1,000 آمريڪي ڊالر

4. 30,000 هندوستاني رپيا

5. 76,800 پاڪستاني رپيا

6. 74,220 رپيا = امپورٽيڊ فريج جي قيمت
3,280 رپيا = بچت

مشق 4.4

1. 15,000 رپيا **2.** 8,000 رپيا

3. 75,000 رپيا **4.** 3%

5. ڏينهن12ءِ مهينا10 سال2 ياسال $2\frac{13}{15}$ يا سال2.86

6. 5% **7.** 12.5 سال

8. (i) 4,000 رپيا (ii) 38,220 رپيا
(iii) 10 سال (iv) 5,000 رپيا
(v) 30%

9. (i) 1,666.60 رپيا (ii) 60,000 رپيا

10. 1,784,000 رپيا

11. (i) 8,000 رپيا ; 232,000 رپيا
(ii) 7,333.30 رپيا ; 216,000 رپيا
(iii) 4,666.60 رپيا ; 264,000 رپيا
(iv) 6,000 رپيا ; 224,000 رپيا

مشق 4.5

1. (i) 105 رپيا; 10% (ii) 1,998 رپيا; 20%
(iii) 7,320 رپيا; 1,320 رپيا (iv) 1000,250

2. 8.33% منافعو **3.** 10% منافعو

4. 10% منافعو

5. (i) 1,925 رپيا ; 8,075 رپيا ; 19.25%
(ii) 1,925 رپيا ; 8,075 رپيا ; 19.25%
(iii) 2,350 رپيا ; 7,650 رپيا ; 23.50%
(iv) 2,784 رپيا ; 7,216 رپيا ; 27.84%

6. 7,267.50 رپيا **7.** 31.6%

8. 7,500 رپيا

مشق 4.6

1. (i) 4,950 رپيا ; 2,574 رپيا ;
1,336.50 رپيا ; 445.50 رپيا
(ii) 7,425 رپيا ; 3,861 رپيا ;
2,004.70 رپيا ; 668.20 رپيا
(iii) 14,850 رپيا ; 7,722 رپيا ;
4009.50 رپيا ; 1,336.50 رپيا

2. 16,350 رپيا **3.** 28,525 رپيا

4. (ii) 9,000 رپيا ; 8100 رپيا ;
27,100 رپيا
(iii) 12,000 رپيا ; 10,800 رپيا ;
9,720 رپيا ; 32,520 رپيا
(iv) 500,000 رپيا ; 20,000 رپيا ;
18,000 رپيا ; 54,200 رپيا
(v) 1,000 رپيا ; 40,000 رپيا ;
32,400 رپيا ; 108,400 رپيا

باقي رهيل سوالن جا جواب شاگرد پاڻ حل ڪن.

مشق 4.7

1. 29,500 رپيا **2.** 1100 رپيا

3. 1,251,900 رپيا **4.** 222,000 رپيا

5. 3,600,000 رپيا **6.** 2,900,000 رپيا

7. (ii) 2 ; 0 ; 40,000 رپيا ;
80 ; 2% ; 1,600 رپيا
(iii) 4 ; 750,000 رپيا ;
50 ; 10% ; 29,500 رپيا
(iv) 597,000 رپيا; 4,000,000 رپيا;
2,000 رپيا ; 1,137,000 رپيا

جائزي جي مشق 4

1. (i) c (ii) d (iii) c
(iv) b (v) a (vi) c
(vii) c (viii) b (ix) d (x) d

2. 36,000 رپيا B جي ملندا, 27,000 رپيا A کي ملندا
162,000 رپيا =ڪُل منافعو

3. 160 ڏينهن

4. 10% **5.** 960,000 رپيا

6. 25% فقط هڪ رعايت

باقي رهيل سوالن جا جواب شاگرد پاڻ حل ڪن

1,000,000 رپيا

مشق 5.1

1.

نمبر شمار	مستقل	بدلجندڙ	حرفي اکر
(i)	3, 1	x	x
(ii)	0	–	–

(iv) $8y^2 + yz - 8z^2$

3. $12p^2 - 11pq + q^2$ **4.** $6a^3 + 3a + 7b$

5. (i) $-3x + 12y - 57xy$

(ii) $-7x - 2y + 9xy$

(iii) $x^3 + 6x^2y + 13xy^2 + 36y^3$

(iv) $x^4 + x^3y + xy^3 + y^4$

6. (i) $x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$ (ii) $x^6 + x^3y^3 + y^6$

(iii) $a^4 - 2a^3b + 2ab^3 - b^4$

(iv) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

7. (i) $x^2 - 2x + 4$ (ii) $2x^2 - 8x + 4$

(iii) $x - 2$ (iv) $3x - 4y$

(v) $a^2 - ab + b^2$ (vi) $a^4 + a^2b^2 + b^4$

8. $x^2 + xy - y^2$

9. 47 **10.** $\dfrac{12 - x}{2}$

جائزي جي مشق 5

1. (i) هڪ گهڻ رقمي جنهن جو درجو ٽي آهي

مثال: $2x^3 + 6x^2 - 3x + 5$

(ii) هرهڪ غير خالي رُڪن جي سيٽ کي ظاهر ڪرڻ لاءِ نشاني استعمال ڪيون.

$2x + 3y$ ۾ بدلجندڙ x ۽ y آهن

(iii) a, b, c (iv) 2

(v) سڀني رُڪنن مان وڏي ۾ وڏي ڊگري يا درجو. $x^2 + 5x + 6$ گهڻ رقمي جو درجو 2 آهي.

2. (i) d (ii) c (iii) a (iv) d (v) b

(vi) c (vii) d (viii) c (ix) d (x) a

3. (i) $-3a + 28b$ (ii) 10 (iii) 1

(iv) $\dfrac{910}{27}$ (v) 0

4. (i) $\dfrac{34x - 5y - 21z}{30}$ (ii) $x - y^2$

(iii) $x^2 - y^2 - 2y - 4$

(iv) $a^2 - 2a + 2$ (v) 1

5. -42

مشق 6.1

1. (i) 11025 (ii) 9216

(iii) 3249 (iv) 2704

(v) 9984 (vi) 2491

(iii)	$2, \frac{1}{3}, -3, a, b$	–	a, b
(iv)	$3, -2, l, m$	–	l, m
(v)	$-2, 4, a, b, c$	–	a, b, c
(vi)	p, q, r	x, y	p,q,r,x,y
(vii)	$-5, 9, -4$	x, y	x, y
(viii)	$3^2, -2^2$, p, q	–	p, q
(ix)	$1, -1$	y	y
(x)	$\sqrt{3}, \sqrt{5}, -9, a, b$	–	a, b
(xi)	$7, -2, 3$	x	x
(xii)	-8	–	–

2. (i), (iv), (v), (vi), (vii), (ix), (xi), ۽ (xii) گهڻ رقمون آهن

3. (i) 0 (ii) 1 (iii) 2 (iv) 4

(v) 7 (vi) 1 (vii) 5 (viii) 3

(ix) 6 (x) 4 (xi) 0 (xii) 4

4. (i) 3 (ii) $\sqrt{4}$ (iii) -1 (iv) 1, 1

(v) 5,9,1 (vi) $\sqrt{2}, -\sqrt{3}$ (vii) -2

(viii) $-\dfrac{3}{4}$

5. (i) 2 (ii) 3 (iii) 2 (iv) 2

(v) 2 (vi) 1 (vii) 0 (viii) 3

6. (i) هڪ رقمي (ii) هڪ رقمي (iii) ٻه قمي

(iv) ٻه رقمي (v) ٽه رقمي

(vi) چار رقمي (vii) ٽه رقمي

(viii) چار رقمي (ix) ٽه رقمي

(x) چار رقمي (xi) ٻه رقمي

(xii) چار رقمي

مشق 5.2

1. (i) $2x + z$

(ii) $5x + 8y^3 + 5xy - 2xy^3$

(iii) $x^2 - 4x - 1$

(iv) $-4ab + 2a^2 - 2b^2 - 1$

2. (i) $-6x - 3y + 2z$

(ii) $-7y^5 + y^4 + 6y^3 + 12y^2 + 8$

(iii) $x^2 + y^2 + z^2 - 15x + 15y - 9z$

جواب

11. $(a+b+p+q)(a+b-p-q)$
12. $(12+y^2)(12-y^2)$
13. $2(4a+5b)(4a-5b)$
14. $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$
15. $(2a+b+3c)(2a+b-3c)$

D. **1.** $(x+y+z)(x+y-z)$
2. $(a-b+c)(a-b-c)$
3. $(8a+3b+c)(8a+3b-c)$
4. $(2p-3q+7r)(2p-3q-7r)$
5. $(x^2+y^2+5z)(x^2+y^2-5z)$
6. $(\frac{x}{2}-y+\frac{c}{6})(\frac{x}{2}-y-\frac{c}{6})$
7. $2(a+b+c)(a+b-c)$
8. $(9c+d+4p)(9c+d-4p)$
9. $(2x+3+4y)(2x+3-4y)$
10. $(6+5a-7b)(6-5a+7b)$

مشق 6.3

1. (i) $8x^3+36x^2+54x+27$
(ii) $125x^3-75x^2+15x-1$
(iii) $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$
(iv) $8a^3+60a^2b+150ab^2+125b^3$
(v) $x^3+21x^2z+147xz^2+343z^3$
(vi) $\frac{x^3}{8}-\frac{3x^2}{4}+\frac{3x}{2}-1$
(vii) $125+225a+135a^2+27a^3$
(viii) $125-\frac{75a}{4}+\frac{15a^2}{16}-\frac{a^3}{64}$
(xi) $125a^3-225a^2b+135ab^2-27b^3$
(x) $\frac{x^3}{27}+\frac{x^2y}{15}+\frac{xy^2}{25}+\frac{y^3}{125}$

2. (i) 5832 (ii) 2197
(iii) 1157925 (iv) 1030.301
(v) 0.941192 (vi) 11.390625

3. (i) 198 (ii) – 110
(vii) 9951 (viii) 9879

2. (i) 1.0609 (ii) 0.9801
(iii) 1.1025 (iv) 0.8281
(v) 0.9991 (vi) 24.9996

3. (i) 23 اور 527 (ii) 14 and 197
(iii) 47 اور 2207

4. (i) 11 اور 119 (ii) 2.04 اور 2.1616
(iii) 38 اور 1442

مشق 6.2

A. **1.** $4(x+2z)$ **2.** $5(x+2y+6z)$
3. $2x(1-2y+4z)$ **4.** $2a^2(1+5a-10a^2)$
5. $ab(3a+7b-8ab)$
6. $6abc(a+2b-6c)$
7. $(x+2y)(5+3z)$ **8.** $(c-d)(ab+x)$
9. $(x+5)(x+6y)$ **10.** $(x+2z)(7y-5a)$
11. $3(x^2+2y^2)(1+2z)$
12. $(x-z)(x-7y)$

B. **1.** $(a+5)^2$ **2.** $(x+6y)^2$
3. $(2x+3y)^2$ **4.** $(4a+5b)^2$
5. $(b-c)^2$ **6.** $(7p-1)^2$
7. $(9c-2d)^2$ **8.** $(12x^2-3y^2)^2$
9. $3(a-b)^2$ **10.** $(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y)^2$

C. **1.** $(9x+2y)(9x-2y)$
2. $(13a+10b)(13a-10b)$
3. $3(a+3b^2)(a-3b^2)$
4. $2(p+3q)(p-3q)$
5. $5(x+5y)(x-5y)$
6. $(\frac{5}{x}+\frac{y}{4})(\frac{5}{x}-\frac{y}{4})$
7. $(\frac{x}{12}+y)(\frac{x}{12}-y)$
8. $(\frac{6}{5}l+\frac{7}{2}d)(\frac{6}{5}l-\frac{7}{2}d)$
9. $(c+a-b)(c-a+b)$
10. $(x+y+z)(x+y-z)$

جواب

(iii) $-1\frac{3}{8}$ (iv) 1000.001

4. (i) 140 (ii) -14
(iii) $1\frac{1}{27}$ (iv) 999.999

مشق 6.4

1. هڪ درجي مساواتون جيڪي هڪ بدلجندڙ ۾ آهن:
(ii), (v)
هڪ درجي مساواتون جيڪي ٻن بدلجندڙ ۾ آهن:
(i), (vi)
همزاد مساواتون آهن:
(iii), (iv)

2. (i) $x + y = 50$ (ii) $6x = 3y$
(iii) $2x + 5 = 25$ (iv) $3x - 6y = 45$
(v) $x = \frac{2y}{3}$ (vi) (6, 0)

مشق 6.5

1. (i) $\{(3,4)\}$ (ii) $\{(\frac{7}{8}, 1\frac{3}{8})\}$
(iii) $\{(2, 3)\}$ (iv) $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})\}$
(v) $\{(1\frac{1}{2}, 5)\}$ (vi) $\{(-2\frac{3}{5}, 6\frac{2}{5})\}$

2. (i) $\{(5, 2)\}$ (ii) $\{(-1, 2)\}$
(iii) $\{(-2, -3)\}$ (iv) $\{(-1, -2)\}$
(v) $\{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}$ (vi) $\{(5, 2)\}$

3. (i) $\{(1, 1)\}$ (ii) $\{(-5, -1)\}$
(iii) $\{(4\frac{2}{5}, 1\frac{1}{5})\}$ (iv) $\{(6\ 1)\}$
(v) $\{\ \}$ (vi) $\{(1, -1)\}$

مشق 6.6

1. ٽماٽن جو اگهه = 150 رپيا في ڪلوگرام
2. ٻالن جو تعداد = 4
3. ڊيگهه = 100 ميٽر ۽ ويڪر = 50 ميٽر
4. ڇوڪرن جو تعداد = 300
5. مزدور جي ماهوار ڪمائي = 30,000 رپيا

مشق 6.7

1. (i) $y = 0$ (ii) $27y - 5 = 0$
(iii) $5y - 1 = 0$ (iv) $-ay + b = 0$
(v) $7y - 6 = 0$ (vi) $17y - 16 = 0$

2. (i) $S = V_f t - \frac{1}{2}at^2$ (ii) $S = V_f t - \frac{3}{2}gt^2$
(iii) $2V_f t - gt^2 = 2S$

3. (i) $4a^2 = 4b^2 + 4b + 5$
(ii) $4a^2 - 9b^2 + 4 = 0$
(iii) $q^4 = p^4 - 4p^2$
(iv) $p^4 - q^4 = 2$
(v) $3y^2 + 8y - 7 = 0$
(vi) $m^2 - n^2 - 4 = 0$

جائزي جي مشق 6

1. (i) (b) (ii) (d) (iii) (c) (iv) (c)
(v) (b)

2. $x - \frac{1}{x} = 5$ (i) 27 (ii) 727
(iii) 140 (iv) 19602
$x + \frac{1}{x} = 3$ (i) 7 (ii) 47
(iii) 18 (iv) 322

3. (i) 10609 (ii) 9409 (iii) 9991

4. (i) $5(x + 2y + 3z)$ (ii) $(x + 7)^2$
(iii) $(12x + 11y)(12x - 11y)$
(iv) $(5x - y)^2$
(v) $(a + 2b + 3y)(a + 2b - 3y)$
(vi) $(1 + \frac{1}{x^2})(1+\frac{1}{x})(1-\frac{1}{x})$

5. (i) $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$
(ii) $27x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 64y^3$
(iii) $x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$
(iv) $x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$

6. (i) 24389 (ii) 29791

7. (a) (i) $\{(4, 2)\}$ (ii) $\{(\frac{22}{9}, \frac{-7}{9})\}$

جواب

(b) (i) $\{(1, 2)\}$ (ii) $\{(5, 4)\}$

(c) (i) $\{(2, 1)$ (ii) $\{(11, 1)\}$

6. 32 چورس سينٽي ميٽر

7. (i) 10609 (ii) 9409 (iii) 9991

8. (i) 24389 (ii) 29791

9. (i) $21k^2 + 4k - 5 = 0$ (ii) $m^2 + 2 = n^2$

مشق 7.1

1. (a) 120° (b) 90° (c) 120° (d) 80°

2. $m\angle 1 = 65^\circ = m\angle 5 = m\angle 7$;
$m\angle 2 = m\angle 4 = m\angle 6 = m\angle 8 = 115^\circ$;

3. $m\angle APE = 130^\circ = m\angle BPQ =$
$m\angle DQF = m\angle PQC$;
$m\angle APQ = 50^\circ = m\angle CQF = m\angle BPE$

4. (i) $\angle AGE$ (ii) $\angle BGH$ (iii) $\angle DHF$
(iv) (a) $\angle AGH$ (b) $\angle GHD$ (c) $\angle CHF$

5. (i) $x = 11^\circ$ (ii) $x = 5^\circ$, $y = 25^\circ$, $z = 130^\circ$
(iii) $y = 135^\circ$, $z = 105^\circ$
(iv) $x = 80^\circ$, $y = 100^\circ$, $z = 80^\circ$

مشق 7.2

1. صحيح (i) صحيح (ii) صحيح (iii) صحيح (iv) صحيح (v)
صحيح (vi) صحيح (vii) صحيح (viii) صحيح (ix) صحيح (x)

2. L = 6 سينٽي ميٽر, B= 3 سينٽي ميٽر

3. $65^\circ, 115^\circ, 65^\circ, 115^\circ$ ڪنڊون آهن:

4. $m\angle W = 60^\circ = m\angle Y$
$m\angle X = 120^\circ = m\angle Z$

5. 6 : 3, 6. 2:1

7. ٽِڪو P گول جي اندر واقع آهي. ٽِڪو Q گول جي ٻاهر آهي. ٽِڪو R گول تي آهي.

8. سڀ بيان غلط آهن
تنهنڪري شاگردن کي گهرجي تہ هرهڪ بيان کي تعريف جي مدد سان درست ڪن.

جائزي جي مشق 7

1. (i) هڪ سطح واريون (ii) پور وچوٽ
(iii) وچين ٽِڪي، ٽئين
(iv) (b) متبادل (c) سپليمينٽري

ڪپيندڙ ليڪ ,ساڳي پاسي
(v) (a) متبادل ,نسبتي
(b) سپليمينٽري ,پاسي ,ڪنڊن
(vi) ٽن ڪان ,ٽي ,مٿاچري
(vii) يڪسان ,پور وچوٽ
(viii) پور وچوٽ پاسو چوڪنبو (ix) اندريون
(x) پور پاسو (xi) گول
(xii) زهر

2. $m\angle Q = 110^\circ = m\angle S$, $m\angle R = 70^\circ$,
$m\overline{AD} = 4.5 = m\overline{CD} = 6cm =$
$mAD = mBC = m\angle A = m\angle C = 70^\circ =$
$m\angle B = m\angle D = 110^\circ$. نہ $\therefore m\angle A \neq \frac{3}{2} m\angle P$

3. $m\angle A = 65^\circ = m\angle BCD$,
$m\angle B = 115^\circ = m\angle BCF = m\angle ADC$.
(i) $(m\angle A = m\angle EDC = 70^\circ)$; $(m\angle ADC = \angle BCF = 110^\circ)$
(ii) $(m\angle EDC = m\angle BCD = 65^\circ)$; $(m\angle B = m\angle BCF = 110^\circ)$
(iii) $(\angle A, \angle B)$; $(\angle A, \angle ADC)$;
$(\angle ADC, \angle BCD)$; $(\angle ADC, \angle CDE)$;
$(\angle B, \angle BCD)$ ۽ $(\angle BCD, \angle BCF)$

6. (i) 8 س.م (ii) 2.5 س.م, 3.5 س.م, 5 س.م
(iii) (a) هڪ (b) هڪ

جائزي جي مشق 8

(i) (b) (ii) (b) (iii) (a) (iv) (d)
(v) (c) (vi) (c) (vii) (a) (viii) (b)

مشق 9.2

1. (i) 15 س.م (ii) 20 س.م (iii) 24 س.م
(iv) 7.5 س.م (v) 6 س.م (vi) 4.8 س.م
(vii) 3.5 س.م (viii) 7.2 س.م

2. (ii) ۽ (v)

3. (i) 5 س.م (ii) 6 س.م (iii) 7 س.م
(iv) 8 س.م (v) 1.1 س.م (vi) 2.2 س.م
(vii) 1.5 س.م (viii) 5.5 س.م (ix) 7.5 س.م

4. 3.9 ميٽر يا 3 ميٽر 90 س.م 5. 16 ميٽر

6. (i) 10 س.م (ii) 55 س.م
(iii) 7 cm (iv) 8 cm

7. 300 ميٽر 8. 3072 چورس ميٽر

جواب

9. شڪل (i) $x = 24$ س.م, $y = 40$ س.م
شڪل (ii) $x = 15$ س.م, $y = 20$ س.م
شڪل (iii) $x = 2\sqrt{337}$ س.م, $y=40$ س.م

مشق 9.3

1. (i) 124.89 چورس س.م (ii) 84 چورس س.م
(iii) 24 چورس س.م (iv) 176 چورس س.م
(v) 104.88 چورس س.م
2. (i) 48 چورس س.م (ii) 71.5 چورس س.م
(iii) 40.24 (iv) 265.33 چورس س.م
3. $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ چورس س.م
4. (i) $c = 12$ س.م, ▲ABD = 74.8 چورس س.م
(ii) $f = 3.9$ س.م, ▲DEF = 6.73 چورس س.م
(iii) $n = 6.4$ س.م, ▲LMN = 19.04 چورس س.م
(iv) $r = 5$ س.م, ▲PQR = 9.35 چورس س.م

مشق 9.4

1. 61.68 چورس س.م 2. 12 چورس س.م
3. 199.35 چورس س.م 4. 6549.64 چورس ميٽر
5. 114 چورس س.م

مشق 9.5

1. (i) 15,400 cm^2 (ii) 39424 cm^2
(iii) 2.21 cm^2 (iv) 4.98 cm^2
(v) 12.07 cm^2
2. (i) 7 cm (ii) 14 cm
(iii) 84 cm (iv) 8.8 cm
(v) 3.5 cm
3. (i) 38808 cm^3 (ii) 493005 cm^3
(iii) 91.9 cm^3 (iv) 1913090.667 cm^3
(v) 179.6 cm^3
4. (i) 1437 لٽر (ii) 4851 لٽر
(iii) 91989 لٽر (iv) 22458 لٽر
(v) 61625 لٽر
5. (i) 0.01149667 m^3 يا 11.49 لٽر
(ii) 0.09198933 m^3, يا 91.98 لٽر

(iii) 15.293 m^3, 15293 (تقريباً)
(iv) 26.6197 m^3, 26619.7 لٽر (تقريباً)
(v) 4.851 m^3, 4851 لٽر (تقريباً)
6. (a) ايراضي 4 دفعا وڌندي
(b) مقدار 8 دفعا وڌندو
7. (a) 1:9 (b) 1:27
8. (i) 2009947cm3 (ii) 479646 گولا
9. 2053.3 س.م يا 20.533 ميٽر
10. 7241.142 ڪعب س.م

مشق 9.6

1. (i) $s = 35$ cm, پايي جي ايراضي = 1386 cm^2,
گولائي واري مٿاڇري جي اراضي = 220 cm^2
مٿاڇري جي ڪُل ايراضي (T.S.A) = 3696 cm^2
(ii) $r = 42$ cm, B.A = 5544 cm^2,
C.S.A = 9240 cm^2, C.S.A = 14784 cm^2
(iii) $h = 48$ cm, B.A 4073.14 cm^2,
(C.S.A) 6788.57 cm^2,
T.S.A = 10861.71 cm^2
(iv) $r = 54.258$ cm, B.A = 9252.35 cm^2,
C.S.A = 17052.51429 cm^2,
T.S.A = 26304.86 cm^2
2. (i) $s = 7.615$ cm, $V = 22$ cm^3
(ii) $s = 6.946$ cm, $V = 22$ cm^3
(iii) $r = 21$ cm, $V = 616$ cm^3
(iv) $r = 10.5$ cm, $s = 17.5$ cm
(v) $h = 104.810$ cm, $V = 691.746$ cm^3

مشق 9.7

1. 1436 cm^3 **2.** 396 cm^3
3. 137.9 m^3 **4.** 26400 kg
5. 66 m^3 يا 66000 لٽر **6.** 465.69 m^3
7. $\frac{3}{4}$ cm

جائزي جي مشق 9

1. (iii) **2.** (ii) **3.** (ii) **4.** (iii)
5. (iv) **6.** (iv) **7.** (i) **8.** (i)
9. (ii) **10.** (iv)

جواب

مشق 10.1

1. (a) منطقي دليل سان, سڌيان, شاخ
(b) استخراجي, استقرائي
(c) استقرائي (d) استخراجي
(e) بنا ثابتي مڃيو وڃي ٿو
(f) اصول موضوع, اصول متعارف
(g) اصول موضوع
(h) وصف وارا اصطلاح, بنا وصف وارا اصطلاح
سڌيان, بنيادي مفروضا

2. (a) غلط (b) صحيح (c) غلط
(d) صحيح (e) صحيح (f) صحيح

مشق 10.2

1. (i) $\angle AOC$ (ii) $\angle POC$ (iii) 40°, 130°
3. (a) 140°, 40° (b) 135°, 45°, 135°
6. $\angle AOE$, $\angle BOD$; $\angle BOD$, $\angle COE$;
$\angle DOC$, $\angle COE$; $\angle DOC$, $\angle AOE$

مشق 10.3

6. (i) (a) $\angle c$, $\angle d$; $\angle g$, $\angle h$
(b) $\angle a$, $\angle b$; $\angle e$, $\angle f$; $\angle f$, $\angle a$
(c) $\angle a$, $\angle e$; $\angle b$, $\angle f$
(ii) (a) $\angle c$, $\angle e$; $\angle d$, $\angle f$; $\angle c$, $\angle d$;
$\angle e$, $\angle f$
(b) $\angle a$, $\angle b$; $\angle g$, $\angle h$;
(c) $\angle c$, $\angle f$; $\angle d$, $\angle e$
(iii) (a) $\angle c$, $\angle d$
(b) $\angle e$, $\angle h$; $\angle h$, $\angle g$; $\angle g$, $\angle f$;
$\angle f$, $\angle e$
(c) $\angle e$, $\angle g$; $\angle h$, $\angle f$

مشق 10.5

1. (a) 90° (b) 120° [180 – (135–75)]
(c) 55° (d) 140° [180–115+(180–105)]
(e) 65°

جائزي جي مشق 10

8. (a) (i) غلط (ii) صحيح (iii) غلط (iv) غلط (v) صحيح
(b) (i) متاچرو (ii) ليڪ
(iii) عمود
(iv) متبادل ۽ نسبتي ڪندون
(v) جوڙ
9. (i) ليڪون: AB,CD; AB,FG; FG,CD;
EF,GC
(ii) (a) 22 (b) 75+50=125 (c) 20

مشق 11.1

1. $\text{Sinm}\angle P = \text{Cos m}\angle Q = \frac{3}{5}$,

$\text{Cosm}\angle P = \text{Sin m}\angle Q = \frac{4}{5}$,

$\text{Tanm}\angle P = \text{Cot m}\angle Q = \frac{3}{4}$,

$\text{Cotm}\angle P = \text{Tan m}\angle Q = \frac{4}{3}$,

$\text{Cosecm}\angle Q = \text{Sec m}\angle Q = \frac{5}{3}$,

$\text{Cosecm}\angle Q = \text{Sec m}\angle P = \frac{5}{4}$

2. (i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{4}{3}$ (iv) $\frac{5}{3}$
(v) $\frac{5}{3}$ (vi) $\frac{4}{3}$ (vii) $\frac{3}{5}$ (viii) $\frac{3}{5}$
(ix) $\frac{3}{4}$ (x) $\frac{5}{4}$ (xi) $\frac{5}{4}$ (xii) $\frac{3}{4}$;
$\text{Cos } x = \text{Sin } y$, $\text{Sec } x = \text{Cosec } y$,
$\text{Tan } x = \text{Cot } y$, $\text{Cot } x = \text{Tan } y$,
$\text{Cosec } x = \text{Sec } y$

مشق 11.2

1. (i) 30° (ii) 45° (iii) 60°

جواب

2. (i) 60° (ii) 45° (iii) 30°
3. (i) 30° (ii) 45° (iii) 60°
4. (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\frac{13}{3}$ (iii) $\frac{19\sqrt{3}}{12}$
   (iv) 0 (v) $-\frac{1}{6}$ (vi) $3\frac{1}{3}$ (vii) 0
5. (i) 60° (ii) 30° (iii) 45°
   (iv) 20° (v) 50° (vi) 35°
   (vii) 80° (viii) 25° (ix) 55°
6. (i) 55° (ii) 25° (iii) 70°
   (iv) 37° (v) 34° (vi) 15°

مشق 11.3

A. 1. $m\angle B=60^\circ$, $m\overline{AB}=6$, $m\overline{AC}=3\sqrt{3}$
2. $m\angle F=30^\circ$, $m\overline{EF}=4\sqrt{3}$, $m\overline{DF}=8$
3. $m\angle L=45^\circ$, $m\overline{LN}=8\sqrt{2}$, $m\overline{MN}=8$ cm

B. 1. $m\angle B=60^\circ$, $m\overline{BC}=5$ cm,
$m\overline{AC}=5\sqrt{3}$ cm
2. $m\angle D=30^\circ$, $m\overline{BC}=7$ cm,
$m\overline{DC}=7\sqrt{3}$ cm
3. $m\angle G=45^\circ$, $m\overline{GC}=8$ cm,
$m\overline{CD}=8$ cm
4. $m\angle E=60^\circ$, $m\overline{EC}=4.5$ cm,
$m\overline{CF}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$ cm
5. $m\angle M=30^\circ$, $m\overline{ON}=8$ cm,
$m\overline{OM}=8\sqrt{3}$ cm
6. $m\angle R=30^\circ$, $m\overline{PQ}=3$ cm,
$m\overline{PR}=6$ cm

C. 1. $m\angle L=30^\circ$, $m\angle N=60^\circ$, m= 8 cm
2. $m\angle P=60^\circ$, $m\angle R=30^\circ$, q=12 cm
3. $m\angle X=45^\circ$, $m\angle Z=45^\circ$, $y=7\sqrt{2}$ cm

D. 1. $m\angle A=30^\circ$, $m\angle B=60^\circ$, $b=5\sqrt{3}$ cm
2. $m\angle E=30^\circ$, $m\angle D=60^\circ$, e = 7 cm
3. $m\angle M=45^\circ$, $m\angle N=45^\circ$, n = 8 cm

مشق 11.4

1. 6 m **2.** 200 m **3.** 294 m (تقريباً)
4. 11.55m (تقريباً) **5.** 50 m

جائزي جي مشق 11

2. 9 m **3.** 120 m
4. (i) Sec 60° (ii) Tan 30° (iii) Sin 45°
   (iv) Cosec 60° (v) Cot $m\angle C$
   (vi) $(90^\circ - m\angle A)$ (vii) $m\angle A$ (viii) 60°
   (ix) 80° (x) θ
5. (i) b (ii) c (iii) c (iv) a
   (v) b (vi) c (vii) b
6. (i) غلط (ii) غلط (iii) غلط (iv) صحيح
   (v) صحيح (vi) غلط (vii) صحيح (viii) غلط
   (ix) غلط (x) غلط

جائزي جي مشق 12

1.

جماعت جو نمبر شمار	تعدد	جماعتي وقفو يا جماعتي حدون	جماعتي حقيقي حدون	مٿيون جماعتي حدون	جماعت جي ويڪر
1st	03	24-28	23.5-28.5	28.5	5
2nd	16	29-33	28.5-33.5	33.5	5
3rd	12	34-38	33.5-38.5	38.5	5
4th	23	39-43	38.5-43.5	43.5	5
5th	16	44-48	43.5-48.5	48.5	5

جواب

2. (i)

حاصل ڪيل مارڪون	0	1	2	3	4	5	6
شاگردن جو تعداد	4	2	5	9	5	4	1

(ii) وسعت = 6 (iii) 3 (iv) 6

3. (i) تعدد جدول

ڪلاڪ	1	2	3	4	5	6
ميمبرن جو تعداد	5	8	7	4	2	1

(ii) 27 (iii) 6 ڪلاڪ

4. (i) 1 (ii) 6 (iii) 5 مان هڪ ماڻهو (iv) 8 ماڻهن گذاريا 2 ڪلاڪ

مشق 12.1

1. تعددي جدول

وزن (ڪلوگرام)	29-32	33-36	37-40	41-44	45-47
اسڪائوٽن جو تعداد	4	6	8	8	4

سوال (1) کان (6) تائين هسٽوگرام يعني ڪالمي نقشو شاگرد پاڻ ٺاهين.

مشق 12.2

1 A. (i) 4 (ii) 8 (iii) 14 (iv) 22 (v) 4.95

1B. (i) 11 (ii) 5 (iii) 12 (iv) 141

2. (i) $\frac{410}{7}$ (ii) $\frac{134}{7}$ (iii) $\frac{50}{6}$ (iv) $\frac{170}{6}$

3. (i) 11 (ii) 25 (iii) 12 (iv) 49 (v) 79

4 A. (i) 14 (ii) 24 (iii) 29 (iv) 26 (v) 71 (vi) نه.

4 B. (i) 8 (ii) 8 (iii) 12

5. 6 **6.** 40

7. (i) 5 or > 5 (ii) 5 or < 5 **8.** (iv) Except 1, 2 and 11

مشق 12.3

1. 40 رپيا في ڪلوگرام 2. حسابي سراسري

2. $\frac{135}{\text{2 دفعا}}$ $\frac{136}{\text{2 دفعا}}$ $\frac{138}{\text{2 دفعا}}$ $\frac{142}{\text{2 دفعا}}$ $\frac{140}{\text{3 دفعا}}$

حسابي سراسري = 138.35, مئيان = 138, ڪثرتي سراسري = 140, (نه)

3. حسابي سراسري= 1.75, مئيان = 2, ڪثرتي سراسري 2 ۽ 3, (نه)

4. سائنس ۾ حاصل ڪيل مارڪن جي قدري سراسري = $\frac{2090}{45} = \frac{418}{9}$

رياضيءَ ۾ حاصل ڪيل مارڪن جي قدري سراسري = $\frac{434}{9} = \frac{2170}{15}$

سائنس جي ڪم ۾ رياضيءَ جي ڪم کان وڌيڪ بهتري آهي.

5. سراسري ٻاتي في خاندان = 3.76 ٻاتي في خاندان

جائزي جي مشق 12

2. (i) 20 خاندان (ii) 5 خاندان (iii) 20 – 25 ليٽر

ڊِسٽي (INDEX)